Corrigé TEST
Intégrales
2025

<u>Exercice 1</u> Compléter **en ligne** les zones en pointillés : **(4 pts)**
(la colonne 1 est un cas particulier de la colonne 2 : U est une fonction qui dépend de x)

Primitives de $\cos(x)$: ..$\sin x + cte$.....	Primitives de $U'.\cos(U)$: ..$\sin U + cte$...
Primitives de $1+tan^2(x)$: ..$\tan x + cte$.... $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ où $k \epsilon \mathbb{Z}$	Primitives de $U'(1+\tan^2 U)$: ..$\tan U + cte$.
Primitives de $\frac{1}{2\sqrt{x}}$: ..$\sqrt{x} + cte$............... $x>0$	Primitives de $\frac{U'}{2\sqrt{U}}$: ..$\sqrt{U} + cte$....
Primitives de $\frac{1}{1+x^2}$: ...$\text{Arctan}\, x + cte$.	Primitives de $\frac{U'}{1+U^2}$.... : ..$\text{Arctan}\, U + cte$

Exercice 2 Déterminer la valeur exacte de chaque intégrale suivante, en précisant, lorsque cela est demandé, dans chaque encadré la formule entière de primitive utilisée et les expressions de U et U' **(10 pts)**

$$I = \int_0^1 \frac{x^3+1}{x^4+4x+1}\,dx$$

Formule : $\int \frac{U'}{U}\,dx = \ln|U| + cte$

U = x^4+4x+1 ⇒ U'= $4x^3+4$

$$I = \frac{1}{4} \times \int_0^1 \frac{4(x^3+1)}{x^4+4x+1}\,dx = \frac{1}{4}\left[\ln|x^4+4x+1|\right]_0^1$$

$$I = \frac{1}{4}(\ln 6 - \ln 1) = \frac{\ln 6}{4}$$

Notes

$J = \int_0^{\sqrt{2}} t.e^{-t^2} dt$

Formule : $\int u'.e^u dt = e^u + cte$

$U = -t^2 \Rightarrow U' = -2t$

$$J = -\frac{1}{2} \times \int_0^{\sqrt{2}} -2t.e^{-t^2} dt = -\frac{1}{2}.\left[e^{-t^2}\right]_0^{\sqrt{2}}$$

$$J = -\frac{1}{2}\left(e^{-2} - e^{0}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-2}\right)$$

Notes

$K = \int_0^{\frac{\pi}{8}} \tan(2x)dx$

Formule : $\int \frac{u'}{u} dx = \ln|u| + cte$

U = $\cos(2x)$ ⇒ U'= $-2\sin(2x)$

$$K = \int_0^{\pi/8} \frac{\sin(2x)}{\cos(2x)} dx = -\frac{1}{2} \int_0^{\pi/8} \frac{-2\sin(2x)}{\cos(2x)} dx$$

$$= -\frac{1}{2} \Big[\ln|\cos(2x)| \Big]_0^{\pi/8} = -\frac{1}{2} \Big(\ln\big(\cos\tfrac{\pi}{4}\big) - \underbrace{\ln \underbrace{\cos 0}_{1}}_{0} \Big)$$

$$K = -\frac{1}{2} \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} \ln(\sqrt{2}) = \frac{1}{4} \ln 2$$

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^3(4t)dt$$

La fonction $t \longmapsto \sin^3(4t)$ est impaire et de période $\frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, qui est la longueur de l'intervalle d'inté-gration. Donc $L = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sin^3(4t)\, dt = 0$

Exercice 3 Déterminer la formule d'intégration par parties dans le rectangle ci-dessous, puis calculer l'intégrale K : **(6 pts)**

Formule : $\int_a^b u v' \, dt = [uv]_a^b - \int_a^b u' v \, dt$

$K = \int_1^2 (2x-4)^2 . e^{5x} dx =$ ....

P . E

IPP1

$\begin{cases} U = (2x-4)^2 \\ v' = e^{5x} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} U' = 4(2x-4) \\ V = \frac{e^{5x}}{5} \end{cases}$

IPP2

$K = \frac{1}{5}\left[e^{5x} . (2x-4)^2 \right]_1^2 - \frac{4}{5} . \int_1^2 (2x-4) e^{5x} dx$ $\quad \begin{cases} U = 2x-4 \\ V' = e^{5x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U' = 2 \\ V = \frac{e^{5x}}{5} \end{cases}$

$= \frac{1}{5}\left(e^{10} \times 0 - e^{5} \times 4 \right) - \frac{4}{5} . \left\{ \frac{1}{5}\left[(2x-4) e^{5x} \right]_1^2 - \frac{2}{5} . \int_1^2 e^{5x} dx \right\}$

Notes

$$K = -\frac{4}{5}e^{5} - \frac{4}{5}\cdot\left\{\frac{1}{5}\left(0+2e^{5}\right) - \frac{2}{25}\left[e^{5x}\right]_{1}^{2}\right\}$$

$$= -\frac{4}{5}e^{5} - \frac{8}{25}e^{5} + \frac{8}{125}\left(e^{10} - e^{5}\right)$$

$$= -\frac{4e^{5}}{125}\left(25+10+2\right) + \frac{8}{125}e^{10}$$

$$K = \frac{4}{125}e^{5}\left(2e^{5} - 37\right)$$