Corrigé DM15 & TD

Exercice 1 Vidéo

b) $P(x)\ x^5-4x^4-38x^3+44x^2+37x-40$

$P'(x)=5x^4-16x^3-114x^2+88x+37$

$P''(x)=20x^3-48x^2-228x+88$

$x=-1$ est racine évidente et $P'(-1)\neq 0$: -1 est racine simple.

$x=1$ est racine évidente et $P'(1)=0$: 1 est racine double.

avec $P''(1)\neq 0$

donc $P(x)=(x-1)^2(x+1)\,Q(x)$

avec $(x-1)^2(x+1)=(x-1)(x-1)(x+1)=(x-1)(x^2-1)=x^3-x-x^2+1$

P est donc divisible par $(x-1)^2(x+1)=x^3-x-x^2+1$

$$\begin{array}{l|l} x^5-4x^4-38x^3+44x^2+37x-40 & x^3-x^2\cancel{+1}^{-x} = (x-1)^2(x+1) \\ \underline{-(x^5-x^4-x^3+x^2)} & x^2-3x-40 \\ \quad -3x^4-37x^3+43x^2+37x & \\ \quad \underline{-(-3x^4+3x^3+3x^2-3x)} & \\ \qquad -40x^3+40x^2+40x-40 & \\ \qquad \underline{-(-40x^3+40x^2+40x-40)} & \\ \qquad\qquad 0 & \end{array}$$

D'où $P(x)=(x-1)^2(x+1)(x^2-3x-40)$

On calcule le Δ associé à $x^2-3x-40$

$$\Delta=(-3)^2-4\times1\times(-40)=169$$

2 racines réelle

$$x_1=\frac{3-\sqrt{169}}{2} \quad \text{et} \quad x_2=\frac{3+\sqrt{169}}{2}$$

$$x_1=-5 \qquad\qquad x_2=8.$$

- Dans $\mathbb{C}$: $P(x)=(x-1)^2(x+1)(x+5)(x-8)$
- Dans $\mathbb{R}$: $P(x)=(x-1)^2(x+1)(x+5)(x-8)$.

Exercice 2 Vidéo

c) $P(x) = x^5 + x^3 - x^2 - 1$

$P'(x) = 5x^4 + 3x^2 - 2x$

1 est racine évidente et $P'(1) \neq 0$: 1 est racine simple

$P(j) = 0$: j est racine évidente : $P(j) = \overbrace{j^5}^{j} + \overbrace{j^3}^{-j} - \overbrace{j^2}^{1} - 1 = 0$ alors $P(-j) = 0$

~~$P(-j) = (-j)^5 + (-j)^3 + (-j)^2 - 1 = -j - (-j) - (-1) - 1 = 0$~~

d'où $P(x) = (x-1)(x-j)(x+j)\,Q(x)$ avec $\deg Q = 2$

$= (x-1)(x^2+1)\,Q(x)$

$= (x^3 + x - x^2 - 1)\,Q(x)$

P est donc divisible par $(x-1)(x-j)(x+j)$
$= x^3 + x - x^2 - 1$

$$
\begin{array}{r|l}
x^5 + x^3 - x^2 - 1 & x^3 - x^2 + x - 1 \\
\hline
-(x^5 - x^4 + x^3 - x^2) & x^2 + x + 1 \\
\hline
x^4 - 1 & \\
-(x^4 - x^3 + x^2 - x) & \\
\hline
x^3 - x^2 + x - 1 & \\
-(x^3 - x^2 + x - 1) & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

$x^3 - x^2 + x - 1 = (x-1)(x^2+1) = \underbrace{(x-1)(x-j)(x+j)}_{*}$

$x^2 + x + 1 = 0$

$\Delta = -3 < 0$

$$
\begin{cases}
x_1 = \dfrac{-b + j\sqrt{|\Delta|}}{2a} = \dfrac{-1+j\sqrt{3}}{2} \\[2ex]
x_2 = \dfrac{-b - j\sqrt{|\Delta|}}{2a} = \dfrac{-1-j\sqrt{3}}{2}
\end{cases}
$$

- Dans $\mathbb{C}$: $P(x) = \underbrace{(x-1)(x-j)(x+j)}_{*}\underbrace{\left(x + \dfrac{1+j\sqrt{3}}{2}\right)\left(x - \dfrac{-1+j\sqrt{3}}{2}\right)}_{(x - x_2)\cdot(x - x_1)}$

- Dans $\mathbb{R}$: $P(x) = (x-1)(x^2+1)(x^2+x+1)$

Exercice 2 page 38

EXERCICE 2 P38 :

$$F(x) = \frac{x^5 + x^2}{x^3 - 2x^2 - x + 2} = \frac{A(x)}{B(x)}$$

$(x+1)(\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot)$

Etape 1 : $x = -1$, $x = 1$, $x = 2$ sont racines évidentes.

alors $x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x+1)(x-1)(x-2)$

Etape 2 : $(-1)^5 + (-1)^2 = -1 + 1 = 0 = A(-1)$ $\quad A(1) \neq 0$ et $A(2) \neq 0$

F est réductible.

donc $x^5 + x^2$ est factorisable par $x+1$

$$\begin{array}{r|l} A(x) = x^5 + x^2 & x+1 \\ \cline{2-2} -(x^5 + x^4) & x^4 - x^3 + x^2 \\ -x^4 + x^2 & \\ -(-x^4 - x^3) & \\ x^2 + x^3 & \\ -(x^2 + x^3) & \\ 0 & \end{array}$$

donc $x^5 + x^2 = (x+1)(x^4 - x^3 + x^2)$

d'où $F(x) = \frac{\cancel{(x+1)}(x^4 - x^3 + x^2)}{\cancel{(x+1)}(x-1)(x-2)} = \frac{x^4 - x^3 + x^2}{(x-1)(x-2)}$

② $F(x) = \dfrac{(x^4 - x^3 + x^2)\cancel{(x+1)}}{(x-1)(x-2)\cancel{(x+1)}} = \dfrac{x^4 - x^3 + x^2}{(x-1)(x-2)} \overset{\text{noté}}{=} \dfrac{A(x)}{B(x)}$

③ deg $A = 4 >$ deg $B = 2$

p. 31 définition des étapes.

$$
\begin{array}{l|l}
A = x^4 - x^3 + x^2 & x^2 - 3x + 2 = B \\
\hline
-(x^4 - 3x^3 + 2x^2) & x^2 + 2x + 5 = Q \\
\quad 2x^3 - x^2 & \\
-(2x^3 - 6x^2 + 4x) & \\
\quad 5x^2 - 4x & \\
-(5x^2 - 15x + 10) & \\
R = 11x - 10 &
\end{array}
$$

$F(x) = \dfrac{A}{B} = \dfrac{BQ + R}{B} = \dfrac{\cancel{B}Q}{\cancel{B}} + \boxed{\dfrac{R}{B}}$

A finir...

$F(x) = \underbrace{x^2 + 2x + 5}_{Q} + \dfrac{\overset{R}{11x - 10}}{\underset{= B}{(x-1)(x-2)}} = G(x)$

$$G(x) = \frac{11x-10}{(x-1)(x-2)} = \frac{a}{(x-1)} + \frac{b}{(x-2)}$$ est la forme de la DSES

On utilise la méthode courte :

$$a = \lim_{x \to 1} (x-1) \times G(x) = \left[(x-1)G(x)\right]_{x=1}$$

$$b = \lim_{x \to 2} (x-2) \times G(x) = \left[(x-2)G(x)\right]_{x=2}.$$

$$a = \left[\frac{\cancel{(x-1)}(11x-10)}{\cancel{(x-1)}(x-2)}\right]_{x=1} = \left[\frac{11x-10}{(x-2)}\right]_{x=1} = \left[\frac{11-10}{1-2}\right] = -1$$

$$\boxed{a = -1}$$

$$b = \left[\frac{\cancel{(x-2)}(11x-10)}{\cancel{(x-2)}(x-1)}\right]_{x=2} = \left[\frac{11x-10}{(x-1)}\right]_{x=2} = \left[\frac{11\times 2-10}{2-1}\right]$$

$$b = \left[\frac{22-10}{1}\right] = 12 \qquad \boxed{b = 12}$$

Conclusion : $$F(x) = \frac{-1}{(x-1)} + \frac{12}{(x-2)} + x^2 + 2x + 5$$

$$\int F(x) = -\ln|x-1| + 12\ln|x-2| + \frac{x^3}{3} + \frac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2}} + 5x + Cte$$

$$\int F(x) = -\ln|x-1| + 12\ln|x-2| + \frac{x^3}{3} + x^2 + 5x + Cte$$

$$f(x) = \frac{5x^2+1}{x^3-2x^2-5x+6} = \frac{A(x)}{B(x)}$$

~~Exercice 2 page 38 chapitre 5~~

a) $B(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

$B(-2) = B(1) = B(3) = 0$

alors $B(x) = (x+2)(x-1)(x-3)$

b) $$f(x) = \frac{5x^2+1}{(x+2)(x-1)(x-3)}$$

-2, 1 et 3 ne sont pas racines du numérateur donc f est irréductible.

c) $f(x) = \dfrac{5x^2+1}{(x+2)(x-1)(x-3)}$ $\quad$ $(\deg N < \deg D)$.

$$= \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x-3}$$

avec $a = \left[(x+2)\,f(x)\right]_{x \to -2}$

$$a = \lim_{x \to -2} \frac{5x^2+1}{(x-1)(x-3)} = \frac{21}{-3 \times -5} = \frac{7}{5}$$

$$b = \lim \left[(x-1)\,f(x)\right]_{x \to 1}$$

$$b = \lim_{x \to 1} \frac{5x^2+1}{(x+2)(x-3)} = \frac{6}{3(-2)} = -1$$

$$c = \left[(x-3)\,f(x)\right]_{x \to 3}$$

$$c = \lim_{x \to 3} \frac{5x^2+1}{(x+2)(x-1)} = \frac{46}{5 \times 2} = \frac{46}{10} = \frac{23}{5}$$

e) Ainsi $f(x) = \dfrac{7/5}{x+2} - \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{23/5}{x-3}$

On aura $F(x) = \dfrac{7}{5} \ln|x+2| - \ln|x-1| + \dfrac{23}{5} \ln|x-3| + k$

Ex2 _ page 38 _ chap. 5.

b) $H(s) = \dfrac{1}{s(\tau s + 1)} = \dfrac{A(s)}{B(s)}$ où τ est une constante

Etape 1 : $B(s) = s(\tau s + 1)$. est factorisé dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

Les pôles de H sont les racines de B : 0 et $-1/\tau$

Etape 2 : H est une fonction irréductible car A et B n'ont pas de facteur commun.

Etape 3 : $H(s) = \dfrac{1}{s(\tau s + 1)}$. $\deg(1) < \deg(s(\tau s + 1))$.

$0 < 2$

H n'a donc pas de partie entière.

(p. 31 Etapes avec Def)

étape 4 : $H(s) = \dfrac{a}{s} + \dfrac{b}{\tau s + 1} = \dfrac{1}{s(\tau s + 1)}$

$$a = \underbrace{\lim_{s \to 0} s\, H(s)}_{[s \cdot H(s)]_{s=0}} = \left[\frac{1}{\tau s + 1}\right]_{s=0} = 1.$$

$$b = \underbrace{\lim_{s \to -\frac{1}{\tau}} (\tau s + 1)\, H(s)}_{[(\tau s+1) H(s)]_{s=-1/\tau}} = \left[\frac{1}{s}\right]_{s=-\frac{1}{\tau}} = -\tau.$$

$$H(s) = \frac{1}{s} - \frac{\tau}{\tau s + 1}$$

Exercice 6 page 29

Exercice 6 Factoriser dans $\mathbb{C}$ puis dans $\mathbb{R}$ les polynômes suivants :

~~$P(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + 4x - 8$~~ ; $P(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

Page 29 chapitre 5

$P(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$: $P(-1) = 0$

$P'(x) = 5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$: $P'(-1) \neq 0$

$$\begin{array}{l|l} x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 & x+1 \\ \hline -(x^5 + x^4) & x^4 + x^2 + 1 \\ \quad x^3 & \\ \quad -(x^3 + x^2) & \\ \quad\quad -x^2 + x^2 = 0 & \end{array}$$

d'où $P(x) = (x+1)\underbrace{(x^4 + x^2 + 1)}_{>0}$ ~~dans $\mathbb{R}$~~

On détermine les racines de $x^4 + x^2 + 1$

On pose $X = x^2$, on a donc à résoudre :

$X^2 + X + 1 = 0 \qquad \Delta = -3 < 0$

$X_1 = \dfrac{-1 + j\sqrt{3}}{2} = 1.e^{2j\pi/3}$ (*) $\qquad X_2 = \dfrac{-1 - j\sqrt{3}}{2} = 1.e^{-2j\pi/3}$

$x^4 + x^2 + 1 = (x^2 - e^{2j\pi/3})(x^2 - e^{-2j\pi/3})$

$A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$

$P(x) = (x+1)\left(x^2 - (e^{j\frac{\pi}{3}})^2\right)\cdot\left(x^2 - (e^{-j\pi/3})^2\right)$

$P(x) = (x+1)(x + e^{j\pi/3})(x - e^{j\pi/3})(x - e^{-j\pi/3})(x + e^{-j\pi/3})$

est factorisé dans $\mathbb{C}$.

et dans $\mathbb{R}$?

$P(x) = (x-1)(x^2 + 2\underbrace{\cos\tfrac{\pi}{3}}_{1}x + 1)(x^2 - 2\underbrace{\cos\tfrac{\pi}{3}}_{1}x + 1)$

$X^2 + X + 1 = (X - X_1)(X - X_2)$

(*) $|X_1| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$

$\theta_1 = \arctan\left(\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-1/2}\right) + \pi = -\frac{\pi}{3} + \pi = 2\pi/3$.

✓ Exemple 1 Factoriser dans $\mathbb{C}$ le polynôme suivant : $P(z) = z^4 - 1$.

Page 27 chapitre 5

$A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$

$A^2 + B^2 = (A-jB)(A+jB)$

$A^2 + 2AB + B^2 = (A+B)^2$

$A^2 - 2AB + B^2 = (A-B)^2$

$P(z) = z^4 - 1 = (z^2-1)(z^2+1)$

$z^4 - 1 = (z-1)(z+1)\underbrace{(z-j)(z+j)}$

Factoriser alors le polynôme P dans $\mathbb{R}$:

$P(x) = x^4 - 1 = (x-1)(x+1)(x^2+1)$

✓ Méthode pour factoriser dans $\mathbb{R}$ On factorise d'abord P dans $\mathbb{C}$, puis on multiplie les paires de polynômes de degré 1 à racines complexes conjuguées.

En effet : $P(x) = (x-\alpha)(x-\overline{\alpha}) = x^2 - \alpha x - \overline{\alpha} x + \alpha\overline{\alpha} = x^2 - \underbrace{(\alpha+\overline{\alpha})}_{\substack{2\mathrm{Re}(\alpha) \\ \in \mathbb{R}}} x + \underbrace{\alpha\overline{\alpha}}_{\substack{|\alpha|^2 \\ \in \mathbb{R}}} \in \mathbb{R}[X]$.

✓ Exemple 2 Factoriser dans $\mathbb{C}$ puis dans $\mathbb{R}$ le polynôme suivant : $P(z) = z^5 - 1$.

$P(1) = 0$.

$$\begin{array}{l|l} P(z) & z-1 \\ \hline & z^4+z^3+z^2+z+1. \\ 0 & \end{array}$$

Quest-Sup :

$P(z) = (z-1)(z^4+z^3+z^2+z+1)$

en déduire $\cos\frac{2\pi}{5}$

$p(z) = (z-1)\left(z^2 - 2z\cos\frac{2\pi}{5}+1\right)\left(z^2+2z\cos\frac{4\pi}{5}+1\right)$

PE

$z^5 = 1$

$(\rho e^{j\theta})^5 = 1 \Leftrightarrow \rho^5 e^{5j\theta} = 1$

$1 e^{0}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho^5 = 1 \; ; \rho > 0 \\ 5\theta = 0 + 2k\pi \end{cases}$ 5 solᵗˢ $\mathbb{C}$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho = 1 \\ \theta = \frac{2\pi}{5}k. \; ; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Les solutions de $z^5 = 1$ sont :

$1 \cdot e^{\frac{2\pi k}{5}j}$; $k \in \mathbb{Z}$ $\quad e^{-\frac{2\pi}{5}j} \quad e^{-\frac{4\pi}{5}j} \quad \cancel{e^{j2\pi}} = 1$

$S = \left\{1 ; e^{\frac{2\pi}{5}j} ; e^{\frac{4\pi}{5}j} ; \cancel{e^{\frac{6\pi}{5}j}} ; \cancel{e^{\frac{8\pi}{5}j}}\right\}$ $\cancel{e^{\frac{10\pi}{5}j}}$;

$k=0$ $k=1$ $k=2$; $k=-1$; $k=-2$

Dans $\mathbb{C}$ $\quad z^5 - 1 = (z-1)\left(z - e^{2j\pi/5}\right)\left(z - e^{4j\pi/5}\right)\left(z - e^{-2j\pi/5}\right)\left(z - e^{-4j\pi/5}\right)$

Fait

En reprenant le deuxième exemple du paragraphe I.4), factoriser le polynôme P dans $\mathbb{C}$ puis dans $\mathbb{R}$:

Page 21 chapitre 5

Quelle est la factorisation de P dans $\mathbb{C}$? $P(z) = z^3 - 3z^2 + 4z - 2$

$P(z) =$ ……………………………………………………………………………

Quelle est la factorisation de P dans $\mathbb{R}$?

$P(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 2 =$ ……………………………………………………………

✓ ~~Déterminer les racines de P, puis factorisez-le~~ :

$$P(z) = 4.z^2 + 4.z + 1 - 2j \ ; P \in \mathbb{C}[X] \setminus \mathbb{R}[X]$$

P.E QCM $P(\alpha) = 0$ Alors $P(\overline{\alpha}) = 0$ ~~VRAI~~ ou FAUX.

c'est FAUX car $P \notin \mathbb{R}[X]$ voir page 27.

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

En reprenant le deuxième exemple du paragraphe I.4), factoriser le polynôme P dans $\mathbb{C}$ puis dans $\mathbb{R}$:

Page 21 chapitre 5

Quelle est la factorisation de P dans $\mathbb{C}$? $P(z) = z^3 - 3z^2 + 4z - 2$

Fait

$P(z) =$ …………………………………………………………………………

Quelle est la factorisation de P dans $\mathbb{R}$?

$P(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 2 =$ ……………………………………………………………

✓ ~~Déterminer les racines de P, puis factorisez-le~~ :

$$P(z) = 4.z^2 + 4.z + 1 - 2j \ ; P \in \mathbb{C}[X] \backslash \mathbb{R}[X]$$

P.E $\boxed{\text{QCM}}$ $P(\alpha) = 0$ Alors $P(\overline{\alpha}) = 0$ ~~VRAI~~ ou FAUX.

c'est FAUX car $P \notin \mathbb{R}[X]$ voir page 27.

3) Relation entre les coefficients et les racines d'un polynôme de degré 2 :

> **Soit $P(z) = z^2 - s.z + p \in \mathbb{C}[X]$. Soit α et β les racines de P.**
> **Alors : $s = \alpha + \beta$ et $p = \alpha.\beta$**

✓ Démonstration

$P(\alpha) = P(\beta) = 0 \iff P(x) = (x-\alpha)(x-\beta)$

$= x^2 - \alpha x - \beta x + \alpha\beta$

$P(x) = x^2 - \underbrace{(\alpha+\beta)}_{s} x + \underbrace{\alpha\beta}_{p}$

✓ Exercice Résoudre le système suivant : $\begin{cases} \alpha + \beta = -5 = s \\ \alpha.\beta = 5 = p \end{cases}$

α et β sont solutions de : $x^2 - sx + p = 0 \iff x^2 + 5x + 5 = 0$

$\Delta = 25 - 20 = 5$ donc $\alpha = \frac{-5+\sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \frac{-5-\sqrt{5}}{2}$ (ou le contraire)