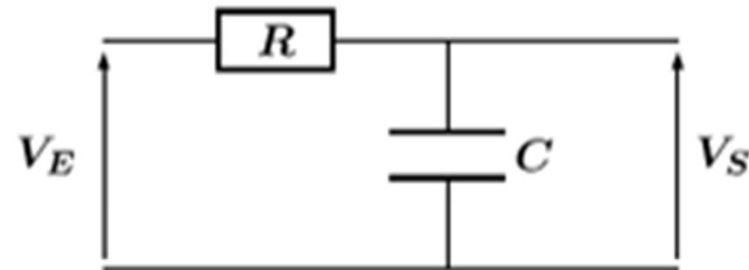


Corrigé DM12&13

Exercice 1

Un filtre RC a pour fonction de transfert :

$$H(f) = \frac{V_S}{V_E} = \frac{1}{1 + jRC\omega} = \frac{1}{1 + j0.1f}$$

Calculer le module et l'argument de cette fonction de transfert pour les 5 fréquences suivantes :

f	1 Hz	5 Hz	10 Hz	20 Hz	100 Hz
Module					
Argument					

En déduire le type de filtre.

$$H(1) = \frac{1}{1+j0,1 \times 1} : |H(1)| = \frac{|1|}{|1+j0,1 \times 1|} = \frac{\sqrt{1^2}}{\sqrt{1^2+0,1^2}} = \frac{1}{\sqrt{1,01}} \approx 0,995$$

$$\arg(H(1)) = \underbrace{\arg(1)}_0 - \arg(1+j0,1 \times 1) = -\arctan\left(\frac{0,1}{1}\right) \approx -0,0997$$

Je calcule le module de $H(f)$:

$$|H(f)| = \frac{1}{\sqrt{1+(0,1f)^2}}$$

Puis je continue en calculant l'argument de $H(f)$:

$$\arg(H(f)) = -\arctan(0,1f)$$

f	1Hz	5Hz	10Hz	20Hz	100Hz
module	0,995	0,894	0,707	0,447	0,0995
arg	-5,71	-26,57	-45	-63,43	-84,29

$$H(f) = \frac{1}{1 + j 0,1 f}$$

Pour 1 Hz: $H_1 = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 0,1^2}} = 0,99$

$$\arg(H_1) = -\arctan(0,1 \times 1) = -5,71^\circ$$

Pour 5 Hz: $H_5 = \frac{1}{\sqrt{1^2 + \frac{1}{2}^2}} = 0,89$

$$\arg(H_5) = -\arctan(0,1 \times 5) = -26,6^\circ$$

Pour 10 Hz: $H_{10} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 0,7$

$$\arg(H_{10}) = -\arctan(0,1 \times 10) = -45^\circ$$

Pour 20 Hz: $H_{20} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = 0,45$

$$\arg(H_{20}) = -\arctan(0,1 \times 20) = -63,4^\circ$$

Pour 100 Hz: $H_{100} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 10^2}} = 0,099$

$$\arg(H_{100}) = -\arctan(0,1 \times 100) = -84,2^\circ$$

f	1 Hz	5 Hz	10 Hz	20 Hz	100 Hz
module	0,995	0,894	0,707	0,447	0,0999
arg	-5,71	-26,57	-45	-63,43	-84,29

⇒ On en conclue que c'est un filtre passe-bas car plus la fréquence augmente, plus le module est réduit donc le signal est de moins en moins exploitable à haute fréquence.

Ex 3 p 14: 2) on a: $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2j}$

$$\cos(2x) = \frac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{2}$$

$$\sin(3x) = \frac{e^{3ix} - e^{-3ix}}{2j}$$

$$\sin x \times \cos(2x) \times \sin(3x) = (e^{ix} - e^{-ix})(e^{2ix} + e^{-2ix})(e^{3ix} - e^{-3ix}) \cdot \frac{1}{8}$$

$$= (e^{3ix} + e^{-ix} - e^{ix} - e^{-3ix})(e^{3ix} - e^{-3ix}) \cdot \frac{1}{8}$$

$$= (\underline{e^{6ix}} + \underline{e^{2ix}} - \underline{e^{4ix}} - 1 - 1 - \underline{e^{-4ix}} + \underline{e^{-2ix}} + \underline{e^{-6ix}}) \cdot \frac{1}{8}$$

$$= (\underline{2\cos(6x)} + \underline{2\cos(2x)} - \underline{2\cos(4x)} - 2) \cdot \frac{1}{8}$$

$$= (\cos(6x) + \cos(2x) - \cos(4x) - 1) x - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{4} (\cos(4x) + 1 - \cos(6x) - \cos(2x))$$

$$\text{alors } J = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x \times \cos(2x) \times \sin(3x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{4} (\cos 4x + 1 - \cos(6x) - \cos(2x)) dx$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos 4x dx + \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{3}} 1 dx - \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos(6x) dx - \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos(2x) dx$$

$$= \frac{1}{16} \int_0^{\frac{\pi}{3}} 4 \cos(4x) dx + \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{3}} 1 dx - \frac{1}{24} \int_0^{\frac{\pi}{3}} 6 \cos(6x) dx - \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{3}} 2 \cos(2x) dx$$

$$= \frac{1}{16} [\sin(4x)]_0^{\frac{\pi}{3}} + \frac{1}{4} [x]_0^{\frac{\pi}{3}} - \frac{1}{24} [\sin 6x]_0^{\frac{\pi}{3}} - \frac{1}{8} [\sin(2x)]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \frac{1}{16} \left(\sin \frac{4\pi}{3} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{3} \right) - \frac{1}{24} \left(\sin \frac{2\pi}{2} \right) - \frac{1}{8} \left(\sin \frac{2\pi}{3} \right)$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{32} + \frac{\pi}{12} - 0 - \frac{2 \times \sqrt{3}}{2 \times 16} = -\frac{3\sqrt{3}}{32} + \frac{\pi}{12}$$

Ex 1 p 29:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2 +$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$$

$$\textcircled{+} \quad a^2 + b^2 = (a+jb)(a-jb)$$

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

$$P(x) = x^2 - 9 = (x-3)(x+3) \text{ est la factorisation de } p \text{ dans } \mathbb{R} \text{ et dans } \mathbb{C}.$$

$$P(x) = x^2 + 9 = x^2 - j^2 9 = (x-3j)(x+3j) \text{ est la factorisation de } P \text{ dans } \mathbb{C}$$

$$P(x) = 4x^2 - 25 = (2x)^2 - 5^2 = (2x-5)(2x+5) \text{ est la factorisation de } P \text{ dans } \mathbb{R} \text{ et } \mathbb{C}.$$

$$P(x) = 9x^2 - 6x + 1 = (3x)^2 - 2 \times 3x \times 1 + 1 = (3x-1)^2 \text{ dans } \mathbb{R} \text{ et } \mathbb{C}.$$

$$P(x) = (x+1)^2 - 16 = (x+1)^2 - 4^2 = (x+1+4)(x+1-4) \\ = (x+5)(x-3) \text{ est la factorisation de } p \text{ dans } \mathbb{R} \text{ et } \mathbb{C}.$$

$$P(x) = 3(x-2)^2 + 5 = (\sqrt{3}(x-2) + j\sqrt{5})(\sqrt{3}(x-2) - j\sqrt{5})$$

$$3(x-2)^2 + 5$$

$$[\sqrt{3}(x-2)]^2 + \sqrt{5}^2 = (\sqrt{3}(x-2) + j\sqrt{5})(\sqrt{3}(x-2) - j\sqrt{5}) \text{ est la factorisation}$$

$$A^2 + B^2 = (A + jB)(A - jB) \text{ de } P \text{ dans } \mathbb{R}.$$

$$P(x) = x^4 - 5x^2 + 4 \quad \text{est un polynôme bicarré}$$

$$\text{Donc } X = x^2 \quad x^2 - 5X + 4$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = -5^2 - 4 \times 1 \times 4$$

$$\Delta = 25 - 16$$

$$\Delta = 9 > 0 \quad \text{l'équation admet 2 racines } x_1 \text{ et } x_2$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 + \sqrt{9}}{2} = \frac{5 + 3}{2} = \frac{8}{2} = \boxed{4}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 - \sqrt{9}}{2} = \frac{5 - 3}{2} = \frac{2}{2} = \boxed{1}$$

$$x_1 = \sqrt{4} = \boxed{2}$$

$$x_2 = \sqrt{1} = \boxed{1}$$

$$\text{Donc } P(x) = (x-4)(x-1) = (x^2-4)(x^2-1)$$

$$(x^2-4) = (x-2)(x+2)$$

$$(x^2-1) = (x-1)(x+1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ce polynôme se factorise en : } (x-2)(x+2)(x-1)(x+1) \\ \text{et factorisé dans } \mathbb{R} \text{ et } \mathbb{C}. \end{array} \right.$$

Rappel $ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2)$
 $\Delta > 0$, x_1 et x_2

Exercice 2

Effectuer les différentes opérations proposées (mettre ces résultats sous la forme (ρ, θ))

1. $z = (10, -40^\circ)$ calculer : $z \cdot \bar{z} = |z|^2$
2. $z = (20, -53,1^\circ)$ calculer : $z + \bar{z} = 2\text{Re}(z)$
3. $z = 2,5 e^{-j\pi/4}$ calculer : $z \cdot \bar{z}$
4. $z = 2 + j8$ calculer : $z - \bar{z} = 2j\text{Im}(z)$
5. $z = (r, \hat{\theta})$ calculer : $z/\bar{z}$

$$\textcircled{4} \underline{z} = 2 + 8j$$

$$\underline{z} - \underline{z}^* = 2 + 8j - (2 - 8j) = 16j$$

$$\textcircled{5} \underline{z} = [r, \theta] \quad \frac{\underline{z}}{\underline{z}^*} = \frac{[r, \theta]}{[r, -\theta]} = [1, 2\theta]$$

Gell

$$\textcircled{1} \underline{z} = [10, -40^\circ] \quad \underline{z} \times \underline{z}^* = [10, -40^\circ] \times [10, 40^\circ] = [100, 0^\circ] = \underline{z}^2 = 100$$

$$\textcircled{2} \underline{z} = [20, -53,1^\circ] \quad \boxed{\underline{z} + \underline{z}^* = 2 \times 20 \times \cos(-53,1^\circ) = 2\text{Re}(\underline{z})}$$

$$a + jb + a - jb = 2a$$

$$[z, \theta] = z \cdot e^{j\theta} = \underbrace{z \cos \theta}_{\text{Re}} + \underbrace{z j \sin \theta}_{\text{Im}}$$

$$\textcircled{3} \underline{z} = 2,5 e^{-j\pi/4} \quad \underline{z} \cdot \underline{z}^* = 2,5 e^{-j\pi/4} \times 2,5 \cdot e^{j\pi/4} = 2,5^2 = 6,25$$