Préparation DS sur les intégrales triples

Intégrale triple sur un pavé droit

1’

Soit $I\ l'intégrale\ triple$: $\mathrm{I} = \iiint_D (3x - 4yz)dxdydz$
où $\mathrm{D} = [0;1] \times [1;2] \times [1;3]$

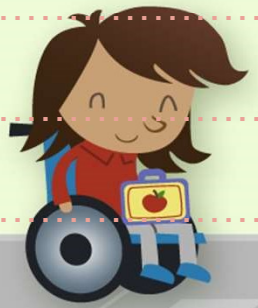
1. On ne peut pas séparer les variables
2. On peut séparer les variables

Notes

Pas à variables séparables.

$$I = \iiint_{[0,1]\times[1,2]\times[1,3]} (3x - 4yz)\, dx\,dy\,dz$$

← pavé droit



2’

Soit $I\ l'intégrale\ triple$: $I = \iiint_D (3x - 4yz)dxdydz$
où $D = [0;1] \times [1;2] \times [1;3]$. Peut − on écrire :

1. $I = \int_1^3 \int_1^2 \int_0^1 (3x - 4yz)\, dxdzdy$?

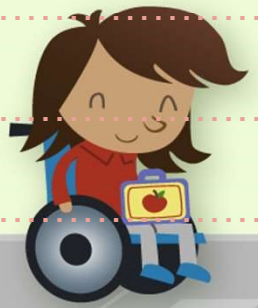
2. $I = \int_1^2 \int_1^3 \int_0^1 (3x - 4yz)\, dxdzdy$?

3. $I = \int_0^1 \int_1^3 \int_1^2 (3x - 4yz)\, dxdzdy$?

4. $I = \int_0^1 \int_1^2 \int_1^3 (3x - 4yz)\, dxdzdy$?

Notes

$$I = \int_1^2 \int_1^3 \int_0^1 (3x - 4yz)\, dx\, dz\, dy \qquad \mathcal{D} = [0;1] \times [1;2] \times [1;3]$$



2’

Soit *I l'intégrale triple* : $I = \int_1^2 \int_1^3 \int_0^1 (3x - 4yz)\, dxdzdy$

Peut – on écrire :

1. $I = \int_1^2 \int_1^3 \left[\left(3\frac{x^2}{2} - 4yzx\right)\right]_0^1 dzdy$?

2. $I = \int_1^2 \int_1^3 [(3x^2 - 4yzx)]_0^1 dzdy$?

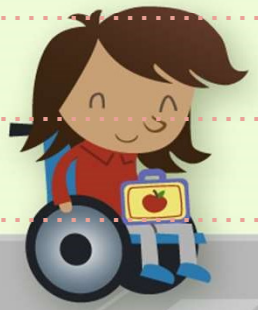
3. $I = \int_1^2 \int_1^3 \left[\left(3\frac{x^2}{2} - 4\frac{y^2}{2}\frac{z^2}{2}\right)\right]_0^1 dzdy$?

4. $I = \int_1^3 \int_1^2 [3]_0^1 dzdy$?

Notes

$$I = \int_1^2 \int_1^3 \int_0^1 (3x - 4yz)\, dx\, dz\, dy \qquad \mathcal{D} = [0;1] \times [1;2] \times [1;3]$$

$$= \int_1^2 \int_1^3 \left[\frac{3x^2}{2} - 4xyz\right]_0^1 dz\, dy$$



$$I = \int_1^2 \int_1^3 \left[\left(3\frac{x^2}{2} - 4yzx\right)\right]_0^1 dzdy$$ Peut – on écrire :

3’

1. $I = \int_1^2 \left[\frac{3}{2}z - 2yz^2\right]_1^3 dz$?

2. $I = \int_1^2 \left[\frac{3}{2} - 4yz\right]_1^3 dz$?

3. $I = \int_1^2 \left[\frac{3}{2}z - 2yz^2\right]_1^3 dy$?

4. $I = \int_1^2 \left[\frac{3}{2}z - 4yz^2\right]_1^3 dz$?

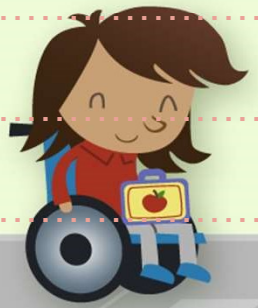
Notes

$$I = \int_1^2 \int_1^3 \int_0^1 (3x - 4yz)\, dx\, dz\, dy \qquad \mathcal{D} = [0;1] \times [1;2] \times [1;3]$$

$$= \int_1^2 \int_1^3 \underbrace{\left[\frac{3x^2}{2} - 4xyz\right]_0^{x=1}}_{x=1} dz\, dy$$

$$\frac{3}{2} - 4yz$$

$$I = \int_1^2 \left[\frac{3}{2}z - 2yz^2\right]_1^3 dy$$



3’

$$I = \int_1^2 \left[\frac{3}{2}z - 2yz^2\right]_1^3 dy \text{ Peut-on écrire :}$$

1. $\int_1^2 (3 - 16y)dy$?

2. $I = \int_1^2 \left(\frac{3}{2} - 10y\right)dy$?

3. $I = \int_1^2 (-2z^2)dy$?

4. Aucune des réponses n'est juste

Notes

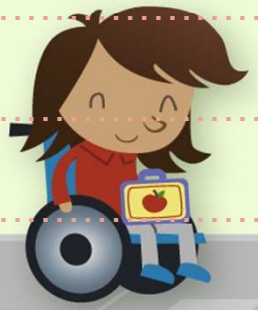
$$I = \int_1^2 \int_1^3 \int_0^1 (3x - 4yz)\, dx\, dz\, dy \qquad \mathcal{D} = [0;1] \times [1;2] \times [1;3]$$

$$= \int_1^2 \int_1^3 \underbrace{\left[\frac{3x^2}{2} - 4xyz\right]_{x=0}^{x=1}}_{\frac{3}{2} - 4yz} dz\, dy$$

$$I = \int_1^2 \left[\frac{3}{2}z - 2yz^2\right]_1^3 dy$$

$$= \int_1^2 \left(\frac{9}{2} - 18y - \left(\frac{3}{2} - 2y\right)\right) dy$$

$$I = \int_1^2 (3 - 16y)\, dy$$



2’

$$Que\ vaut\ \mathrm{I} = \int_{1}^{2} (3 - 16\mathrm{y})\,\mathrm{dy}?$$

1.I = 7

2.I = -27

3. I = -21

4.Aucune des réponses n′est juste

Notes

$$I = \int_1^2 \int_1^3 \int_0^1 (3x - 4yz)\, dx\, dz\, dy \qquad \mathcal{D} = [0;1] \times [1;2] \times [1;3]$$

$$= \int_1^2 \int_1^3 \left[\frac{3x^2}{2} - 4xyz\right]_{x=0}^{x=1} dz\, dy$$

$$\frac{3}{2} - 4yz$$

$$I = \int_1^2 \left[\frac{3}{2}z - 2yz^2\right]_1^3 dy$$

$$= \int_1^2 \left(\frac{9}{2} - 18y - \left(\frac{3}{2} - 2y\right)\right) dy$$

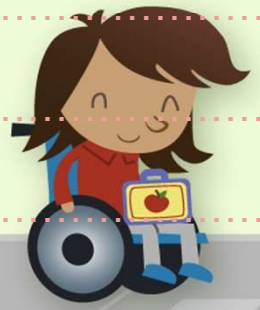
$$I = \int_1^2 (3 - 16y)\, dy$$

$$I = \left[3y - 8y^2\right]_1^2$$

$$= 6 - 32 - (3 - 8)$$

$$= 14 - 35$$

$$I = -21$$



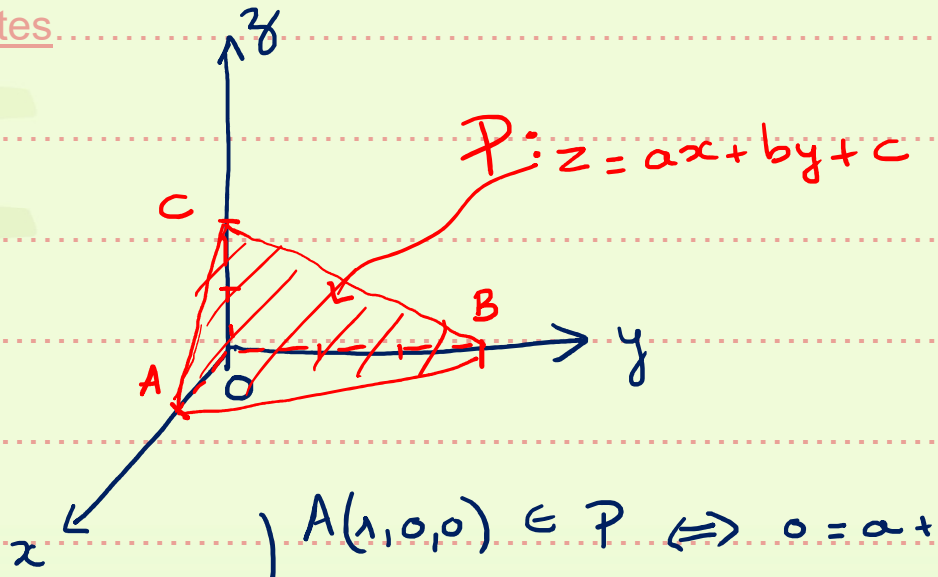
Intégrale triple sur un tétraèdre

4’

L’espace est muni d’un repère orthonormé (O,I,J,K).
Soit OABC, le tétraèdre tel que A(1,0,0), B(0,3,0) et C(0,0,2). L’équation du plan passant par les trois points A,B,C est alors :

1. z = x+3y+2
2. z = -2x-2/3y+2
3. z = -2x+3y+2
4. Aucun des résultats ci-dessus n’est correct.

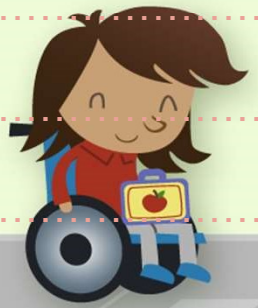
Notes



$$\begin{cases} A(1,0,0) \in P \iff 0 = a + c \\ B(0,3,0) \in P \iff 0 = 3b + c \\ C(0,0,2) \in P \iff 2 = c \end{cases} \iff \begin{cases} a = -c = -2 \\ b = -\frac{1}{3}c = -\frac{2}{3} \\ c = 2 \end{cases}$$

$$P : \quad z = -2x - \frac{2}{3}y + 2$$

ou $$P : \quad 3z = -6x - 2y + 6$$



Soit $I = \iiint_{OABC} xydxdydz$. On décide d'intégrer d'abord par rapport à z. On note d, le domaine obtenu par projection de OABC, parallèlement à l'axe (Oz), sur le plan (xOy). On obtient alors :

3'

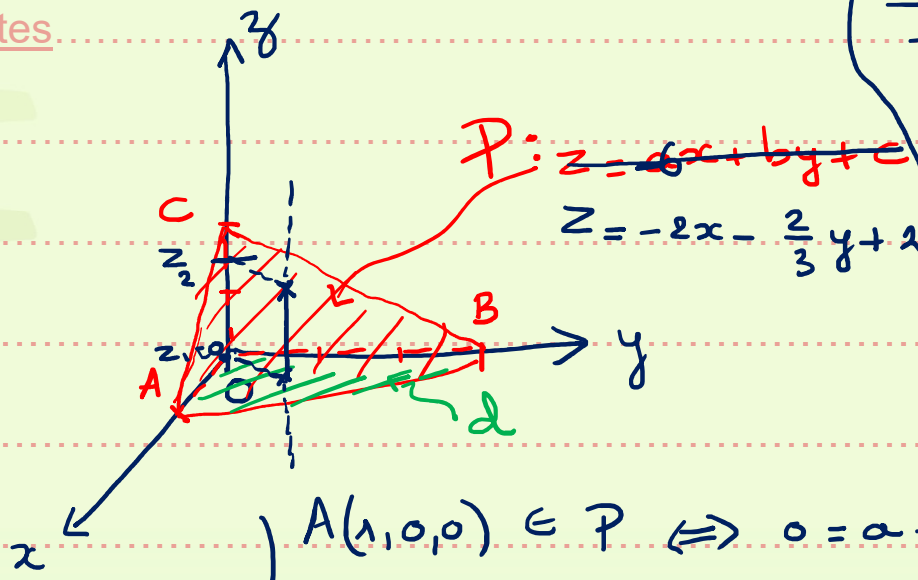
1. $I = \iint_d -2xydxdy$

2. $I = \frac{2}{3}\iint_d (-3x^2y - xy^2 + 3xy)dxdy$

3. $I = \iint_d (-3x^2y - xy^2 + 3xy)dxdy$

4. Aucun des résultats précédents n'est correct.

Notes



$P: z = -2x - \frac{2}{3}y + 2$

$$\begin{cases} A(1,0,0) \in P \iff 0 = a + c \\ B(0,3,0) \in P \iff 0 = 3b + c \\ C(0,0,2) \in P \iff 2 = c \end{cases}$$

$P: \quad z = -2x - \frac{2}{3}y + 2$

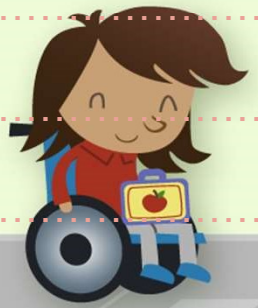
ou $\quad P: \quad 3z = -6x - 2y + 6$

$$I = \iiint_{\mathcal{D}} xy \, dx\,dy\,dz = \iint_{d} \int_{0}^{-2x-\frac{2}{3}y+2} xy \, dz \, dx\,dy$$

$$I = \iint_{d} \left[xyz \right]_{0}^{-2x-\frac{2}{3}y+2} dx\,dy$$

$$I = \iint_{d} xy\left(-2x - \frac{2}{3}y + 2\right) dx\,dy$$

$$I = \frac{2}{3} \iint_{d} \left(-3x^2y - xy^2 + 3xy\right) dx\,dy.$$



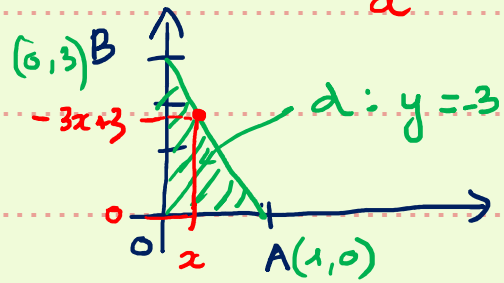
Quelle sont les bornes de $I = \frac{2}{3}\iint_d (-3x^2y - xy^2 + 3xy)dxdy$, où d est le triangle OAB, lorsqu'on intègre d'abord par rapport à y ?

3'

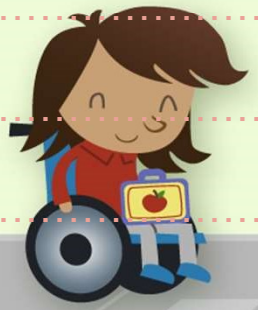
1. $I = \frac{2}{3}\int_0^3 \int_0^{\frac{y}{3}-1}(-3x^2y - xy^2 + 3xy)\, dydx$
2. $I = \frac{2}{3}\int_0^3 \int_0^{\frac{y}{3}-1}(-3x^2y - xy^2 + 3xy)\, dxdy$
3. $I = \frac{2}{3}\int_0^1 \int_0^{-3x+3}(-3x^2y - xy^2 + 3xy)\, dxdy$
4. Aucune des réponses précédentes n'est juste.

Notes

$$I = \frac{2}{3}\iint_{d}\left(-3x^2y - xy^2 + 3xy\right)dx\,dy$$



$$I = \frac{2}{3}\int_{0}^{1}\int_{0}^{-3x+3}\left(-3x^2y - xy^2 + 3xy\right)dy\,dx$$



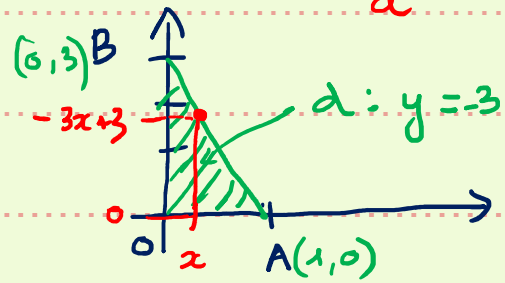
On obtient alors : $I = \frac{2}{3}\int_0^1 \int_0^{-3x+3}(-3x^2y - xy^2 + 3xy)\, dydx$ *et* :

3’

1. $I = \int_0^1 \left((-x^2 + x)(-3x + 3)^2 - \frac{2x}{9}(-3x + 3)^3\right) dy$
2. $I = \int_0^1 \left((-x^2 + x)(-2x + 2)^2 - \frac{2x}{9}(-3x + 3)^3\right) dx$
3. $I = 2\int_0^1 \left((-x^2 + x)(x + 1)^2 - 2x(-x + 1)^3\right) dx$
4. $I = \int_0^1 \left((-x^2 + x)(-3x + 3)^2 - \frac{2x}{9}(-3x + 3)^3\right) dx$
5. Aucune des réponses précédentes n’est juste.

Notes

$$I = \frac{2}{3}\iint_{d}\left(-3x^2y - xy^2 + 3xy\right)dx\,dy$$



$$I = \frac{2}{3}\int_0^1\int_0^{-3x+3}\underbrace{\left(-3x^2y - xy^2 + 3xy\right)}_{(-3x^2+3x)y - xy^2}dy\,dx$$

$$I = \frac{2}{3}\int_0^1\left[(-3x^2+3x)\frac{y^2}{2} - x\frac{y^3}{3}\right]_0^{-3x+3}dx$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^1\left(\underbrace{(-3x^2+3x)}_{3(-x^2+x)}\frac{(-3x+3)^2}{2} - x\frac{(-3x+3)^3}{3}\right)dx$$

$$= \underbrace{\frac{2}{3}\times\frac{3}{2}}_{=1}\times\int_0^1\left((-x^2+x)(-3x+3)^2 - \frac{2x}{3}(-3x+3)^3\right)dx$$

Nous n'avons plus qu'à calculer l'intégrale simple : $I=\int_0^1(-3x^4+9x^3-9x^2+3x)dx$, ce qui donne :

3'

1. $I = 1/10$
2. $I = 3/20$
3. $I = \frac{15}{10}$
4. Aucune des réponses précédentes n'est juste.

Notes

$$I = \int_0^1 (-3x^4 + 9x^3 - 9x^2 + 3x)\,dx$$

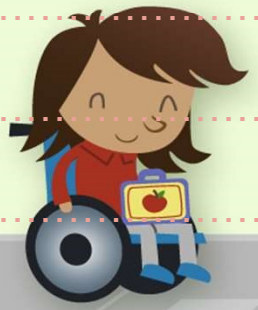
$$= \left[\frac{-3x^5}{5} + \frac{9x^4}{4} - \frac{9x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} \right]_0^1$$

$$= -\frac{3}{5} + \frac{9}{4} - \frac{9}{3} + \frac{3}{2}$$

$$= \frac{-3\times12 + 9\times15 - 9\times20 + 3\times30}{60}$$

$$= \frac{-36 + 55 - 180 + 90}{60} = \frac{9}{60}$$

$$I = \frac{3}{20}$$



Intégrale triple par changement de variable

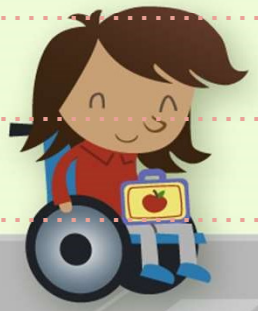
Pour calculer $I = \iiint_D \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,dxdydz$
où D est défini par : $D = \{(x, y, z)/x^2 + y^2 + z^2 \leq 9\}$, on passe en :

1. Coordonnées sphériques
2. Coordonnées cylindriques
3. Coordonnées polaires

Notes

$$\mathcal{B} = \{(x,y,z) \;/\; x^2+y^2+z^2 \leq 9\}$$

$B(\Omega,R) = \{(x,y,z) \;/\; (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 \leq R^2\}$ est la boule de centre $\Omega(a,b,c)$ et de rayon R.



2’

Les coordonnées sphériques sont définies par (r,θ,φ) *avec :*

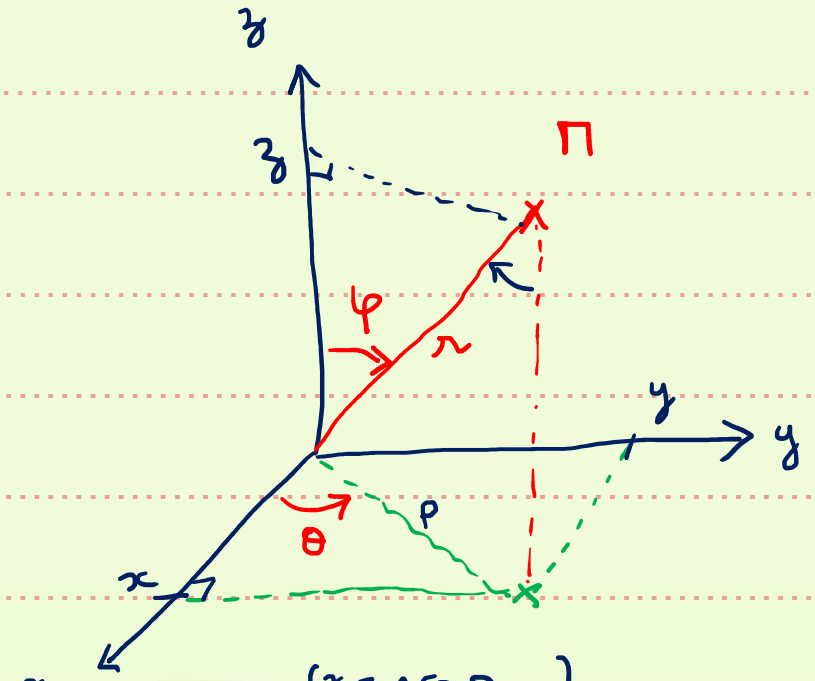
1. $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$

2. $\begin{cases} x = r\cos\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\cos\varphi \\ z = r\sin\varphi \end{cases}$

3. $\begin{cases} x = r\cos\theta\sin\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$

4. Aucune des réponses précédentes n’est juste.

Notes



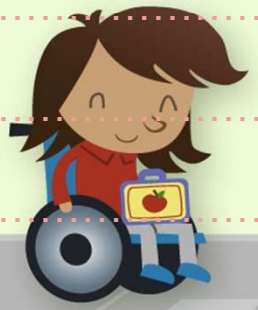
$r \geq 0$

$0 \leq \theta < 2\pi$

$0 \leq \varphi < \pi$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases} \quad \text{où } \rho = r\sin\varphi$$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta\sin\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$$



La valeur absolue du jacobien des coordonnées sphériques est :

1’

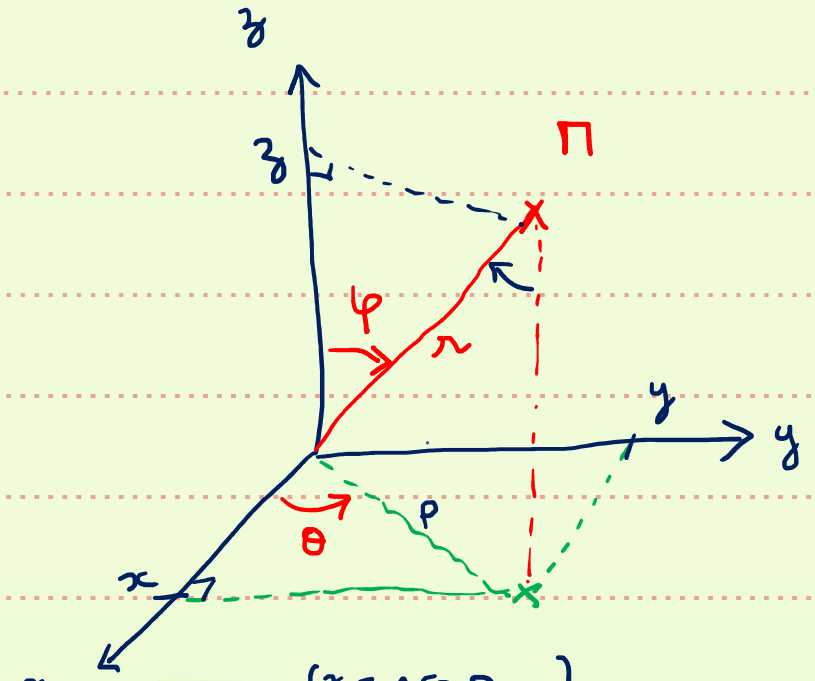
1. $r^2.sin\varphi$
2. $r^2.cos\varphi$
3. r
4. Aucune des réponses précédentes n’est juste.

Le domaine
$D = \{(x, y, z)/x^2 + y^2 + z^2 \leq 9\}$,
en coordonnées sphériques devient :

2’

1. $\Delta = [0,9] \times [0,2\pi] \times [0,\pi]$
2. $\Delta = [0,9] \times [0,\pi] \times [0,2\pi]$
3. $\Delta = [0,9] \times [0,2\pi] \times [0,\pi]$
4. $\Delta = [0,3] \times [0,2\pi] \times [0,\pi]$

Notes



$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases} \quad \text{où } \rho = r\sin\varphi$$

$r \geq 0$

$0 \leq \theta < 2\pi$

$0 \leq \varphi < \pi$

$$\mathcal{B} = \{(x,y,z) \mid \underbrace{x^2+y^2+z^2}_{r^2} \leq 9\}$$

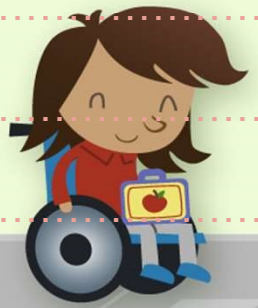
$r^2 \leq 9$

$0 \leq r \leq 3$

$0 \leq \theta \leq 2\pi$

$0 \leq \varphi \leq \pi$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta\sin\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$$



$I = \iiint_D \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dxdydz$ où D est la boule de centre 0 et de rayon 3, par passage en coordonnées sphériques devient :

2’

1. $I = \iiint_\Delta r^3 sin\varphi dr d\theta d\varphi$

2. $I = \iiint_\Delta r^4 sin\varphi dr d\theta d\varphi$

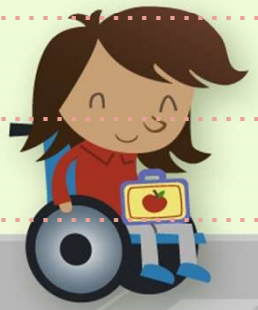
3. $I = \iiint_\Delta r^{5/2} sin\varphi dr d\theta d\varphi$

4. Aucune des réponses précédentes n’est juste.

Notes

$$I = \iiint_{\mathcal{D}} \underbrace{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}_{OM=r} \, dx\,dy\,dz$$

$$I = \iiint_{\Delta} \underbrace{r}_{r^3} \cdot r^2 \sin\varphi \, dr\,d\theta\,d\varphi$$



L'*intégrale triple* : $I = \iiint_{\Delta} r^3 sin\varphi dr d\theta d\varphi$ où
$\Delta = [0,3] \times [0,2\pi] \times [0,\pi]$, peut-elle être le produit de trois intégrales simples ?

1'

1. On ne peut pas séparer les variables
2. On peut séparer les variables

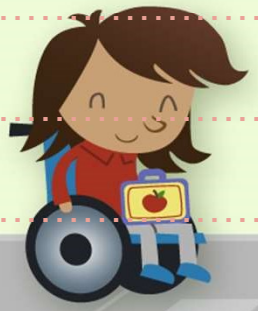
Notes

à variables séparables.

$$I = \iiint_{[0;3]\times[0;2\pi]\times[0;\pi]} r^3 \sin\varphi \, dr\,d\theta\,d\varphi$$

← pavé droit

$$I = \int_0^3 r^3 dr \times \int_0^{2\pi} 1.d\theta \times \int_0^{\pi} \sin\varphi \, d\varphi.$$



3’

L’*intégrale triple* : $I = \iiint_{\Delta} r^3 sin\varphi dr d\theta d\varphi$ où $\Delta = [0,3] \times [0,2\pi] \times [0,\pi]$ est égale à :

1. $I = 81\pi$
2. $I = 81\pi/2$
3. $I = -81\pi$
4. Aucune des réponses précédentes n’est juste.

Notes

$I = \iiint_{[0;3]\times[0;2\pi]\times[0;\pi]} \overbrace{r^3 \sin\varphi}^{\text{à variables séparables.}} \, dr\,d\theta\,d\varphi$ ← pavé droit

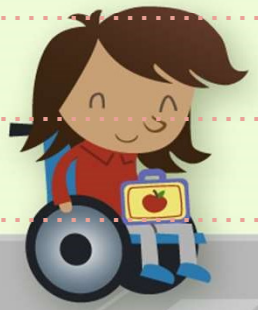
$$I = \int_0^3 r^3 dr \times \int_0^{2\pi} 1.d\theta \times \int_0^{\pi} \sin\varphi \, d\varphi.$$

$$I = \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^3 \times \left[\theta\right]_0^{2\pi} \times \left[-\cos\varphi\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{3^4}{4} \times 2\pi \times \underbrace{\left(\underbrace{-\cos\pi}_{+1} + \cos 0\right)}_{2}$$

$$= 3^4 \times \pi$$

$$I = 81\pi$$



Intégrale triple sur une portion de cylindre

2’

Soit l’intégrale triple : $I = \iiint_D (x^2 + z^2)dxdydz$
où $D=\{(x,y,z)/1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 5\}$
Par passage en coordonnées cylindriques, on obtient :

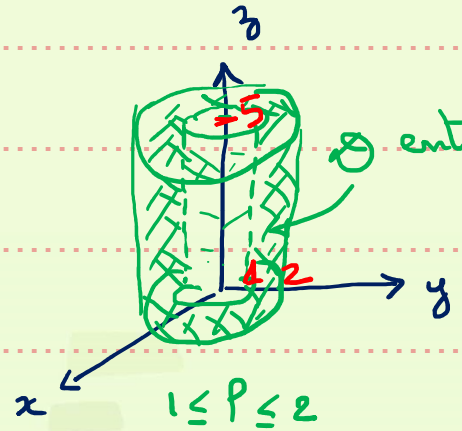
1. $I = \iiint_{[1;2]\times[0;2\pi]\times[0;5]} (\rho^3 cos^2\theta + \rho z^2)\, d\rho d\theta dz$
2. $I = \iiint_{[2;4]\times[0;2\pi]\times[0;5]} (\rho^2 cos^2\theta + z^2)\, d\rho d\theta dz$
3. $I = \iiint_{[1;2]\times[0;2\pi]\times[0;5]} (\rho^2 cos^2\theta + z^2)\, d\rho d\theta dz$
4. Aucun des résultats ci – dessus n’est juste

Notes

$$I = \iiint_{\mathcal{D}} (x^2 + z^2)\, dx\,dy\,dz$$

$$\mathcal{D} = \{(x,y,z) / 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \;;\; 0 \leq z \leq 5\}$$

disque de centre 0 et de rayon min. 1, max. 2



$\mathcal{D}$ entre les deux cylindres.

$\Rightarrow$ passage en coordonnées cylindriques

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

$dx\,dy\,dz = \rho\,d\rho\,d\theta\,dz$

$1 \leq \rho \leq 2$

$0 \leq \theta \leq 2\pi$

$0 \leq z \leq 5$

$$I = \iiint_{[1;2]\times[0,2\pi]\times[0,5]} (\rho^2\cos^2\theta + z^2)\,\rho\,d\rho\,d\theta\,dz = \iiint_{[1;2]\times[0,2\pi]\times[0,5]} (\rho^3\cos^2\theta + z^2\rho)\,d\rho\,d\theta\,dz$$

3’

Soit $I_1 = \iiint_{[1;2]\times[0;2\pi]\times[0;5]} (\rho z^2)\, d\rho d\theta dz$
on obtient alors :

1. $I_1 = 125\pi$

2.$I = 500\pi/3$

3.$I_1 = 500/3$

4. Aucun des résultats ci − dessus n′est juste

Notes

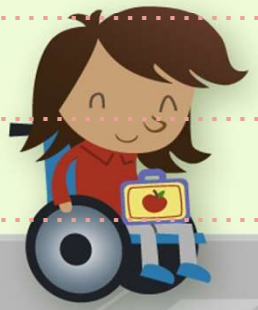
$$I_1 = \iiint_{[1;2]\times[0;2\pi]\times[0;5]} \rho z^2 \, d\rho d\theta dz$$

$$= \int_1^2 \rho d\rho \times \int_0^{2\pi} d\theta \times \int_0^5 z^2 dz$$

$$= \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_1^2 \times \left[\theta\right]_0^{2\pi} \times \left[\frac{z^3}{3}\right]_0^5$$

$$= \underbrace{\left(\frac{4}{2} - \frac{1}{2}\right)}_{\frac{3}{2}} \times 2\pi \times \frac{125}{3}$$

$$I = 125\pi$$



4’

Soit $I_2 = \iiint_{[1;2]\times[0;2\pi]\times[0;5]} (\rho^3 cos^2\theta)\, d\rho d\theta dz$
on obtient alors :

1. $I_1 = 75\pi/4$

2.$I = 500\pi/3$

3.$I_1 = 125\pi/4$

4. Aucun des résultats ci – dessus n’est juste

Notes

$$I_1 = \iiint_{[1;2]\times[0;2\pi]\times[0;5]} \rho z^2 \, d\rho d\theta dz$$

$$= \int_1^2 \rho d\rho \times \int_0^{2\pi} d\theta \times \int_0^5 z^2 dz$$

$$= \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_1^2 \times \left[\theta\right]_0^{2\pi} \times \left[\frac{z^3}{3}\right]_0^5$$

$$= \underbrace{\left(\frac{4}{2} - \frac{1}{2}\right)}_{\frac{3}{2}} \times 2\pi \times \frac{125}{3}$$

$$I = 125\pi$$

$$I_2 = \iiint_{[1;2]\times[0;2\pi]\times[0;5]} \rho^3 \cos^2\theta \, d\rho d\theta dz$$

$$= \int_1^2 \rho^3 d\rho \times \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta \times \int_0^5 dz$$

$$= \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_1^2 \times \frac{1}{2}\left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{2\pi} \times 5$$

$$= \left(\frac{16}{4} - \frac{1}{4}\right)\frac{5}{2}\left(2\pi + 0 - 0\right)$$

$$I_2 = \frac{15}{4} \times 5\pi = \frac{75\pi}{4}$$

$$I = I_1 + I_2 = \frac{275\pi}{4}$$