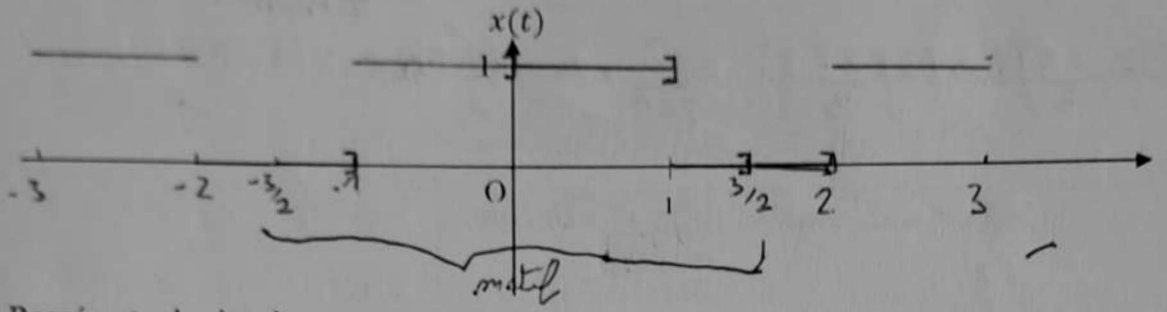
Nom : BOUZIDI **Prénom :** Yanis **Groupe :** D

Calculatrice : Collège Formulaires : en page 5 du sujet Répondre sur le sujet Barème sur 22

Exercice 1 : Série de Fourier (9 pts) 8,5

Soit x, le signal périodique pair, de période 3, défini par : $x(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } 0 \le t \le 1 \\ 0 \text{ si } 1 < t \le \frac{3}{2} \end{cases}$



1) Représenter le signal x pour t variant de -3 à 3 secondes.

2) Quelle est la valeur moyenne de x ? $T = 3 \quad \omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{3}$
Signal pair

$v.c. = \frac{1}{3}\int_{-3/2}^{3/2} x(t)\,dt = \frac{2}{3}\int_{0}^{3/2} x(t)\,dt = \frac{2}{3}\left(\int_0^1 1\,dt + \int_1^{3/2} 0\,dt\right) = \frac{2}{3}\times[t]_0^1 = \frac{2}{3}$

3) Calculer les coefficients de Fourier de x :

Signal pair donc $b_p = 0$

$a_p = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} \underbrace{x(t)}_{\text{pair}} \times \underbrace{\cos(p\omega t)}_{\text{pair}}\,dt = \frac{2}{3}\int_{-3/2}^{3/2} x(t)\times\cos(p\omega t)\,dt$ = paire

$= \frac{4}{3}\int_0^{3/2} x(t)\cos(p\omega t)\,dt = \frac{4}{3}\left(\int_0^1 1\cdot\cos(p\omega t)\,dt + \int_1^{3/2} 0\,dt\right) = \frac{4}{3}\int_0^1 \cos(p\omega t)\,dt$

$= \frac{4}{3}\left[\frac{\sin(p\omega t)}{p\omega}\right]_0^1 = \frac{4}{3p\omega}\left[\sin(p\omega t)\right]_0^1 = \frac{4}{3p\omega}\sin(p\omega) = \frac{4\cdot 3}{3p2\pi}\sin\left(p\frac{2\pi}{3}\right)$

$a_p = \frac{2}{p\pi}\sin\left(p\frac{2\pi}{3}\right)$

$\frac{20,5}{20}$ Excellent Travail!

4) Déterminer le fondamental et les harmoniques de rang 3k (où k est un entier non nul) du signal x :

fondamental : $H_1(t) = a_1 \cos(\omega t) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\left(\frac{2\pi t}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \cos\left(\frac{2\pi t}{3}\right)$

harmonique de rang 3k : $H_{3k}(t) = a_{3k} \cos(3k\omega t)$ $\quad p = 3k,\ k \in \mathbb{R}$

$0 \ \forall k \in \mathbb{N}^*$

$= \frac{2}{3k\pi} \sin\left(3k \frac{2\pi}{3}\right) \cos\left(3k \frac{2\pi}{3} t\right) = \frac{2}{3k\pi} \sin(2\pi k) \cos(k 2\pi t)$

$H_{3k}(t)\ 0$

5) Quelle est l'expression de la série de Fourier de x ?

$$S_x(t) = \frac{2}{3} + \frac{2}{\pi} \sum_{p=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{p} \sin\left(p \frac{2\pi}{3}\right) \cos\left(p \frac{2\pi}{3} t\right) \right)$$

6) Vérifier que le signal x respecte les hypothèses du théorème de Dirichlet (sur l'intervalle [0 ;3[), puis, en remplaçant la variable t par 0 dans la conclusion, en déduire la valeur de la série suivante :

$$S = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{2p\pi}{3}\right)}{p}$$

- hypothèse 1 : x est continue sur [0 ; 3[sauf en 1 et 2

$x(1^-) = 1$, $x(1^+) = 0$, $x(2^-) = 0$, $x(2^+) = 1$ sont finis à gauche et à droite

- hypothèse 2 : x est dérivable sur [0 ; 3[sauf en 1 et 2 où leurs dérivées : $x'(1^-) = x'(1^+) = x'(2^-) = x'(2^+) = 0$ sont finies à gauche et à droite

Conclusion : $S_x(t) = \frac{2}{3} + \frac{2}{\pi} \sum_{p=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{p} \sin\left(p \frac{2\pi}{3}\right) \cos\left(p \frac{2\pi}{3} t\right) \right) = \begin{cases} x(t) \text{ pour } t \text{ où } x \text{ continue (*) à} \\ \frac{x(0^+) + x(0^-)}{2} = \frac{1}{2} \end{cases}$

Si $t = 0$

$S = \frac{2}{3} + \frac{2}{\pi} \sum_{p=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{p} \sin\left(p \frac{2\pi}{3}\right) \cos(0) \right) = \frac{2}{3} + \frac{2}{\pi} \sum_{p=1}^{+\infty} \left(\frac{\sin p \frac{2\pi}{3}}{p} \right) = x(0) = 1$

(*) $\forall t \neq 3k+1, 3k+2$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Ainsi $\frac{2}{3} + \frac{2}{\pi} S = 1 \iff S = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{\pi}{6}$.

Exercice 2 **EDLCC du premier et du second ordre (8 pts)** 7

1) Résoudre, en rédigeant le mieux possible, l'équation différentielle linéaire à coefficients constants suivante :

$$\begin{cases} y' - y = 2t + 1 \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

$y' - y = 2t + 1$

Les solutions de $y' - y = 0$

$\Leftrightarrow -y' + y = 0$ sont $y(t) = k e^{-t/a} = k e^{t}$; $k \in \mathbb{R}$

On cherche une solution particulière de (E) que l'on note y_P

On pose $y_P(t) = at + b$ $\quad y'_P(t) = a$

On remplace dans (E) : $a - (at + b) = 2t + 1 \Leftrightarrow a - at - b = 2t + 1$

On identifie :

$\begin{cases} -a = 2 \\ a - b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = a - 1 = -2 - 1 = -3 \end{cases}$

Donc $y_P(t) = -2t - 3$

c) Les solutions de (E) sont : $y(t) = y_0 + y_P$

$y(t) = k e^{t} - 2t - 3$

Condition initiale : $y(0) = 3$

$y(0) = k e^{0} - 2 \times 0 - 3 = 3 \Leftrightarrow k - 3 = 3 \Leftrightarrow k = 6$

La solution de (E) est : $y(t) = 6 e^{t} - 2t - 3$

à préciser

2) Résoudre, en rédigeant le mieux possible, l'équation différentielle linéaire à coefficients constants suivante : $y'' - 10y' + 41y = 82$

$y'' - 10y' + 41y = 82$

On résout $r^2 - 10r + 41 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 100 - 4 \times 41 = -64 < 0$

$r_1 = \dfrac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a} = \dfrac{10 + i\sqrt{64}}{2} = \dfrac{10 + i8}{2}$ $\quad r_2 = \overline{r_1}$

$= \dfrac{10}{2} + i\dfrac{8}{2} = \underset{\alpha}{5} + i\underset{\beta}{4}$

Les solutions de (Eo) sont : $y_o(t) = e^{5t}(K_1 \cos(4t) + K_2 \sin(4t))$; $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$

On cherche une solution particulière y_P

on pose $y_P(t)$ = constante

donc $41 y_P(t) = 82 \iff y_P(t) = 2$

c) Les solutions de (E) sont : $y(t) = y_o + y_P$

$y(t) = e^{5t}(K_1 \cos(4t) + K_2 \sin(4t)) + \cancel{82}\ 2$; $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$

Exercice 3 Calcul d'une intégrale par double IPP (5 pts) 5

Calculer à l'aide d'une double intégration par parties : $I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos(4x).\, x^2 dx$

$$\begin{cases} U = x^2 & V' = \cos(4x) \\ U' = 2x & V = \frac{\sin(4x)}{4} \end{cases}$$

$$I = \underbrace{\left[x^2 \times \frac{\sin(4x)}{4}\right]_{-\pi/4}^{\pi/4}}_{0} - \int_{-\pi/4}^{\pi/4} 2x \times \frac{\sin(4x)}{4} dx = \frac{1}{4}\left[x^2 \sin(4x)\right]_{-\pi/4}^{\pi/4} - \frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} x \sin(4x) dx$$

$I = -\frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} x \sin(4x) dx$ on pose $\begin{cases} U = x & V' = \sin(4x) \\ U' = 1 & V = -\frac{\cos(4x)}{4} \end{cases}$

$$I = -\frac{1}{2}\left\{\left[x \cdot -\frac{\cos(4x)}{4}\right]_{-\pi/4}^{\pi/4} + \int_{-\pi/4}^{\pi/4} 1 \cdot \frac{\cos(4x)}{4} dx\right\}$$

$$= -\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{4}\left(\left[x \cdot -\cos(4x)\right]_{-\pi/4}^{\pi/4} + \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos(4x) dx\right)\right\}$$

$$= -\frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\left[\sin(4x)\right]_{-\pi/4}^{\pi/4}\right) = -\frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4} \times 0\right) = -\frac{1}{8} \times \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{16}$$