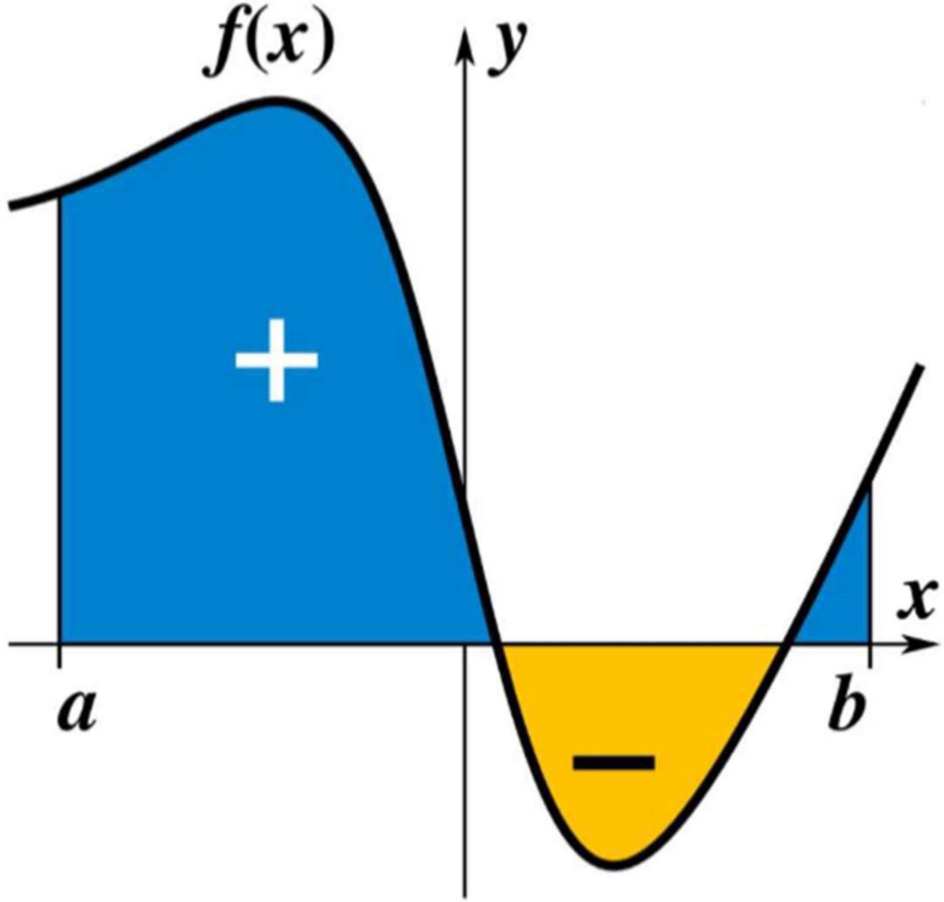
Chapitre 6 : Compléments sur le calcul intégral

Amphi 1



Partie A : Rappels sur les propriétés et calculs de base

Page 4 chapitre 7

Théorèmes/Définitions/Notations :

1) Toute fonction continue sur [a,b] est intégrable sur [a,b]
2) Soit f, une fonction intégrable sur [a,b]. On appelle fonction primitive de f sur [a,b] toute fonction notée F, définie par : $F'(x) = f(x) \ \forall x \in [a,b]$.
3) On note $\int f(x)dx$ toutes les fonctions primitives de f, on a donc :

$$\int f(x)dx = F(x) + cte$$

4) Soit f, une fonction continue sur [a,b], soit F, une fonction primitive de f. On a alors :

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)}$$

Page 4 chapitre 7

Propriétés

1) Soit f, g deux fonctions continues sur [a,b]. Soit α et β deux nombres réels. On a alors :

$$\int_a^b (\alpha f(t)+\beta g(t))dt = \alpha\int_a^b f(t)dt + \beta\int_a^b g(t)dt$$

2) Relation de Chasles : Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé I. Soit a,b,c trois réels de I. On a alors :

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

3) $\boxed{\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt}$

4) Soit f et g, deux fonctions continues sur [a,b] telles que $f(x)\le g(x)\ \forall x\in[a,b]$, on a alors :

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$$

Page 4 chapitre 7

<u>Intégrales, parité et périodicité</u> :

1) Si f est une fonction paire et continue sur [-a,a], alors : $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2.\int_{0}^{a} f(x)dx$

2) Si f est une fonction impaire et continue sur [-a,a], alors : $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

3) Si f est une fonction T-périodique, continue sur tout intervalle [a,a+T], alors :

$$\int_{a}^{a+T} f(t)dt = \int_{0}^{T} f(t)dt = \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,dt$$

1	$\int x^{\alpha}.dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + cte \; ; \; \alpha \neq -1$	$\int U'.U^{\alpha} dx = \frac{U^{\alpha+1}}{\alpha+1} + cte \; ; \; \alpha \neq -1$
2	$\int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \sqrt{x} + cte$	$\int \frac{U'}{2\sqrt{U}} dx = \sqrt{U} + cte$
3	$\int e^{x}.dx = e^{x} + cte$	$\int U'.e^{U}.dx = e^{U} + cte$
4	$\int \frac{1}{x} dx = \ln(\lvert x \rvert) + cte$	$\int \frac{U'}{U} dx = \ln(\lvert U \rvert) + cte$
5	$\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + cte$	$\int \frac{U'}{U^2} dx = -\frac{1}{U} + cte$
6	$\int \cos(x).dx = \sin(x) + cte$	$\int U'.\cos(U).dx = \sin(U) + cte$
7	$\int \sin(x).dx = -\cos(x) + cte$	$\int U'.\sin(U).dx = -\cos(U) + cte$
8	$\int \frac{1}{\cos^2(x)}.dx = \tan(x) + cte$	$\int \frac{U'}{\cos^2(U)}.dx = \tan(U) + cte$
9	$\int (1+\tan^2(x)).dx = \tan(x) + cte$	$\int U'.(1+\tan^2(U)).dx = \tan(U) + cte$
12	$\int \frac{1}{1+x^2}.dx = \arctan(x) + cte$	$\int \frac{U'}{1+U^2}.dx = \arctan(U) + cte$

Page 6 chapitre 7

Notes

Page 5 chapitre 7

ⓐ $\int u' u^{\alpha} \, dt = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + cte \; ; \; \alpha \neq -1$

$I = \int_0^3 2t(t^2-9)^{10} \, dt = \left[\frac{(t^2-9)^{11}}{11}\right]_0^3 = 0 - \frac{(-9)^{11}}{11} = + \frac{9^{11}}{11}$

$u = t^2 - 9 \Rightarrow u' = 2t$

ⓑ $\int u' \cdot e^{u} \, dt = e^{u} + cte$

$\sin t = u \Rightarrow u' = \cos t$

$J = \int_0^{\pi} \cos t \cdot e^{\sin t} \, dt = \left[e^{\sin t} + \cancel{cte}\right]_0^{\pi} = e^{\sin \pi} + \cancel{cte} - (e^{\sin 0} + \cancel{cte}) = 0$

Notes

Page 5 chapitre 7

ⓒ $\int \frac{U'}{U}\,dt = \ln|U| + cte$

$K = \frac{1}{6}\int_0^1 \frac{6x}{3x^2+4}\,dx = \frac{1}{6}\cdot\left[\ln|3x^2+4|\right]_0^1 = \frac{1}{6}\left(\ln 7 - \ln 4\right)$

$3x^2+4 = U \Rightarrow U' = 6x$

ⓓ $\int U' \cdot \cos U\,dt = \sin U + cte$

$\frac{1}{2}\int 2t\cdot\cos(\underbrace{t^2+1}_{=U})\,dt = \frac{1}{2}\cdot\sin(t^2+1) + cte$

$U \Rightarrow U' = 2t$

Notes

Page 7 chapitre 7

$$\int_0^{\pi/2} \sin t \times e^{t}\, dt =$$

$$\int_0^{\pi} (2t+1) \times \cos(3t)\, dt =$$

$$\int_1^{e} (t+1) \times \ln(t)\, dt =$$

$$\int_a^b (U \times V)' \, dt = \int_a^b (U' \times V + U \times V') \, dt$$

Brouillon

$$[U \times V]_a^b = \int_a^b U'.V \, dt + \underbrace{\int_a^b U.V' \, dt}$$

$$\underbrace{\int_a^b U.V' \, dt} = [U.V]_a^b - \underbrace{\int_a^b U'.V \, dt}_{\text{facile}}$$

$\boxed{\text{IPP}}$

Partie B : Méthodes de calcul

Lundi 17 : DS amphi Est

Page 8 chapitre 7

I. Intégration par parties

Programme : . $\mathbb{C}$ (écriture polaire...)
. Euler (linéarisation, $\int$)
. Polynômes & Fractions (DSES)
. IPP

1) La formule

Soit u et v deux fonctions dérivables sur [a,b] telles que u' et v' sont continues sur [a,b].

On a alors : $$\int_a^b u(t).v'(t)dt = [u(t).v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t).v(t)dt$$

Démonstration

$[u(t).v(t)]' = u'(t).v(t) + u(t).v'(t)$

$\int_a^b [u(t).v(t)]' dt = \int_a^b u'(t)v(t)\,dt + \int_a^b u(t).v'(t)\,dt$

$[u(t).v(t)]_a^b = \int_a^b u'(t).v(t)\,dt + \int_a^b u(t).v'(t)\,dt$

Donc : $\int_a^b u(t).v'(t)dt = [u(t).v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t).v(t)\,dt$ ← 1 pt. sur le DS.

Page 8 chapitre 7

2) Remarques 1° Cette formule s'applique lorsqu'on cherche à calculer l'intégrale d'un produit de fonctions qui n'est pas de la forme U'.f '(U) (voir les formules de la colonne droite du tableau p.7), et à condition que $\int_a^b u'(t).v(t)dt$ soit plus facile à calculer que $\int_a^b u(t).v'(t)dt$.

Page 8 chapitre 7

3) Exemples Calculer les intégrales suivantes :

$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cos(t)\, dt$ aucune formule de primitives de la page 6 ne peut s'appliquer ici : IPP $\int_a^b U.V'\, dt = [U.V]_a^b - \int_a^b U'.V\, dt$

On pose $\begin{cases} U = t \\ V' = \cos t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U' = 1 \\ V = \sin t \end{cases}$

$K = \int_0^{\pi/2} t.\cos t\, dt = [t.\sin t]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} 1.\sin t\, dt$

$K = \frac{\pi}{2}.\sin\frac{\pi}{2} - 0 + [+\cos t]_0^{\pi/2}$

$K = \frac{\pi}{2} + \underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{0} - \underbrace{\cos 0}_{1} = \frac{\pi}{2} - 1.$

Page 10 chapitre 7

$L(t) = \int (t^5 - 3t + 2).\ln(t)\,dt =$ Aucune formule de la page 6 ne s'applique ici

IPP: $\int_a^b U.V'\,dt = [U.V]_a^b - \int_a^b U'.V\,dt$

On pose $\begin{cases} U = \ln t \\ V' = t^5 - 3t + 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} U' = \frac{1}{t} \\ V = \frac{t^6}{6} - 3\frac{t^2}{2} + 2t \end{cases}$

$$L(t) = \left(\frac{t^6}{6} - 3\frac{t^2}{2} + 2t\right).\ln t - \int \underbrace{\frac{1}{t}\left(\frac{t^6}{6} - 3\frac{t^2}{2} + 2t\right)}\,dt$$

$$- \int \left(\frac{t^5}{6} - \frac{3t}{2} + 2\right)\,dt$$

$$L(t) = \left(\frac{t^6}{6} - \frac{3t^2}{2} + 2t\right).\ln t - \left(\frac{t^6}{36} - \frac{3t^2}{4} + 2t\right) + cte$$

Notes

Page 9 ou 11 chapitre 7

Moyen mnémotechnique pour choisir U dans la forme d'IPP:

$$\int_a^b U.V'\,dt = [U.V]_a^b - \int_a^b U'.V\,dt$$

choix U

ALPES

A → Arctan ; L → ln ; P → Polynômes ; E → Exp. ; S → sin, cos

Expls: $\int_0^{\pi/2} t.\cos t\,dt$; $\int \left(\frac{t^5}{6} - \frac{3t}{2} + 2\right).\ln t\,dt$; $\int_0^1 (t+1)e^{3t}\,dt$

$P \times S$, $U = t$, $V' = \cos t$

$P \times L$, $U = \ln t$, $V' = \frac{t^5}{6} - \frac{3t}{2} + 2$

$P \times E$, $U = t+1$, $V' = e^{3t}$

Notes

Page 10 chapitre 7

ASTUCE .

$J(t) = \int 1.\ln(t)dt$

PxL

$\begin{cases} U = \ln t \\ V' = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} U' = \frac{1}{t} \\ V = t \end{cases}$

$$\int_a^b U.V'dt = [U.V]_a^b - \int_a^b U'.V\,dt$$

$$J(t) = t.\ln t - \int \underbrace{\frac{1}{t}.t}_{1}\,dt = t.\ln t - t + cte$$

Vérification : $J'(t) = (\underbrace{t.\ln t}_{U.V} - t + cte)' = 1.\ln t + \underbrace{t.\frac{1}{t}}_{1} - 1 = \ln t$ $\underline{\underline{ok}}$

Notes

Page 10 chapitre 7

$K = \int_0^3 \underbrace{(x-3)^2}_{P} . \underbrace{e^{5x}}_{E} dx \ldots$

$(f^2)' = 2.f'.f$

IPP1 $\begin{cases} U = (x-3)^2 \\ V' = e^{5x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U' = 2(x-3) \\ V = \frac{1}{5} e^{5x} \end{cases}$

{ [(

$\int_a^b u.v' dx = [u.v]_a^b - \int_a^b u'.v\, dx$

$K = -\frac{9}{5} - \frac{6}{25} - \frac{2e^{15}}{125} - \frac{2}{125} \ldots$

$K = \left[\frac{1}{5}(x-3)^2 . e^{5x}\right]_0^3 - \frac{2}{5}\int_0^3 (x-3).e^{5x} dx$

$K = 0 - \frac{1}{5}(-3)^2 - \frac{2}{5} . \boxed{J}$ ou $J = \int_0^3 (x-3) e^{5x} dx$

IPP2 $\begin{cases} U = x-3 \\ V' = e^{5x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U' = 1 \\ V = \frac{1}{5} e^{5x} \end{cases}$ $\frac{1}{5}$

$K = -\frac{9}{5} - \frac{2}{5} \times \left\{ \left[(x-3).\frac{e^{5x}}{5}\right]_0^3 - \frac{1}{5}\int_0^3 e^{5x} dx \right\}$

$= -\frac{9}{5} - \frac{2}{5}\left\{ 0 - \frac{(-3)}{5} - \frac{1}{5} . \left[\frac{e^{5x}}{5}\right]_0^3 \right\} = -\frac{9}{5} - \frac{2}{5} . \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{25}(e^{15} - 1)\right) = -\frac{9}{5} - \frac{2}{25}\left(3 - \frac{e^{15}}{5} + \frac{1}{5}\right)$

TP8

Notes

Chap5

Exercice 2 On souhaite décomposer la fraction G définie ci-après en somme d'éléments simples dans l'ensemble des nombres réels : $\boxed{G(s) = \frac{s+1}{s^2(\tau s+1)}}$ où τ est une constante réelle.

1) Factoriser le dénominateur de G dans l'ensemble des complexes et des réels. Précisez les pôles de la fractions F et leur multiplicité (= les racines de son dénominateur).
2) G est-elle irréductible ?
3) G a-t-elle une partie entière ?
4) On admet que la forme de la décomposition de G en somme d'éléments simples dans l'ensemble des nombres réels est :

$G(s) = \frac{s+1}{s^2(\tau s+1)} = \frac{a}{s^2} + \frac{b}{s} + \frac{c}{\tau s+1}$ où a, b et c sont des nombres à déterminer.

a) Calculer a et c, à l'aide de la méthode courte.

b) On obtiendra la valeur de b, en calculant la limite : $\lim_{s \to +\infty} s.F(s)$

c) Conclure, puis en déduire la transformée inverse de Laplace de F(s), en s'aidant du tableau précédent.

Notes

$G(s) = \dfrac{s+1}{s^2(\tau s+1)} = \dfrac{A}{B}$ où τ est une constante.

$0 = 0 + b + \frac{c}{\tau}$

$b = -\frac{c}{\tau} = -\frac{\tau^2-\tau}{\tau} = -(\tau-1)$

$\boxed{b = 1-\tau}$

$\frac{s^2}{\tau s^3} = \frac{1}{\tau s}$

Conclu : $G(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{1-\tau}{s} + \frac{\tau^2-\tau}{\tau s+1}$

① Factorisation de B : $B(s) = s^2 \times (\tau s+1) = 0 \iff s^2 = 0$ ou $\tau s + 1 = 0$

Les pôles de G sont : 0 est double $\iff s = 0$ ou $s = -\frac{1}{\tau}$

$-\frac{1}{\tau}$ est simple.

② $G(s) = \frac{s+1}{s^2(\tau s+1)}$ est irréductible car A et B n'ont aucun facteur commun.

③ $\deg A = 1 < \deg B = 3$. G n'a donc pas de partie entière

④ $sG(s) = \frac{s(s+1)}{s^2(\tau s+1)} = \frac{as}{s^2} + \frac{bs}{s} + \frac{cs}{\tau s+1}$

$a = \left[s^2 . G(s)\right]_{s=0} = \left[\frac{s+1}{\tau s+1}\right]_{s=0} = \frac{1}{1} = \boxed{1 = a}$; $c = \left[(\tau s+1)\, G(s)\right]_{s=-\frac{1}{\tau}} = \left[\frac{s+1}{s^2}\right]_{s=-1/\tau} = \frac{-\frac{1}{\tau}+1}{\frac{1}{\tau^2}}$

$c = \left(-\frac{1}{\tau}+1\right)\tau^2 = \boxed{\tau^2 - \tau}$; $b = ??$ $\boxed{\lim_{s\to+\infty} s.G(s)} = \lim_{s\to+\infty} \frac{s^2}{\tau s^3} = \lim_{s\to+\infty}\left(\frac{a}{s} + b + \frac{c}{\tau}\right)$