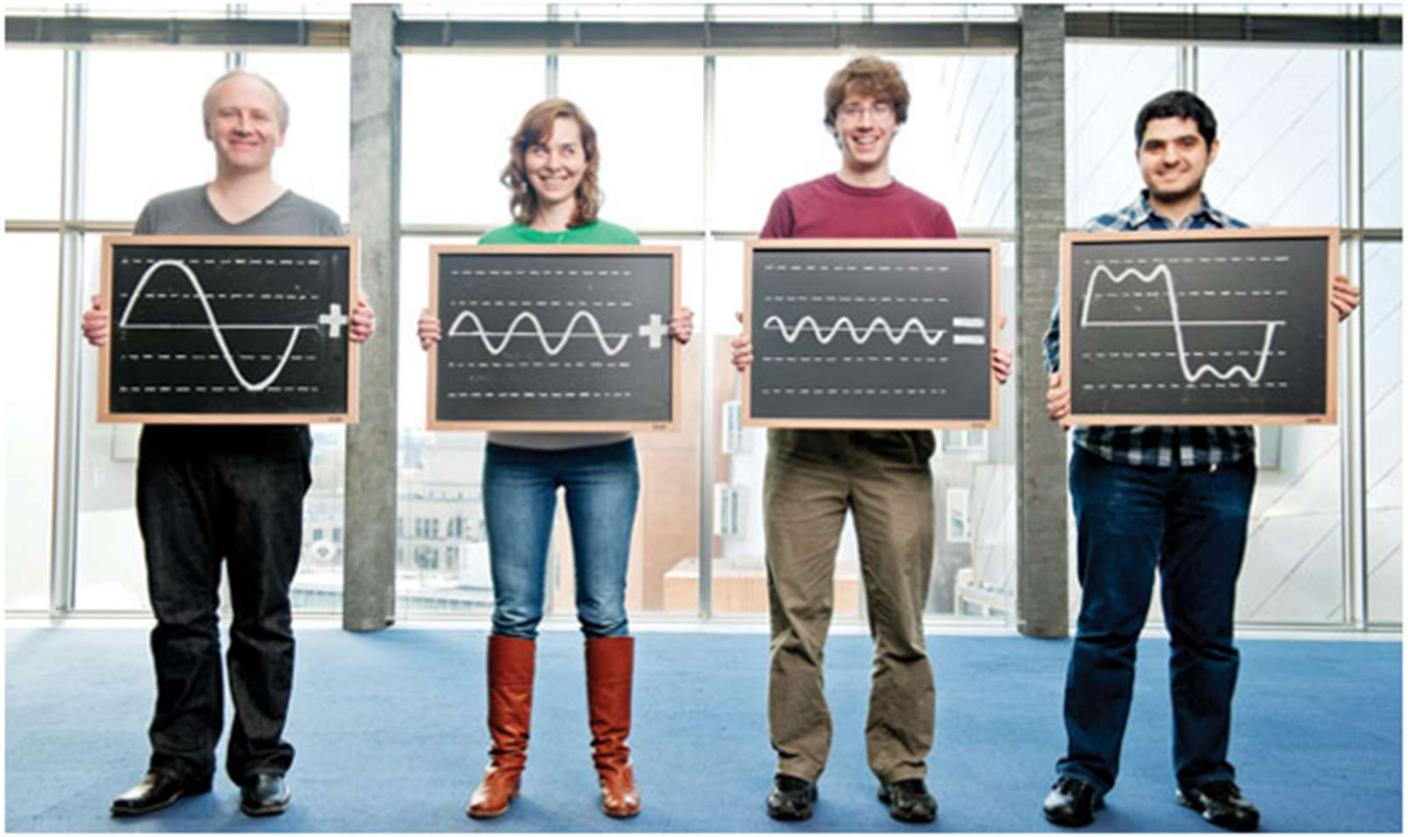
Chapitre 8 : Initiation aux séries de Fourier



Notes

Page 12&13 chapitre 8

Exple

$$x(t) = \underbrace{\overset{A_1=7}{7}\cos(\pi t)}_{f_1=\frac{1}{2} \Rightarrow T_1=2} + \underbrace{\overset{A_2=3}{3}\cos(3\pi t)}_{f_2=\frac{3}{2}\,;\,T_2=\frac{2}{3}} - \underbrace{\overset{A_3=2}{2}\sin(5\pi t)}_{f_3=\frac{5}{2}\quad T_3=\frac{2}{5}}$$

Rappel : $A\cos(\omega t+\varphi)$ ou $A\sin(\omega t+\varphi)$

$$\boxed{\omega = 2\pi f} \Leftrightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} \Leftrightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$$

C'est le spectre d'amplitude du signal x

" en fréquence "

" en raies "

Remarque La période x est : $T = 2$

I. Développement d'une fonction périodique en série de Fourier

Page 4 chapitre 8

1) Définitions

Soit x une fonction de période T, intégrable sur tout intervalle $[t_0, t_0+T]$.
On appelle série de Fourier réelle de x la série suivante :

$S(t) = a_0 + \sum_{p=1}^{+\infty}(a_p.\cos(p\omega t) + b_p.\sin(p\omega t))$, **où les suites réelles $(a_p)_p$ et $(b_p)_p$ sont définies de la façon suivante :**

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t).dt \quad ; \quad a_p = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t).\cos(p\omega t).dt \quad ; \quad b_p = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t).\sin(p\omega t).dt \text{ pour } p \geq 1,$$

avec $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

a_0 est la valeur moyenne du signal x.
L'harmonique de rang p est le signal : $H_p(t) = a_p.\cos(p\omega t) + b_p.\sin(p\omega t)$
Le fondamental est l'harmonique de rang 1 : $H_1(t) = a_1.\cos(\omega t) + b_1.\sin(\omega t)$

Notes

Page 12&13 chapitre 8

$t \longmapsto x(t)$ T-périodique $\quad S(t) = a_0 + \sum_{p=1}^{+\infty} a_p \cos(p\omega t) + b_p \sin(p\omega t)$

- $a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)\, dt$

$$\int_{\cancel{0}\,-T/2}^{\cancel{T}\,T/2} \underbrace{S(t)}_{\text{T-périodique}} dt = a_0 \int_0^T 1\, dt + \sum_{p=1}^{+\infty} a_p \int_{\cancel{0}\,-T/2}^{\cancel{T}\,T/2} \underbrace{\cos(p\omega t)}_{\text{paire}} dt + \underbrace{b_p \int_{\cancel{0}\,-T/2}^{\cancel{T}\,T/2} \underbrace{\sin(p\omega t)}_{\text{impaire}} dt}_{=0}$$

$$\int_0^T S(t)\, dt = a_0 [t]_0^T + \sum_{p=1}^{+\infty} a_p \cdot 2 \cdot \underbrace{\int_0^{T/2} \cos(p\omega t)\, dt}$$

$$= \left[\frac{\sin(p\omega t)}{p\omega}\right]_0^{T/2} = \frac{1}{p\omega}\left(\underbrace{\sin\left(p\omega \tfrac{T}{2}\right)}_{\sin(p\pi) = 0} - \underbrace{\sin 0}_{0}\right) \quad p \in \mathbb{N}^*$$

$$\int_0^T S(t)\, dt = a_0 T + 0$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T \underbrace{S(t)}_{x(t)} dt$$

Notes

Page 12&13 chapitre 8

- $a_k\ ?? = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cdot \cos(k\omega t)\, dt \; ; \; k \geq 1$

$$\int_0^T \underbrace{S(t) \cdot \cos(k\omega t)}_{T\text{-périodique}}\, dt = \int_{-T/2}^{T/2} S(t) \cdot \cos(k\omega t)\, dt$$

$$\int_0^T S(t) \cos(k\omega t)\, dt = \underbrace{a_0 \int_{-T/2}^{T/2} \cos(k\omega t)\, dt}_{=0} + \sum_{p=1}^{+\infty} a_p \int_{-T/2}^{T/2} \underbrace{\cos(\overset{a}{p\omega t}) \cos(\overset{b}{k\omega t})}_{\text{paire}}\, dt + \underbrace{b_p \int_{-T/2}^{T/2} \underbrace{\underbrace{\sin(p\omega t)\cos(k\omega t)}_{\text{impaire}\times\text{paire}}}_{\text{impaire}}\, dt}_{=0}$$

$$\frac{2a_p}{2} \int_0^{T/2} \cos\Big(\underbrace{(p+k)}_{\neq 0}\omega t\Big) + \cos\big((p-k)\omega t\big)\, dt$$

$$a_p \times \left(0 + \begin{cases} 0 & \text{si } p-k \neq 0 \\ \frac{T}{2} & \text{si } p = k \end{cases}\right)$$

$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \sin b$

$\oplus \quad \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \quad \oplus$

$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos a \cos b$

$\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2}\big(\cos(a+b) + \cos(a-b)\big)$

$$\int_0^T S(t) \cos(k\omega t)\, dt = a_k \frac{T}{2} \Leftrightarrow a_k = \frac{2}{T} \int_0^T S(t) \cos(k\omega t)\, dt$$

1) Définitions

Soit x une fonction de période T, intégrable sur tout intervalle $[t_0, t_0+T]$.
On appelle série de Fourier réelle de x la série suivante :

$a_0 + \sum_{p=1}^{+\infty}(a_p.\cos(p\omega t) + b_p.\sin(p\omega t))$, où les suites réelles $(a_p)_p$ et $(b_p)_p$ sont définies de la façon suivante :

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t).dt \quad ; \quad a_p = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t).\cos(p\omega t).dt \quad ; \quad b_p = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t).\sin(p\omega t).dt \quad \text{pour } p \geq 1,$$

avec $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

a_0 est la valeur moyenne du signal x.
L'harmonique de rang p est le signal : $H_p(t) = a_p.\cos(p\omega t) + b_p.\sin(p\omega t)$
Le fondamental est l'harmonique de rang 1 : $H_1(t) = a_1.\cos(\omega t) + b_1.\sin(\omega t)$

Page 4 chapitre 8

Remarque : $S(t) = \underbrace{a_0}_{\text{la val. moyenne}} + \underbrace{a_1 \cos(\omega t) + b_1 \sin(\omega t)}_{\text{le fondamental}} + \underbrace{a_2 \cos(2\omega t) + b_2 \sin(2\omega t)}_{\text{l'harmonique de rang 2}} + \cdots$

On peut noter aussi :

$$S(t) = \sum_{p=0}^{+\infty} a_p \cos(p\omega t) + b_p \sin(p\omega t)$$

car $a_0 \underbrace{\cos 0}_{1} + b_0 \underbrace{\sin 0}_{0} = a_0$

b_0 ne se calcule pas.

Page 4 chapitre 8

2) <u>Rappels du chapitre 6</u> :

Soit f, une fonction T-périodique, intégrable sur tout intervalle de longueur T : [a,a+T].
On a alors :

$$\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt = \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,dt$$

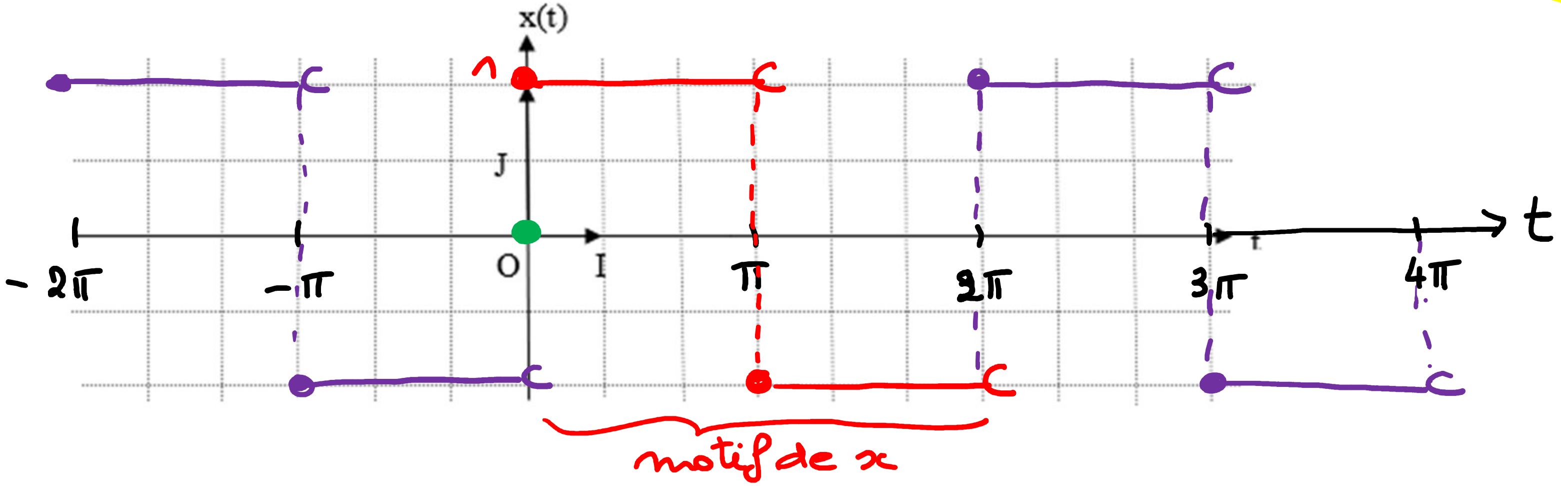
On peut donc calculer les intégrales définissant les coefficients de Fourier sur n'importe quel intervalle de longueur T.

- Si f est une fonction paire et intégrable sur [-a,a], alors : $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2.\int_0^a f(x)dx$.
- Si f est une fonction impaire et intégrable sur [-a,a], alors : $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

II. Travaux Pratique : série de Fourier et analyse spectrale d'un signal carré

Page 5 chapitre 8

Soit x, la fonction de période 2π, définie par : $x(t)=\begin{cases}1 \text{ pour } t\in[0;\pi[\\ -1 \text{ pour } t\in[\pi;2\pi[\end{cases}$



1) Représenter graphiquement le signal x, puis déterminer ses coefficients de Fourier :

Si x est impair alors $a_0 = a_p = 0$, $p \geq 1$

$$a_0 = \frac{1}{T}\cdot\int_0^T x(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\cdot\int_0^{2\pi} \underbrace{x(t)}_{2\pi\text{-périodique}}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{x(t)}_{\text{impaire}}\,dt = 0$$

impaire car C_x est symétrique par rapport à O.

$$a_p = \frac{2}{T}\cdot\int_0^T x(t)\cdot\cos(p\omega t)\,dt = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{x(t)}_{\text{impaire}}\cos(p\omega t)\,dt = 0$$

impaire × paire = impaire

$p \geq 1$

Page 5 chapitre 8

$$b_p = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T x(t) \cdot \sin(p\omega t)\, dt = \frac{2}{2\pi} \int_{\cancel{0}\ -\pi}^{\cancel{2\pi}\ \pi} \overbrace{\underbrace{x(t) \cdot \sin(p\omega t)}_{2\pi\text{-périodique}}}^{\text{impaire} \times \text{impaire} = \text{paire}} dt$$

$$= 2 \times \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} \underbrace{x(t)}_{1} \cdot \sin(p\omega t)\, dt = \frac{2}{\pi} \cdot \left[-\frac{\cos(p\omega t)}{p\omega} \right]_0^{\pi} = \frac{2}{p\omega\pi} \cdot \left(-\cos(p\omega\pi) + \underbrace{\cos 0}_{1} \right)$$

$$\left(\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{2\pi} = 1 \right)$$

$$p \geq 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} b_p = \dfrac{2}{p\pi} \left(1 - \cos(p\pi) \right) \\ a_0 = 0 \\ a_p = 0 \quad \forall p \geq 1 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

2) Série de Fourier de x :

$$S_x(t) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{2}{p\pi} \left(1 - \cos p\pi \right) \cdot \sin(pt)$$