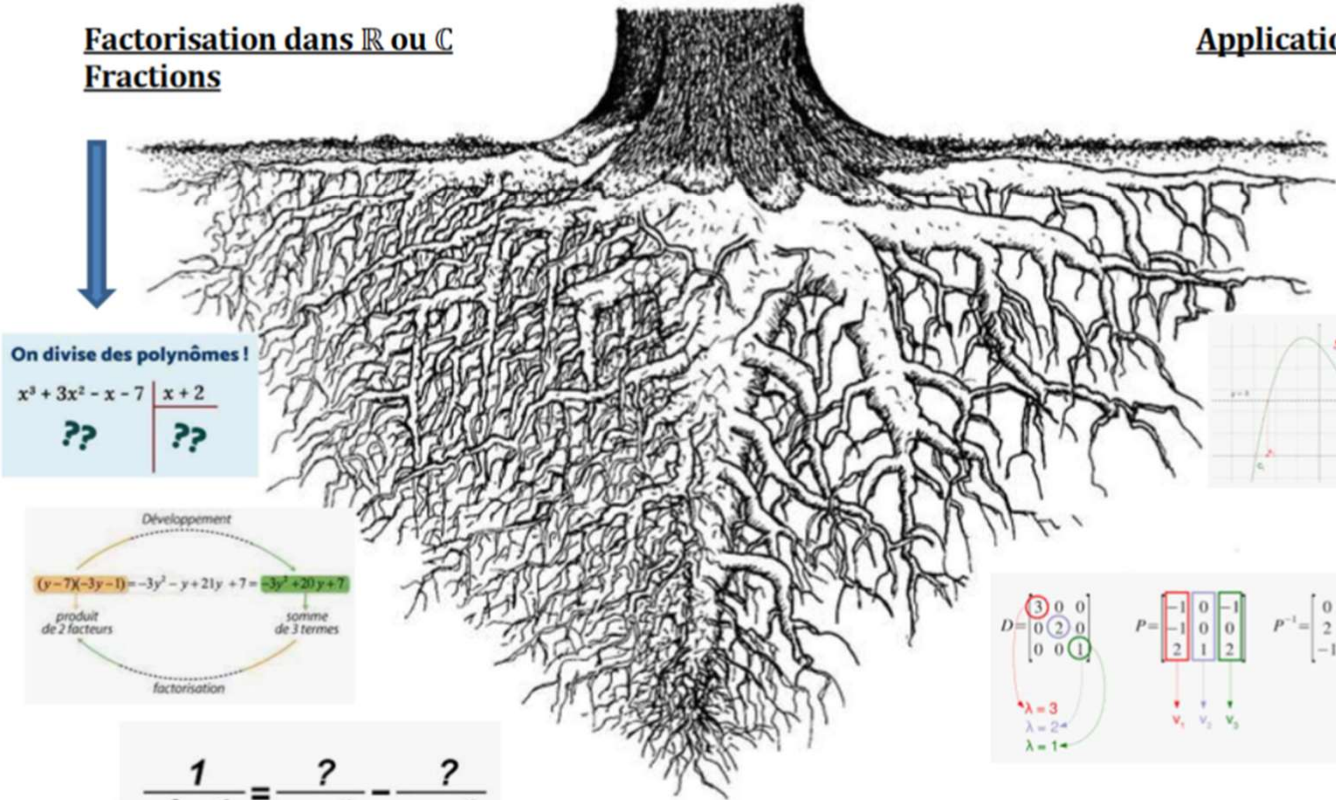
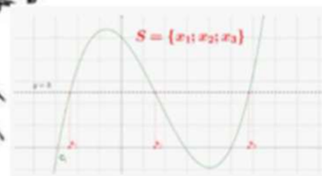
Chapitre 5 : Compléments sur les nombres complexes, Polynômes,

Factorisation dans ℝ ou ℂ
Fractions

Applications

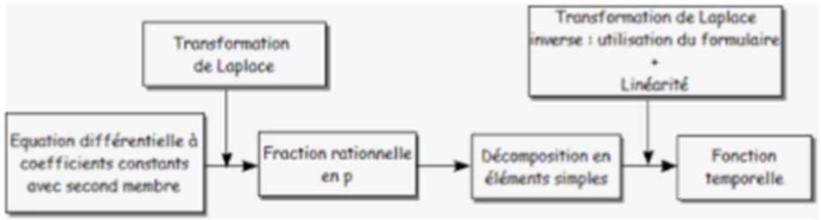


$$\frac{1}{x^2-1}=\frac{?}{x-1}-\frac{?}{x+1}$$



$$D=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}\qquad P=\begin{bmatrix}-1&0&-1\\-1&0&0\\2&1&2\end{bmatrix}\qquad P^{-1}=\begin{bmatrix}0&-1&0\\2&0&1\\-1&1&0\end{bmatrix}$$

$\lambda = 3$ $\lambda = 2$ $\lambda = 1$ v_1 v_2 v_3



Partie A : Complément sur les nombres complexes

Page 5 chapitre 5

I. Rappels

$$\underline{Z} = x + j.y \text{ où } x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R} \text{ et } j^2 = -1$$

x est la partie réelle de $\underline{Z}$
On note : $x = \mathcal{R}e(\underline{Z})$

y est la partie imaginaire de $\underline{Z}$
On note : $y = \mathrm{Im}(\underline{Z})$

Le module de $\underline{Z}$ est noté Z ou encore $\left|\underline{Z}\right|$, c'est la distance de O à M, donc $\left|\underline{Z}\right| = Z = \sqrt{x^2 + y^2}$

L'argument de $\underline{Z}$ est noté $\arg(\underline{Z})$, c'est la mesure en radians de l'angle de vecteur orienté $(\vec{OI}, \vec{OM})$, déterminée à $2k\pi$ près $(k \in \mathbb{Z})$. On note $\theta = \arg(\underline{Z})$, on a alors :

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{x}{Z} = \dfrac{\text{partie réelle de } \underline{Z}}{\text{module de } \underline{Z}} = \dfrac{\mathrm{Re}(\underline{Z})}{Z} \\[2ex] \sin(\theta) = \dfrac{y}{Z} = \dfrac{\text{partie imaginaire de } \underline{Z}}{\text{module de } \underline{Z}} = \dfrac{\mathrm{Im}(\underline{Z})}{Z} \end{cases} \quad \text{si } Z \neq 0.$$

Page 6 chapitre 5

Détermination d'un argument à l'aide de la fonction arctangente

Soit $\underline{Z} = a + j.b$ un nombre complexe non nul, tel que $a \neq 0$.

$$\arg(\underline{Z}) = \begin{cases} \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{b}{a}\right) \text{ si } a > 0 \\[2ex] \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{b}{a}\right) \pm \pi \text{ si } a < 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \arg(j.b) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} \text{ si } b > 0 \\[2ex] -\dfrac{\pi}{2} \text{ si } b < 0 \end{cases}$$

Partie A : Complément sur les nombres complexes

Page 5 chapitre 5

Le plan complexe est muni d'un RON $(O\,;\overrightarrow{OI},\ \overrightarrow{OJ})$ orienté dans le sens direct.

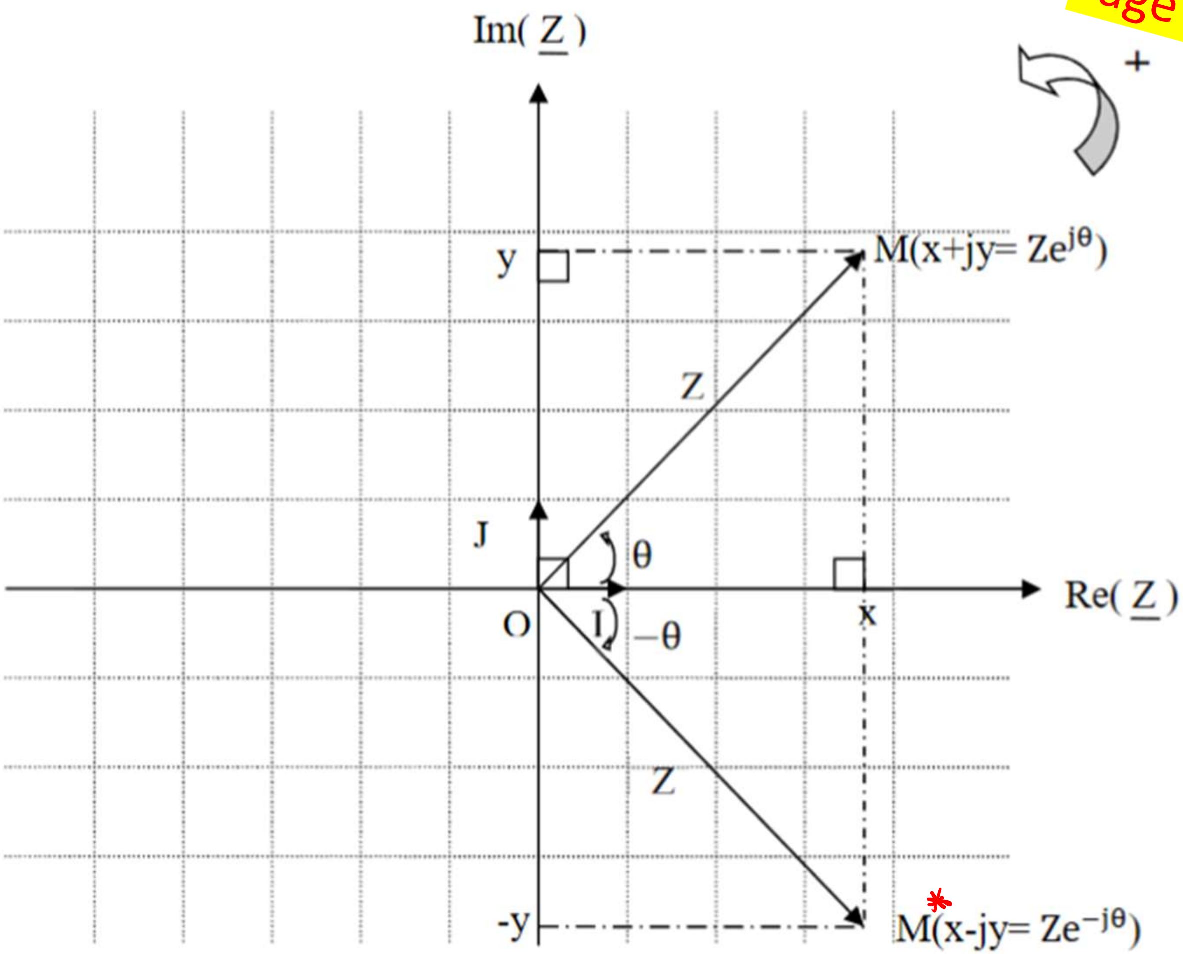
$\underline{Z} = x + j.y$ où $x, y \in \mathbb{R}$

Le point M(x,y) est appelé image de $\underline{Z}$.

$\underline{Z}$ est appelé l'affixe du point M.

$\underline{Z}$ est aussi appelé l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OM}$.

$\overrightarrow{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j}$



Page 5 chapitre 5

<u>Forme algébrique</u> de $\underline{Z}$: (coordonnées cartésiennes)

$\underline{Z} = x + j.y$

<u>Forme trigonométrique et forme polaire</u> de $\underline{Z}$:

$\underline{Z} = Z.\cos(\theta) + j.Z.\sin(\theta) = Z.(\cos(\theta) + j.\sin(\theta))$ **aussi noté :** $\underline{Z} = [Z , \theta]$

<u>Forme exponentielle, géométrique</u> : Euler a noté $e^{j\theta} = \cos(\theta) + j.\sin(\theta)$,

$\underline{Z} = Z.e^{j.\theta}$

<u>Nombre complexe conjugué</u> de $\underline{Z}$: Soit $\underline{Z} = x + j.y$, on appelle conjugué de $\underline{Z}$, et on note $\underline{Z}^*$, le nombre complexe défini par : $\underline{Z}^* = x - j.y$. **Si** $\underline{Z} = Z.e^{j.\theta}$, **alors** $\underline{Z}^* = Z.\, e^{-j\theta}$

Produit, quotient et puissance

Page 6 chapitre 5

$\arg(\underline{Z}.\underline{Z}') = \arg(\underline{Z}) + \arg(\underline{Z}') + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, et $|\underline{Z}.\underline{Z}'| = |\underline{Z}|.|\underline{Z}'|$

$[Z, \theta] \times [Z', \theta'] = [ZZ', \theta + \theta']$

Le module d'un produit de nombres complexes est le produit des modules, l'argument d'un produit de nombres complexes est la somme des arguments (à 2kπ près)

$\arg\left(\dfrac{\underline{Z}}{\underline{Z}'}\right) = \arg(\underline{Z}) - \arg(\underline{Z}') + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, et $\left|\dfrac{\underline{Z}}{\underline{Z}'}\right| = \dfrac{|\underline{Z}|}{|\underline{Z}'|}$

$\dfrac{[Z, \theta]}{[Z', \theta']} = \left[\dfrac{Z}{Z'}, \theta - \theta'\right]$

Le module d'un quotient de nombres complexes est le quotient des modules, l'argument d'un quotient de nombres complexes est la soustraction des arguments (à 2kπ près)

Page 6 chapitre 5

$$\arg\left(\underline{Z}^{n}\right)=n\times\arg(\underline{Z})+2k\pi\ ,\quad k\in\mathbb{Z}\ ,\text{ et }\left|\underline{Z}^{n}\right|=\left|\underline{Z}\right|^{n}$$

$$[Z\,,\theta]^{n}=[\,Z^{n}\,,n.\theta]$$

Le module de $\underline{Z}^n$ est le module de $\underline{Z}$ à la puissance n, l'argument de $\underline{Z}^n$ est n fois l'argument de $\underline{Z}$ (à $2k\pi$ près)

Notes

Page 7 chapitre 5

① $\underline{z} = [2 ; 30°] = \quad = \quad = $

Ecriture polaire ↑ expo ou Euler ↑ trigo ↑ algébrique

② $Re([3 ; 90°]) =$

$Im([5 ; 60°]) =$

③ $\underline{z} = \dfrac{[2 ; 30°]}{[2 ; 30°]^*} =$

④ $\underline{z} = [3 ; 50°] \times [2 ; -20°] =$

$Re(\underline{z}) =$ $\quad Im(\underline{z}) =$

⑤ $\underline{z} = [3 ; 20°]^9 =$

⑥ $[z ; \theta] \times [z ; \theta]^* =$

Page 11 chapitre 5

L'écriture d'Euler : $e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$ ⟵ écriture d'Euler

$$e^{-j\theta} = \cos\theta - j\sin\theta$$

$$e^{j\theta} + e^{-j\theta} = 2\cos\theta \iff \cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

$$e^{j\theta} - e^{-j\theta} = 2j\sin\theta \iff \sin\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

Formuls d'Euler

....

Page 8 chapitre 5

....

....

....

$$\underline{Z}+\underline{Z}^* = e^{j\theta} + e^{-j\theta} = 2\mathrm{Re}\left(e^{j\theta}\right) = 2\cos\theta \ ; \ \underline{Z}-\underline{Z}^* = e^{j\theta} - e^{-j\theta} = 2j\mathrm{Im}\left(e^{j\theta}\right) = 2j\sin\theta$$

$$\boxed{\textbf{Formules d'Euler : } \cos\theta = \frac{e^{j\theta}+e^{-j\theta}}{2} \ \textbf{ et } \ \sin\theta = \frac{e^{j\theta}-e^{-j\theta}}{2j}}$$

....

....

....

....

Page 11 chapitre 5

Compléter :

1) $e^{jx}+e^{-jx}=2\cos x$

2) $e^{jx}-e^{-jx}=2j\sin x$

$x=3\theta$

$x=5\theta$

3) $e^{3j\theta}+e^{-3j\theta}=2\cos(3\theta)$

4) $e^{5j\theta}-e^{-5j\theta}=2j\sin(5\theta)$

5) $2e^{j\theta}+2e^{-j\theta}=2\left(e^{j\theta}+e^{-j\theta}\right)=4\cos\theta$

6) $e^{-j\theta}-e^{j\theta}=-\left(e^{j\theta}-e^{-j\theta}\right)=-2j\sin\theta$

7) $\cos(4\overset{\text{têta}}{\theta})=\dfrac{e^{4j\theta}+e^{-4j\theta}}{2}$

8) $3\sin(7\theta)=3\times\dfrac{e^{7j\theta}-e^{-7j\theta}}{2j}$

9) $e^{j\theta}\times e^{-j\theta}=e^{j\theta-j\theta}=e^{0}=1$

10) $e^{-3j\theta}\times e^{5j\theta}=\boxed{e^{2j\theta}}$

11) $7e^{j\theta}-7e^{-j\theta}=7\left(e^{j\theta}-e^{-j\theta}\right)=14j\sin\theta$

12) $-5e^{3j\theta}-5e^{-3j\theta}=-5\left(e^{3j\theta}+e^{-3j\theta}\right)$

$=-10\cos 3\theta$

$e^{a}\times e^{b}=e^{a+b}$

$e^{7}+e^{-7}$

$5\left(-e^{3j\theta}-e^{-3j\theta}\right)$

4) Applications

Page 8 chapitre 5

- En GEII :

La puissance instantanée dissipée dans un dipôle linéaire, qui est soumis à une tension $v(t) = V_{eff}\sqrt{2}\cos\omega t$ et parcouru par un courant $i(t) = I_{eff}\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi)$ est définie par la relation : $p(t) = v(t) \cdot i(t)$.

En utilisant les relations d'Euler, montrer que cette puissance instantanée est la somme d'un terme constant et d'un terme sinusoïdal de pulsation double.

$$p(t) = v(t) \cdot i(t) = V_{eff}\sqrt{2}\,\cos\omega t \times I_{eff}\sqrt{2}\,\cos(\omega t+\varphi) = 2V_{eff}\,I_{eff}\underbrace{\cos(\omega t)\cos(\omega t+\varphi)}_{X}$$

$$X = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} \times \frac{e^{j(\omega t+\varphi)} + e^{-j(\omega t+\varphi)}}{2}$$

$$= \frac{1}{4}\left(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}\right)\left(e^{j\omega t+j\varphi} + e^{-j\omega t-j\varphi}\right) = \frac{1}{4}\left(\overbrace{e^{2j\omega t+j\varphi}}^{e^{j(2\omega t+\varphi)}} + \underbrace{e^{-j\varphi} + e^{j\varphi}}_{2\cos\varphi} + \overbrace{e^{-2j\omega t-j\varphi}}^{e^{-j(2\omega t+\varphi)}}\right)$$

$$X = \frac{1}{4}\left(2\cos(2\omega t+\varphi) + 2\cos\varphi\right) = \frac{1}{2}\left(\cos(2\omega t+\varphi) + \cos\varphi\right)$$

Page 8&9 chapitre 5

$$p(t) = \underbrace{V_{eff}\, I_{eff} \cos\varphi}_{\text{Constante}} + \underbrace{V_{eff}\, I_{eff} \cos(2\omega t + \varphi)}_{\text{sinusoïde de pulsation double}}$$

Remarque : $\cos a . \cos b = \qquad + \qquad$??

Autre méthode

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2 \cos a \cos b \iff \boxed{\cos a \cos b = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right)}$$

$$X = \cos \underbrace{\omega t}_{a} \times \cos(\underbrace{\omega t + \varphi}_{b}) = \frac{1}{2}\left(\cos(\omega t + \omega t + \varphi) + \cos(\omega t - \omega t - \varphi)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos(2\omega t + \varphi) + \underbrace{\cos(-\varphi)}_{\text{paire}}\right)$$

$$X = \frac{1}{2} \cos(2\omega t + \varphi) + \frac{1}{2} \cos\varphi$$

- <u>Linéarisation et calcul intégral</u>

Page 9 chapitre 6

En appliquant les formules d'Euler, linéariser $\cos^2(t)$ puis calculer l'intégrale :

$I = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2(t)\, dt$

$$\cos^2 t = \left(\frac{e^{jt} + e^{-jt}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(e^{jt} + e^{-jt}\right)^2$$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$$= \frac{1}{4}\left(e^{2jt} + e^{-2jt} + 2\underbrace{e^{jt}e^{-jt}}_{e^0}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(2\cos(2t) + 2\right)$$

$$\cos^2 t = \frac{1}{2}\left(\cos(2t) + 1\right)$$

$$I = \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \underbrace{\cos^2 t}_{\text{paire}}\, dt = 2\times\int_0^{\pi/3} \cos^2 t\, dt = 2\int_0^{\pi/3} \frac{1}{2}\left(\cos(2t) + 1\right) dt = \int_0^{\pi/3}\left(\cos(2t) + 1\right) dt$$

$$= \left[\frac{\sin(2t)}{2} + t\right]_0^{\pi/3} = \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)}{2} + \frac{\pi}{3} - \left(\frac{\sin 0}{2} + 0\right) = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{3}.$$

Notes

Page 30 chapitre 5

Le triangle de Pascal.

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1

1

1

1

$(a+b)^1 = 1.a + 1.b$

$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$

$(a+b)^3 = 1a^3b^0 + 3a^2b^1 + 3a^1b^2 + 1b^3$

$(a+b)^4 = 1a^4b^0 + 4a^3b^1 + 6a^2b^2 + 4a^1b^3 + b^4$

$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b^1 + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$

$(a-b)^4 = (a+(-b))^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$

signes alternés.

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

$$(e^{j\theta})^* = e^{-j\theta} = \cos\theta - j\sin\theta$$

$$e^{j\theta} + e^{-j\theta} = 2\cos\theta$$

$$e^{j\theta} - e^{-j\theta} = 2j\sin\theta$$

$$e^{3jx} - e^{-3jx} = 2j\sin(3x)$$

$$-e^{4jx} - e^{-4jx} = -(e^{4jx} + e^{-4jx}) = -2\cos(4x)$$

$$e^{3jx} \cdot e^{-5jx} = e^{-2jx}$$

$$5e^{3j\theta} - 5e^{-3j\theta} = 5(e^{3j\theta} - e^{-3j\theta}) = 5 \times 2j\sin(3\theta)$$

$$= 10j\sin(3\theta)$$

$$\cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} \qquad \sin(3x) = \frac{e^{3jx} - e^{-3jx}}{2j}$$

Ex3 - p. 11 : ① $\sin^3 x = \left(\dfrac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}\right)^3$ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^3 = \dfrac{a^3}{b^3}$

$\sin^3 x = \dfrac{1}{(2j)^3}\left(\underbrace{e^{jx}}_{a} - \underbrace{e^{-jx}}_{b}\right)^3 = -\dfrac{1}{8j}\Big($

$(2j)^3 = 2^3 j^3 = 2^3 j^2 j = -8j$

$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a-b)^3 = (a+(-b))^3$

$\boxed{(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3}$

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 \quad 1 & & \\ & 1 & 2 & 1 & \leftarrow (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ 1 & 3 & & 3 & 1 \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{array}$$

$\sin^3 x = \dfrac{1}{8j}\Big(e^{3jx} - 3e^{jx} + 3e^{-jx} - e^{-3jx}\Big)$

Appliquer ... max.

Euler en sens inverse.

$\sin^3 x = -\dfrac{1}{8j}\Big(e^{3jx} \underbrace{- 3e^{jx} + 3e^{-jx}}_{-3(e^{jx} - e^{-jx})} - e^{-3jx}\Big) = -\dfrac{1}{8j}\Big(2j\sin(3x) - 6j\sin x\Big) = \ominus\dfrac{2j}{8j}\Big(\sin(3x) - 3\sin x\Big)$

$\dfrac{2j}{8j} = 1/4$

$\sin^3 x = \dfrac{1}{4}\Big(3\sin x - \sin(3x)\Big) \Rightarrow I = \dfrac{1}{4}\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi/3} \Big(3\sin x - \sin(3x)\Big)\,dx = \dfrac{1}{4}\left[-3\cos x + \dfrac{\cos(3x)}{3}\right]_{\pi/2}^{\pi/3}$

$I = \dfrac{1}{4}\left(-\dfrac{3}{2} + \dfrac{-1}{3} - (0 + 0/3)\right) = -11/24$

III. Signal cissoïdal $f(t) = a.\cos(\omega t) + b.\sin(\omega t)$ où a et b sont des réels non nuls.

1) Transformation de $f(t) = a.\cos(\omega t) + b.\sin(\omega t)$

Notons $A = |a - jb|$ et $\varphi = \arg(a - jb)$, alors :

$a - jb = Ae^{j\varphi} = A(\cos\varphi + j\sin\varphi)$ exponentielle / polaire $[A;\varphi]$

De plus,

$\cos(\omega t) + j.\sin(\omega t) = e^{j\omega t}$ ← écriture d'Euler.

Ainsi le produit de ces deux nombres complexe est :

$(a - jb)(\cos\omega t + j\sin\omega t) = Ae^{j\omega t} \times e^{j\varphi}$ $\quad e^a \times e^b = e^{a+b}$

$a\cos\omega t + ja\sin\omega t - jb\cos\omega t \underbrace{-jbj\sin\omega t}_{\underbrace{-j^2 b\sin\omega t}_{+b\sin\omega t}} = Ae^{j\omega t + j\varphi} = Ae^{j(\omega t+\varphi)}$ $\quad \boxed{j^2 = -1}$

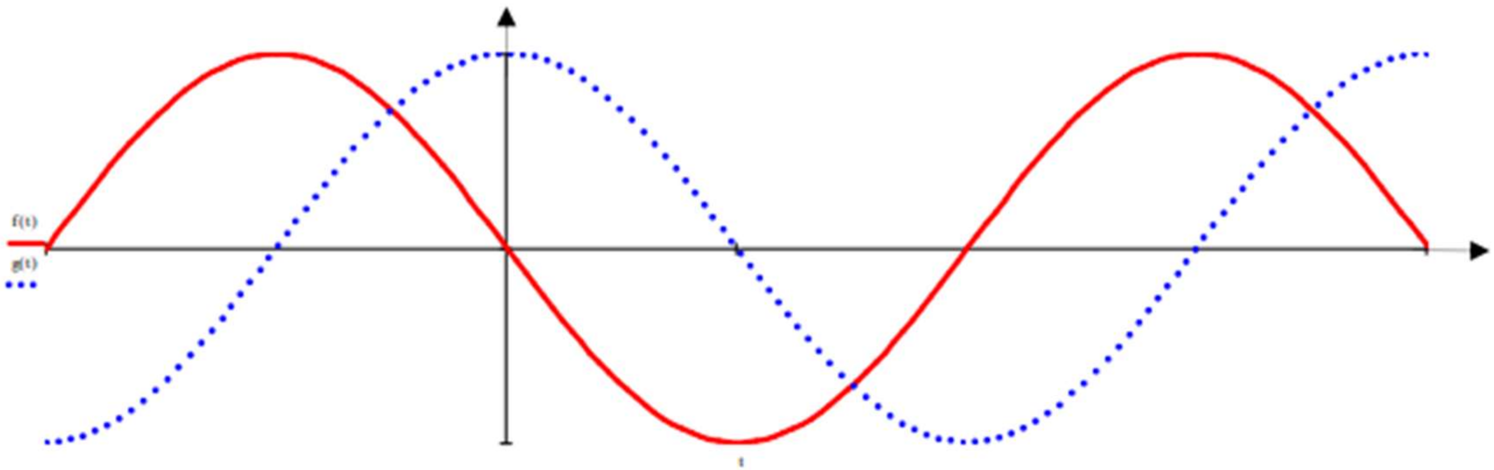
$\underbrace{\boxed{a\cos\omega t + b\sin\omega t}}_{= f(t)} + j(a\sin\omega t - b\cos\omega t) = \underbrace{\boxed{A\cos(\omega t+\varphi)}}_{= f(t)} + jA\sin(\omega t+\varphi)$

On obtient donc le résultat suivant :

$f(t) = a.\cos(\omega t) + b.\sin(\omega t) = A.\cos(\omega t + \varphi)$ où $A = |a - jb|$ et $\varphi = \arg(a - jb)$.
f est donc un signal sinusoïdal d'amplitude A, de période $\frac{2\pi}{\omega}$, et de déphasage φ.

Représentation graphique :

Soit $f(t) = A.\cos(\omega t + \varphi)$; $g(t) = A.\cos(\omega t)$
Sur le graphe ci-après, indiquer A, T et t_1, le décalage temporel.
On a alors la formule : $\varphi = \frac{2\pi t_1}{T} = \omega t_1$



Rappel : La période T est en seconde, la pulsation $\omega = \frac{2\pi}{T}$ en radian par seconde, et la fréquence $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$ en Hertz.

2) Exemple

✓ $f(t) = \boxed{\cos(\pi t) + \sqrt{3}\sin(\pi t)}$

On a vu que : $a\cos\omega t + b\sin\omega t = \boxed{A\cos(\omega t + \varphi)}$ avec $\begin{cases} A = |a - jb| \\ \varphi = \arg(a - jb) \end{cases}$

Ici $a = 1$ $b = \sqrt{3}$ $\omega = \pi$ (identification)

Donc $A = |1 - j\sqrt{3}| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2$ $\varphi = \arg(1 - j\sqrt{3})$ $|a - jb| = \sqrt{a^2 + b^2}$

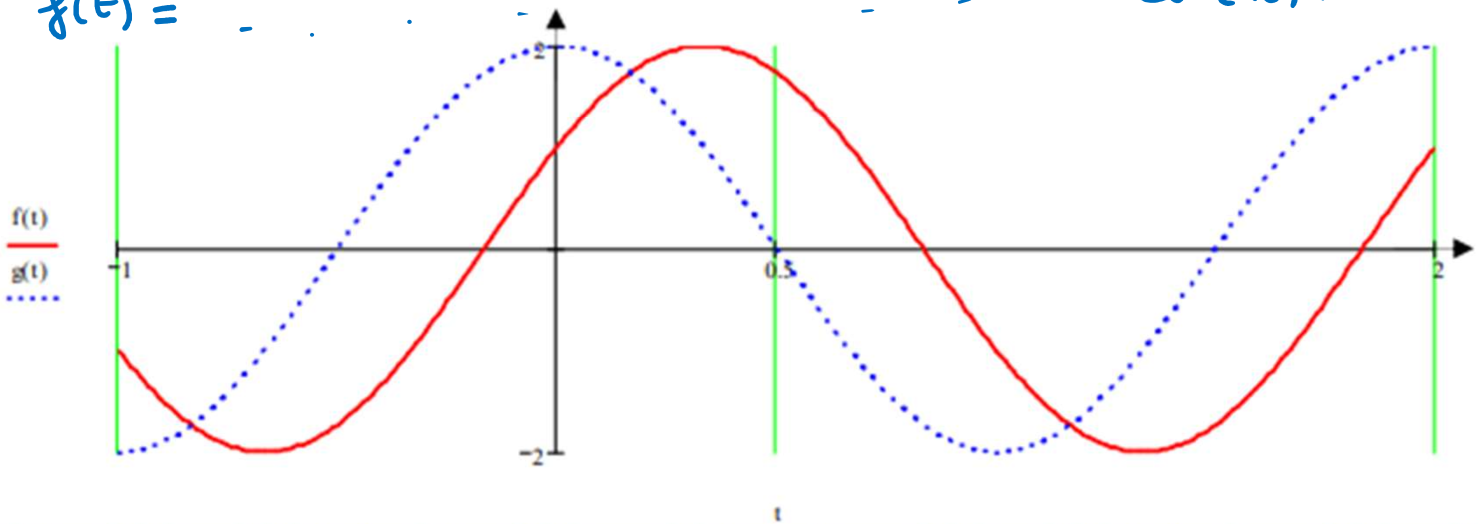
$\varphi = \arctan(-\sqrt{3}) = -\pi/3$

et $f(t) = \boxed{2.\cos\left(\pi t - \frac{\pi}{3}\right)}$

$\arg(a - jb) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{-b}{a}\right) \text{ si } a > 0 \\ \arctan\left(\frac{-b}{a}\right) \pm \pi \text{ si } a < 0 \end{cases}$

Vérification : $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$

$f(t) = \ldots = \cos(\pi t) + \sqrt{3}\sin(\pi t)$



Vérif : $f(t) = 2\cos(\pi t - \pi/3)$ $\qquad b = -\pi/3.$

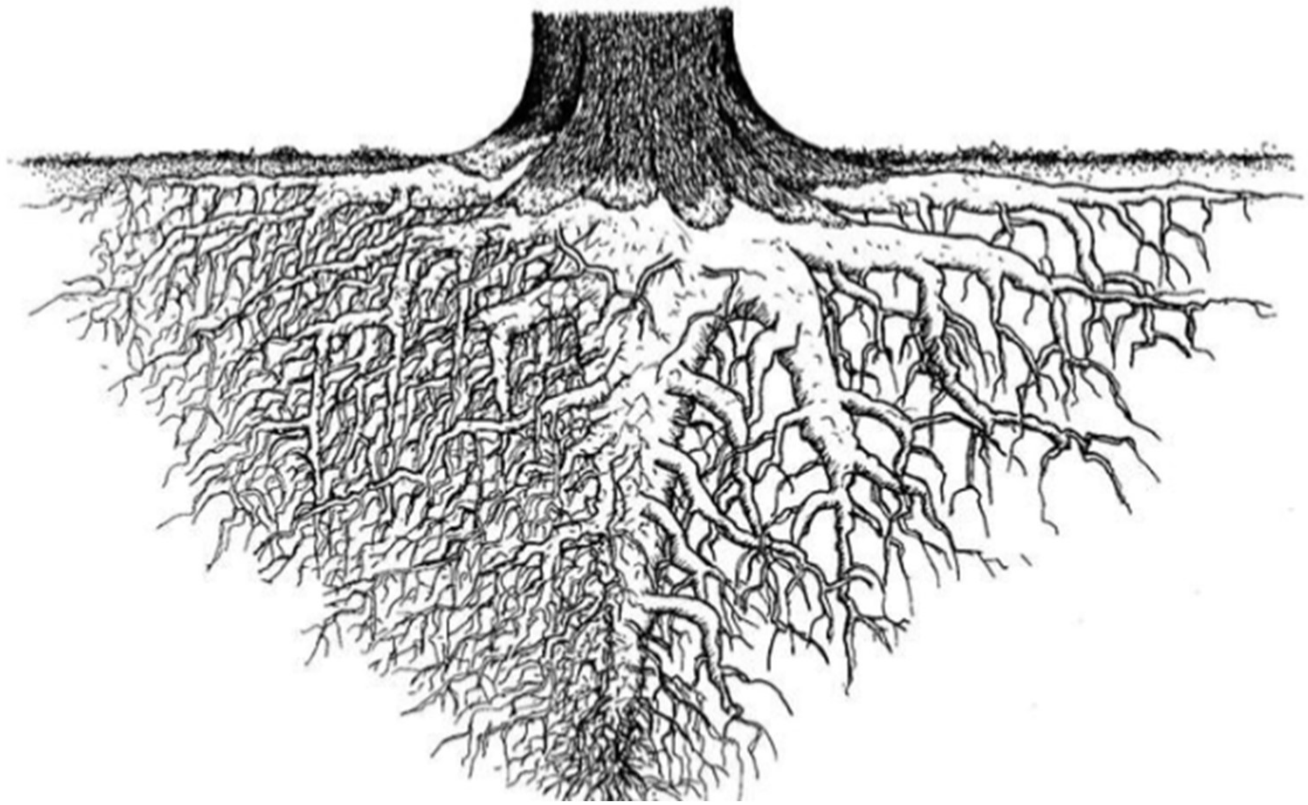
$$= 2\left(\cos(\pi t) . \underbrace{\cos(-\pi/3)}_{1/2} - \sin(\pi t) . \sin(-\pi/3)\right)$$

$$= 2\cos \pi t . \frac{1}{2} - 2\sin \pi t . \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$f(t) = \cos \pi t + \sqrt{3} . \sin \pi t \qquad \underline{\text{CQFD}}$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \quad \to b = \frac{\pi}{3}$$

Chapitre 5 : Compléments sur les nombres complexes,
Polynômes,
Fractions rationnelles.



Partie B : Les polynômes

Page 16 chapitre 5

I. Généralités

1) Définitions

- Soit z, une variable réelle ou complexe ; n, un entier naturel ; $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ des nombres réelles ou complexes.
  On appelle polynôme, toute fonction P définie par :
  $$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n$$
  On note aussi : $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$
- a_k est appelé coefficient de z^k
- $a_k z^k$ est appelé monôme de degré k
- On appelle degré du polynôme P et on note deg(P) le plus haut degré des monômes de P. Dans les notations précédentes deg(P)=n.

$7x^3 - 4x^5 + 2x + 3.$

$deg(P) = 5.$

- Si deg(P)=0, alors $P(z) = a_0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$.
  P est alors appelé polynôme constant, et deg(P) = 0
- $\boxed{P(z) = 0 \;\; \forall z \in \mathbb{C} \Leftrightarrow a_0 = a_1 = a_2 = \ldots = a_{n-1} = a_n = 0}$. Le polynôme P est alors appelé polynôme nul et on note : $P \equiv 0$, et $\deg(P) = -\infty$ par convention.

✓ Les solutions de l'équation $P(z) = 0$ sont appelées racines, ou zéros du polynôme P.

✓ On note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels.
On note $\mathbb{C}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients complexes.

Page 16 chapitre 5

$3x^5 - 4x + 1 \in \mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X]$

$x^2 - ix + 3 \in \mathbb{C}[X]$

$\notin \mathbb{R}[X]$

2) Exemple

$$P(x) = x^5 - 3x^8 + x\sqrt{2} - 5 + 3x^7$$

« P est un polynôme à coefficients réels » se note : $P \in \mathbb{R}[X]$

« Le degré de P est 8 », se note : $\deg(P) = 8$

Quel est le monôme de degré 7 ? $3x^7$

Quel est le coefficient de x^2 ? 0

Ordonner P suivant les puissances croissantes :

$P(x) = -5 + x\sqrt{2} + x^5 + 3x^7 - 3x^8$

décroissantes :

$P(x) = -3x^8 + 3x^7 + x^5 + x\sqrt{2} - 5.$

Page 17 chapitre 5

$P(x) = 7x^3 - 2x + 1 \qquad Q(x) = x^2 + 3x + 2$

$\deg(P) = 3 \qquad \deg(Q) = 2$

$(P+Q)(x) = 7x^3 + x^2 + x + 3$

$\deg(P+Q) = 3 \leq \max(\deg P ; \deg Q)$

$(-3.P)(x) = -21x^3 + 6x - 3$

$\deg(-3P) = 3 = \deg P$

$(P.Q)(x) = (7x^3 - 2x + 1)(x^2 + 3x + 2) = 7x^5 + 21x^4 + 14x^3 - 2x^3 - 6x^2 - 4x + x^2 + 3x + 2$

$= 7x^5 + 21x^4 + 12x^3 - 5x^2 - x + 2$

$\deg(P.Q) = 5 = \deg P + \deg Q$

Remarque : Si $Q(x) = -7x^3 + 3x - 5$

alors : $(P+Q)(x) = x - 4$

$\deg(P+Q) = 1 \leq \max(\deg P ; \deg Q)$

$x^a \times x^b = x^{a+b}$

3) Opérations

Page 18 chapitre 5

Soit : $\mathbf{P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ... + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k}$ où $P \in \mathbb{C}\,[X]$. deg(P)=n

et : $\mathbf{Q(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + ... + b_{m-1} z^{m-1} + b_m z^m = \sum_{k=0}^{m} b_k z^k}$ où $Q \in \mathbb{C}\,[X]$. deg(Q)=m.

✓ Egalité

$$\boxed{\mathbf{P \equiv Q \Leftrightarrow P(z) = Q(z)\ \forall z \in \mathbb{C} \Leftrightarrow \begin{cases} deg(P) = deg(Q) = n \\ a_k = b_k \quad \forall\, 0 \le k \le n \end{cases}}}$$

Page 18 chapitre 5

✓ <u>Addition</u>

$$(P+Q)(z) = P(z) + Q(z) = a_0 + b_0 + (a_1 + b_1).z + (a_2 + b_2).z^2 + ... + (a_k + b_k)z^k + ...$$

$$\boxed{\begin{array}{l} (P+Q)(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\max(n,m)} (a_k + b_k) z^k \\ \deg(P+Q) = \max(\deg(P), \deg(Q)) \end{array}}$$

✓ <u>Multiplication par un scalaire</u> $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\boxed{\begin{array}{l} \lambda.P(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda.a_k z^k \\ \deg(\lambda.P) = \deg(P) \end{array}}$$

✓ Multiplication par un polynôme

Page 18 chapitre 5

$$(PQ)(z) = P(z).Q(z)$$

$$= \left(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n\right)\left(b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots + b_{m-1} z^{m-1} + b_m z^m\right)$$

....

....

....

....

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbf{(PQ)(z) = \sum_{k=0}^{n+m}\left(\sum_{i+j=k} a_i b_j\right).z^k} \\ \mathbf{deg(P.Q) = deg(P) + deg(Q)} \end{array}}$$

Page 17 chapitre 5

Exercice : Soit $P(x) = 3x^3 - 2x^2 - 3x + 2$

Calculer $P(-1)$, puis factoriser P.

↳ "l'écrire comme produit de polynômes de plus bas degré possible : 1"

$P(-1) = 3(-1)^3 - 2(-1)^2 - 3(-1) + 2 = -3 - 2 + 3 + 2 = 0$: "-1 est une racine de P"

donc $P(x) = (x+1)Q(x)$? Q $\quad \deg P = \deg(x+1) + \deg Q$

$3 = 1 + \deg Q \iff \deg Q = 2$

On cherche $Q(x) = ax^2 + bx + c$ tel que :

$3x^3 - 2x^2 - 3x + 2 = (x+1)(ax^2 + bx + c)$ $\quad \boxed{a ?\ b ?\ c ?}$

$3x^3 - 2x^2 - 3x + 2 = ax^3 + bx^2 + cx + ax^2 + bx + c$ "On identifie"

$3x^3 - 2x^2 - 3x + 2 = ax^3 + (a+b)x^2 + (c+b)x + c \iff \begin{cases} a = 3 \\ a + b = -2 \\ c + b = -3 \\ c = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 3 \\ b = -5 \\ \text{ok.} \\ c = 2 \end{cases}$

donc : $Q(x) = 3x^2 - 5x + 2$. donc $P(x) = (x+1)(3x^2 - 5x + 2)$

On résout $3x^2 - 5x + 2 = 0$: $\Delta = 1$ et $x_1 = 1$ $\quad x_2 = 2/3$.

$P(x) = (x+1)\,Q(x)$ où $Q(1) = Q(2/3) = 0$

$3x^3 - 2x^2 - 3x + 2 = (x+1)(x-1)(x-\frac{2}{3}) \times 3$

Page 22 chapitre 5

Rappel :

$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$

CC : $P(x) = 3(x+1)(x-1)(x-\frac{2}{3})$ est factorisé.

Page 22 chapitre 5

dividente → $A = 175$ | $6 = B$ ← diviseur

55 | $29 = Q$ ← quotient

Reste → $R = 1$

$\boxed{A \geq B}$

La division s'arrête lorsque : $R < B$

et $A = BQ + R$.

III. Factorisation d'un polynôme de degré >2

Page 23 chapitre 5

1) Division euclidienne de polynômes

Exemple Soit $A(x) = x - 2x^2 + x^3 + 1$ et $B(x) = x^2 + 2$

Effectuer la division euclidienne de A par B, c'est effectuer la division de A par B en ordonnant A et B suivant les puissances décroissantes.

$\boxed{\deg A \geq \deg B}$ (3, 2)

dividende → $A = x^3 - 2x^2 + x + 1$ | $x^2 + 2 = B$ ← diviseur

$-(x^3 + 2x)$ | $x - 2 = Q$ ← quotient

$-2x^2 - x + 1$

$-(-2x^2 - 4)$

Reste → $R = -x + 5$

La division s'arrête lorsque :

$\deg R < \deg B$

et $A = BQ + R$

Vérif : $BQ + R = (x^2 + 2)(x - 2) - x + 5$

$= x^3 - 2x^2 + 2x - 4 - x + 5 = A$ Ok

Page 23 chapitre 5

Définition / Théorème de la division euclidienne de polynômes

Soit A et B deux polynômes à coefficients complexes tels que : $B \neq 0$ et $\deg(A) \geq \deg(B)$.

Il existe alors un unique couple de polynômes (Q,R) vérifiant : $\begin{cases} A = BQ + R \\ \deg(R) < \deg(B) \end{cases}$.

On dit alors que Q et R sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de A par B.
La division euclidienne de A par B est aussi appelée division de A par B suivant les puissances décroissantes.

- ✓ Remarque Si R=0, alors A=BQ. On dit alors que le polynôme A est factorisable par B, ou que B divise A, ou encore que A est divisible par B.

4) Factorisation d'un polynôme de degré >2

Page 24 chapitre 5

Soit P, un polynôme de degré quelconque, à coefficients quelconques.

a) α est une racine de P si et seulement si P est divisible (ou factorisable) par (x- α)

$$P(\alpha) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists ! Q \in \mathbb{C}[X] \,/\, P(x) = (x-\alpha).Q(x)$$

il existe → un unique → tel que.

Page 22 ou 26 chapitre 5

Dém de a) (p. 26) page 24

$$p(\alpha)=0 \overset{①}{\Longrightarrow} p(x) = (x-\alpha)Q(x)$$

$$p(\alpha)=0 \overset{②}{\Longleftarrow} p(x) = (x-\alpha)Q(x)$$

($\Leftarrow$) Si $p(x)=(x-\alpha)Q(x)$ Alors $p(\alpha)=(\alpha-\alpha).Q(\alpha) = 0$

($\Rightarrow$) Si $p(\alpha)=0$ Alors

$$\begin{array}{r|l} p(x) & x-\alpha \\ \cline{2-2} \vdots & Q(x) \\ R(x) & \end{array}$$

tel que : $\begin{cases} \deg R < \deg(x-\alpha) = 1 \; (*) \\ \text{Définition} \\ p(x) = (x-\alpha)Q(x) + R(x) \end{cases}$

(*) donc $\deg R = 0$ et $R(x) = cte \; \forall x$.

De plus $p(x) = (x-\alpha)Q(x) + cte$, d'après l'hypothèse : $p(\alpha) = 0 \Rightarrow \underbrace{(\alpha-\alpha).Q(\alpha)}_{0} + cte = 0$

Donc $cte = 0$ et $R \equiv 0$. CQFD.

Page 24 chapitre 5

✓ Exemple 1 Chercher une racine évidente du polynôme P, défini par : $P(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 2$. Puis le factoriser (l'écrire comme produit de polynômes de plus bas degré possible)

$P(1) = 1^3 - 3.1^2 + 4.1 - 2 = 1 - 3 + 4 - 2 = 5 - 5 = 0$ donc P est divisible par $x-1$.

$$
\begin{array}{r|l}
P(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 2 & x-1 \\
\hline
-(x^3 - x^2) & x^2 - 2x + 2 = Q(x) \\
\hline
-2x^2 + 4x - 2 & \\
-(-2x^2 + 2x) & \\
\hline
2x - 2 & \\
-(2x - 2) & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

Donc $P(x) = (x-1)(x^2 - 2x + 2)$

$\boxed{ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)}$

On résout $\boxed{x^2 - 2x + 2} = 0$

$\Delta = 4 - 8 = -4 < 0$

$x_1 = \dfrac{-b + j\sqrt{|\Delta|}}{2a}$

$x_2 = \dfrac{-b - j\sqrt{|\Delta|}}{2a}$

$\begin{cases} x_1 = \dfrac{2 + j2}{2} = \dfrac{2(1+j)}{2} = \boxed{1+j} \\ x_2 = \overline{x_1} = \boxed{1-j} \end{cases}$

$P(x) = (x-1)(x-1+j)(x-1-j)$ est la factorisation de P dans $\mathbb{C}$.

$P(x) = (x-1)(x^2 - 2x + 2)$ est la factorisation de P dans $\mathbb{R}$.

Exercice 3 Chercher une racine évidente, puis factoriser dans $\mathbb{C}$ puis dans $\mathbb{R}$ le polynôme suivant : $P(x) = x^3 - 6x^2 + x - 6$ p.29

$p(6) = 6^3 - 6^3 + 6 - 6 = 0$ donc P est divisible par $\underbrace{x-6}_{\text{car s'annule en } 6}$.

Astuce : $P(x) = \underbrace{x^3 - 6x^2}_{x^2(x-6)} + 1(x-6) = (x-6)(x^2+1)$

Rappel : $(a - jb)(a + jb) = a^2 + b^2$ donc $x^2 + 1 = (x-j)(x+j)$

Ainsi $p(x) = (x-6)(x-j)(x+j)$ est la factorisation dans $\mathbb{C}$

et $p(x) = (x-6)(x^2+1)$ est la factorisation de p dans $\mathbb{R}$.

Soit P $\deg P = 5$. tel que $P(1) = P(-2) = P(3) = 0$.

P est alors divisible par $\underbrace{(x-1)\times(x+2)}\times(x-3) = (x^2+x-2)(x-3)$

$$= x^3\underbrace{-3x^2+x^2}_{-2x^2}-5x+6$$

deg 5 → $P(x)$ | x^3-2x^2-5x+6. ← deg 3

$Q(x)$. = deg 2.

0

Page 24 chapitre 5

b) $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ sont des racines de P si et seulement si P est divisible (ou factorisable) par $(x-\alpha_1).(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_k)$

$P(\alpha_1) = P(\alpha_2) = \ldots = P(\alpha_k) = 0 \Leftrightarrow \exists!\, Q \in \mathbb{C}[X] \ / \ P(x) = (x-\alpha_1).(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_k)Q(x)$

Page 25 chapitre 5

✓ Exemple 2 Soit le polynôme : $P(x) = x^4 - 3x^3 - 11x^2 + 3x + 10$. Chercher au moins deux racines évidentes de P, puis en déduire les autres. Quelle est alors la factorisation de P ?

$P(1) = 1 - 3 - 11 + 3 + 10 = 14 - 14 = 0$ et $P(-1) = 1 + 3 - 11 - 3 + 10 = 14 - 14 = 0$.

P est donc divisible par : $(x-1)(x+1) = x^2 - 1$

$$\begin{array}{r|l} x^4 - 3x^3 - 11x^2 + 3x + 10 & x^2 - 1 \\ \hline -(x^4 - x^2) & x^2 - 3x - 10 \\ \hline -3x^3 - 10x^2 + 3x + 10 & \\ -(-3x^3 + 3x) & \\ \hline -10x^2 + 10 & \\ -(-10x^2 + 10) & \\ 0 & \end{array}$$

On résout $x^2 - 3x - 10 = 0$

$\Delta = 49 \to x_1 = 5$, $x_2 = -2$.

Donc $x^2 - 3x - 10 = (x-5)(x+2)$

et $P(x) = (x-5)(x+2)(x-1)(x+1)$ est la factorisation de P dans $\mathbb{C}$ et dans $\mathbb{R}$.

$$(U \times V)' = U'V + UV'$$

p.26

• Soit $P(x) = \overbrace{(x-1)^2}^{U}\overbrace{(x+3)}^{V}$ alors $P(1) = 0$ et $P(-3) = 0$

$P'(x) = 2(x-1)(x+3) + (x-1)^2 \cdot 1.$

$P''(x) = 2(x-1)\cdot 1 + 2(x-3) + 2(x-1)$ $\qquad (f^2)' = 2.f.f'$

$P(1) = 0 \qquad P'(1) = 0 \qquad P''(1) \neq 0 \qquad P(-3) = 0 \qquad P'(-3) \neq 0.$

• Soit $P(x) = (x+5)^3(x-2)$ alors $P(2) = P(-5) = 0.$

$P'(x) = 3(x+5)^2(x-2) + (x+5)^3$ $\qquad (f^3)' = 3 f^2 . f'$

$P''(x) = 6(x+5)^2(x-2) + 6(x+5)^2$

dérivée d'ordre 3 $\leftarrow$ $P^{(3)}(x) = 6\big((x-2) + (x+5)\big) + 12(x+5).$

$P(-5) = 0 \qquad P'(-5) = 0 \qquad P''(-5) = 0 \qquad P^{(3)}(-5) \neq 0$

c) α est une racine de P et P′ si et seulement si P est divisible (ou factorisable) par $(x-\alpha)^2$

Page 24 chapitre 5

On dit alors que α est une racine double de P (ou est de multiplicité 2).

$P(\alpha) = P'(\alpha) = 0$ et $P''(\alpha) \neq 0 \Leftrightarrow \exists!\, Q \in \mathbb{C}[X] \ / \ P(x) = (x-\alpha)^2 . Q(x)$

d) α est une racine de P, P′ et P″ si et seulement si P est divisible (ou factorisable) par $(x-\alpha)^3$. On dit alors que α est une racine triple de P (ou est de multiplicité 3).

$P(\alpha) = P'(\alpha) = P''(\alpha) = 0$ et $P^{(3)}(\alpha) \neq 0 \Leftrightarrow \exists!\, Q \in \mathbb{C}[X] \ / \ P(x) = (x-\alpha)^3 . Q(x)$

Etc…

$P(\alpha) = P'(\alpha) = P''(\alpha) = P^{(3)}(\alpha) = 0$ et $P^{(4)}(\alpha) \neq 0$ alors P est divisible par $(x-\alpha)^4$

On dit que α est racine de multiplicité 4 de P
d'ordre