Corrigé DM14 & TD

Exercice 3 page 29

$P(x) = x^3 - 6x^2 + x - 6$

$P(1) = 1 - 6 + 1 - 6 = -10 \neq 0$

$P(6) = 6^3 - 6 \times 6^2 + 6 - 6 = 0$ donc P est divisible par $(x-6)$

$$\begin{array}{l|l} x^3 - 6x^2 + x - 6 & x - 6 \\ \hline -(x^3 - 6x^2) & x^2 + 1 \\ \quad x - 6 & \\ \quad -(x-6) & \\ \quad 0 & \end{array}$$

donc $P(x) = (x-6)(x^2+1)$ est factorisé dans $\mathbb{R}$

Pour factoriser $P(x)$ dans $\mathbb{C}$, on résout $x^2 + 1 = 0$

① $\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 0^2 - 4 \times 1 \times 1$

$\Delta = 0 - 4 = -4$

$\Delta < 0$ donc admet 2 racines complexes

$x1 = \dfrac{-b + j\sqrt{|\Delta|}}{2a} = \dfrac{j\sqrt{4}}{2} = \dfrac{2j}{2} = j$

$x2 = \dfrac{-b - j\sqrt{|\Delta|}}{2a} = \dfrac{-j\sqrt{4}}{2} = \dfrac{-2j}{2} = -j$

② $x^2 = -1 = j^2$

$\Leftrightarrow \quad x = \pm j$

③ $A^2 + B^2 = (A + jB)(A - jB)$

$x^2 + 1 = (x + j)(x - j)$

Donc $P(x) = (x-6)(x-j)(x+j)$ est factorisé dans $\mathbb{C}$

Exercice 4 page 29:

$P(x) = x^4 - 3x^3 - 17x^2 + 39x - 20$

$P(1) = 1 - 3 - 17 + 39 - 20 = 0$

$P(-1) = 1 - 3\times(-1) - 17 - 39 - 20 = -72 \neq 0 \quad P(-1) \neq 0$

$P'(x) = 4x^3 - 3\times 3x^2 - 17\times 2x + 39$

$P'(x) = 4x^3 - 9x^2 - 34x + 39$

$P'(1) = 4 - 9 - 34 + 39 = 0$

$P''(x) = 4\times 3x^2 - 9\times 2x - 34$

$P''(x) = 12x^2 - 18x - 34$

$P''(1) = 12 - 18 - 34 = -40 \neq 0 \quad P''(1) \neq 0$

$P(1) = P'(1) = 0$ donc 1 est une racine double, et

P est divisible par $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$

$$
\begin{array}{r|l}
x^4 - 3x^3 - 17x^2 + 39x - 20 & x^2 - 2x + 1 \\
\hline
-(x^4 + 2x^3 + x^2) & x^2 - x - 20 \\
-x^3 - 18x^2 + 39x - 20 & \\
-(-x^3 + 2x^2 - x) & \\
-20x^2 + 40x - 20 & \\
-(-20x^2 + 40x - 20) & \\
0 &
\end{array}
$$

$P(x) = (x-1)^2(x^2 - x - 20)$ est factorisé dans $\mathbb{R}$

On résout $x^2 - x - 20$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-20)$

$\Delta = 1 + 80 = 81$

$\Delta > 0$ donc admet 2 racines réelles

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1+\sqrt{81}}{2} = \frac{1+9}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1-\sqrt{81}}{2} = \frac{1-9}{2} = \frac{-8}{2} = -4$$

Donc $P(x) = (x-1)^2(x-5)(x+4)$ est factorisé dans $\mathbb{C}$ et dans $\mathbb{R}$.

Exo 6 page 29 :

$P(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + 4x - 8$

$P(-2) = 16 - 8 + 8 - 8 - 8 = 16 - 16 = 0$ $\qquad$ $P(1) = 1 + 1 + 2 + 4 - 8 = 8 - 8 = 0$

P est divisible par $(x-1)(x+2)$.

$B = (x-1)\times(x+2) = x^2 + 2x - x - 2 = x^2 + x - 2$

$$
P = A = \begin{array}{r|l}
x^4 + x^3 + 2x^2 + 4x - 8 & x^2 + x - 2 \;= B \\
\hline
-(x^4 + x^3 - 2x^2) \qquad\quad & x^2 + 4 \;= Q \\
\hline
4x^2 + 4x - 8 & \\
-(4x^2 + 4x - 8) & \\
\hline
0 & \\
\| & \\
R &
\end{array}
$$

$P(x) = (x-1)(x+2)(x^2+4)$ est la factorisation de P dans $\mathbb{R}$.

$P(x) = (x-1)(x+2)(x^2+4)$ $\qquad$ $(a^2 + b^2) = (a - jb)(a + jb)$

$P(x) = (x-1)(x+2)(x-2j)(x+2j)$ est la factorisation de P dans $\mathbb{C}$.

Partie C : Application à la Décomposition en somme d'éléments simples d'une fraction rationnelle

Page 34 chapitre 5

I. <u>Décomposition en somme d'éléments simples d'une fraction rationnelle $\frac{A(x)}{B(x)}$ où A et B sont des polynômes, et application au calcul de primitives.</u>

Soit $F(x) = \frac{x^4-x^3-7x^2+2x+5}{x^3+2x^2-x-2}$ une fraction rationnelle, le but de ce problème est de déterminer les primitives de F. Pour cela, il vous faudra la décomposer en somme d'éléments simples en suivant les étapes suivantes :

1) Factoriser le dénominateur B de F.

2) Déterminer si F est réductible, et si c'est le cas la réduire.

Une fraction rationnelle $F = \frac{A}{B}$ est dite <u>irréductible</u> lorsque les polynômes A et B n'ont pas de facteurs communs, ou bien lorsque les polynômes A et B n'ont aucune racine commune.

① $B(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$

$B(-2) = -8+8+2-2=0 \qquad B(1) = 1+2-1-2=0 \qquad B(-1) = -1+2+1-2=0$

$B(x) = (x+2)(x-1)(x+1)$ est factorisé dans $\mathbb{R}$.

② $F(x) = \dfrac{x^4 - x^3 - 7x^2 + 2x + 5}{(x+2)(x-1)(x+1)} = \dfrac{A(x)}{B(x)}$

$A(-2) \neq 0 \qquad A(1) = 0 \qquad A(-1) \neq 0$ donc 1 est racine commune de A et B. Donc $x-1$ est facteur commun de A et B, et F est donc réductible.

$$\begin{array}{l|l}
x^4 - x^3 - 7x^2 + 2x + 5 & x-1 \\ \hline
-(x^4 - x^3) & x^3 - 7x - 5 \\ \hline
\quad -7x^2 + 2x + 5 & \\
\quad -(-7x^2 + 7x) & \\ \hline
\qquad -5x + 5 & \\
\qquad -(-5x+5) & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

Donc $F(x) = \dfrac{(x^3 - 7x - 5)\cancel{(x-1)}}{(x+2)\cancel{(x-1)}(x+1)} = \dfrac{x^3 - 7x - 5}{(x+2)(x+1)} = \dfrac{A(x)}{B(x)}$

On note

3) Déterminer si F a une partie entière, et si c'est le cas noter G la fraction restante.

Soit $F = \frac{A}{B}$, une fraction irréductible. Deux cas de figure se présentent :

- Soit <u>deg(A) ≥ deg(B)</u>, on peut alors effectuer la division euclidienne de A par B. On obtient donc les polynômes Q et R tels que :

$$\begin{cases} A = BQ + R \\ \deg(R) < \deg(B) \end{cases} \text{ et } F = \frac{A}{B} = \frac{BQ+R}{B} = Q + \frac{R}{B}.$$

Q est appelé <u>partie entière</u> de F.

- Soit deg(A)<deg(B), on ne peut alors pas effectuer de division euclidienne de A par B, et F ne possède pas de partie entière.

4) Ecrire la forme de la décomposition en somme d'éléments simples de G, puis calculer les coefficients a_i voir ci-dessous.

Soit G, une fraction irréductible, sans partie entière, à pôles simples : $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$

On a alors : $G(x) = \frac{P(x)}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n)}$ **avec** $\begin{cases} \deg(P) < n \\ P(\alpha_i) \neq 0 \quad \forall 1 \leq i \leq n \end{cases}$

Et G se décompose en somme d'éléments simples :

$$G(x) = \frac{a_1}{x-\alpha_1} + \frac{a_2}{x-\alpha_2} + \dots + \frac{a_n}{x-\alpha_n} \quad \text{avec} \quad a_i = [(x-\alpha_i)G(x)]_{x=\alpha_i} \quad \forall 1 \leq i \leq n.$$

5) A l'aide des résultats des questions 3 et 4, en déduire la décomposition en somme d'éléments simples de F, puis déterminer ses primitives.

③ $F(x) = \dfrac{x^3-7x-5}{(x+1)(x+2)} = \dfrac{x^3-7x-5}{x^2+3x+2} = \dfrac{A}{B}$

$\deg A = 3 > \deg B = 2$, F a donc une partie entière

$$\begin{array}{r|l} x^3-7x-5 & x^2+3x+2 \\ \cline{2-2} -(x^3+3x^2+2x) & x-3 \\ \hline -3x^2-9x-5 & \\ -(-3x^2-9x-6) & \\ \hline 1 & \end{array}$$

$F = \dfrac{BQ+R}{B} = \dfrac{BQ}{B} + \dfrac{R}{B} = Q + \dfrac{R}{B}$

$F(x) = \underbrace{x-3}_{\text{Partie entière}} + \dfrac{1}{(x+1)(x+2)} = G(x)$

④ $G(x) = \dfrac{1}{(x+1)(x+2)} = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{b}{x+2}$

$a = \left[(x+1)G(x)\right]_{x=-1} = \left[\dfrac{1}{x+2}\right]_{x=-1} = \dfrac{1}{1} = 1$; $b = \left[(x+2)G(x)\right]_{x=-2} = \left[\dfrac{1}{x+1}\right]_{x=-2} = -1$

⑤ Conclusion : $F(x) = x - 3 + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$

$$\int F(x)\,dx = \int (x-3)\,dx + \int \frac{1}{x+1}\,dx - \int \frac{1}{x+2}\,dx$$

$$\int \frac{u'}{u}\,dx = \ln|u| + cte$$

$$\int F(x)\,dx = \frac{x^2}{2} - 3x + \ln|x+1| - \ln|x+2| + cte$$

p. 38 _ Ex2 $\quad F(x) = \frac{x^5+x^2}{x^3-2x^2-x+2} = \frac{A(x)}{B(x)}$

① $B(1)=0$; $B(2)= 8-8-2+2=0$; $B(-1)=-1-2+1+2=0$ donc $B(x)=(x-1)(x-2)(x+1)$ est factorisé dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$

② $F(x) = \frac{x^5+x^2}{(x-1)(x-2)(x+1)}$

Vocab : les pôles de F sont les racines de son dénominateur : 1, 2 et -1.

$A(1) \neq 0 \quad A(2) \neq 0 \quad A(-1) = 0$. F est donc réductible car A et B ont -1 comme racine commune.

Exercice 2 page 38

② $F(x) = \dfrac{(x^4 - x^3 + x^2)\cancel{(x+1)}}{(x-1)(x-2)\cancel{(x+1)}} = \dfrac{x^4 - x^3 + x^2}{\underbrace{(x-1)(x-2)}} \overset{\text{noté}}{=} \dfrac{A(x)}{B(x)}$

③ $\deg A = 4 > \deg B = 2$

$$
\begin{array}{r|l}
A = x^4 - x^3 + x^2 & x^2 - 3x + 2 = B \\
\hline
-(x^4 - 3x^3 + 2x^2) & x^2 + 2x + 5 = Q \\
\hline
2x^3 - x^2 & \\
-(2x^3 - 6x^2 + 4x) & \\
\hline
5x^2 - 4x & \\
-(5x^2 - 15x + 10) & \\
\hline
R = 11x - 10 &
\end{array}
$$

$F(x) =$

A finir...

3) Méthodologie pour factoriser un polynôme de degré>2

Page 27 chapitre 5

✓ Définition

Factoriser un polynôme dans $\mathbb{C}$ (dans $\mathbb{R}$), c'est l'écrire comme produit de polynômes à coefficients complexes (réels) de plus bas degré possible.

✓ Théorème de D'Alembert

- **Soit P, un polynôme de degré n :** $P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ... + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n$.
  P possède alors n racines dans l'ensemble $\mathbb{C}$: $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ **distinctes ou non. On peut alors factoriser P dans $\mathbb{C}$:** $P(z) = a_n (z - \alpha_1)(z - \alpha_2)...(z - \alpha_n)$
  P est donc factorisable dans $\mathbb{C}$ en n polynômes de degré 1.

- **Soit P, un polynôme de degré n à coefficients réels :**
  $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$.
  P est factorisable dans $\mathbb{R}$ en produit de
  - polynômes de degré 1 à racine réelle : (x-a) avec $a \in \mathbb{R}$
  et de - en polynômes de degré 2 à racines complexes conjuguées.

✓ Méthodes

- Chercher une ou plusieurs racines évidentes parmi : 0 ; 1 ; -1 ; 2 ; -2 ; j ; -j ;… avec éventuellement leur multiplicité. Puis effectuer une division euclidienne.
- Penser aux identités remarquables.
- Ou bien résoudre P(z)=0, puis factoriser.

Page 27 chapitre 5

✓ <u>Exemple 1</u> Factoriser dans $\mathbb{C}$ le polynôme suivant : $P(z) = z^4 - 1$.

....

....

Factoriser alors le polynôme P dans $\mathbb{R}$:

....

....

✓ <u>Méthode pour factoriser dans $\mathbb{R}$</u> On factorise d'abord P dans $\mathbb{C}$, puis on multiplie les paires de polynômes de degré 1 à racines complexes conjuguées.

En effet : $P(x) = (x - \alpha)(x - \overline{\alpha}) =$ ....

....

✓ <u>Exemple 2</u> Factoriser dans $\mathbb{C}$ puis dans $\mathbb{R}$ le polynôme suivant : $P(z) = z^5 - 1$.

En reprenant le deuxième exemple du paragraphe I.4), factoriser le polynôme P dans $\mathbb{C}$ puis dans $\mathbb{R}$:

Page 29 chapitre 5

Quelle est la factorisation de P dans $\mathbb{C}$? $P(z) = z^3 - 3z^2 + 4z - 2$

$P(z) =$……………………………………………………………………………

Quelle est la factorisation de P dans $\mathbb{R}$?

$P(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 2 =$……………………………………………………………

✓ Déterminer les racines de P, puis factorisez-le :

$$P(z) = 4.z^2 + 4.z + 1 - 2j \ ; \ P \in \mathbb{C}[X] \setminus \mathbb{R}[X]$$

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

Exercice 6 Factoriser dans $\mathbb{C}$ puis dans $\mathbb{R}$ les polynômes suivants :

Page 29 chapitre 5

$P(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + 4x - 8$; $P(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

3) <u>Relation entre les coefficients et les racines d'un polynôme de degré 2</u> :

Soit $P(z) = z^2 - s.z + p \in \mathbb{C}[X]$. Soit α et β les racines de P.
Alors : $s = \alpha + \beta$ et $p = \alpha.\beta$

✓ <u>Démonstration</u>

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

✓ <u>Exercice</u> Résoudre le système suivant : $\begin{cases} \alpha + \beta = -5 \\ \alpha.\beta = 5 \end{cases}$.

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………