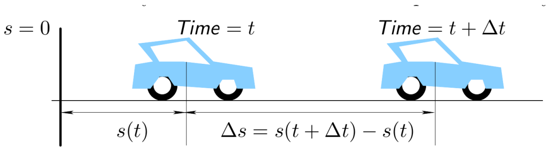
1. Dérivées



Nous savons tous ce qu'est la vitesse moyenne. Par exemple, si on a besoin de deux heures pour parcourir 100 km, la vitesse moyenne est

$$\frac{\text{distance parcourue}}{\text{temps pour la parcourir}} = 50\,\mathrm{km\,h^{-1}}$$

In "real life"

Lorsque on conduit une voiture, le tachymètre indique la vitesse à laquelle la voiture roule, *i.e.* la vitesse au moment où on regarde le tachymètre. Mais au moment où on regarde le compteur de vitesse, aucun temps ne s'écoule (c'est une vitesse *instantanée*) et on ne parcoure aucune distance. La vitesse à ce moment est donc $\frac{0}{0}$, c'est-à-dire **indéfinie**. Mais alors qu'est-ce qu'il indique le tachymètre ? Formellement l'indicateur de vitesse donne

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

ayant noté s la position en fonction du temps t.
On verra que la vitesse est la dérivée du déplacement et que l'accélération est la dérivée de la vitesse :

$$v(t) = s'(t), \qquad a(t) = v'(t) = s''(t).$$

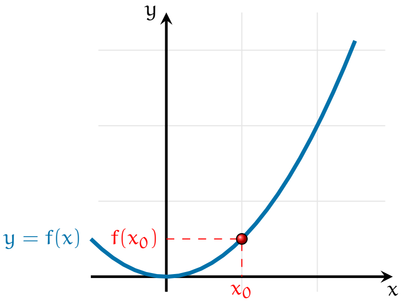
1. Dérivées

Définition de dérivées

Soit $x \mapsto f(x)$ une fonction. La dérivée de f en $x_0 \in \mathcal{D}_f$, si elle existe, est le nombre

$$\boxed{\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}} \overset{x=x_0+h}{=} \boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$$

On notera ce nombre $f'(x_0)$ ou $\frac{df}{dx}(x_0)$ indifféremment.



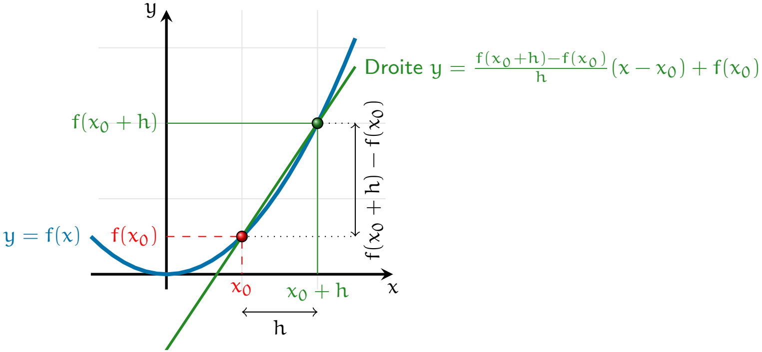
C'est la limite du taux d'accroissement $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ lorsque x tend vers x_0.

Définition de dérivées

Soit $x \mapsto f(x)$ une fonction. La dérivée de f en $x_0 \in \mathcal{D}_f$, si elle existe, est le nombre

$$\boxed{\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}} \overset{x=x_0+h}{=} \boxed{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$$

On notera ce nombre $f'(x_0)$ ou $\frac{df}{dx}(x_0)$ indifféremment.



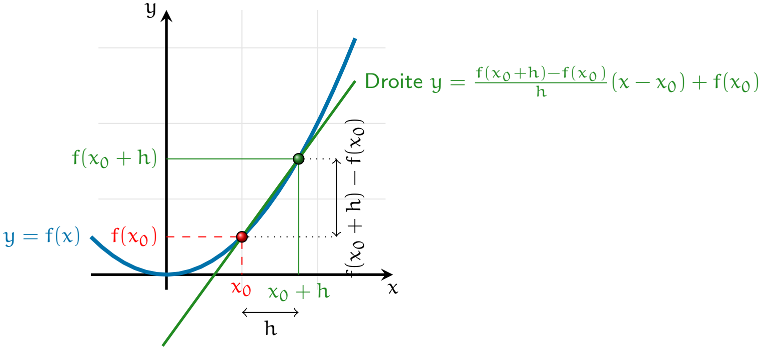
C'est la limite du taux d'accroissement $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ lorsque x tend vers x_0.

Définition de dérivées

Soit $x \mapsto f(x)$ une fonction. La dérivée de f en $x_0 \in \mathcal{D}_f$, si elle existe, est le nombre

$$\boxed{\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}} \overset{x=x_0+h}{=} \boxed{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$$

On notera ce nombre $f'(x_0)$ ou $\frac{df}{dx}(x_0)$ indifféremment.



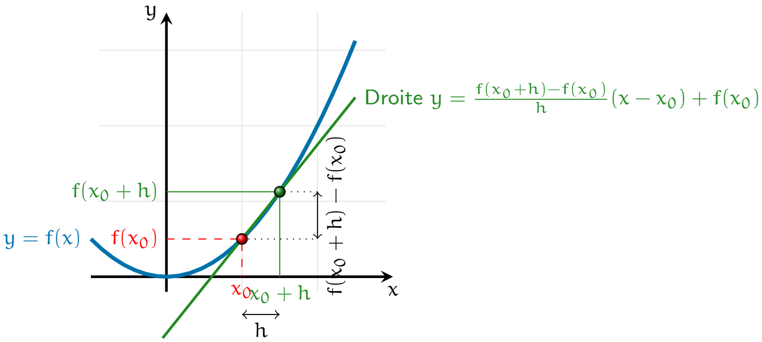
C'est la limite du taux d'accroissement $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ lorsque x tend vers x_0.

Définition de dérivées

Soit $x \mapsto f(x)$ une fonction. La dérivée de f en $x_0 \in \mathcal{D}_f$, si elle existe, est le nombre

$$\boxed{\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}} \overset{x=x_0+h}{=} \boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

On notera ce nombre $f'(x_0)$ ou $\frac{df}{dx}(x_0)$ indifféremment.



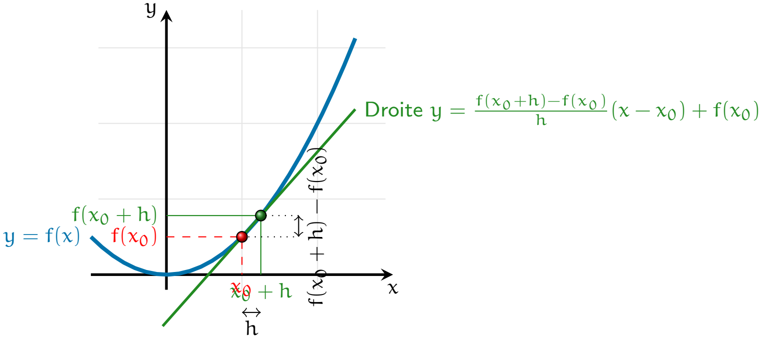
C'est la limite du taux d'accroissement $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ lorsque x tend vers x_0.

Définition de dérivées

Soit $x \mapsto f(x)$ une fonction. La dérivée de f en $x_0 \in \mathcal{D}_f$, si elle existe, est le nombre

$$\boxed{\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}} \overset{x=x_0+h}{=} \boxed{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$$

On notera ce nombre $f'(x_0)$ ou $\frac{df}{dx}(x_0)$ indifféremment.



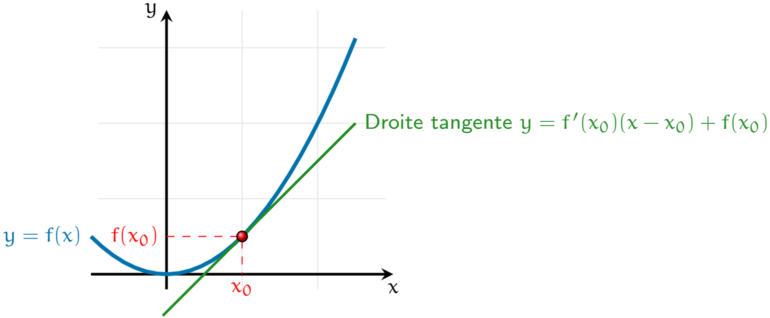
C'est la limite du taux d'accroissement $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ lorsque x tend vers x_0.

Définition de dérivées

Soit $x \mapsto f(x)$ une fonction. La dérivée de f en $x_0 \in \mathcal{D}_f$, si elle existe, est le nombre

$$\boxed{\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}} \overset{x=x_0+h}{=} \boxed{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$$

On notera ce nombre $f'(x_0)$ ou $\frac{df}{dx}(x_0)$ indifféremment.



C'est la limite du taux d'accroissement $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ lorsque x tend vers x_0.

Définition de dérivées

Pour chaque x_0 en lequel la fonction f est dérivable, on associe un nombre $f'(x_0)$, ce qui nous permet de définir une nouvelle fonction : la fonction dérivée de f.
On la notera de l'une des façons suivantes :

$$x \mapsto f'(x) \qquad \text{ou} \qquad f' \qquad \text{ou} \qquad \frac{df}{dx}.$$

Exemple

Soit $f(x) = x^2$ alors, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, on a

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} = \frac{2x_0h + h^2}{h} = 2x_0 + h \xrightarrow[h\to 0]{} 2x_0 = f'(x_0).$$

Donc $f'(x) = 2x$ est la fonction dérivée de f.

Définition de dérivées

Une dérivée n'existe pas toujours.

Exemple

Définition de dérivées

Une dérivée n'existe pas toujours.

Exemple

Soit $f(x) = |x|$ alors

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{|x| - |0|}{x - 0} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x} \\ &\text{n'existe pas} \end{aligned}$$

f n'est pas dérivable en $x = 0$

Définition de dérivées

Une dérivée n'existe pas toujours.

Exemple

Soit $f(x) = |x|$ alors

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{|x|-|0|}{x-0} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x} \\ &\text{n'existe pas} \end{aligned}$$

f n'est pas dérivable en $x=0$

Soit $f(x) = \sqrt{x}$ alors

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{0}}{x-0} \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} \\ &= +\infty \end{aligned}$$

f n'est pas dérivable en $x=0$

Définition de dérivées

Théorème

f *dérivable en* x_0 $\Longrightarrow$ f *continue en* x_0

La réciproque est fausse

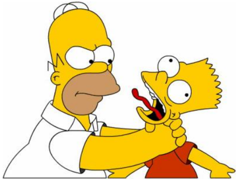
Exemples :

- $f(x) = |x|$ est continue en 0 mais non dérivables en 0 car $\lim_{x\to 0} \frac{|x|-|0|}{x-0}$ n'existe pas
- $g(x) = \sqrt{x}$ est continue en 0 mais non dérivables en 0 car $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{0}}{x-0} = +\infty$

Définition de dérivées

Théorème

f *dérivable en* x_0 $\Longrightarrow$ f *continue en* x_0



La réciproque est fausse

Exemples :

- $f(x) = |x|$ est continue en 0 mais non dérivables en 0 car $\lim_{x\to 0} \frac{|x|-|0|}{x-0}$ n'existe pas
- $g(x) = \sqrt{x}$ est continue en 0 mais non dérivables en 0 car $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{0}}{x-0} = +\infty$

1. Dérivées

Calcul de dérivées

Voici les expressions des dérivées de fonctions classiques. Elles sont à connaître sur le bout des doigts !

Rappels

- $(x^n)' = nx^{n-1}$
- $(e^x)' = e^x$
- $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$
- $(\sin(x))' = \cos(x)$
- $(\cos(x))' = -\sin(x)$
- $(\tan(x))' = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
- $(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arccos(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}$

Calcul de dérivées

Voici les expressions des dérivées de fonctions classiques. Elles sont à connaître sur le bout des doigts !

Rappels

- $(x^n)' = nx^{n-1}$
- $(e^x)' = e^x$
- $(\ln(x))' = \dfrac{1}{x}$
- $(\sin(x))' = \cos(x)$
- $(\cos(x))' = -\sin(x)$
- $(\tan(x))' = \dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
- $(\arcsin(x))' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arccos(x))' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arctan(x))' = \dfrac{1}{1+x^2}$

Calcul de dérivées

Voici les expressions des dérivées de fonctions classiques. Elles sont à connaître sur le bout des doigts !

Rappels

- $(x^n)' = nx^{n-1}$
- $(e^x)' = e^x$
- $(\ln(x))' = \dfrac{1}{x}$
- $(\sin(x))' = \cos(x)$
- $(\cos(x))' = -\sin(x)$
- $(\tan(x))' = \dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
- $(\arcsin(x))' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arccos(x))' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arctan(x))' = \dfrac{1}{1+x^2}$

Calcul de dérivées

Voici les expressions des dérivées de fonctions classiques. Elles sont à connaître sur le bout des doigts !

Rappels

- $(x^n)' = nx^{n-1}$
- $(e^x)' = e^x$
- $(\ln(x))' = \dfrac{1}{x}$
- $(\sin(x))' = \cos(x)$
- $(\cos(x))' = -\sin(x)$
- $(\tan(x))' = \dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
- $(\arcsin(x))' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arccos(x))' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arctan(x))' = \dfrac{1}{1+x^2}$

Calcul de dérivées

Voici les expressions des dérivées de fonctions classiques. Elles sont à connaître sur le bout des doigts !

Rappels

- $(x^n)' = nx^{n-1}$
- $(e^x)' = e^x$
- $(\ln(x))' = \dfrac{1}{x}$
- $(\sin(x))' = \cos(x)$
- $(\cos(x))' = -\sin(x)$
- $(\tan(x))' = \dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
- $(\arcsin(x))' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arccos(x))' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arctan(x))' = \dfrac{1}{1+x^2}$

Astuce mnémotechnique :

- le sin, qui commence par "**s**", est "**s**ympa" (= ne change pas de signe) ;
- le cos, qui commence par "**c**", est "**c**asse-pieds" (= change de signe).

Calcul de dérivées

Voici les expressions des dérivées de fonctions classiques. Elles sont à connaître sur le bout des doigts !

Rappels

- $(x^n)' = nx^{n-1}$
- $(e^x)' = e^x$
- $(\ln(x))' = \dfrac{1}{x}$
- $(\sin(x))' = \cos(x)$
- $(\cos(x))' = -\sin(x)$
- $(\tan(x))' = \dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
- $(\arcsin(x))' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arccos(x))' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arctan(x))' = \dfrac{1}{1+x^2}$

Astuce mnémotechnique :

- le sin, qui commence par “**s**”, est “**s**ympa” (= ne change pas de signe) ;
- le cos, qui commence par “**c**”, est “**c**asse-pieds” (= change de signe).

Calcul de dérivées

Voici les expressions des dérivées de fonctions classiques. Elles sont à connaître sur le bout des doigts !

Rappels

- $(x^n)' = nx^{n-1}$
- $(e^x)' = e^x$
- $(\ln(x))' = \dfrac{1}{x}$
- $(\sin(x))' = \cos(x)$
- $(\cos(x))' = -\sin(x)$
- $(\tan(x))' = \dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
- $(\arcsin(x))' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arccos(x))' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arctan(x))' = \dfrac{1}{1+x^2}$

Astuce mnémotechnique :

- le sin, qui commence par "**s**", est "**s**ympa" (= ne change pas de signe) ;
- le cos, qui commence par "**c**", est "**c**asse-pieds" (= change de signe).

Calcul de dérivées

Voici les expressions des dérivées de fonctions classiques. Elles sont à connaître sur le bout des doigts !

Rappels

- $(x^n)' = nx^{n-1}$
- $(e^x)' = e^x$
- $(\ln(x))' = \dfrac{1}{x}$
- $(\sin(x))' = \cos(x)$
- $(\cos(x))' = -\sin(x)$
- $(\tan(x))' = \dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
- $(\arcsin(x))' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arccos(x))' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arctan(x))' = \dfrac{1}{1+x^2}$

Astuce mnémotechnique :

- le sin, qui commence par "**s**", est "**s**ympa" (= ne change pas de signe) ;
- le cos, qui commence par "**c**", est "**c**asse-pieds" (= change de signe).

Calcul de dérivées

Voici les expressions des dérivées de fonctions classiques. Elles sont à connaître sur le bout des doigts !

Rappels

- $(x^n)' = nx^{n-1}$
- $(e^x)' = e^x$
- $(\ln(x))' = \dfrac{1}{x}$
- $(\sin(x))' = \cos(x)$
- $(\cos(x))' = -\sin(x)$
- $(\tan(x))' = \dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
- $(\arcsin(x))' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arccos(x))' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arctan(x))' = \dfrac{1}{1+x^2}$

Astuce mnémotechnique :

- le sin, qui commence par "**s**", est "**s**ympa" (= ne change pas de signe) ;
- le cos, qui commence par "**c**", est "**c**asse-pieds" (= change de signe).

Calcul de dérivées

Linéarité : $\big(f(x)+g(x)\big)' = f'(x)+g'(x)$ et $\big(cf(x)\big)' = cf'(x)$

Produit : $\big(f(x)\times g(x)\big)' = f'(x)\times g(x) + f(x)\times g'(x)$

Quotient : $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)\times g(x) - f(x)\times g'(x)}{\big(g(x)\big)^2} = \dfrac{f'(x)}{g(x)} - \dfrac{f(x)}{g(x)}\dfrac{g'(x)}{g(x)}$

Exemple

Linéarité : $\Big(3\sin(x)+e^x\Big)' = 3\Big(\sin(x)\Big)' + \Big(e^x\Big)' = 3\cos(x)+e^x$

Produit : $\big(x^4\sin(x)\big)' = \big(x^4\big)'\times\sin(x) + x^4\times\big(\sin(x)\big)' = 4x^3\sin(x)+x^4\cos(x)$

Quotient : $\left(\dfrac{x^2}{\sin(x)}\right)' = \dfrac{2x\sin(x)-x^2\cos(x)}{\sin^2(x)}$

Calcul de dérivées

Linéarité : $\big(f(x)+g(x)\big)' = f'(x)+g'(x)$ et $\big(cf(x)\big)' = cf'(x)$

Produit : $\big(f(x)\times g(x)\big)' = f'(x)\times g(x) + f(x)\times g'(x)$

Quotient : $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)\times g(x) - f(x)\times g'(x)}{\big(g(x)\big)^2} = \dfrac{f'(x)}{g(x)} - \dfrac{f(x)}{g(x)}\dfrac{g'(x)}{g(x)}$

Exemple

Linéarité : $\Big(3\sin(x)+e^x\Big)' = 3\Big(\sin(x)\Big)' + \Big(e^x\Big)' = 3\cos(x)+e^x$

Produit : $\big(x^4\sin(x)\big)' = \big(x^4\big)'\times\sin(x) + x^4\times\big(\sin(x)\big)' = 4x^3\sin(x) + x^4\cos(x)$

Quotient : $\left(\dfrac{x^2}{\sin(x)}\right)' = \dfrac{2x\sin(x) - x^2\cos(x)}{\sin^2(x)}$

Calcul de dérivées

Linéarité : $\big(f(x)+g(x)\big)'=f'(x)+g'(x)$ et $\big(cf(x)\big)'=cf'(x)$

Produit : $\big(f(x)\times g(x)\big)'=f'(x)\times g(x)+f(x)\times g'(x)$

Quotient : $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'=\dfrac{f'(x)\times g(x)-f(x)\times g'(x)}{\big(g(x)\big)^2}=\dfrac{f'(x)}{g(x)}-\dfrac{f(x)}{g(x)}\dfrac{g'(x)}{g(x)}$

Exemple

Linéarité : $\Big(3\sin(x)+e^x\Big)'=3\Big(\sin(x)\Big)'+\Big(e^x\Big)'=3\cos(x)+e^x$

Produit : $(x^4\sin(x))'=(x^4)'\times\sin(x)+x^4\times\big(\sin(x)\big)'=4x^3\sin(x)+x^4\cos(x)$

Quotient : $\left(\dfrac{x^2}{\sin(x)}\right)'=\dfrac{2x\sin(x)-x^2\cos(x)}{\sin^2(x)}$

Calcul de dérivées

Composition : $\Big(g\big(f(x)\big)\Big)' = g'\big(f(x)\big) \times f'(x)$ $\neq g'\big(f'(x)\big)$

$\Big(h\Big(g\big(f(x)\big)\Big)\Big)' = h'\Big(g\big(f(x)\big)\Big) \times g'\big(f(x)\big) \times f'(x)$

Exemple

Composition : $\left(\sin\left(x^2\right)\right)' = \cos\left(x^2\right) \times 2x$

$\left(\ln\left(\sin\left(x^2\right)\right)\right)' = \frac{1}{\sin\left(x^2\right)} \cos\left(x^2\right) \times 2x$

Calcul de dérivées

Composition : $\Big(g\big(f(x)\big)\Big)' = g'\big(f(x)\big) \times f'(x)$ $\neq g'\big(f'(x)\big)$

$$\Big(h\big(g(f(x))\big)\Big)' = h'\big(g(f(x))\big) \times g'\big(f(x)\big) \times f'(x)$$

Exemple

Composition : $\Big(\sin\left(x^2\right)\Big)' = \cos\left(x^2\right) \times 2x$

$$\Big(\ln\left(\sin\left(x^2\right)\right)\Big)' = \frac{1}{\sin\left(x^2\right)} \cos\left(x^2\right) \times 2x$$

Calcul de dérivées

Testez-vous

Calculer $f'(x)$:

1. $f(x) = 3\sin(x) - 5\cos(x)$
2. $f(x) = 3e^x - x^2$
3. $f(x) = 3\ln(x)$
4. $f(x) = \sin(2x)$
5. $f(x) = \sin(x + x^3)$
6. $f(x) = (x + 4)^3$
7. $f(x) = (x + \sin(x))^5$
8. $f(x) = \sin(\ln(x^2))$
9. $f(x) = \exp(\cos^2(x))$
10. $f(x) = xe^x$
11. $f(x) = \frac{\cos(x)}{x^2}$
12. $f(x) = e^x \sin(x)$
13. $f(x) = \frac{\ln(x)}{x^4}$
14. $f(x) = \sin(x)\cos(x)$
15. $f(x) = \frac{\ln(x)}{e^x}$
16. $f(x) = x^2 \sin(x)$
17. $f(x) = \frac{e^{1/x}}{x}$

Calcul de dérivées

Testez-vous

Calculer $f'(x)$:

1. $f(x) = 3\sin(x) - 5\cos(x)$
2. $f(x) = 3e^x - x^2$
3. $f(x) = 3\ln(x)$
4. $f(x) = \sin(2x)$
5. $f(x) = \sin(x + x^3)$
6. $f(x) = (x+4)^3$
7. $f(x) = (x + \sin(x))^5$
8. $f(x) = \sin(\ln(x^2))$
9. $f(x) = \exp(\cos^2(x))$
10. $f(x) = xe^x$
11. $f(x) = \frac{\cos(x)}{x^2}$
12. $f(x) = e^x \sin(x)$
13. $f(x) = \frac{\ln(x)}{x^4}$
14. $f(x) = \sin(x)\cos(x)$
15. $f(x) = \frac{\ln(x)}{e^x}$
16. $f(x) = x^2\sin(x)$
17. $f(x) = \frac{e^{1/x}}{x}$

Correction

1. $f'(x) = 3\cos(x) + 5\sin(x)$
2. $f'(x) = 3e^x - 2x$
3. $f'(x) = \frac{3}{x}$
4. $f'(x) = 2\cos(2x)$
5. $f'(x) = (1 + 3x^2)\cos(x + x^3)$
6. $f'(x) = 3(x+4)^2$
7. $f'(x) = 5(x + \sin(x))^4(1 + \cos(x))$
8. $f'(x) = \frac{2}{x}\cos(\ln(x^2))$
9. $f'(x) = -2\cos(x)\sin(x)\exp(\cos^2(x))$
10. $f'(x) = (1+x)e^x$
11. $f'(x) = \frac{-x\sin(x) - 2\cos(x)}{x^3}$
12. $f'(x) = e^x\left(\sin(x) + \cos(x)\right)$
13. $f'(x) = \frac{1 - 4\ln(x)}{x^5}$
14. $f'(x) = -\sin^2(x) + \cos^2(x)$
15. $f'(x) = \frac{1 - x\ln(x)}{xe^x}$
16. $f'(x) = 2x\sin(x) + x^2\cos(x)$
17. $f(x) = -\frac{1+x}{x^3}e^{1/x}$

Calcul de dérivées

Composition (*chain rule*)

In "real life"

Le volume d'un ballon sphérique est une fonction du rayon : $r \mapsto v(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Si on gonfle ce ballon son rayon dépend du temps : $t \mapsto r(t)$.

Le volume aussi dépend donc du temps : $t \mapsto V(t) = v(r(t))$.

Le taux de changement du volume en fonction du temps est

$$V'(t) = v'(r(t)) \times r'(t) = 4\pi(r(t))^2 r'(t).$$

Par exemple, si le rayon du ballon croît de $0.5\,\mathrm{cm\,s^{-1}}$ et si son rayon à l'instant t_0 est de $3\,\mathrm{cm}$ alors le volume croît à la vitesse de

$$V'(t_0) = v'(r(t_0)) \times r'(t_0) = 4\pi \times (3\,\mathrm{cm})^2 \times (0.5\,\mathrm{cm\,s^{-1}}) = \pi \times 18\,\mathrm{cm^3\,s^{-1}}.$$

1. Dérivées

Calcul approché de valeurs

Connaître la dérivée d'une fonction en un point x_0 permet d'approcher les valeurs de la fonction autour de ce point.

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad \rightsquigarrow \quad f'(x_0) \simeq \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{f(x_0+h) \simeq f(x_0) + hf'(x_0)}$$

Testez-vous

Estimer $\sin(0.01)$ sans utiliser la calculatrice.

Correction

$f(x) = \sin(x)$, $f'(x) = \cos(x)$; pour $x_0 = 0$ et $h = 0.01$ on a

$$\sin(0.01) = \sin(x_0 + h) \simeq \sin(x_0) + h\cos(x_0) = 0 + h = 0.01.$$

Calcul approché de valeurs

Connaître la dérivée d'une fonction en un point x_0 permet d'approcher les valeurs de la fonction autour de ce point.

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \quad \rightsquigarrow \quad f'(x_0) \simeq \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{f(x_0+h) \simeq f(x_0) + hf'(x_0)}$$

Testez-vous

Estimer $\sin(0.01)$ sans utiliser la calculatrice.

Correction

$f(x) = \sin(x)$, $f'(x) = \cos(x)$; pour $x_0 = 0$ et $h = 0.01$ on a

$$\sin(0.01) = \sin(x_0 + h) \simeq \sin(x_0) + h\cos(x_0) = 0 + h = 0.01.$$

Calcul approché de valeurs

Connaître la dérivée d'une fonction en un point x_0 permet d'approcher les valeurs de la fonction autour de ce point.

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \quad \rightsquigarrow \quad f'(x_0) \simeq \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{f(x_0+h) \simeq f(x_0) + hf'(x_0)}$$

Testez-vous

Estimer $\sin(0.01)$ sans utiliser la calculatrice.

Correction

$f(x) = \sin(x)$, $f'(x) = \cos(x)$; pour $x_0 = 0$ et $h = 0.01$ on a

$$\sin(0.01) = \sin(x_0 + h) \simeq \sin(x_0) + h\cos(x_0) = 0 + h = 0.01.$$

Calcul approché de valeurs

Connaître la dérivée d'une fonction en un point x_0 permet d'approcher les valeurs de la fonction autour de ce point.

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \quad \rightsquigarrow \quad f'(x_0) \simeq \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{f(x_0+h) \simeq f(x_0) + hf'(x_0)}$$

Testez-vous

Estimer $\sin(0.01)$ sans utiliser la calculatrice.

Correction

$f(x) = \sin(x)$, $f'(x) = \cos(x)$; pour $x_0 = 0$ et $h = 0.01$ on a

$$\sin(0.01) = \sin(x_0 + h) \simeq \sin(x_0) + h\cos(x_0) = 0 + h = 0.01.$$

Calcul approché de valeurs

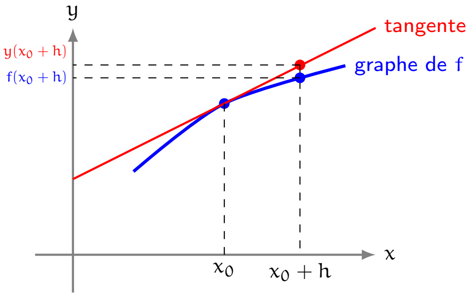
Droite tangente au graphe d'une fonction

Rappels

Si f est dérivable en x_0, alors le graphe de f admet au point d'abscisse x_0 une tangente de pente $f'(x_0)$. Son équation est

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

La tangente en x_0 est la droite qui "approche" au mieux le graphe de f autour de x_0. Pour x proche de x_0 ($x = x_0 + h$ avec $h \simeq 0$), au lieu de lire les valeurs $f(x)$ sur le graphe de f, on lit les valeurs approchées $y(x) = (x - x_0)f'(x_0) + f(x_0)$ sur la tangente en x_0.



Calcul approché de valeurs

Droite tangente au graphe d'une fonction

Testez-vous

Donner l'équation de la droite tangente au point indiqué :

1. $f(x) = x^2$, $x_0 = 1$
2. $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 1$
3. $f(x) = \ln(x)$, $x_0 = 1$
4. $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$
5. $f(x) = \sin(x)$, $x_0 = 0$
6. $f(x) = \cos(x)$, $x_0 = 0$

Correction

1. $y = 2(x-1)+1 = 2x-1$
2. $y = \frac{x+1}{2}$
3. $y = x-1$
4. $y = x+1$
5. $y = x$
6. $y = 1$

Calcul approché de valeurs

Droite tangente au graphe d'une fonction

Testez-vous

Donner l'équation de la droite tangente au point indiqué :

1. $f(x) = x^2$, $x_0 = 1$
2. $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 1$
3. $f(x) = \ln(x)$, $x_0 = 1$
4. $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$
5. $f(x) = \sin(x)$, $x_0 = 0$
6. $f(x) = \cos(x)$, $x_0 = 0$

Correction

1. $y = 2(x-1)+1 = 2x-1$
2. $y = \frac{x+1}{2}$
3. $y = x-1$
4. $y = x+1$
5. $y = x$
6. $y = 1$

Calcul approché de valeurs

Polynôme de Taylor

Pour aller plus loin : polynôme de Taylor

Pour $x \simeq x_0$ on peut approcher $f(x)$ par le polynôme de degré n suivant :

$$f(x) \simeq p(x) \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{\underbrace{f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)}_{\text{Droite tangente}} + (x - x_0)^2 \frac{f''(x_0)}{2!}}_{\text{Parabole osculatrice}} + (x - x_0)^3 \frac{f'''(x_0)}{3!} + \cdots + (x - x_0)^n \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

- n = degré du polynôme p = plus grand ordre de dérivation de f
- Si $n = 1$ alors p est l'équation de la droite tangente à f en x_0
- Si $n = 2$ alors p est l'équation de la parabole osculatrice à f en x_0

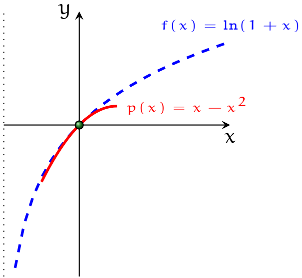
Calcul approché de valeurs

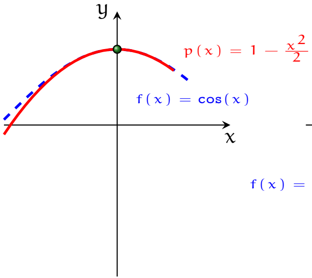
Polynôme de Taylor

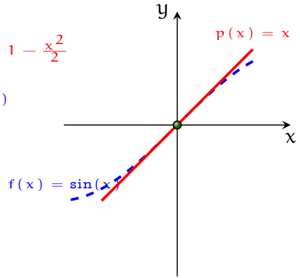
Exemple

À l'ordre 2 on a $f(x) \simeq f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + (x - x_0)^2 \frac{f''(x_0)}{2}$:

1. $\ln(1+x) \simeq 0 + (x-0)\frac{1}{1+0} + (x-0)^2 \frac{-1}{(1+0)^2} = x - x^2$ lorsque $x \simeq 0$
2. $\cos(x) \simeq 1 + (x-0)(-\sin(0)) + (x-0)^2(-\cos(0)) = 1 - \frac{x^2}{2}$ lorsque $x \simeq 0$
3. $\sin(x) \simeq 0 + (x-0)\cos(0) + (x-0)^2(-\sin(0)) = x$ lorsque $x \simeq 0$







1. Dérivées

Corollaire : Calcul de limites par la règle de l'Hôpital

Règle de l'Hôpital

Si $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \left[\dfrac{0}{0}\right]$ ou $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ et $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in [-\infty; +\infty]$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \ell$

Corollaire : Calcul de limites par la règle de l'Hôpital

Règle de l'Hôpital

Si $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{0}{0}\right]$ ou $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ et $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in [-\infty; +\infty]$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$

Exemple

Soient $x_0 = 0$, $f(x) = \sin(x)$ et $g(x) = x$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \frac{0}{0}, \\ \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Corollaire : Calcul de limites par la règle de l'Hôpital

Règle de l'Hôpital

Si $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{0}{0}\right]$ ou $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ et $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in [-\infty; +\infty]$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$

Exemple

Soient $x_0 = 0$, $f(x) = \sin(x)$ et $g(x) = x$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \frac{0}{0}, \\ \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Ne pas confondre $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ et $\lim\limits_{x \to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'$

Corollaire : Calcul de limites par la règle de l'Hôpital

Si $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \left[\frac{0}{0}\right]$ ou $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ on peut ré-appliquer la règle de l'Hôpital et calculer $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f''(x)}{g''(x)}$.

Exemple

Soient $x_0 = 0$, $f(x) = e^x + e^{-x} - 2$ et $g(x) = 1 - \cos(x)$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos(x)} = \frac{0}{0},$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin(x)} = \frac{0}{0},$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos(x)} = 2.$$

Donc $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = 2$.

Corollaire : Calcul de limites par la règle de l'Hôpital

Importance des hypothèses

1. Si $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ n'existe pas on ne peut rien conclure sur $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Exemple

Soient $x_0 = 0$, $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ et $g(x) = \frac{e^x - 1}{x}$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)}{e^x} \quad \text{n'existe pas cependant} \quad \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

En effet, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ (théorème des gendarmes) et $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - e^0}{x - 0} = 1$ (définition de dérivée de e^x en $x = 0$).

2. Si on n'a pas de forme indéterminée $\left[\frac{0}{0}\right]$ ou $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, la règle ne s'applique pas !

Exemple

Soient $x_0 = 0$, $f(x) = 1$ et $g(x) = x$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{0}{1} = 0 \quad \text{mais} \quad \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$$

Corollaire : Calcul de limites par la règle de l'Hôpital

Importance des hypothèses

1. Si $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ n'existe pas on ne peut rien conclure sur $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Exemple

Soient $x_0 = 0$, $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ et $g(x) = \frac{e^x - 1}{x}$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)}{e^x} \quad \text{n'existe pas cependant} \quad \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

En effet, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ (théorème des gendarmes) et $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - e^0}{x - 0} = 1$ (définition de dérivée de e^x en $x = 0$).

2. Si on n'a pas de forme indéterminée $\left[\frac{0}{0}\right]$ ou $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, la règle ne s'applique pas !

Exemple

Soient $x_0 = 0$, $f(x) = 1$ et $g(x) = x$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{0}{1} = 0 \quad \text{mais} \quad \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$$

Corollaire : Calcul de limites par la règle de l'Hôpital

Limites fondamentales

Testez-vous

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 0^\pm} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x\left(\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right)$
2. $\lim\limits_{x\to 0^\pm} \dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$ et $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^2\left(1-\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$, x en radiant
3. $\lim\limits_{x\to 0^\pm} \dfrac{a^x-1}{x}$ et $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x\left(a^{1/x}-1\right)$, $a>0$
4. $\lim\limits_{x\to 0^\pm} (1+\alpha x)^{1/x}$ et $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(1+\dfrac{\alpha}{x}\right)^x$, $\alpha\in\mathbb{R}$
5. $\lim\limits_{x\to 0^\pm} \dfrac{(1+x)^\alpha-1}{x}$ et $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x\left(\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^\alpha-1\right)$, $\alpha\in\mathbb{R}$

Corollaire : Calcul de limites par la règle de l'Hôpital

Limites fondamentales

Correction

1. $\lim\limits_{x\to0^\pm} \frac{\ln(1+x)}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{[H]}{=} \lim\limits_{x\to0^\pm} \frac{1}{1+x} = 1.$
   Soit $t=\frac{1}{x}$, alors $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) = \lim\limits_{t\to0^\pm} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$
2. $\lim\limits_{x\to0^\pm} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{[H]}{=} \lim\limits_{x\to0^\pm} \frac{\sin(x)}{2x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{[H]}{=} \lim\limits_{x\to0^\pm} \frac{\cos(x)}{2} = \frac{1}{2}$
   Soit $t=\frac{1}{x}$, alors $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^2\left(1-\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \lim\limits_{t\to0^\pm} \frac{1-\cos(t)}{t^2} = \frac{1}{2}$
3. $(1+\alpha x)^{1/x} = \exp\left(\frac{1}{x}\ln(1+\alpha x)\right)$ et $\lim\limits_{x\to0^\pm} \exp\left(\frac{1}{x}\ln(1+\alpha x)\right) = \exp\left(\lim\limits_{x\to0^\pm} \frac{1}{x}\ln(1+\alpha x)\right)$
   $\lim\limits_{x\to0^\pm} \frac{\ln(1+\alpha x)}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{[H]}{=} \lim\limits_{x\to0^\pm} \frac{\alpha}{1+\alpha x} = \alpha$ donc $\lim\limits_{x\to0^\pm} (1+\alpha x)^{1/x} = e^\alpha.$
   Soit $t=\frac{1}{x}$, alors $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^x = \lim\limits_{t\to0^\pm} (1+\alpha t)^{1/t} = e^\alpha$
4. $a^x \overset{\text{def}}{=} \exp(a\ln(x))$ donc $\lim\limits_{x\to0^\pm} \frac{a^x-1}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{[H]}{=} \lim\limits_{x\to0^\pm} \frac{\ln(a)a^x}{1} = \ln(a)$
   Soit $t=\frac{1}{x}$, alors $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x(a^{1/x}-1) = \lim\limits_{t\to0^\pm} \frac{a^t-1}{t} = \ln(a)$
5. $\lim\limits_{x\to0^\pm} \frac{(1+x)^\alpha-1}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{[H]}{=} \lim\limits_{x\to0^\pm} \alpha(1+x)^{\alpha-1} = \alpha$
   Soit $t=\frac{1}{x}$, alors $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^\alpha-1\right) = \lim\limits_{t\to0^\pm} \frac{(1+t)^\alpha-1}{t} = \alpha$

1. Dérivées

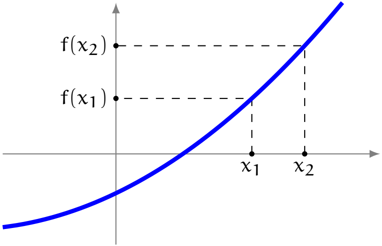
Points stationnaires, Sens de variation, Concavité

La notion de dérivée joue un rôle clé dans l'étude des fonctions.
Elle permet de déterminer les variations d'une fonction et de trouver ses extremums.

Rappels

Soit une fonction $f\colon I \to \mathbb{R}$. Pour tout x_1 et x_2 de I,

- f est *croissante* si $x_1 \leq x_2$ implique $f(x_1) \leq f(x_2)$;
- f est *strictement croissante* si $x_1 < x_2$ implique $f(x_1) < f(x_2)$;
- f est *décroissante* si $x_1 \leq x_2$ implique $f(x_1) \geq f(x_2)$;
- f est *strictement décroissante* si $x_1 < x_2$ implique $f(x_1) > f(x_2)$.



f' et Croissance/décroissance

$f'(x)$ = pente de la droite tangente à f en x = taux instantané de variation de y par rapport à x lorsque $y = f(x)$ donc

1. si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I \overset{\text{def}}{=} [a;b]$ alors f est constante sur I ;
2. si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I \overset{\text{def}}{=} [a;b]$ alors f est strictement croissante sur I ;
3. $f'(x) < 0$ pour tout $x \in I \overset{\text{def}}{=} [a;b]$ alors f est strictement décroissante sur I.

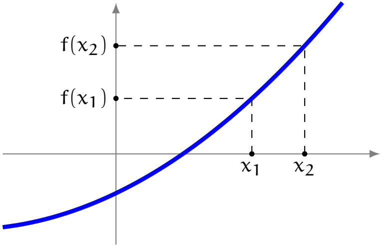
Points stationnaires, Sens de variation, Concavité

La notion de dérivée joue un rôle clé dans l'étude des fonctions.
Elle permet de déterminer les variations d'une fonction et de trouver ses extremums.

Rappels

Soit une fonction $f\colon I \to \mathbb{R}$. Pour tout x_1 et x_2 de I,

- f est *croissante* si $x_1 \leq x_2$ implique $f(x_1) \leq f(x_2)$;
- f est *strictement croissante* si $x_1 < x_2$ implique $f(x_1) < f(x_2)$;
- f est *décroissante* si $x_1 \leq x_2$ implique $f(x_1) \geq f(x_2)$;
- f est *strictement décroissante* si $x_1 < x_2$ implique $f(x_1) > f(x_2)$.



f' et Croissance/décroissance

$f'(x)$ = pente de la droite tangente à f en x = taux instantané de variation de y par rapport à x lorsque $y = f(x)$ donc

1. si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I \overset{\text{def}}{=} [a; b]$ alors f est constante sur I ;
2. si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I \overset{\text{def}}{=} [a; b]$ alors f est strictement croissante sur I ;
3. $f'(x) < 0$ pour tout $x \in I \overset{\text{def}}{=} [a; b]$ alors f est strictement décroissante sur I.

Points stationnaires, Sens de variation, Concavité

Point stationnaire ou critique

Un point x_0 est stationnaire pour une fonction f si $f'(x_0) = 0$.
En ce point, la droite tangente est horizontale.

Exemple

- La fonction $f(x) = x^2 + 2x + 2$ a un point stationnaire :

$$f'(x) = 2x + 2 = 0 \implies x = -1$$

- La fonction $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$ a deux points stationnaires :

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x^2 - 3x + 2) = 0 \implies x = 1,\ 2$$

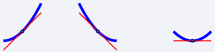
- La fonction $f(x) = xe^{-x}$ a un point stationnaire :

$$f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1 - x)e^{-x} = 0 \implies x = 1$$

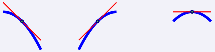
Points stationnaires, Sens de variation, Concavité

Rappels (définition géométrique)

1. f est convexe sur $I \stackrel{\text{def}}{=} [a;b]$ lorsque toutes les cordes reliant deux points du graphe sont au-dessus (= lorsque les droites tangentes au graphe de f en x_0 sont au-dessous pour tout $x_0 \in I$)



2. f est concave sur $I \stackrel{\text{def}}{=} [a;b]$ si $-f$ est convexe



f'' et concavité/convexité

$f''(x) = (f'(x))'$ taux instantané de variation de la pente de la droite tangente à f en x donc

1. si $f''(x) > 0$ pour tout $x \in I \stackrel{\text{def}}{=} [a;b]$ alors f' est strictement croissante sur I donc la pente de la tangente augmente et f est convexe sur I ;
2. $f''(x) < 0$ pour tout $x \in I \stackrel{\text{def}}{=} [a;b]$ alors f' est strictement décroissante sur I donc la pente de la tangente diminue et f est concave sur I.

Points stationnaires, Sens de variation, Concavité

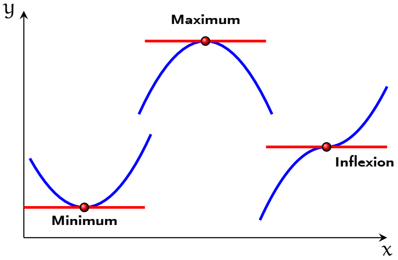
Nature d'un point stationnaire

Soit x_0 un point stationnaire (*i.e.* $f'(x_0) = 0$) pour une fonction f.

Maximum : x_0 est un maximum local si *localement* $f(x) \leq f(x_0)$, *i.e.* si le graphe de f est en dessous de la droite horizontale d'équation $y = f(x_0)$

Minimum : x_0 est un minimum local si *localement* $f(x) \geq f(x_0)$, *i.e.* si le graphe de f est au dessus de la droite horizontale d'équation $y = f(x_0)$

Inflexion : si le graphe de f traverse la droite horizontale d'équation $y = f(x_0)$ alors x_0 n'est ni un minimum ni un maximum. Comme on change de concavité, c'est, de plus, un point d'inflexion.



Proposition

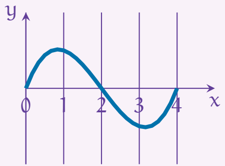
Soit x_0 un point stationnaire (i.e. $f'(x_0) = 0$).

1. *Si $f''(x_0) > 0$, alors x_0 est un minimum.*
2. *Si $f''(x_0) < 0$, alors x_0 est un maximum.*

Points stationnaires, Sens de variation, Concavité

Testez-vous

Quels sont les points stationnaires ?
Sur quels intervalles $f'(x) > 0$?
Sur quels intervalles $f''(x) > 0$?



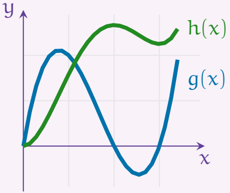
Correction

$x = 1$ et $x = 3$.

Sur $[0; 1[$ et sur $]3; 4]$.

Sur $[2; 4]$.

Testez-vous



$g(x) = h'(x)$
ou
$h(x) = g'(x)$?

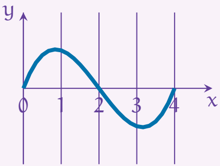
Correction

$g(x) = h'(x)$

Points stationnaires, Sens de variation, Concavité

Testez-vous

Quels sont les points stationnaires ?
Sur quels intervalles $f'(x) > 0$?
Sur quels intervalles $f''(x) > 0$?



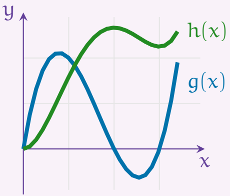
Correction

$x = 1$ et $x = 3$.

Sur $[0; 1[$ et sur $]3; 4]$.

Sur $[2; 4]$.

Testez-vous



$g(x) = h'(x)$
ou
$h(x) = g'(x)$?

Correction

$g(x) = h'(x)$

Points stationnaires, Sens de variation, Concavité

Testez-vous

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Calculer les points stationnaires et en établir la nature :

1. $f(x) = (x-2)^2$
2. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$
3. $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2$
4. $f(x) = xe^{-x}$
5. $f(x) = x^2 \ln(x)$
6. $f(x) = \sin(x) + (1-x)\cos(x)$ pour $x \in [-1; 2]$
7. $f(x) = (x-1)^2 e^x$

Points stationnaires, Sens de variation, Concavité

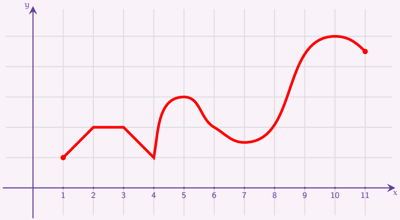
Correction

1. $f'(x) = 2(x-2)$, $f''(x) = 2$ donc $x = 2$ minimum
2. $f'(x) = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x-1)(x-3)$, $f''(x) = 6(x-2)$ donc $x = 3$ minimum, $x = 1$ maximum
3. $f'(x) = 12(x^3 - 2x^2 + x) = 12x(x^2 - 2x + 1) = 12x(x-1)^2$, $f''(x) = 11(3x^2 - 4x + 1)$ donc $x = 0$ minimum, $x = 1$ inflexion
4. $f'(x) = (1-x)e^{-x}$, $f''(x) = (-2+x)e^{-x}$ donc $x = 1$ maximum
5. $f'(x) = (1 + 2\ln(x))x$, $f''(x) = 2\ln(x) + x + 1$ donc $x = e^{-1/2}$ minimum
6. $f'(x) = (x-1)\sin(x)$, $f''(x) = \sin(x) + (x-1)\cos(x)$ donc $x = 0$ maximum, $x = 1$ minimum
7. $f'(x) = (x^2 - 1)e^x$, $f'(x) = (x^2 + 2x - 1)e^x$ donc $x = -1$ maximum, $x = 1$ minimum

Points stationnaires, Sens de variation, Concavité

Testez-vous

Indiquer le(s) min et max et indiquer s'ils sont globaux.



Correction

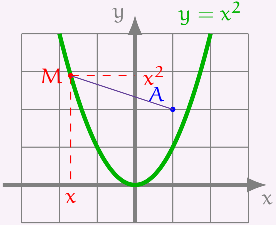
- Minima locaux : $x = 1$, $x \in [2, 3]$, $x = 4$, $x = 7$, $x = 11$
- Minima globaux : $x = 1$, $x = 4$
- Maxima locaux : $x \in [2, 3]$, $x = 5$, $x = 10$
- Maxima globaux : $x = 10$
- $x = 6$ est un point stationnaire d'inflexion

NB : en $x = 2$, en $x = 3$ et en $x = 4$ la fonction est continue mais n'est pas dérivable

Points stationnaires, Sens de variation, Concavité

Testez-vous

Quel point de la parabole d'équation $y = x^2$ est le plus près du point A de coordonnées $(1, 2)$?



Aide

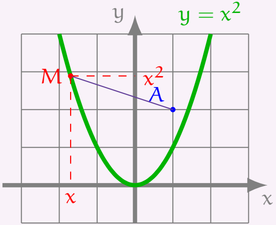
- M appartient à la parabole donc ses coordonnées sont de la forme (x, x^2).
- Distance entre A et M : $AM = \sqrt{(x-1)^2 + (x^2-2)^2}$.
- Trouver le plus petit AM équivaut à trouver le plus petit AM^2. On définit donc comme fonction à minimiser

$$f(x) = (x-1)^2 + (x^2-2)^2 = x^4 - 3x^2 - 2x + 5.$$

Points stationnaires, Sens de variation, Concavité

Testez-vous

Quel point de la parabole d'équation $y = x^2$ est le plus près du point A de coordonnées $(1, 2)$?



Aide

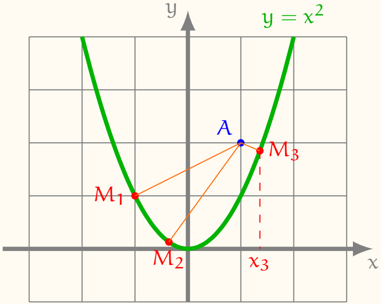
- M appartient à la parabole donc ses coordonnées sont de la forme (x, x^2).
- Distance entre A et M : $AM = \sqrt{(x-1)^2 + (x^2-2)^2}$.
- Trouver le plus petit AM équivaut à trouver le plus petit AM^2. On définit donc comme fonction à minimiser

$$f(x) = (x-1)^2 + (x^2-2)^2 = x^4 - 3x^2 - 2x + 5.$$

Points stationnaires, Sens de variation, Concavité

Correction

- $f'(x) = 4x^3 - 6x - 2 = 2(x+1)(2x^2 - 2x - 1)$.
- $f'(x)$ s'annule en $x_1 = -1$, $\quad x_2 = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$, $\quad x_3 = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \approx 1.36$.
- $f''(x) = 12x^2 - 6 = 6(2x^2 - 1)$.
- $f''(x_1) > 0$, $f''(x_2) < 0$, $f''(x_3) > 0$.
- Ansi f admet un maximum local en x_2 et un minimum local en x_1 et x_3. L'un des deux est un minimum global, mais lequel ? Il suffit de comparer : $f(x_1) = 5 > f(x_3) = \frac{11-6\sqrt{3}}{4} \approx 0.15$: le minimum global est atteint en x_3.



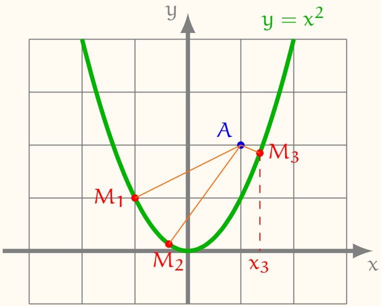
Conclusion : le point de la parabole le plus proche du point A est le point M_3 d'abscisse x_3 et d'ordonnée x_3^2.

Remarque importante : le point M_1 (correspondant à x_1) est moins éloigné de A que ses voisins proches, mais que ce n'est pas lui la solution du problème : M_1 correspond à un minimum local, mais pas un minimum global.

Points stationnaires, Sens de variation, Concavité

Correction

- $f'(x) = 4x^3 - 6x - 2 = 2(x+1)(2x^2 - 2x - 1)$.
- $f'(x)$ s'annule en $x_1 = -1$, $\quad x_2 = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$, $\quad x_3 = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \approx 1.36$.
- $f''(x) = 12x^2 - 6 = 6(2x^2 - 1)$.
- $f''(x_1) > 0$, $f''(x_2) < 0$, $f''(x_3) > 0$.
- Ansi f admet un maximum local en x_2 et un minimum local en x_1 et x_3. L'un des deux est un minimum global, mais lequel ? Il suffit de comparer : $f(x_1) = 5 > f(x_3) = \frac{11-6\sqrt{3}}{4} \approx 0.15$: le minimum global est atteint en x_3.



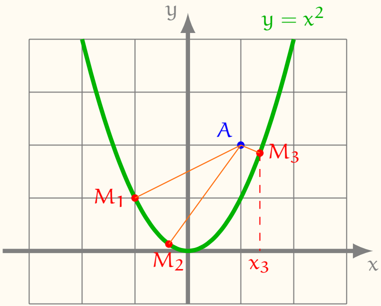
Conclusion : le point de la parabole le plus proche du point A est le point M_3 d'abscisse x_3 et d'ordonnée x_3^2.

Remarque importante : le point M_1 (correspondant à x_1) est moins éloigné de A que ses voisins proches, mais que ce n'est pas lui la solution du problème : M_1 correspond à un minimum local, mais pas un minimum global.

Points stationnaires, Sens de variation, Concavité

Correction

- $f'(x) = 4x^3 - 6x - 2 = 2(x+1)(2x^2 - 2x - 1)$.
- $f'(x)$ s'annule en $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$, $x_3 = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \approx 1.36$.
- $f''(x) = 12x^2 - 6 = 6(2x^2 - 1)$.
- $f''(x_1) > 0$, $f''(x_2) < 0$, $f''(x_3) > 0$.
- Ansi f admet un maximum local en x_2 et un minimum local en x_1 et x_3. L'un des deux est un minimum global, mais lequel ? Il suffit de comparer : $f(x_1) = 5 > f(x_3) = \frac{11-6\sqrt{3}}{4} \approx 0.15$: le minimum global est atteint en x_3.



Conclusion : le point de la parabole le plus proche du point A est le point M_3 d'abscisse x_3 et d'ordonnée x_3^2.

Remarque importante : le point M_1 (correspondant à x_1) est moins éloigné de A que ses voisins proches, mais que ce n'est pas lui la solution du problème : M_1 correspond à un minimum local, mais pas un minimum global.

Temporary page!

LaTeX was unable to guess the total number of pages correctly. As there was some unprocessed data that sh
added to the final page this extra page has been added to receive it.
If you rerun the document (without altering it) this surplus page will go away, because LaTeX now knows ho
to expect for this document.