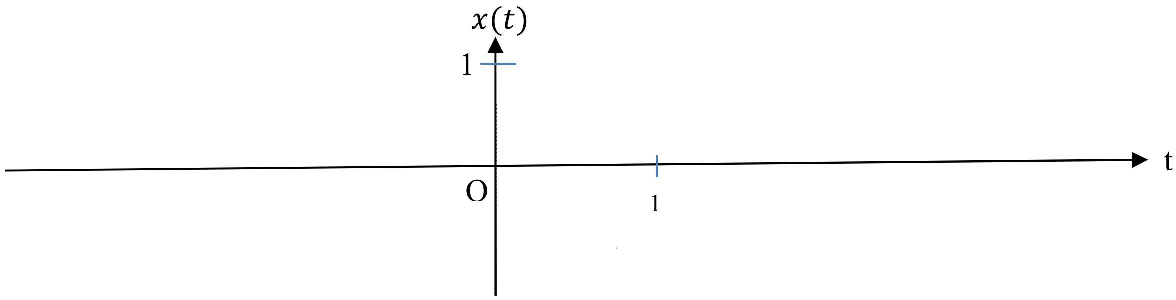
**Nom :** ………………………….. **Prénom :** …………………………………. **Groupe :** ………………….

Calculatrice : Collège Formulaires : en page 5 du sujet Répondre sur le sujet Barème sur 22

**Exercice 1 : Série de Fourier (9 pts)**

**Soit x, le signal périodique pair, de période 3, défini par :** $x(t) = \begin{cases} 1 \; si \; 0 \leq t \leq 1 \\ 0 \; si \; 1 < t \leq \frac{3}{2} \end{cases}$




**1)** Représenter le signal x pour t variant de -3 à 3 secondes.

**2)** Quelle est la valeur moyenne de x ?

………………………………………………………………………………………………………………...

**3)** Calculer les coefficients de Fourier de x :

………………………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………………………...

**4)** Déterminer le fondamental et les harmoniques de rang 3k (où k est un entier non nul) du signal x :

………………………………………………………………………………………… ………………..

……………………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………………...

**5)** Quelle est l'expression de la série de Fourier de x ?

……………………………………………………………………………………………………………...

**6)** Vérifier que le signal x respecte les hypothèses du théorème de Dirichlet (sur l'intervalle [0 ;3[), puis, en remplaçant la variable t par 0 dans la conclusion, en déduire la valeur de la série suivante :

$$S = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{sin\left(\frac{2p\pi}{3}\right)}{p}$$

……………………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………………......................

…………………………………………………………………………………………………………......................

…………………………………………………………………………………………………………......................

…………………………………………………………………………………………………………......................

…………………………………………………………………………………………………………......................

…………………………………………………………………………………………………………......................

…………………………………………………………………………………………………………......................

…………………………………………………………………………………………………………......................

…………………………………………………………………………………………………………......................

…………………………………………………………………………………………………………......................

…………………………………………………………………………………………………………......................

………………………………………………………………………………………………………………………

## <u>Exercice 2</u> EDLCC du premier et du second ordre (8 pts)

1) Résoudre, en rédigeant le mieux possible, l'équation différentielle linéaire à coefficients constants suivante :

$$\begin{cases} y' - y = 2t + 1 \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

2) Résoudre, en rédigeant le mieux possible, l'équation différentielle linéaire à coefficients constants suivante : $y'' - 10y' + 41y = 82$

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………………

**<u>Exercice 3</u> Calcul d'une intégrale par double IPP (5 pts)**

Calculer à l'aide d'une double intégration par parties : $\mathrm{I} = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos(4\mathrm{x}).\, x^2 \mathrm{dx}$

……………………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………………

## 1) Séries de Fourier

**Soit x une fonction de période T, intégrable sur tout intervalle $[t_0, t_0+T]$.**

**On appelle <u>série de Fourier réelle de x</u> la série suivante : $a_0 + \sum_{p=1}^{+\infty}(a_p.\cos(p\omega t) + b_p.\sin(p\omega t))$, où les suites réelles $(a_p)_p$ et $(b_p)_p$ sont définies de la façon suivante :**

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t).dt \;\; ; \;\; a_p = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t).\cos(p\omega t).dt \;\; ; \;\; b_p = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t).\sin(p\omega t).dt \text{ pour } p \geq 1,$$

**avec $\omega = \frac{2\pi}{T}$.**

**$a_0$ est <u>la valeur moyenne</u> du signal x.**

**<u>L'harmonique de rang p</u> est le signal : $H_p(t) = a_p.\cos(p\omega t) + b_p.\sin(p\omega t)$**

**<u>Le fondamental</u> est l'harmonique de rang 1 : $H_1(t) = a_1.\cos(\omega t) + b_1.\sin(\omega t)$**

Théorème de Dirichlet

**Soit x un signal de période T, intégrable sur tout intervalle $[\alpha, \alpha+T]$.**

**- Si x est continue sur $[\alpha, \alpha+T[$, sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle admet une limite finie à gauche et à droite.**

**- x est dérivable sur $[\alpha, \alpha+T[$, sauf éventuellement en un nombre fini de points où sa dérivée admet une limite finie à gauche et à droite.**

**Alors la série de Fourier de x converge en tout point t et sa fonction somme est alors :**

$$S_x(t) = a_0 + \sum_{p=1}^{+\infty}(a_p.\cos(p\omega t) + b_p.\sin(p\omega t)) = \begin{cases} x(t) \text{ pour t où x est continue} \\ \frac{x(t_+) + x(t_-)}{2} \text{ pour t où x est discontinue} \end{cases}$$

## 2) EDLCC du second ordre

**<u>Théorème/ Définition</u> : On appelle <u>équation différentielle linéaire à coefficients constants du second ordre</u> toute équation de la forme : (E) $a.y''(t) + b.y'(t) + c.y(t) = f(t)$ (où $a \neq 0$, b et c sont des réels et f est une fonction continue sur I).**

**On note aussi : $a.\frac{d^2y}{dt^2} + b.\frac{dy}{dt} + c.y(t) = f(t)$ (E)**

**Résoudre l'équation (E), c'est rechercher toutes les fonctions y deux fois dérivables sur I et vérifiant (E). Pour cela :**

**a) On résout l'équation sans second membre associée :**

$$(E_0) \;\; a.y''(t) + b.y'(t) + c.y(t) = 0$$

**On résout l'équation caractéristique : $a.r^2 + b.r + c = 0$**

**- si $\Delta > 0$, $r_1$ et $r_2$ sont les solutions réelles de l'équation caractéristique et les solutions de $(E_0)$ sont alors $y_0(t) = K_1e^{r_1t} + K_2e^{r_2t}$ où $K_1$ et $K_2$ sont des constantes réelles**

**- si $\Delta = 0$, $r_1$ est solution double de l'équation caractéristique et les solutions de $(E_0)$ sont alors $y_0(t) = e^{r_1t}(K_1 + K_2t)$ où $K_1$ et $K_2$ sont des constantes réelles.**

**TOURNEZ LA PAGE →**

**- si $\Delta < 0$ , $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \overline{r_1}$ sont les solutions complexes de l'équation caractéristique et les solutions de ($E_0$) sont alors**

**$y_0(t) = e^{\alpha t}(K_1 \cos(\beta t) + K_2 \sin(\beta t))$ où $K_1$ et $K_2$ sont des constantes réelles .**

**b) On recherche une solution particulière de (E), que l'on note $y_p$.**

**c) Les solutions de (E) sont toutes les fonctions de la forme : $y_G(t)=y_0(t)+y_p(t)$, appelées solutions générales de (E).**