Partie III : Applications de la Transformation de Laplace

La transformation de Laplace transforme toute équation différentielle en équation algébrique, en effet :

page 19 chapitre 6

$$\mathcal{L}[f'(t)] = p.F(p) - f(o^+) \;;$$

$$\mathcal{L}[f''(t)] = p^2F(p) - pf(0^+) - f'(0^+) \;;$$

$$\mathcal{L}[f^{(3)}(t)] = p^3F(p) - p^2f(0^+) - pf'(0^+) - f''(0^+) \;;$$

$$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots$$

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = p^nF(p) - p^{n-1}f(0^+) - p^{n-2}f'(0^+) - \ldots - pf^{(n-2)}(0^+) - f^{(n-1)}(0^+).$$

(n est un entier naturel.)

On note $g(0^+)$, la limite quand x tend vers 0 par valeurs positives de g(x)

La transformation de Laplace facilite donc la résolution d'une EDLCC, et par la même tout problème du GEII.

page 19 chapitre 6

2) <u>Exemple de circuit du premier ordre</u> Etude du filtre passe-haut.

Soit un circuit dans lequel la sortie s(t) et l'entrée e(t) vérifient l'équation différentielle :
$s'(t)+3.s(t) = 2.e'(t) + e(t)$; $s(0) = e(0) = 0$. Soit $S(p) = \mathcal{L}[s(t)]$ et $E(p) = \mathcal{L}[e(t)]$.

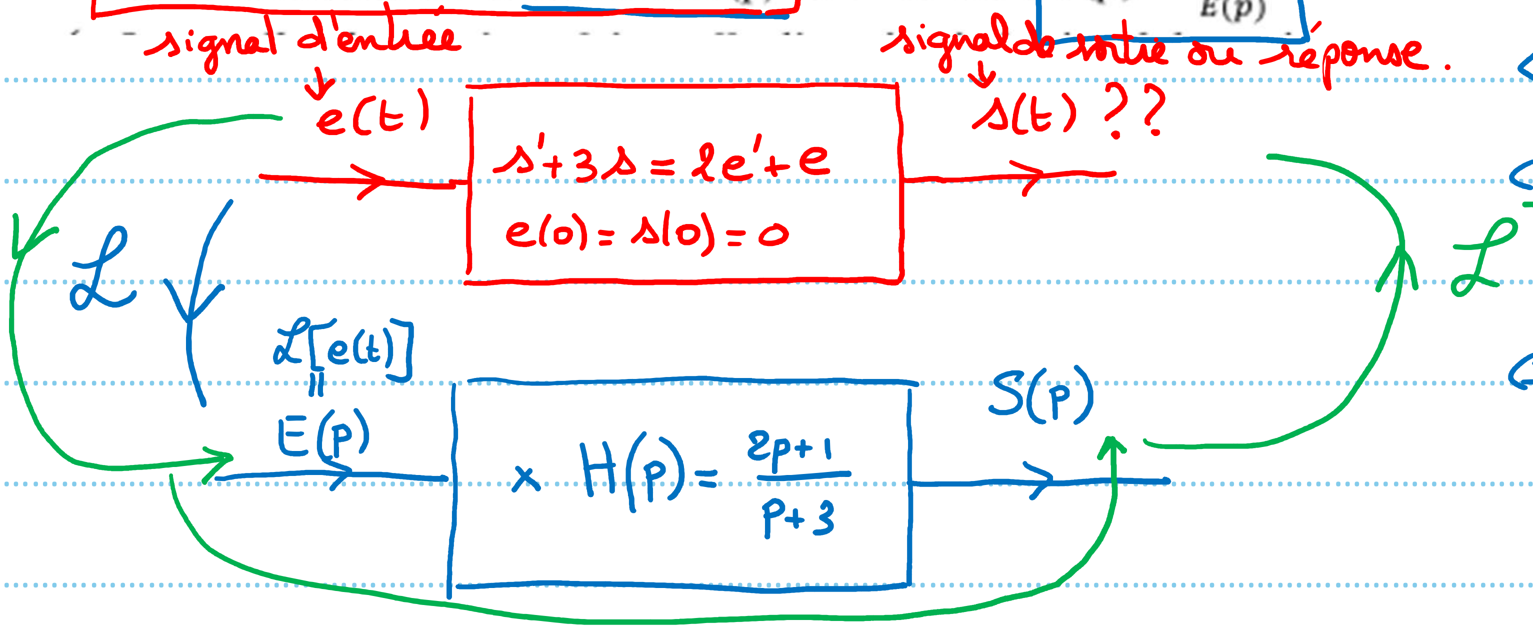
- ✓ Calculer la fonction de transfert H(p) de ce circuit : $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$
- ✓ On appelle **réponse impulsionnelle** d'un circuit, le signal de sortie s obtenu, lorsque le signal d'entrée e est une impulsion de Dirac. Déterminer la réponse impulsionnelle de ce circuit.
- ✓ On appelle **réponse indicielle** d'un circuit, le signal de sortie obtenu, lorsque le signal d'entrée e est un échelon unité. Déterminer la réponse indicielle de ce circuit.

Soit un circuit dans lequel la sortie s(t) et l'entrée e(t) vérifient l'équation différentielle :

$s'(t)+3.s(t) = 2.e'(t) + e(t)$; $s(0) = e(0) = 0$. Soit $S(p) = \mathcal{L}[s(t)]$ et $E(p) = \mathcal{L}[e(t)]$.

page 20 chapitre 6

✓ $\boxed{\text{Calculer la fonction de transfert H(p) de ce circuit :}}$ $\boxed{H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}}$



fonction de transfert : $\mathcal{L}[s'(t)] + 3\,\mathcal{L}[s(t)] = 2\,\mathcal{L}[e'(t)] + \mathcal{L}[e(t)]$

$$p.S(p) - \underbrace{s(0)}_{=0} + 3S(p) = 2\left(pE(p) - \underbrace{e(0)}_{=0}\right) + E(p)$$

$$\Leftrightarrow pS(p) + 3S(p) = 2pE(p) + E(p)$$

$$\Leftrightarrow S(p).(p+3) = E(p).(2p+1)$$

$$\Leftrightarrow S(p) = \frac{2p+1}{p+3}\,E(p)$$

$$\Leftrightarrow \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{2p+1}{p+3}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{H(p) = \frac{2p+1}{p+3}}$$

Soit un circuit dans lequel la sortie s(t) et l'entrée e(t) vérifient l'équation différentielle :

$s'(t)+3.s(t) = 2.e'(t) + e(t)$; $s(0) = e(0) = 0$. Soit $S(p) = \mathcal{L}[s(t)]$ et $E(p) = \mathcal{L}[e(t)]$.

page 20 chapitre 6

- ✓ Calculer la fonction de transfert H(p) de ce circuit : $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$
- ✓ On appelle **réponse impulsionnelle** d'un circuit, le signal de sortie s obtenu, lorsque le signal d'entrée e est une impulsion de Dirac. Déterminer la réponse impulsionnelle de ce circuit.

Dirac

$$\begin{tikzcd}
e(t)=\delta(t) \arrow[r] \arrow[d, "\mathcal{L}"'] & \boxed{\text{EDLCC}} \arrow[r, "s(t)=??"] & s(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2p+1}{p+3}\right] \\
E(p)=1 \arrow[r] & \boxed{\times \frac{2p+1}{p+3}} \arrow[r] & S(p) = \frac{2p+1}{p+3} \arrow[u, "\mathcal{L}^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

$\boxed{\text{DSES de } S(p)}$:

$S(p) = \frac{2p+1}{p+3}$ est irréductible

et a une partie entière car $\hat{\deg} A = \hat{\deg} B$

$$\begin{array}{r|l} A = 2p+1 & p+3 = B \\ \hline -(2p+6) & 2 = Q \\ R = -5 & \end{array}$$

$$\begin{cases} S(p) = \frac{A}{B} = \frac{BQ+R}{B} = Q + \frac{R}{B} \\ S(p) = 2 + \frac{-5}{p+3} \end{cases}$$

Conclusion : $s(t) = \mathcal{L}^{-1}[S(p)] = 2\mathcal{L}^{-1}[1] - 5\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p+3}\right] = 2\,\delta(t) - 5.e^{-3t}$