Corrigé DM11

Exercice Vidéo

$* \quad P(x) = x^5 - 4x^4 - 38x^3 + 44x^2 + 37x - 40$

$\hookrightarrow$ Racine évidente : 1 car $p(1) = 1 - 4 - 38 + 44 + 37 - 40 = 0$

$\hookrightarrow$ Racine évidente : -1 car $p(-1) = 0$.

$p'(x) = 5x^4 - 16x^3 - 114x^2 + 88x + 37$.

$p''(x) = 20x^3 - 48x^2 - 228x + 88$

$p'(1) = 0$ donc $p(x)$ admet 1 comme racine double

$p''(1) = -168 \neq 0$. et -1 comme racine simple.

Donc $p(x)$ est divisible par $(x-1)^2(x+1)$ et donc par $(x^3 - x^2 - x + 1)$

$$
\begin{array}{l|l}
x^5 - 4x^4 - 38x^3 + 44x^2 + 37x - 40 & x^3 - x^2 - x + 1 \\
\hline
-\left(x^5 - x^4 - x^3 + x^2\right) & x^2 - 3x - 40 \\
0 - 3x^4 - 37x^3 + 43x^2 + 37x - 40 & \\
-\left(-3x^4 + 3x^3 + 3x - 3x\right) & \\
0 - 40x^3 + 40x^2 + 40x - 40 & \\
-\left(-40x^3 + 40x^2 + 40x - 40\right) & \\
0 &
\end{array}
$$

donc $p(x)$ est factorisable par $(x-1)^2(x+1)(x^2-3x-40)$.

Δ de $x^2-3x-40 = b^2-4ac = (-3)^2 - 4 \times 1 \times -40 = 169$

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3+13}{2} = \frac{16}{2} = 8$$

$$x_2 = \frac{3-13}{2} = \frac{-10}{2} = -5$$

Donc $P(x)$ est factorisable dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$ par : $(x-1)^2(x+1)(x-8)(x+5)$

- $p(x) = x^5 + x^3 - x^2 - 1 \in \mathbb{R}[x]$

$p(1) = 0$

$p'(x) = 5x^4 + 3x^2 - 2x$

$p'(1) = 5 + 3 - 2 = 6 \neq 0$

$p(j) = \underbrace{j^5}_{j} + \underbrace{j^3}_{-j} - \underbrace{j^2}_{+1} - 1 = 0$ alors $p(-j) = 0$

On divise p par :

$(x-1)(x-j)(x+j)$

$(x-1)(x^2+1) = x^3 - x^2 + x - 1$

⊕ Factorisation dans $\mathbb{C}$:

$$\begin{array}{l|l} x^5 + x^3 - x^2 - 1 & x^3 - x^2 + x - 1 \\ \hline & x^2 + x + 1 \end{array}$$

$p(x) = (x-1)(x-j)(x+j)\left(x - \frac{-1+j\sqrt{3}}{2}\right)\left(x - \frac{-1-j\sqrt{3}}{2}\right)$

" " " $\left(x + \frac{1-j\sqrt{3}}{2}\right)\left(x + \frac{1+j\sqrt{3}}{2}\right)$ ○

donc $p(x) = (x-1)(x^2+1)(x^2+x+1)$ est la factorisation dans $\mathbb{R}$. ⊛

x^2+1 : $\Delta < 0$

x^2+x+1 : $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$ $\quad x_1 = \frac{-1+j\sqrt{3}}{2}$ et $x_2 = \overline{x_1}$

2) $f(x) = \dfrac{5x^2 + 1}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}$

a. On factorise $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

Soit $P(1) = 0$

On cherche si $x = 1$ est une racine multiple :

$P'(x) = 3x^2 - 4x - 5$

$P'(1) = 3 - 4 - 5 = -6 \neq 0$

$P(x)$ est divisible par $(x-1)$:

$$
\begin{array}{r|l}
x^3 - 2x^2 - 5x + 6 & x - 1 \\
\cline{2-2}
-(x^3 - x^2) \quad & x^2 - x - 6 = Q(x) \\
\cline{1-1}
-x^2 - 5x + 6 & \\
-(-x^2 + x) \quad & \\
\cline{1-1}
-6x + 6 & \\
-(-6x + 6) & \\
\cline{1-1}
0 \quad &
\end{array}
$$

Ainsi,

$P(x) = (x-1)\underbrace{(x^2 - x - 6)}_{= Q(x)}$

$Q(-2) = Q(3) = 0$

$Q'(x) = 2x - 1$

$Q'(-2) = -5 \qquad Q'(3) = 5$

donc $Q(x) = (x+2)(x-3)$

Ainsi, $P(x) = (x-1)(x+2)(x-3)$

b. f est irréductible car son dénominateur est un produit de polynômes de degré 1.

c. $f(x) = \dfrac{5x^2+1}{x^3-2x^2-5x+6} = \dfrac{5x^2+1}{(x-1)(x+2)(x-3)}$ qu'on peut donc écrire

sous la forme $f(x) = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x+2} + \dfrac{c}{x-3}$

d. On cherche a, b et c.

- $a = \lim\limits_{x \to 1} \left(f(x).(x-1) \right) = \left[f(x).(x-1) \right]_{x=1}$

$f(x).(x-1) = a + \dfrac{b(x-1)}{x+2} + \dfrac{c(x-1)}{x-3} = \dfrac{5x^2+1}{(x+2)(x-3)}$

$\overset{x=1}{\Leftrightarrow} \quad a = \dfrac{5+1}{3 \times (-2)} = -1$

- $b = \lim\limits_{x \to -2} \left(f(x).(x+2) \right) = \left[f(x).(x+2) \right]_{x=-2}$

$$f(x).(x+2) = b + \frac{a(x+2)}{x-1} + \frac{c(x+2)}{x-3} = \frac{5x^2+1}{(x-1)(x-3)}$$

$$\overset{x=-2}{\Longleftrightarrow} \quad b = \frac{20+1}{-3\times(-5)} = \frac{7}{5}$$

- $c = \lim\limits_{x = 3} \left(f(x).(x-3) \right) = \left[f(x).(x-3) \right]_{x=3}$

$$f(x).(x-3) = c + \frac{a(x-3)}{x-1} + \frac{b(x-3)}{x+2} = \frac{5x^2+1}{(x-1)(x+2)}$$

$$\overset{x=3}{\Longleftrightarrow} \quad c = \frac{45+1}{2\times 5} = \frac{23}{5}$$

e) Ainsi $f(x) = -\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{7}{5} \cdot \dfrac{1}{x+2} + \dfrac{23}{5} \cdot \dfrac{1}{x-3}$

donc $\displaystyle\int f(x).dx = -1 \int \frac{1}{x-1} \cdot dx + \frac{7}{5} \int \frac{1}{x+2} \cdot dx + \frac{23}{5} \int \frac{1}{x-3} \cdot dx$

$$= -\ln(|x-1|) + \frac{7}{5} \ln(|x+2|) + \frac{23}{5} \ln(|x-3|) + C \quad \forall C \in \mathbb{R}$$