Prénom : .... Groupe : ALTERNANCE

Exercice 1 En suivant les étapes indiquées, décomposer en somme d'éléments simples dans l'ensemble des réels, puis intégrer la fraction : $f(x) = \frac{4x^2-1}{4x^4+4x^3-3x^2-4x-1} = \frac{A(x)}{B(x)}$ **(6 pts)**

a) Factoriser dans l'ensemble des réels le dénominateur de f. (on montrera que 1 et -1 sont des racines évidentes). 5,5 TB

$B(1) = 4 + 4 - 3 - 4 - 1 = 0$; $B'(x) = 16x^3 + 12x^2 - 6x - 4$

$B(-1) = 4 - 4 - 3 + 4 - 1 = 0$; $B'(1) \neq 0$; $B'(-1) \neq 0$ donc pas de racine double

$B(x) = (x-1)(x+1)\,Q(x)$ $\quad (x-1)(x+1) = x^2 - 1$

$$\begin{array}{l|l}
4x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 4x - 1 & x^2 - 1 \\
-(4x^4 - 4x^2) & 4x^2 + 4x + 1 \\
\quad 0 \quad 4x^3 + x^2 - 4x - 1 & \\
\quad -(4x^3 - 4x) & \\
\quad\quad 0 \quad\quad 0 \quad x^2 - 1 & \\
\quad\quad\quad -(x^2 - 1) & \\
\quad\quad\quad\quad 0 \quad 0 &
\end{array}$$

On obtient donc $B(x)$ dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$:

$B(x) = (x-1)(x+1)(4x^2+4x+1)$

$B(x) = (x-1)(x+1)(2x+1)^2$

b) Réduire la fraction f, si c'est possible.

$$f(x) = \frac{4x^2-1}{(x-1)(x+1)(2x+1)^2} = \frac{(2x-1)\cancel{(2x+1)}}{(x-1)(x+1)(2x+1)\cancel{(2x+1)}} = \frac{2x-1}{(x-1)(x+1)(2x+1)}$$

TB

c) Expliquer pourquoi la fraction f obtenue en b) n'a pas de partie entière.

deg A = 1 < deg B = 3, f n'a donc pas de partie entière

d) Déterminer la forme de la décomposition en somme d'éléments simples de la fraction f obtenue en c), puis calculer les coefficients.

$$f(x) = \frac{2x-1}{(2x+1)(x-1)(x+1)} = \frac{a}{2x+1} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}.$$

$$a = \left[(2x+1)f(x)\right]_{x=-1/2} = \left[\frac{2x-1}{x^2-1}\right]_{x=-1/2} = \frac{-2}{\left(\frac{1}{4}\right)-1} = \frac{-2}{-\frac{3}{4}} = \frac{8}{3}$$

$$b = \left[(x-1)f(x)\right]_{x=1} = \left[\frac{2x-1}{(2x+1)(x+1)}\right]_{x=1} = \frac{1}{3\times 2} = \frac{1}{6}$$

$$c = \left[(x+1)f(x)\right]_{x=-1} = \left[\frac{2x-1}{(2x+1)(x-1)}\right]_{x=-1} = \frac{-3}{(-1)(-2)} = -\frac{3}{2}$$

e) En déduire les primitives de la fractions f.

$$f(x) = \frac{8}{3}\,\frac{1}{2x+1} + \frac{1}{6}\,\frac{1}{x-1} - \frac{3}{2}\,\frac{1}{x+1}.$$

$$\int f(x)\,dx = \frac{4}{3}\ln|2x+1| + \frac{1}{6}\ln|x-1| - \frac{3}{2}\ln|x+1| + \text{cte}$$

Exercice 2 En suivant les étapes indiquées, décomposer en somme d'éléments simples dans l'ensemble des réels, puis intégrer la fraction : $f(x) = \frac{3x^4-4x^3-14x^2-3x+2}{(x+1)^2(x-3)} = \frac{A(x)}{B(x)}$ **(6 pts)**

a) Sans détailler les calculs, expliquer pourquoi la fraction f est irréductible.

$B(-1) = B'(-1) = B(3) = 0$
et $A(-1) \neq 0$ $A(3) \neq 0$

$\Bigg\}$ A et B n'ont pas de racine commune, f est donc irréductible.

b) Déterminer la partie entière de f. $(x+1)^2(x-3) = (x^2+2x+1)(x-3)$
$= x^3 - x^2 - 5x - 3$

deg A = 4 > deg B = 3, f a donc une partie entière

$$A = 3x^4 - 4x^3 - 14x^2 - 3x + 2 \quad \Big| \quad x^3 - x^2 - 5x - 3 = B$$

$$-(3x^4 - 3x^3 - 15x^2 - 9x) \quad \Big| \quad 3x - 1 = Q.$$

$$-x^3 + x^2 + 6x + 2$$

$$-(-x^3 + x^2 + 5x + 3)$$

$$R = x - 1.$$

$$f = Q + \frac{R}{B} \text{ donc } f(x) = 3x - 1 + \frac{x-1}{(x+1)^2(x-3)}$$

c) Soit g, la fraction définie par : $g(x) = \frac{x-1}{(x+1)^2(x-3)}$. On admet que la forme de sa décomposition en somme d'éléments simples est : $g(x) = \frac{x-1}{(x+1)^2(x-3)} = \frac{a_2}{(x+1)^2} + \frac{a_1}{x+1} + \frac{b}{x-3}$

Calculer les constantes : $a_2, b, puis\ a_1$ (On pourra utiliser l'astuce $\lim\limits_{x\to+\infty} x.g(x)$)

$$a_2 = \left[(x+1)^2 g(x)\right]_{x=-1} = \left[\frac{x-1}{x-3}\right]_{x=-1} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$

$$b = \left[(x-3).g(x)\right]_{x=3} = \left[\frac{x-1}{(x+1)^2}\right]_{x=3} = \frac{2}{4^2} = \frac{1}{8}$$

$$\lim_{x\to+\infty} x.g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^3} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a_2 x}{x^2} + \frac{a_1 x}{x} + \frac{b x}{x}\right)$$

Ou

$$0 = a_1 + b \iff a_1 = -b = -\frac{1}{8}$$

$$g(0) = \frac{-1}{-3} = a_2 + a_1 + \frac{b}{-3} \iff a_1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{24}$$

$$\iff a_1 = \frac{8 - 12 + 1}{24} = -\frac{3}{24} = -\frac{1}{8}$$

Calculatrice collège autorisée

d) En déduire l'expression de f, puis ses primitives.

$f(x) = 3x - 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{x+1} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{x-3}$

$\int f(x)\,dx = 3\frac{x^2}{2} - x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+1} - \frac{1}{8} \ln|x+1| + \frac{1}{8} \ln|x-3| + cte$

Exercice 3 Complexes sous forme polaire : **(3 pts)**

Soit $\underline{Z} = \left[5; \frac{\pi}{6}\right]$ et $\underline{Z'} = \left[2; -\frac{\pi}{4}\right]$. Compléter :

$\underline{Z}.\underline{Z'} = \left[10; \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right] = \left[10; -\frac{\pi}{12}\right]$

$\frac{\underline{Z}}{\underline{Z'}} = \left[\frac{5}{2}; \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right] = \left[\frac{5}{2}; \frac{5\pi}{12}\right]$

$\underline{Z} + \underline{Z}^* = 2\,Re(\underline{Z}) = 2 \times 5 \cos\frac{\pi}{6} = 10\frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$

$\underline{Z} - \underline{Z}^* = 2j\,Im(\underline{Z}) = 2j \cdot 5 \sin\frac{\pi}{6} = 10j \times \frac{1}{2} = 5j$

$\underline{Z}.\underline{Z}^* = Z^2 = 25$

$\underline{Z}^4 = \left[5^4; \frac{4\pi}{6}\right] = \left[5^4; \frac{2\pi}{3}\right]$

Exercice 4 Formules d'Euler : **(5 points)**

a) Compléter :

$e^{j\theta} + e^{-j\theta} = 2\cos\theta$

$\sin\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$

$e^{-7j\theta} + e^{7j\theta} = 2\cos(7\theta)$

Calculatrice collège autorisée

$-3e^{5j\theta} + 3e^{-5j\theta} = -3\left(e^{5j\theta} - e^{-5j\theta}\right) = -6j\sin(5\theta)$

b) En utilisant les formules d'Euler, linéariser $sin^2(5x)$, puis en déduire la valeur de l'intégrale : $I = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} sin^2(5x)dx$

$$\sin^2(5x) = \left(\frac{e^{5jx} - e^{-5jx}}{2j}\right)^2 = \frac{1}{4j^2}\left(e^{5jx} - e^{-5jx}\right)^2$$

$$= -\frac{1}{4}\left(e^{10jx} - 2\underbrace{e^{5jx}e^{-5jx}}_{e^0=1} + e^{-10jx}\right)$$

$$= -\frac{1}{4}\left(2\cos(10x) - 2\right)$$

$$\sin^2(5x) = \frac{1}{2}\left(1 - \cos(10x)\right)$$

$$I = 2 \times \int_0^{\pi/3} \sin^2(5x)\,dx \quad \text{car } x \longmapsto \sin^2(5x) \text{ est paire}$$

$$= 2 \times \frac{1}{2}\int_0^{\pi/3}\left(1 - \cos(10x)\right)dx$$

$$= \left[x - \frac{\sin(10x)}{10}\right]_0^{\pi/3} = \frac{\pi}{3} - \frac{\sin\left(\frac{10\pi}{3}\right)}{10} - \underbrace{\left(0 - \frac{\sin 0}{10}\right)}_{=0}$$

$$I = \frac{\pi}{3} - \frac{1}{10}\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{20}$$

Calculatrice collège autorisée

$$\frac{10\pi}{3} = \underbrace{\frac{6\pi}{3}}_{=2\pi} + \frac{4\pi}{3}$$

Exercice 5 (2 points)

Soit τ , une constante réelle. Déterminer la partie entière de la fraction irréductible H ci-dessous, puis écrire la forme de sa décomposition en somme d'éléments simples dans l'ensemble des réels (on ne calculera pas les coefficients).

$$H(s) = \frac{\tau s^6 + (1-\tau)s^5 + (3\tau - 1)s^4 + 3s^3 - 2}{\tau s^4 + s^3} = \frac{A(s)}{B(s)}$$

deg A = 6 > deg B = 4, H a donc une partie entière

$A = \tau s^6 + (1-\tau)s^5 + (3\tau-1)s^4 + 3s^3 - 2 \quad \Big| \quad \tau s^4 + s^3 = B$

$-(\tau s^6 + s^5) \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Big| \quad s^2 - s + 3 = Q$

$-\tau s^5 + (3\tau-1)s^4 + 3s^3 - 2$

$-(-\tau s^5 - s^4)$

$3\tau s^4 + 3s^3 - 2$

$-(3\tau s^4 + 3s^3)$

$R = -2$

$H = Q + \frac{R}{B} \Rightarrow H(s) = s^2 - s + 3 + \frac{-2}{\tau s^4 + s^3} = G(s)$

$G(s) = \frac{-2}{s^3(\tau s + 1)} = \frac{a}{s^3} + \frac{b}{s^2} + \frac{c}{s} + \frac{d}{\tau s + 1}$

Calculatrice collège autorisée

$$a = \left[s^3 G(s) \right]_{s=0} = \left[\frac{-2}{\tau s+1} \right]_{s=0} = -2$$

$$d = \left[(\tau s+1) G(s) \right]_{s=-1/\tau} = \left[\frac{-2}{s^3} \right]_{s=-1/\tau} = 2 \times \tau^3$$

$$\lim_{s \to +\infty} s G(s) = 0 = 0 + 0 + c + \frac{d}{\tau} \iff c = -\frac{d}{\tau} = -2\tau^2$$

$$G(1) = \frac{-2}{\tau+1} = a + b + c + \frac{d}{\tau+1}$$

$$\iff -\frac{2}{\tau+1} = -2 + b - 2\tau^2 + \frac{2\tau^3}{\tau+1}$$

$$\implies b = \frac{-2-2\tau^3}{\tau+1} + 2 + 2\tau^2 = \frac{-2-2\tau^3+(\tau+1)(2+2\tau^2)}{\tau+1}$$

$$b = \frac{-2-2\tau^3+2\tau+2\tau^3+2+2\tau^2}{\tau+1} = \frac{\overbrace{2\tau+2\tau^2}^{2\tau(\tau+1)}}{\tau+1} = 2\tau$$

Conclusion :

$$H(s) = s^2 - s + 3 - \frac{2}{s^3} + \frac{2\tau}{s^2} - \frac{2\tau^2}{s} + \frac{2\tau^3}{\tau s+1}.$$