Master Informatique

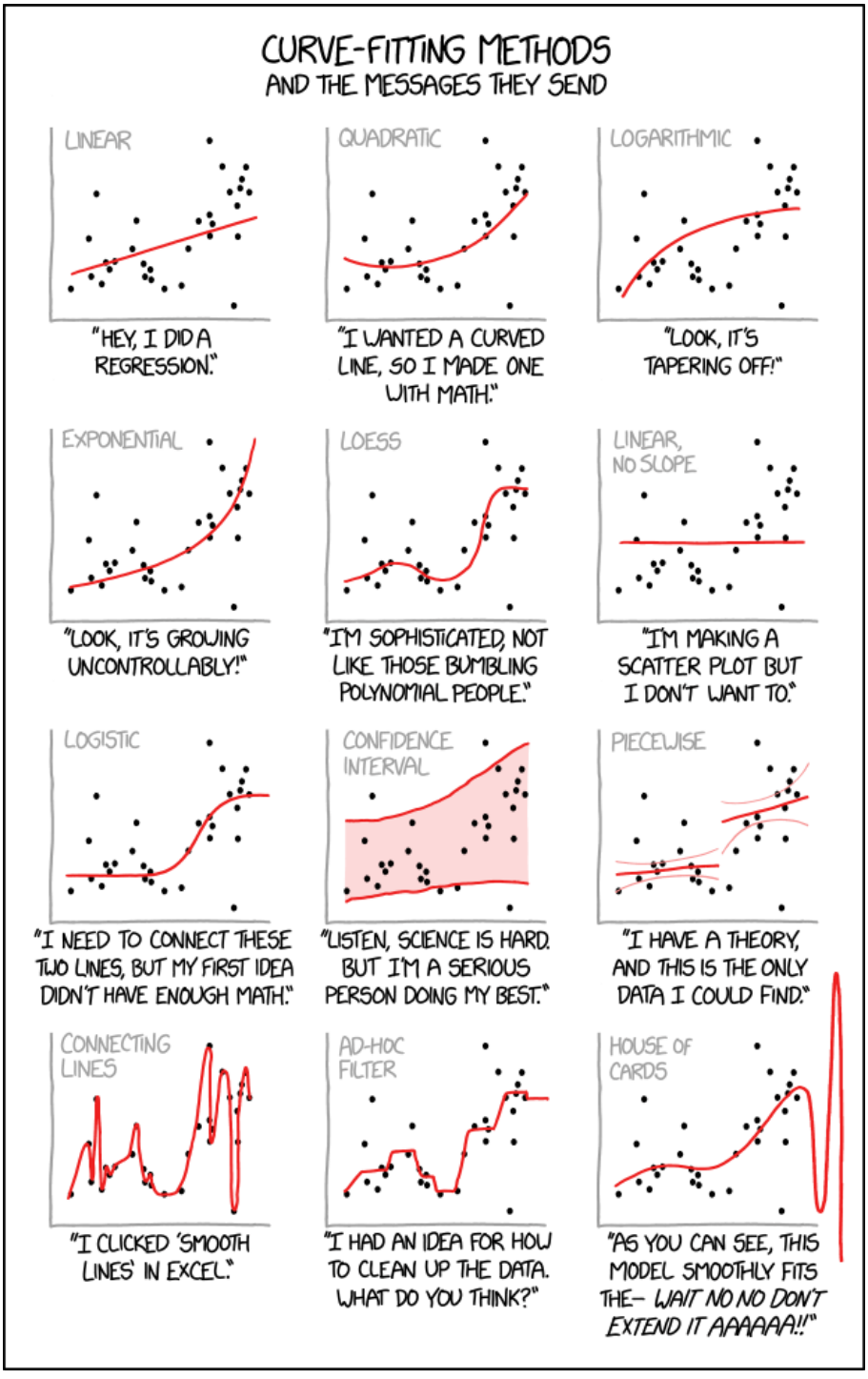
1 ère année

UE 731 – Remise à niveau Mathématiques

Recueil d'exercices corrigés et aide-mémoire

Gloria Faccanoni
http://faccanoni.univ-tln.fr

Dernière mise-à-jour : Mercredi 9 septembre 2026



UNIVERSITÉ DE TOULON

Gloria FACCANONI

IMATH Bâtiment M-117
Université de Toulon
Avenue de l'université
83957 LA GARDE - FRANCE

☎ 0033 (0)4 83 16 66 72

✉ gloria.faccanoni@univ-tln.fr
http://faccanoni.univ-tln.fr

Table des matières

Syllabus 5

I Contenu principal du cours 9

1. Équations Différentielles Ordinaires (EDO) 11
- 1.1 EDO d'ordre p : généralités . . . 11
- 1.2 EDO d'ordre supérieur à 1 $\rightsquigarrow$ système d'EDOs d'ordre 1 . . . 12
- 1.3 Conditions initiales et problème de Cauchy . . . 12
- 1.4 Calcul exact de la solution de quelques EDOs d'ordre 1 . . . 12
- 1.5 Solution approchée d'un problème de Cauchy . . . 15
- 1.6 Exercices . . . 24

2. Calcul différentiel et intégrale dans $\mathbb{R}^2$ 45
- 2.1 Introduction . . . 45
- 2.2 Lignes ou courbes de niveau . . . 46
- 2.3 Dérivées partielles du premier ordre et gradient . . . 47
- 2.4 Dérivées partielles de deuxième ordre et matrice Hessienne . . . 55
- 2.5 Optimisation (dans un ouvert et sans contraintes) . . . 55
- 2.6 Optimisation approchée: principe de la méthode "descente de gradient" . . . 60
- 2.7 Intégrales doubles . . . 62
- 2.8 💻 Fonctions prédéfinies en Python . . . 68
- 2.9 Exercices . . . 74

3. Interpolation 123
- 3.1 Interpolation polynomiale . . . 123
- 3.2 Généralisation: l'interpolation dans un espace vectoriel quelconque . . . 134
- 3.3 Exercices . . . 139

4. Approximation au sens des moindres carrés 165
- 4.1 *Fitting* par une relation affine . . . 165
- 4.2 *Fitting* polynomiale . . . 171
- 4.3 *Fitting* dans un espace vectoriel quelconque . . . 174
- 4.4 Résumé . . . 177
- 4.5 Exercices . . . 183

5. Initiation aux réseaux de neurones 193
- 5.1 Le perceptron: un neurone artificiel . . . 195
- 5.2 Apprentissage sur un perceptron . . . 206
- 5.3 Réseau de neurones . . . 225
- 5.4 Annexe: PINN (apprentissage non supervisé) . . . 236
- 5.5 Exercices . . . 242

II Annexes 259

A. Exercices de calcul différentiel et intégral dans $\mathbb{R}$ 261
- A.1 Dérivées . . . 261
- A.2 Primitives et intégrales . . . 274

B. Exercices sur la Méthode de Gauss **287**
B.1 Systèmes carrés 287
B.2 Systèmes avec plus d'équations qu'inconnues 292
B.3 Systèmes avec plus d'inconnues que d'équations 293

 © 2024-2027 G. Faccanoni

Syllabus

L'UE 731 de la première année du Master Informatique se compose de deux volets : une remise à niveau en mathématiques et une remise à niveau en informatique.

Vous recevrez deux notes distinctes : une pour les mathématiques (CC_M) et une pour l'informatique (CC_I). La note finale est déterminée de manière à favoriser votre meilleur résultat, selon la formule suivante :

$$\text{Note finale} = \max\left\{0.4 \times CC_M + 0.6 \times CC_I;\ 0.6 \times CC_M + 0.4 \times CC_I\right\}.$$

Une page Moodle dédiée à l'UE (contenant ce polycopié ainsi que d'autres ressources) est accessible librement (*i.e.* même en accès anonyme) à l'adresse `https://moodle.univ-tln.fr/course/view.php?id=8899`.

Partie "Informatique"

La partie *remise à niveau en informatique* est coordonnée par Mme Valérie GILLOT. Elle fait intervenir plusieurs enseignants-chercheurs. L'organisation précise de cette partie, ainsi que les modalités de calcul de la note CC_I, vous seront présentées lors de sa première séance.

Partie "Mathématiques"

Contenu

La partie *remise à niveau en mathématiques* a pour objectif de consolider les acquis de licence tout en introduisant des méthodes mathématiques appliquées à des situations concrètes

Le contenu se décline en quatre grands thèmes.

1. **Équations Différentielles Ordinaires.** Problème de Cauchy, calcul exacte de la solution que quelques EDO, calcul approché par des schémas classiques à un pas.
2. **Optimisation sans contrainte.** Fonctions de plusieurs variables, courbes de niveau, dérivées partielles du premier et du second ordre, gradient, matrice hessienne, conditions d'optimalité dans un ouvert sans contraintes, intégrales doubles.
3. **Interpolation.** Interpolation polynomiale avec les bases canonique, de Lagrange et de Newton, puis interpolation dans un espace vectoriel plus général, avec une introduction à la base de Fourier.
4. **Approximation au sens des moindres carrés.** Ajustement de données (*fitting*) par des fonctions affines et polynomiales, avec généralisation à des sous-espaces vectoriels quelconques.
5. **Introduction aux réseaux de neurones.** Modélisation d'un neurone simple à poids fixés (avec interprétation géométrique), construction de réseaux multicouches à poids fixés (avec interprétation géométrique), calcul des poids par minimisation d'une fonction d'énergie (rétropropagation), mise en perspective avec les méthodes de *fitting* vues précédemment.

Nous utiliserons le langage `Python` pour vérifier certains calculs et illustrer des notions. Deux approches seront distinguées :

- les **calculs formels**, réalisés à l'aide du module `sympy`, permettant de manipuler des expressions exactes ;
- les **calculs numériques ou approchés**, réalisés à l'aide de modules comme `numpy`, `scipy` ou `pandas`.

Les deux séances de TP seront consacrées à l'utilisation ou même à l'implémentation de certains algorithmes mathématiques sous-jacents à ces bibliothèques, afin de mieux en comprendre les principes et les limites.

Polycopié

Tous les chapitres sont accompagnés d'un support pédagogique exposant les notions essentielles du cours et d'exercices corrigés afin de renforcer la compréhension et la mise en pratique. L'aide-mémoire propose une explication concise des concepts abordés en cours, mettant en avant les points clés pour structurer le travail personnel et faciliter la compréhension d'autres ouvrages. Il contient de nombreux exercices corrigés. Toutefois, il ne saurait remplacer les séances de cours ni la prise de notes. Il est conçu pour aider à se concentrer sur les explications orales. Enfin, notez que ce document peut contenir des erreurs que vous êtes encouragés à signaler.

Organisation

En ce qui concerne la partie “Mathématiques”, elle est organisée en 18 séances de 2h et 2 séances de 3h. Voici le découpage des séances :

Date	Heure	Séance n°	Contenu	Déroulement
lundi 7/9	matin	1	Syllabus / Rappels	2h de CM/TD
lundi 7/9	après-midi	2	Chapitre 1 (EDO)	2h de CM
mardi 8/9	matin	3		2h de TD
mardi 8/9	après-midi	4		1h de TD + 45’ CC_1 + 15’ corrections
mercredi 9/9	matin	5	Chapitre 2 ($z = f(x, y)$)	2h de CM
lundi 14/9	après-midi	6		2h de TD
mardi 15/9	matin	7		1h de TD + 45’ CC_2 + 15’ corrections
mardi 15/9	après-midi	8	-	2h de TP (Jupyter)
lundi 21/9	matin	9	-	2h $CC_{Individuel_1}$
lundi 21/9	après-midi	10	Chapitre 3 (INTERP)	2h de CM
mardi 22/9	matin	11		2h de TD
mardi 22/9	après-midi	12		1h de TD + 45’ CC_3 + 15’ corrections
lundi 28/9	matin	13	Chapitre 4 (FITTING)	2h de CM + 1h de TD
mardi 29/9	matin	14		2h de TD
jeudi 1/10	matin	15		1h de TD + 45’ CC_4 + 15’ corrections
vendredi 2/10	après-midi	16	Chapitre 5 (RNN)	2h de CM
lundi 5/10	matin	17		3h de TD
lundi 5/10	après-midi	18		1h de TD + 45’ CC_5 + 15’ corrections
mardi 6/10	après-midi	19	-	2h $CC_{Individuel_2}$

Évaluation

La note CC_M est obtenue comme moyenne pondérée de 7 évaluations :

$$CC_M = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\sum_{k=1}^{5} CC_k\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2} CC_{Individuel_k}\right).$$

- Les 2 $CC_{Individuel_k}$ sont des évaluations écrites individuelles sur tout le programme. Une (et une seule !) feuille A4 recto-verso manuscrite par étudiant est autorisée.
- Les 5 CC_k sont des contrôles continus par équipe : chaque équipe doit rendre une seule copie. Lors de ces évaluations, une (et une seule !) feuille A4 recto-verso manuscrite par équipe est autorisée.

Composition des équipes

Pour composer les équipes, je vous ai regroupés en 4 groupes comme suit :

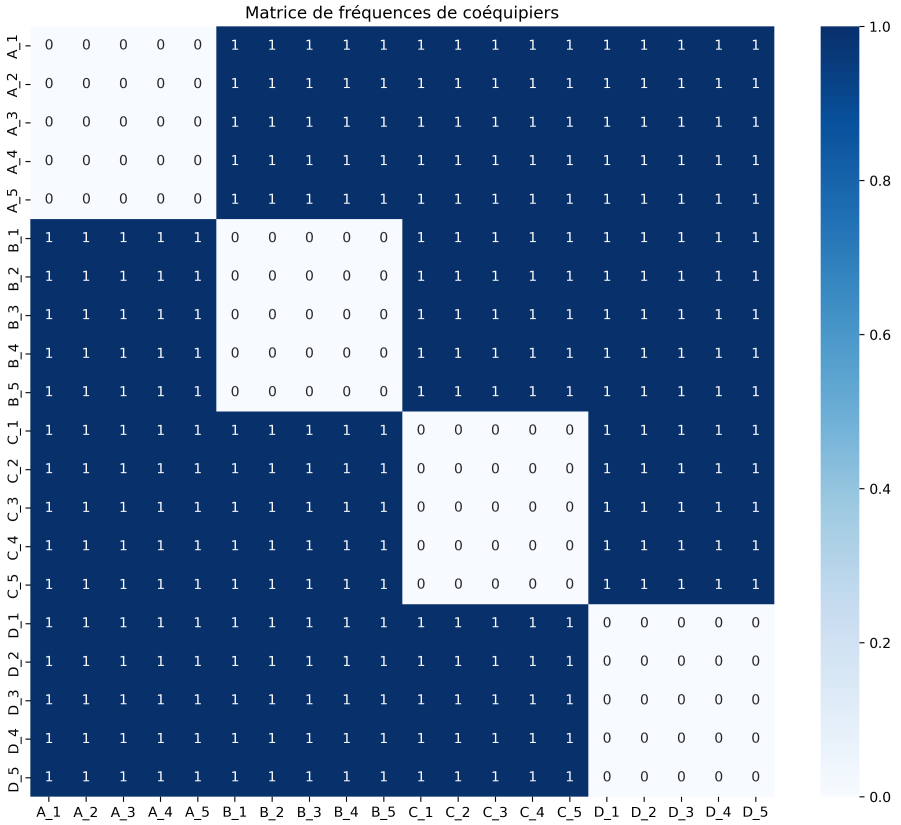
A_1 HANN Flavian	B_1 BOCQUILLON Baptiste	C_1 GUARNERI Valentin	D_1 [illegible]
A_2 VIOLO Raphaël	B_2 JAZIRI Jihene	C_2 LOPEZ DUARTE Carlos	D_2 [illegible]
A_3 GALECKI Michal	B_3 TORREGROSSA Théo	C_3 RGAIEG Saif-Edine	D_3 [illegible]
A_4 DALMASSO Loam	B_4 SAADOUNE Karim	C_4 HESSOU Tchédé	D_4 [illegible]
A_5 SIEITASANOVA Ivilina	B_5 EL MAKHLOUFI Tarik	C_5 NAOUAR Talel	D_5 [illegible]

Chaque équipe est constituée de 4 étudiants, un par groupe. La composition des équipes change d’un chapitre à l’autre et **est imposée**.

	Chapitre 1	Chapitre 2	Chapitre 3	Chapitre 4	Chapitre 5
Equipe α	A_1, B_1, C_1, D_1	A_1, B_2, C_3, D_4	A_1, B_3, C_5, D_2	A_1, B_4, C_2, D_5	A_1, B_5, C_4, D_3
Equipe β	A_2, B_2, C_2, D_2	A_2, B_3, C_4, D_5	A_2, B_4, C_1, D_3	A_2, B_5, C_3, D_1	A_2, B_1, C_5, D_4
Equipe γ	A_3, B_3, C_3, D_3	A_3, B_4, C_5, D_1	A_3, B_5, C_2, D_4	A_3, B_1, C_4, D_2	A_3, B_2, C_1, D_5
Equipe δ	A_4, B_4, C_4, D_4	A_4, B_5, C_1, D_2	A_4, B_1, C_3, D_5	A_4, B_2, C_5, D_3	A_4, B_3, C_2, D_1
Equipe ε	A_5, B_5, C_5, D_5	A_5, B_1, C_2, D_3	A_5, B_2, C_4, D_1	A_5, B_3, C_1, D_4	A_5, B_4, C_3, D_2

Vous pouvez vérifier dans ce tableau de fréquences qu’un étudiant n’est en équipe avec un autre étudiant qu’une et une seule fois (et jamais avec un étudiant de son groupe) :

© 2024-2027 G. FACCANONI


Matrice de fréquences de coéquipiers
A_1 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
A_2 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
A_3 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
A_4 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
A_5 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
B_1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
B_2 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
B_3 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
B_4 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
B_5 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
C_1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1
C_2 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1
C_3 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1
C_4 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1
C_5 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1
D_1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0
D_2 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0
D_3 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0
D_4 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0
D_5 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0
A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 B_1 B_2 B_3 B_4 B_5 C_1 C_2 C_3 C_4 C_5 D_1 D_2 D_3 D_4 D_5
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0

Première partie

Contenu principal du cours

CHAPITRE 1

Équations Différentielles Ordinaires (EDO)

Les équations différentielles décrivent l'évolution de nombreux phénomènes dans des domaines variés. Lorsque toutes les dérivées sont prises par rapport à une seule variable, on parle d'équation différentielle ordinaire (EDO) ; lorsqu'elles mettent en jeu des dérivées partielles, on parle d'équation aux dérivées partielles (EDP).

Dans ce chapitre

1.1 EDO d'ordre p : généralités . . . 11
1.2 EDO d'ordre supérieur à 1 ⇝ système d'EDOs d'ordre 1 . . . 12
1.3 Conditions initiales et problème de Cauchy . . . 12
1.4 Calcul exact de la solution de quelques EDOs d'ordre 1 . . . 12
1.4.1 EDO du premier ordre à variables séparables . . . 13
1.4.2 EDO linéaires du premier ordre . . . 13
1.4.3 Résolution symbolique avec `sympy` . . . 13
1.5 Solution approchée d'un problème de Cauchy . . . 15
1.5.1 Avec `scipy` — solveur intégré . . . 16
1.5.2 Schémas numériques — construction . . . 18
1.6 Exercices . . . 24
1.6.1 Étude qualitative d'un problème de Cauchy . . . 24
1.6.2 EDO d'ordre 1 à variables séparables . . . 25
1.6.3 EDO linéaires du premier ordre . . . 29
1.6.4 Systèmes linéaires à coefficients constants . . . 36
1.6.5 EDO de Bernoulli . . . 38
1.6.6 Approximation numérique . . . 40

1.1. EDO d'ordre p : généralités

Une EDO se présente sous la forme générale

$$\mathrm{F}\Big(y(t), y'(t), y''(t), \ldots, y^{(p)}(t)\Big) = g(t).$$

C'est une équation qui combine la fonction inconnue y et ses dérivées y', y'', …, $y^{(p)}$ (où p est l'**ordre** de l'équation). Les inconnues sont une **fonction** $y\colon \mathrm{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et son **intervalle de définition** I. Si la fonction g, appelée «second membre» de l'équation, est nulle, l'équation est dite **homogène**.

EXEMPLE (MODÈLES DE CROISSANCE)
Voici trois modèles basés sur des équations différentielles qui décrivent l'évolution temporelle des populations.

Malthus. $q'(t) = \alpha q(t)$ (ordre 1, décroissance si $\alpha < 0$).

Verhulst. $q'(t) = \alpha q(t)(m - q(t))$, équilibre en $q = m$.

Lotka-Volterra. Proies/prédateurs :

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_1(t)(a - b y_2(t)), \\ y_2'(t) = -y_2(t)(c - d y_1(t)). \end{cases}$$

Définition 1.1 (Solution générale, solution particulière)
La *solution générale* d'une EDO d'ordre p englobe l'ensemble des solutions (elle contient p constantes arbitraires). Une *solution particulière* est obtenue en fixant ces constantes.

1.2. EDO d'ordre supérieur à 1 $\rightsquigarrow$ système d'EDOs d'ordre 1

Une EDO normalisée d'ordre p, *i.e.* une EDO de la forme $y^{(p)}(t) = f\Big(g(t), y(t), y'(t), \dots, y^{(p-1)}(t)\Big)$, est équivalente au système de p EDOs d'ordre 1 obtenu en posant $z_i = y^{(i-1)}$:

$$\begin{cases} z_1'(t) = z_2(t), \\ \quad \vdots \\ z_{p-1}'(t) = z_p(t), \\ z_p'(t) = f(g(t), z_1(t), \dots, z_{p-1}(t)). \end{cases}$$

EXEMPLE
L'équation $y''(t) + ay'(t) + by(t) + c = 0$, avec $z_1(t) = y(t)$ et $z_2(t) = y'(t)$, devient :

$$\begin{cases} z_1'(t) = z_2(t), \\ z_2'(t) = -az_2(t) - bz_1(t) - c. \end{cases}$$

1.3. Conditions initiales et problème de Cauchy

Définition 1.2 (Problème de Cauchy)
Soit $\varphi : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Le *problème de Cauchy* consiste à trouver $y \in \mathscr{C}^1(I)$ telle que

$$\begin{cases} y'(t) = \varphi(t, y(t)), \quad \forall t \in I, \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \tag{1.1}$$

avec y_0 une valeur donnée appelée *condition initiale*.

Proposition 1.3
Le problème de Cauchy (1.1) est équivalent à l'équation intégrale

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} \varphi(s, y(s))\, \mathrm{d}s.$$

PREUVE
En intégrant l'EDO entre t_0 et t et en utilisant la condition initiale, on obtient l'équation intégrale. Inversement, si y est définie par cette équation intégrale, elle est de classe $\mathscr{C}^1$ (comme primitive d'une fonction continue) et vérifie l'EDO et la CI.

L'étude de l'existence et de l'unicité peut être délicate, comme le montrent les exemples suivants.

EXEMPLE (NON-UNICITÉ)
Pour $\varphi(t, y) = \sqrt[3]{y}$, $y_0 = 0$, les trois fonctions $y_1 \equiv 0$ et $y_{2,3}(t) = \pm\sqrt{8t^3/27}$ sont toutes solutions.

EXEMPLE (EXPLOSION EN TEMPS FINI (BARRIÈRE))
Pour $\varphi(t, y) = y^3$, $y_0 = 1$, la solution $y(t) = \frac{1}{\sqrt{1-2t}}$ n'est définie que sur $[0; \frac{1}{2}[$. La solution explose en $t = 1/2$.

Théorème 1.4 (CAUCHY-LIPSCHITZ)
Si φ est continue sur $I \times \mathbb{R}$ et **lipschitzienne** en y uniformément en t (il existe $L > 0$ tel que $|\varphi(t, y_1) - \varphi(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$ pour tout t, y_1, y_2), alors le problème de Cauchy admet une **unique solution maximale**.

1.4. Calcul exact de la solution de quelques EDOs d'ordre 1

Dans ce chapitre nous allons montrer comment calculer la solution générale de deux types d'EDO d'ordre 1 : les EDO à variables séparables et les EDO linéaires. L'équation de Bernoulli, qui s'y ramène par un changement de variable, est traitée en exercice guidé.

© 2024-2027 G. FACCANONI

1.4.1. EDO du premier ordre à variables séparables

Lorsque l'équation est de la forme $f\big(y(x)\big)y'(x) = g(x)$, où f et g admettent des primitives F et G, on obtient par intégration $\mathrm{F}\big(y(x)\big) = \mathrm{G}(x) + \mathrm{C}$, et si F est inversible :

$$y(x) = \mathrm{F}^{-1}\big(\mathrm{G}(x) + \mathrm{C}\big).$$

Astuce (Astuce mnémotechnique)
Écrire $f(y)\,\mathrm{d}y = g(x)\,\mathrm{d}x$ puis intégrer : $\int f(y)\,\mathrm{d}y = \int g(x)\,\mathrm{d}x$, ce qui donne $\mathrm{F}(y) = \mathrm{G}(x) + \mathrm{C}$.

Exemple
Résolvons $y'(x) = x\,y(x)$ sur $\mathbb{R}$. La solution constante est $y = 0$. Pour $y \neq 0$:

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = x\,\mathrm{d}x \quad \rightsquigarrow \quad \ln|y| = \frac{x^2}{2} + \mathrm{C} \quad \rightsquigarrow \quad y(x) = \mathrm{D}e^{x^2/2}, \quad \mathrm{D} \in \mathbb{R}.$$

En incluant $\mathrm{D} = 0$, la solution générale est $y(x) = \mathrm{D}e^{x^2/2}$, $\mathrm{D} \in \mathbb{R}$, définie sur $\mathbb{R}$.

1.4.2. EDO linéaires du premier ordre

Elles sont de la forme

$$a(x)y'(x) + b(x)y(x) = g(x)$$

où a, b et g sont des fonctions données, continues sur un intervalle $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$. On se place sur un intervalle $\mathrm{J} \subset \mathrm{I}$ tel que a ne s'annule pas sur J.

Pour $x \in \mathscr{D}_b \cap \mathscr{D}_g \cap \{x \in \mathscr{D}_a \mid a(x) \neq 0\}$, toute solution $y(x)$ s'écrit

$$y(x) = \underbrace{\mathrm{C}e^{-\mathrm{A}(x)}}_{y_{\mathrm{H}}(x)} + \underbrace{\mathrm{B}(x)e^{-\mathrm{A}(x)}}_{y_{\mathrm{P}}(x)}$$

avec

$$\mathrm{A}(x) \text{ une primitive de } \frac{b(x)}{a(x)}, \qquad \mathrm{B}(x) \text{ une primitive de } \frac{g(x)}{a(x)}e^{\mathrm{A}(x)}.$$

Preuve
Pour vérifier que c'est bien une solution il suffit de dériver :

$$\begin{aligned} y'(x) &= -\mathrm{A}'(x)\left(\mathrm{C}e^{-\mathrm{A}(x)} + \mathrm{B}(x)e^{-\mathrm{A}(x)}\right) + \mathrm{B}'(x)e^{-\mathrm{A}(x)} \\ &= -\mathrm{A}'(x)\,y(x) + \mathrm{B}'(x)e^{-\mathrm{A}(x)} \\ &= -\frac{b(x)}{a(x)}y(x) + \frac{g(x)}{a(x)} \end{aligned}$$

donc $a(x)y'(x) = -b(x)y(x) + g(x)$.

Remarque
y_{H} est la solution générale de l'EDO homogène associée (à variables séparables) ; y_{P} est une solution particulière, que l'on peut chercher par la *méthode de Lagrange* (variation de la constante).

Exemple
Considérons l'EDO $y'(x) - y(x) = x$. On a $a(x) = 1$, $b(x) = -1$, $g(x) = x$. Pour $x \in \mathbb{R}$:

- $\mathrm{A}(x) = \int -1\,\mathrm{d}x = -x$,
- $\mathrm{B}(x) = \int x e^{-x}\,\mathrm{d}x = -(1+x)e^{-x}$,

donc $y(x) = \big(\mathrm{C} - (1+x)e^{-x}\big)\,e^{x} = \mathrm{C}e^{x} - (1+x)$.

1.4.3. Résolution symbolique avec `sympy`

Le module `sympy` permet de vérifier ou calculer des solutions exactes d'EDO ou de problèmes de Cauchy.

```python
import sympy as sp
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

# Variables
x = sp.Symbol('x')
y = sp.Function('y')

# Equation différentielle
left  = sp.diff(y(x),x)
right = 6*x**2-3*x**2*y(x)
edo = sp.Eq( left , right )
print(r"\[ " + sp.latex(edo) + r" \]")

# Conditions initiales
x0 = 0
y0 = 4
print(r"\[ " + sp.latex(sp.Eq(y(x0), y0)) + r" \]")

# Méthode 1 : méthode directe
# ============================
print(r"\noindent Méthode 1 : méthode directe")
solpar = sp.dsolve(edo, y(x), ics={y(x0): y0})
print(r"\[ " + sp.latex(solpar) + r" \]")

# Méthode 2 : méthode pas-à-pas
# ==============================
print(r"\noindent Méthode 2 : méthode pas-à-pas")

# Étape 1 : solution générale
solgen = sp.dsolve(edo, y(x))
print(r"\[ " + sp.latex(solgen) + r" \]")

# Étape 2 : calcul de la constante
cond_init = sp.Eq(y0, solgen.rhs.subs(x, x0))
print(r"\[ " + sp.latex(cond_init) + r" \]")
consts = sp.solve(cond_init, dict=True)[0]

# Étape 3 : solution particulière
solpar = solgen.subs(consts)
print(r"\[ " + sp.latex(solpar) + r" \]")

# Transformation en fonction numpy et tracé
func = sp.lambdify(x, solpar.rhs, 'numpy')

plt.figure(figsize=(6,4))
xx = np.linspace(0, 3, 101)
yy = func(xx)
plt.plot(xx, yy)
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.grid(True)

# Sauvegarde de la figure pour l'inclure en LaTeX
plt.savefig('solution_plot.pdf', bbox_inches='tight')
```


© 2024-2027 G. Faccanoni

$$\frac{d}{dx}y(x) = -3x^2 y(x) + 6x^2$$

$$y(0) = 4$$

Méthode 1 : méthode directe

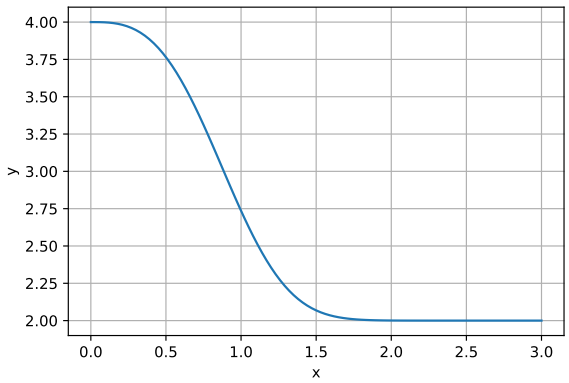
$$y(x) = 2 + 2e^{-x^3}$$

Méthode 2 : méthode pas-à-pas

$$y(x) = \mathrm{C}_1 e^{-x^3} + 2$$

$$4 = \mathrm{C}_1 + 2$$

$$y(x) = 2 + 2e^{-x^3}$$



1.5. Solution approchée d'un problème de Cauchy

On ne peut expliciter les solutions analytiques que pour des EDO très particulières (ex. $y' = \frac{y-t}{y+t}$ ou $y' = e^{-t^2}$ sont insolubles explicitement). On cherche donc des méthodes numériques pour approcher ces solutions. Mais que signifie "approcher une fonction" ?

Considérons le problème de Cauchy : trouver $y : \mathrm{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} y'(t) = \varphi(t, y(t)), & \forall t \in \mathrm{I} =]t_0, \mathrm{T}[, \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

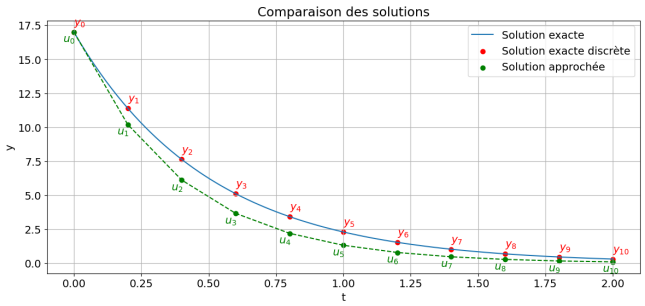
On suppose l'existence et l'unicité de la solution y sur I. On distingue plusieurs notions de solution :

- **Solution exacte continue** : la fonction $t \mapsto y(t)$ satisfaisant exactement l'EDO et la CI, accessible analytiquement dans les cas simples.
- **Solution exacte discrète** : les valeurs $\{y(t_i)\}_{i=0}^{\mathrm{N}}$ de la solution continue aux points d'une grille $\{t_i\}$.
- **Solution approchée discrète** : une suite $\{u_i\}_{i=0}^{\mathrm{N}}$ avec $u_i \approx y(t_i)$, construite par un schéma numérique (suite définie par récurrence), sans connaître la solution exacte.
- **Solution approchée continue** (PINN, *cf.* dernier chapitre) : une fonction $t \mapsto u_\theta(t)$ paramétrée par un réseau de neurones (composition de couches affines et de fonctions d'activation non linéaires, dont les paramètres θ sont optimisés), ajustée pour vérifier au mieux l'EDO, la CI et éventuellement des valeurs sur la grille.

Pour les solutions discrètes, on subdivise $\mathrm{I} = [t_0; \mathrm{T}]$ en choisissant un pas $h > 0$:

$$t_n = t_0 + nh, \quad n = 0, 1, \ldots, \mathrm{N}, \qquad h = \frac{\mathrm{T} - t_0}{\mathrm{N}}.$$

Pour chaque nœud t_n, on note $y_n = y(t_n)$ la valeur exacte et on cherche $u_n \approx y_n$.



1.5.1. Avec `scipy` — solveur intégré

Python peut calculer une approximation (u_n) grâce à `scipy.integrate.solve_ivp` (ou `odeint`). La fonction choisit automatiquement le schéma le plus adapté

Cas scalaire On cherche à résoudre le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = 1 - y(t), \quad t \in [0,3], \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

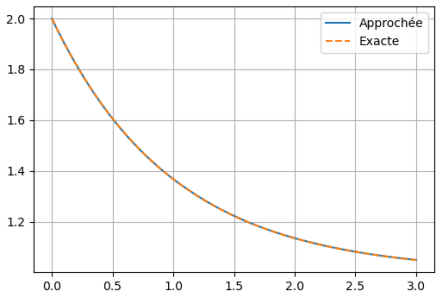
- phi est la fonction mathématique $\varphi(t, y)$ dépendant des variables t et y ;
- `solve_ivp(phi, t_span, y0)` intègre l'EDO de `t_span[0]` à `t_span[1]` avec la condition initiale `y0` (une liste même pour le cas scalaire).

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import solve_ivp

phi = lambda t, y: 1 - y
t_span = [0, 3]
y0 = [2]

sol = solve_ivp(phi, t_span, y0, dense_output=True)
tt = np.linspace(0, 3, 200)
uu = sol.sol(tt)[0]

exacte = lambda t: 1 + np.exp(-t)
plt.figure(figsize=(6,4))
plt.plot(tt, uu, '-', label='Approchée')
plt.plot(tt, exacte(tt), '--', label='Exacte')
plt.legend(); plt.grid(); plt.savefig('scalaire.png')
```



Cas système — Lotka-Volterra Considérons le système proies-prédateurs (lièvres/lynx) :

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_1(t)(a - by_2(t)), \\ y_2'(t) = -y_2(t)(c - dy_1(t)), \end{cases}$$

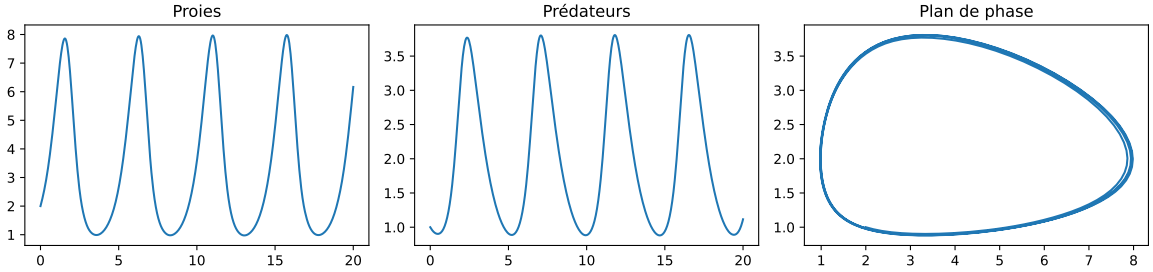
© 2024-2027 G. Faccanoni

avec $a = 2$, $b = 1$, $c = 1$, $d = 0.3$ et CI $y_1(0) = 2$, $y_2(0) = 1$.

```
from scipy.integrate import solve_ivp
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

a, b, c, d = 2, 1, 1, 0.3
phi = lambda t, yy: [yy[0]*(a - b*yy[1]),
                     -yy[1]*(c - d*yy[0])]
sol = solve_ivp(phi, [0, 20], [2, 1], dense_output=True)
tt = np.linspace(0, 20, 500)
yy = sol.sol(tt)

fig, axes = plt.subplots(1, 3, figsize=(12, 3))
axes[0].plot(tt, yy[0]); axes[0].set_title('Proies')
axes[1].plot(tt, yy[1]); axes[1].set_title('Prédateurs')
axes[2].plot(yy[0], yy[1]); axes[2].set_title('Plan de phase')
plt.tight_layout(); plt.savefig('lotka_volterra.pdf',
 ↪  bbox_inches='tight')
```

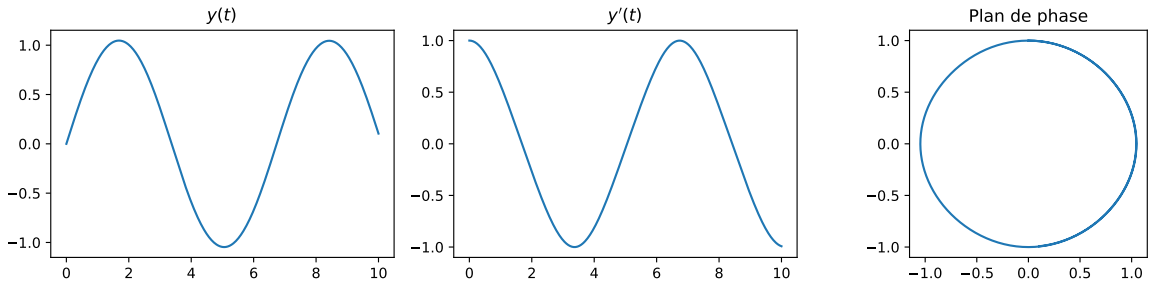


Cas ordre 2 — pendule L'EDO $y''(t) = -\sin(y(t))$ est équivalente au système $z_1' = z_2$, $z_2' = -\sin(z_1)$, avec CI $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

```
from scipy.integrate import solve_ivp
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

phi = lambda t, zz: [zz[1], -np.sin(zz[0])]
sol = solve_ivp(phi, [0, 10], [0, 1], dense_output=True)
tt = np.linspace(0, 10, 500)
zz = sol.sol(tt)

fig, axes = plt.subplots(1, 3, figsize=(12, 3))
axes[0].plot(tt, zz[0]); axes[0].set_title(r'$y(t)$')
axes[1].plot(tt, zz[1]); axes[1].set_title(r"$y'(t)$")
axes[2].plot(zz[0], zz[1]); axes[2].set_title('Plan de phase')
axes[2].set_aspect('equal')
plt.tight_layout(); plt.savefig('pendule.pdf', bbox_inches='tight')
```



1.5.2. Schémas numériques — construction

Une grands majorité des schémas d'approximation s'obtient en intégrant l'EDO $y'(t) = \varphi(t, y(t))$ entre t_n et t_{n+1} :

$$\underbrace{\int_{t_n}^{t_{n+1}} y'(t)\,\mathrm{d}t}_{y_{n+1}-y_n} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \varphi(t, y(t))\,\mathrm{d}t,$$

puis en approchant cette intégrale par une formule de quadrature. On obtient une suite définie par récurrence :

$$\begin{cases} u_0 = y_0, \\ u_{n+1} = u_n + \text{Approximation de } \displaystyle\int_{t_n}^{t_{n+1}} \varphi(t, y(t))\,\mathrm{d}t. \end{cases}$$

Les suites ainsi définies se distingues selon 2 critères :

- *Explicite* vs *Implicite* : u_{n+1} calculé directement à partir de u_k vs u_{n+1} défini par une relation implicite faisant intervenir $\varphi(t_{n+1}, u_{n+1})$.
- *À un pas* vs *Multi-pas* : si u_{n+1} ne dépend que de u_n (et éventuellement de lui-même) on dit que le schéma est à un pas, si u_{n+1} dépend de plusieurs valeurs précédentes on dit que le schéma est multi-pas.

Nous allons construire ainsi cinq schémas :

Schéma	**Type**
EE — Euler explicite	explicite
EI — Euler implicite	implicite
CN — Crank-Nicolson	implicite
H — Heun	explicite
EM — Euler modifié	explicite

Exemple fil rouge. On illustre chaque schéma sur le problème de Cauchy

$$y'(t) = 2t\,y(t), \quad t \in [0,1], \quad y(0) = 1, \qquad \text{solution exacte } y(t) = e^{t^2}.$$

```
import numpy as np

t0 = 0; t_end = 1
tt = np.linspace(t0, t_end, 11)

phi_fr = lambda t, y: 2*t*y
y0 = 1
uu_exact = np.exp(tt**2)

# Pour l'affichage
import pandas as pd
def afficher(uu, schema):
  df = pd.DataFrame(
      [uu, uu_exact],
      index=[schema, "Exacte"],
```


© 2024-2027 G. Faccanoni

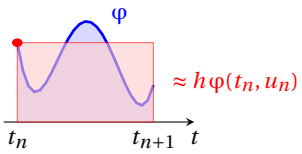
```
        columns=[f"{t:.1f}" for t in tt]
    )
    table = df.to_latex(float_format="%.4f", column_format="|c|" +
    ↪  "c|"*len(tt))
    return table
```

⋆ Schéma d'Euler explicite (EE) — rectangle gauche

On approche l'intégrale par la valeur de l'intégrande au point gauche t_n (règle du rectangle gauche) :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \varphi(t, y(t))\,\mathrm{d}t \approx h\varphi(t_n, y(t_n)).$$

Schéma 1.1 (EE — Euler explicite (progressif))



$$\begin{cases} u_0 = y_0, \\ u_{n+1} = u_n + h\varphi(t_n, u_n), \\ \qquad n = 0, 1, \ldots, \mathrm{N}-1. \end{cases}$$

Schéma à 1 pas **explicite** : u_{n+1} est calculé directement à partir de u_n.
Fil rouge : $u_{n+1} = (1+2ht_n)u_n$.

```
def euler_explicite(phi, tt, y0):
    h = tt[1] - tt[0]
    N = len(tt) - 1
    uu = np.empty_like(tt)
    uu[0] = y0
    for n in range(N):
        uu[n+1] = uu[n] + h * phi(tt[n], uu[n])
    return uu

uu_ee    = euler_explicite(phi_fr, tt, y0)

table = afficher(uu_ee, "EE")
```

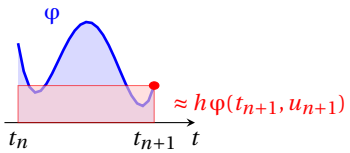
	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
EE	1.0000	1.0000	1.0200	1.0608	1.1244	1.2144	1.3358	1.4961	1.7056	1.9785	2.3346
Exacte	1.0000	1.0101	1.0408	1.0942	1.1735	1.2840	1.4333	1.6323	1.8965	2.2479	2.7183

⋆ Schéma d'Euler implicite (EI) — rectangle droit

On approche l'intégrale par la valeur de l'intégrande au point droit t_{n+1} (règle du rectangle droit) :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \varphi(t, y(t))\,\mathrm{d}t \approx h\varphi(t_{n+1}, y(t_{n+1})).$$

Schéma 1.2 (EI — Euler implicite (rétrograde))



$$\begin{cases} u_0 = y_0, \\ u_{n+1} = u_n + h\varphi(t_{n+1}, u_{n+1}), \\ \qquad n = 0, 1, \ldots, \mathrm{N}-1. \end{cases}$$

Schéma à 1 pas **implicite** : u_{n+1} est zéro de $x \mapsto -x + u_n + h\varphi(t_{n+1}, x)$.
Fil rouge : $u_{n+1} = u_n + 2ht_{n+1}u_{n+1}$, soit $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1-2ht_{n+1}}$ (résolution explicite ici car φ est linéaire en y).

```python
from scipy.optimize import fsolve

def euler_implicite(phi, tt, y0):
    h = tt[1] - tt[0]
    N = len(tt) - 1
    uu = np.empty_like(tt)
    uu[0] = y0
    for n in range(N):
        fct = lambda x: -x + uu[n] + h * phi(tt[n+1], x)
        uu[n+1] = fsolve(fct, uu[n])[0]
    return uu

uu_ei    = euler_implicite(phi_fr, tt, 1.0)

table = afficher(uu_ei, "EI")
```

	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
EI	1.0000	1.0204	1.0629	1.1308	1.2291	1.3657	1.5519	1.8045	2.1482	2.6198	3.2748
Exacte	1.0000	1.0101	1.0408	1.0942	1.1735	1.2840	1.4333	1.6323	1.8965	2.2479	2.7183

⋆ Schéma d'Euler modifié (EM) — point milieu

On approche $y(t_n + h/2)$ par un demi-pas d'EE, puis on évalue φ au point milieu (règle du point milieu) :

$$\tilde{u}_{n+1/2} = u_n + \tfrac{h}{2}\varphi(t_n, u_n), \qquad \int_{t_n}^{t_{n+1}} \varphi(t, y(t))\,\mathrm{d}t \approx h\,\varphi\Big(t_n + \tfrac{h}{2}, \tilde{u}_{n+1/2}\Big).$$

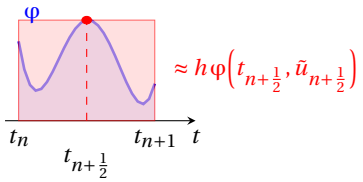


Schéma 1.3 (EM — Euler modifié)

$$\begin{cases} u_0 = y_0, \\ \tilde{u}_{n+1/2} = u_n + \frac{h}{2}\varphi(t_n, u_n), \\ u_{n+1} = u_n + h\varphi(t_n + \frac{h}{2}, \tilde{u}_{n+1/2}). \end{cases}$$

Schéma à 1 pas **explicite** (type Runge-Kutta, règle du point milieu).

```python
def euler_modifie(phi, tt, y0):
    h = tt[1]-tt[0]; N = len(tt)-1
    uu = np.empty_like(tt); uu[0] = y0
    for n in range(N):
        u_mid = uu[n] + 0.5*h*phi(tt[n], uu[n])
        uu[n+1] = uu[n] + h*phi(tt[n]+h/2, u_mid)
    return uu

uu_em    = euler_modifie(phi_fr, tt, y0)

table = afficher(uu_em, "EM")
```

	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
EM	1.0000	1.0100	1.0406	1.0937	1.1725	1.2823	1.4304	1.6275	1.8887	2.2355	2.6984
Exacte	1.0000	1.0101	1.0408	1.0942	1.1735	1.2840	1.4333	1.6323	1.8965	2.2479	2.7183

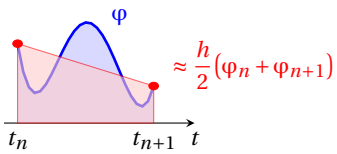
⋆ Schéma du trapèze ou de Crank-Nicolson (CN)

On approche l'intégrale par la règle du trapèze :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \varphi(t, y(t))\,\mathrm{d}t \approx \frac{h}{2}\big(\varphi(t_n, y(t_n)) + \varphi(t_{n+1}, y(t_{n+1}))\big).$$

© 2024-2027 G. Faccanoni

Schéma 1.4 (CN — Crank-Nicolson (trapèze))



$$\begin{cases} u_0 = y_0, \\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{h}{2}\big(\varphi(t_n, u_n) + \varphi(t_{n+1}, u_{n+1})\big), \\ \qquad n = 0, 1, \dots, N-1. \end{cases}$$

Schéma à 1 pas **implicite**.

Fil rouge : $u_{n+1} = u_n + h(t_n u_n + t_{n+1} u_{n+1})$, soit $u_{n+1} = \dfrac{(1 + h t_n) u_n}{1 - h t_{n+1}}$.

```
from scipy.optimize import fsolve

def crank_nicolson(phi, tt, y0):
    h = tt[1] - tt[0]
    N = len(tt) - 1
    uu = np.empty_like(tt)
    uu[0] = y0
    for n in range(N):
        fct = lambda x: -x + uu[n] + 0.5*h*(phi(tt[n], uu[n]) + phi(tt[n+1],
        ↪  x))
        uu[n+1] = fsolve(fct, uu[n])[0]
    return uu

uu_cn    = crank_nicolson(phi_fr, tt, y0)

table = afficher(uu_cn, "CN")
```

	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
CN	1.0000	1.0101	1.0410	1.0947	1.1745	1.2858	1.4362	1.6370	1.9039	2.2596	2.7366
Exacte	1.0000	1.0101	1.0408	1.0942	1.1735	1.2840	1.4333	1.6323	1.8965	2.2479	2.7183

⋆ Schéma de Heun — trapèze explicite

Pour éviter l'implicite de CN, on prédit $\tilde{u}_{n+1}$ par EE puis on corrige par la règle du trapèze :

Schéma 1.5 (H — Heun (trapèze explicite))

$$\begin{cases} u_0 = y_0, \\ \tilde{u}_{n+1} = u_n + h\varphi(t_n, u_n), \\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{h}{2}\big(\varphi(t_n, u_n) + \varphi(t_{n+1}, \tilde{u}_{n+1})\big), \\ \qquad n = 0, 1, \dots, N-1. \end{cases}$$

Schéma à 1 pas **explicite** (prédicteur-correcteur).

```
def heun(phi, tt, y0):
    h = tt[1] - tt[0]
    N = len(tt) - 1
    uu = np.empty_like(tt)
    uu[0] = y0
    for n in range(N):
        k0 = phi(tt[n], uu[n])
        k1 = phi(tt[n+1], uu[n] + h*k0)
        uu[n+1] = uu[n] + 0.5*h*(k0 + k1)
    return uu
```

```
uu_he    = heun(phi_fr, tt, y0)

table = afficher(uu_he, "H")
```

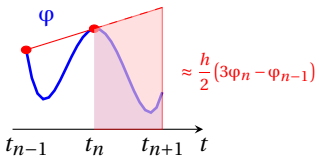
	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
H	1.0000	1.0100	1.0407	1.0940	1.1732	1.2835	1.4324	1.6306	1.8934	2.2426	2.7091
Exacte	1.0000	1.0101	1.0408	1.0942	1.1735	1.2840	1.4333	1.6323	1.8965	2.2479	2.7183

⋆ Schéma d'Adam-Bashforth à 2 pas (AB2)

Les cinq schémas précédents sont **à un pas**: u_{n+1} ne dépend que de u_n. On peut aussi exploiter les valeurs de φ déjà calculées aux pas **précédents** pour gagner en précision sans coût de calcul supplémentaire: c'est le principe des méthodes **multi-pas**. Pour AB2, on remplace φ sur $[t_n, t_{n+1}]$ par la droite qui extrapole les deux derniers points connus $\big(t_{n-1}, \varphi(t_{n-1}, u_{n-1})\big)$ et $\big(t_n, \varphi(t_n, u_n)\big)$:

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \varphi(t, y(t))\,\mathrm{d}t \approx \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left[\varphi(t_n, u_n) + \frac{\varphi(t_n, u_n) - \varphi(t_{n-1}, u_{n-1})}{h}(t - t_n)\right] \mathrm{d}t = \frac{h}{2}\big(3\varphi(t_n, u_n) - \varphi(t_{n-1}, u_{n-1})\big).$$

Schéma 1.6 (AB2 — Adam-Bashforth à 2 pas)



$$\begin{cases} u_0 = y_0, \\ u_1 = u_0 + h\varphi(t_0, u_0), \\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{h}{2}\big(3\varphi(t_n, u_n) - \varphi(t_{n-1}, u_{n-1})\big), \\ \qquad n = 1, \ldots, N-1. \end{cases}$$

Schéma à **2 pas explicite**: u_{n+1} dépend de u_n *et* de u_{n-1}. Comme la suite n'a besoin que d'une seule valeur initiale u_0, un schéma à un pas (ici EE) sert à *démarrer* la récurrence en calculant u_1.

Fil rouge: $u_1 = u_0$ (car $t_0 = 0$) puis $u_{n+1} = u_n + h\big(3t_n u_n - t_{n-1}u_{n-1}\big)$.

```
def adam_bashforth2(phi, tt, y0):
    h = tt[1] - tt[0]
    N = len(tt) - 1
    uu = np.empty_like(tt)
    uu[0] = y0
    uu[1] = uu[0] + h * phi(tt[0], uu[0])  # démarrage par EE
    for n in range(1, N):
        uu[n+1] = uu[n] + 0.5*h*(3*phi(tt[n], uu[n]) - phi(tt[n-1], uu[n-1]))
    return uu

uu_ab2    = adam_bashforth2(phi_fr, tt, y0)

table = afficher(uu_ab2, "AB2")
```

	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
AB2	1.0000	1.0000	1.0300	1.0818	1.1586	1.2651	1.4086	1.5988	1.8501	2.1822	2.6234
Exacte	1.0000	1.0101	1.0408	1.0942	1.1735	1.2840	1.4333	1.6323	1.8965	2.2479	2.7183

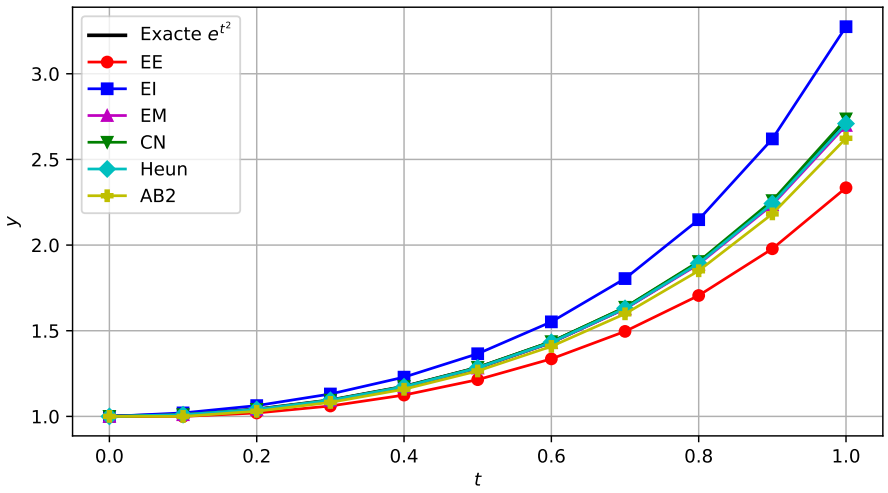
On compare graphiquement les six schémas sur l'exemple fil rouge:

```
import matplotlib.pyplot as plt

plt.figure(figsize=(7, 4))
plt.plot(tt, uu_exact, 'k-',  lw=2,  label='Exacte $e^{t^2}$')
plt.plot(tt, uu_ee,     'r-o', label='EE')
```


© 2024-2027 G. Faccanoni

```
plt.plot(tt, uu_ei,     'b-s', label='EI')
plt.plot(tt, uu_em,     'm-^', label='EM')
plt.plot(tt, uu_cn,     'g-v', label='CN')
plt.plot(tt, uu_he,     'c-D', label='Heun')
plt.plot(tt, uu_ab2,    'y-P', label='AB2')
plt.xlabel('$t$'); plt.ylabel('$y$')
plt.legend(); plt.grid(); plt.tight_layout()
plt.savefig('schemas_comparaison.pdf', bbox_inches='tight')
```



On observe également, sur l'exemple fil rouge, que diviser le pas h par 2 divise l'erreur maximale d'EE et EI par environ 2, mais celle de CN par environ 4. On dit que EE et EI sont des schémas *d'ordre 1*, et CN *d'ordre 2* : plus l'ordre est élevé, plus l'erreur diminue vite quand on raffine h. Cette notion de *convergence et d'ordre* sera formalisée et vérifiée numériquement en TD.

Remarque

Pour la solution croissante $y = e^{t^2}$: EE évalue φ au point gauche et retarde la croissance (sous-estimation), EI l'évalue au point droit et anticipe (sur-estimation). Les schémas d'ordre 2 (CN, Heun, EM, AB2) sont nettement plus précis dès $h = 0{,}1$.

⋆ Quel schéma choisir ?

Le choix d'un schéma dépend essentiellement de deux aspects : les *propriétés du schéma* (peut-on choisir h arbitrairement grand sans que la solution numérique ne diverge ? peut-on estimer l'erreur en fonction de h, *i.e.* connaît-on son ordre ?) et les *caractéristiques du problème* (le problème de Cauchy est-il numériquement bien posé ? est-il *stiff*, *i.e.* mêle-t-il des phénomènes à des échelles de temps très différentes ?).

Les résultats numériques doivent toujours être interprétés avec prudence. On peut les valider en vérifiant la préservation de propriétés qualitatives connues de la solution (positivité, conservation, monotonie…), ou en comparant à une solution exacte sur un cas test simple.

Ces questions de stabilité et de problèmes raides sont approfondies dans le cours de L3 [1].

1. https://moodle.univ-tln.fr/course/view.php?id=4840

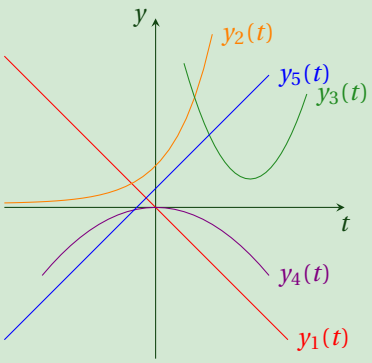
1.6. Exercices

1.6.1. Étude qualitative d'un problème de Cauchy

Exercice 1.1 (Étude qualitative d'un problème de CAUCHY)
On considère l'équation différentielle

$$y'(t) = \frac{e^t}{t^2+1} y(t).$$

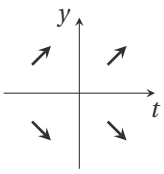
Sans résoudre l'équation différentielle, déterminer, parmi les courbes tracées ci-contre, celles qui ne représentent sûrement pas une fonction solution de cette EDO et celles qui sont susceptibles d'en représenter une.



Correction
On remarque que $\frac{e^t}{t^2+1} > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Une solution y doit vérifier $y'(t) = 0$ si et seulement si $y(t) = 0$: si la courbe coupe l'axe des abscisses, elle a une tangente horizontale en ce point. Les courbes y_1 (rouge) et y_5 (bleu) coupent l'axe des abscisses sans tangente horizontale : elles ne conviennent pas.

L'équation impose aussi que $y(t)$ et $y'(t)$ sont de même signe :



Cette condition élimine y_3 (verte) et y_4 (violette).

La courbe y_2 (orange) est la seule susceptible de représenter une solution.

Exercice 1.2 (Étude qualitative d'une EDO)
On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = 1 - y(t), & t \in \mathbb{R}, \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

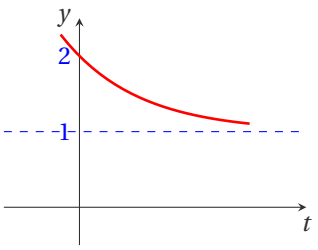
Supposons que le problème admet une et une seule solution $t \mapsto y(t)$ continue et définie sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que la solution est minorée ;
2. étudier la monotonie de la solution ;
3. calculer la limite pour $t \to +\infty$ de la solution ;
4. calculer y'' en fonction de y et les changements de concavité ;
5. tracer le graphe de la solution ;
6. calculer et afficher la solution approchée avec `solve_ivp`.

Correction

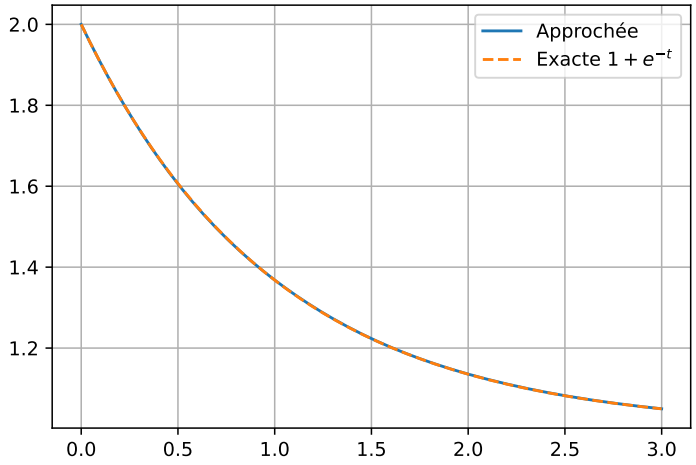
1. $y(t) = 1$ pour tout t est la seule solution constante mais ne vérifie pas $y(0) = 2$. La solution unique passe par $(0,2)$ et ne peut pas croiser la solution constante $y = 1$, donc $y(t) > 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
2. Comme $y(t) > 1$, on a $y'(t) = 1 - y(t) < 0$: y est strictement décroissante.
3. y est décroissante et minorée par 1, donc $\ell = \lim_{t\to+\infty} y(t) \geq 1$. Si $\ell > 1$ alors $\lim y'(t) = 1 - \ell < 0$: y aurait une asymptote oblique, contradiction. Donc $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 1$.
4. $y''(t) = -y'(t) = y(t) - 1 > 0$: la solution est convexe, sans changement de concavité.
5. Graphe :

© 2024-2027 G. FACCANONI




```
6. from scipy.integrate import solve_ivp
   import numpy as np
   import matplotlib.pyplot as plt

   phi = lambda t, y: [1 - y[0]]
   sol = solve_ivp(phi, [0, 3], [2], dense_output=True)
   tt = np.linspace(0, 3, 200)
   exacte = lambda t: 1 + np.exp(-t)
   plt.figure(figsize=(6,4))
   plt.plot(tt, sol.sol(tt)[0], label='Approchée')
   plt.plot(tt, exacte(tt), '--', label='Exacte $1+e^{-t}$')
   plt.legend(); plt.grid(); plt.savefig('exo_cauchy_sol.pdf',
    ↪  bbox_inches='tight')
```



1.6.2. EDO d'ordre 1 à variables séparables

Exercice 1.3
Résoudre les problèmes de CAUCHY :

1. $y'(x) + 2xy^2(x) = 0,\ y(0) = 2$
2. $y'(x) - 4xy^2(x) = 0,\ y(0) = 2$

Correction
Dans les deux cas, $y \equiv 0$ est solution de l'EDO mais ne vérifie pas la CI ; toute autre solution est non nulle.

(a) $\dfrac{y'(x)}{y^2(x)} = -2x \rightsquigarrow \displaystyle\int y^{-2}\,\mathrm{d}y = -2\int x\,\mathrm{d}x \rightsquigarrow y(x) = \frac{1}{x^2+c}$. La CI donne $c = \frac{1}{2}$, d'où $y(x) = \dfrac{2}{2x^2+1}$ (définie sur $\mathbb{R}$).

(b) $\dfrac{y'(x)}{y^2(x)} = 4x \rightsquigarrow y(x) = \dfrac{1}{-2x^2+c}$. La CI donne $c = \frac{1}{2}$, d'où $y(x) = \dfrac{2}{1-4x^2}$, définie seulement pour $x \in]-0{,}5;0{,}5[$.

Exercice 1.4
Résoudre le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = t y^2(t), \\ y(0) = y_0, \end{cases}$$

en fonction de la donnée initiale y_0.

Correction
L'unique solution constante est $y \equiv 0$ (correspond à $y_0 = 0$). Comme deux trajectoires ne s'intersectent jamais, toute autre solution ne s'annule pas et vérifie

$$\frac{y'(t)}{y^2(t)} = t \rightsquigarrow \int \frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y = \int t\,\mathrm{d}t \rightsquigarrow -\frac{1}{y} = \frac{t^2}{2} + \mathrm{C} \rightsquigarrow y(t) = -\frac{1}{\frac{t^2}{2} + \mathrm{C}}, \quad \mathrm{C} \in \mathbb{R}.$$

Comme $y_0 = -1/\mathrm{C}$, on obtient :

- $y(t) \equiv 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ si $y_0 = 0$;
- $y(t) = -\dfrac{1}{\frac{t^2}{2} - \frac{1}{y_0}}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ si $y_0 < 0$ (le dénominateur ne s'annule jamais) ;
- $y(t) = -\dfrac{1}{\frac{t^2}{2} - \frac{1}{y_0}}$ pour $t \in \left]-\sqrt{\frac{2}{y_0}}; \sqrt{\frac{2}{y_0}}\right[$ si $y_0 > 0$ (intervalle maximal contenant $t = 0$).

Exercice 1.5
Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Montrer que le problème de CAUCHY

$$\begin{cases} y'(t) = y^{2m/(2m+1)}(t), \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

admet une infinité de solutions de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$. Pourquoi ne peut-on appliquer le théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ ?

Correction
La fonction $y \equiv 0$ est solution. Pour $y \neq 0$, l'EDO à variables séparables donne $\int y^{-2m/(2m+1)}\,\mathrm{d}y = \int 1\,\mathrm{d}t$, d'où $y(t) = \left(\frac{t+c}{2m+1}\right)^{2m+1}$ pour $c \in \mathbb{R}$. On vérifie que, pour tout $b \geq 0$, les fonctions

$$y_b(t) = \begin{cases} \left(\frac{t+b}{2m+1}\right)^{2m+1} & \text{si } t \leq -b, \\ 0 & \text{si } -b \leq t \leq b, \\ \left(\frac{t-b}{2m+1}\right)^{2m+1} & \text{si } t \geq b, \end{cases}$$

sont de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ et solutions du problème. Le théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ ne s'applique pas car $\varphi(t,y) = y^{2m/(2m+1)}$ n'est pas lipschitzienne en y au voisinage de 0 : pour tout $y \neq 0$ et tout $\mathrm{L} > 0$, $|\varphi(t,y) - \varphi(t,0)| = |y|^{2m/(2m+1)} > \mathrm{L}|y|$ quand $y \to 0$.

Exercice 1.6 (Datation au carbone 14)
Le carbone 14 est un isotope présent dans tout organisme vivant ; à la mort de l'organisme, le nombre d'atomes $n(t) > 0$ (en années écoulées) décroît selon $n'(t) = -kn(t)$ ($k > 0$).

1. Trouver toutes les solutions de l'EDO.
2. Sachant qu'il faut 5700 ans pour que la quantité diminue de moitié, calculer k.
3. Des ossements contiennent 9 fois moins de carbone 14 que des ossements d'aujourd'hui. Déterminer leur âge.

Correction
1. EDO à variables séparables : $n(t) = n_0 e^{-kt}$.

© 2024-2027 G. FACCANONI

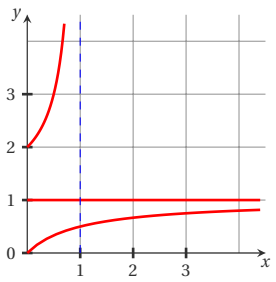
2. $n_0/2 = n_0 e^{-5700k}$ donne $k = \dfrac{\ln 2}{5700} \approx 1{,}216 \times 10^{-4}$.
3. $n_0/9 = n_0 e^{-k\hat{t}}$ donne $\hat{t} = \dfrac{\ln 9}{k} = 5700\dfrac{\ln 9}{\ln 2} \approx 18000$ ans.

Exercice 1.7
Deux produits chimiques présents dans une cuve avec une concentration de 1g/l à l'instant $t = 0$ interagissent et produisent une substance de concentration $y(t)$ régie par $y'(t) = (1 - y(t))^2$, $t \geq 0$.

1. Montrer que toute solution de l'EDO est croissante.
2. Chercher les solutions constantes.
3. Pour la solution telle que $y(0) = 0$, montrer que $0 < y(t) < 1$ pour tout $t > 0$ (on admettra que deux solutions distinctes ne se coupent pas).
4. Pour cette même solution, montrer que $\lim_{t\to+\infty} y(t) = \ell$ existe puis, en admettant $\lim_{t\to+\infty} y'(t) = 0$, déterminer ℓ.
5. Calculer la solution pour $y(0) = 0$, $y(0) = 1$ et $y(0) = 2$, et préciser l'intervalle maximal d'existence dans chaque cas.

Correction

1. $y'(t) = (1 - y(t))^2 \geq 0$: y est croissante.
2. $f \equiv c$ solution $\iff (1-c)^2 = 0 \iff c = 1$: seule solution constante, $y \equiv 1$.
3. y croissante donc $y(t) \geq y(0) = 0$. Si $y(t_0) \geq 1$ pour un t_0, le graphe de y couperait nécessairement la droite $y = 1$ (solution constante), ce qui est impossible. Donc $y(t) < 1$ pour tout $t \geq 0$.
4. y est croissante et majorée par 1, donc converge vers $\ell \leq 1$. En passant à la limite dans l'EDO : $0 = (1-\ell)^2$, soit $\ell = 1$.
5. - $y(0) = 1$: $y \equiv 1$ sur $\mathbb{R}$.
   - $y(0) = 0$: EDO à variables séparables, $\int (1-y)^{-2}\,dy = t$, soit $y(t) = \dfrac{t}{1+t}$ pour tout $t \geq 0$.
   - $y(0) = 2$: même calcul donne $y(t) = \dfrac{t-2}{t-1}$, définie seulement pour $0 \leq t < 1$.



Exercice 1.8 (Logistique)
Soit k et h deux constantes positives. Calculer $p(t)$ pour $t > 0$ solution de

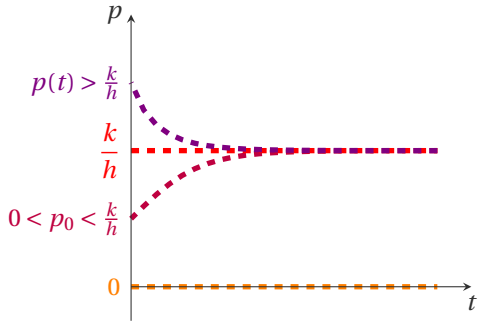
$$\begin{cases} p'(t) = kp(t) - hp^2(t), \\ p(0) = p_0, \end{cases}$$

qui décrit l'évolution d'une population de p individus dont le taux de croissance diminue lorsque la population augmente (ressources limitées).

Correction
L'EDO $p' = p(k - hp)$ est à variables séparables. Solutions constantes : $p = 0$ et $p = k/h$. Pour $p \neq 0, k/h$, décomposition en éléments simples :

$$\frac{1}{k}\left(\frac{1}{p} + \frac{h}{k-hp}\right)p' = 1 \quad \rightsquigarrow \quad \ln|p| - \ln|k-hp| = kt + c \quad \rightsquigarrow \quad p(t) = \frac{k/h}{1 + \left(\frac{k}{hp_0} - 1\right)e^{-kt}}.$$

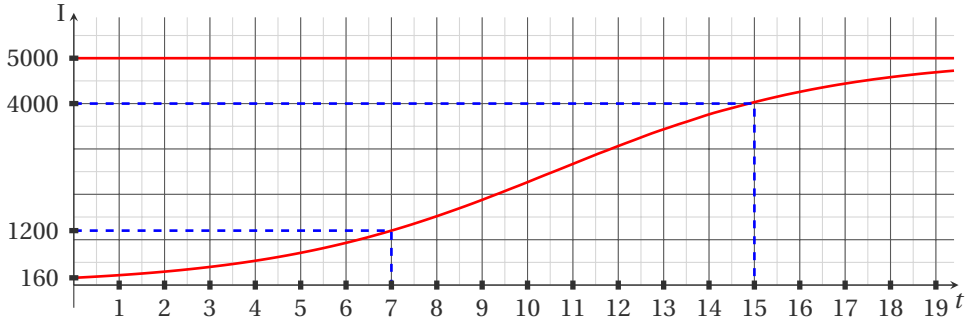
Comme $\lim_{t\to+\infty} p(t) = k/h$, la population se stabilise vers la *capacité de charge* k/h de l'environnement, indépendamment de p_0. Cette limite se lit aussi directement sur l'EDO : les solutions sont croissantes si $p(t) \in]0, k/h[$, décroissantes si $p(t) > k/h$.



Exercice 1.9 («Urgence»)
On étudie la progression d'une maladie contagieuse dans une population isolée de 5 000 individus. Si $\mathrm{I}(t)$ est le nombre d'individus infectés à l'instant t, la propagation par contact se traduit par une EDO logistique $\mathrm{I}'(t) = k\mathrm{I}(t)(5000 - \mathrm{I}(t))$, $k \in \mathbb{R}$. On compte 160 malades à $t = 0$ et 1 200 après 7 jours. À partir de quel jour l'infection touchera 80% de la population ? Et 100% ?

Correction
On a un problème de Cauchy de type logistique (cf. exercice précédent, avec $k \to 5000k$ et capacité 5000) : $\mathrm{I}(t) = \dfrac{5000}{1+\mathrm{D}e^{-5000kt}}$, $\mathrm{D} \in \mathbb{R}$.

- CI : $160 = \dfrac{5000}{1+\mathrm{D}} \rightsquigarrow \mathrm{D} = \dfrac{121}{4}$, d'où $\mathrm{I}(t) = \dfrac{20000}{4+121e^{-5000kt}}$.
- $\mathrm{I}(7) = 1200 \rightsquigarrow k = \dfrac{1}{35000}\ln\dfrac{363}{38}$, d'où $\mathrm{I}(t) = \dfrac{20000}{4+121e^{-\frac{t}{7}\ln(363/38)}}$.
- $\mathrm{I}(\bar{t}) = 80\% \times 5000 = 4000 \rightsquigarrow \bar{t} = \dfrac{7\ln(121)}{\ln(363/38)} \approx 15$ jours.
- $\lim_{t\to+\infty} \mathrm{I}(t) = 5000$, mais I n'atteint jamais 100% en temps fini (deux solutions ne s'intersectent jamais).



Exercice 1.10
On note $y(t)$ le nombre de ménages vivant en France équipés d'un ordinateur (millions de ménages, t en années). Le modèle de VERHULST estime que, sur 1980-2020, $y'(t) = 0{,}022\, y(t)(20 - y(t))$.

1. Calculer toutes les solutions de l'équation.
2. Avec $t = 0$ en 1980 et $y(0) = 0{,}01$, combien de ménages seront équipés en 2020 ?

Correction
EDO logistique (cf. exercices précédents, $k = 0{,}44$, capacité 20) : $y(t) = \dfrac{20}{1+\mathrm{D}e^{-0{,}44t}}$, $\mathrm{D} \in \mathbb{R}_+$. La CI $y(0) = 0{,}01$ donne $\mathrm{D} = 1999$, d'où $y(t) = \dfrac{20}{1+1999e^{-0{,}44t}}$ et $y(40) = \dfrac{20}{1+1999e^{-17{,}6}} \approx 19{,}99$ millions de ménages.

© 2024-2027 G. FACCANONI

Exercice 1.11 (Modèle de GOMPERTZ)
Lorsqu'une nouvelle espèce s'introduit dans un écosystème, elle évolue d'abord lentement, accélère en s'adaptant, puis ralentit quand la population devient trop importante. On utilise alors le modèle $y'(t) = -y(t)\ln(y(t))$. Calculer toutes les solutions pour $t > 0$ (solutions constantes incluses). La population va-t-elle survivre ?

Correction
Solution constante : $A\ln A = 0 \iff A = 1$, donc $y \equiv 1$. Pour $y \neq 1$, EDO à variables séparables :

$$\int \frac{dy}{y\ln y} = \int -1\,dt \quad \rightsquigarrow \quad \ln|\ln y(t)| = -t + C \quad \rightsquigarrow \quad y(t) = e^{De^{-t}}, \quad D \in \mathbb{R}.$$

Si $y(0) > 1$ alors $y' < 0$ (décroissance) ; si $0 < y(0) < 1$ alors $y' > 0$ (croissance) ; comme $y \equiv 1$ est solution et que deux solutions ne se croisent jamais, $y(t) \to 1$ quand $t \to +\infty$ quel que soit le nombre d'individus initial : la population survit et se stabilise.

1.6.3. EDO linéaires du premier ordre

Exercice 1.12
Résoudre les EDO suivantes :

1. $y'(x) + 2y(x) = e^x$
2. $xy'(x) - y(x) = x^2\sin(x)$, $x > 0$
3. $y'(x) - 2xy(x) = xe^{x^2}$
4. $(1+x^2)y'(x) + 2xy(x) = 4x$

Correction
(a) $a = 1$, $b = 2$, $g = e^x$.
- $A(x) = 2x$, $B(x) = \int e^x e^{2x}\,dx = \frac{1}{3}e^{3x}$,
- $y(x) = Ce^{-2x} + \frac{1}{3}e^x$.

(b) $a = x$, $b = -1$, $g = x^2\sin(x)$, sur $]0;+\infty[$.
- $A(x) = \int \frac{-1}{x}\,dx = -\ln(x)$, $y_H(x) = Cx$,
- $B(x) = \int \frac{x^2\sin(x)}{x}\cdot e^{-\ln x}\,dx = \int \sin(x)\,dx = -\cos(x)$,
- $y(x) = Cx + (-\cos(x))e^{\ln x} = Cx - x\cos(x)$.

(c) $a = 1$, $b = -2x$, $g = xe^{x^2}$.
- $A(x) = -x^2$, $y_H(x) = Ce^{x^2}$,
- $B(x) = \int xe^{x^2}e^{-x^2}\,dx = \int x\,dx = \frac{x^2}{2}$,
- $y(x) = Ce^{x^2} + \frac{x^2}{2}e^{x^2} = \left(C + \frac{x^2}{2}\right)e^{x^2}$.

(d) $a = 1 + x^2$, $b = 2x$, $g = 4x$.
- $A(x) = \int \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \ln(1+x^2)$,
- $B(x) = \int \frac{4x}{1+x^2}e^{\ln(1+x^2)}\,dx = \int 4x\,dx = 2x^2$,
- $y(x) = \frac{C+2x^2}{1+x^2}$.

Exercice 1.13 (Loi de Newton du refroidissement)
Une tasse de café à 75°C dans une pièce à 25°C refroidit selon $T'(t) = \gamma(T(t) - 25)$ avec $T(0) = 75$ et $T(5) = 50$. Trouver $T(t)$ et calculer la température après 10 minutes.

Correction
EDO linéaire : $a = 1$, $b = -\gamma$, $g = -25\gamma$. Solution générale : $T(t) = De^{\gamma t} + 25$.

1. CI $T(0) = 75$: $D = 50$, donc $T(t) = 25 + 50e^{\gamma t}$.
2. $T(5) = 50$: $25 = 50e^{5\gamma}$ donne $\gamma = -\frac{\ln 2}{5}$.

$$T(t) = 25 + 50e^{-\frac{\ln 2}{5}t} = 25 + 50\cdot 2^{-t/5}.$$

Après 10 minutes : $T(10) = 25 + 50\cdot 2^{-2} = 25 + 12{,}5 = 37{,}5$°C.

Exercice 1.14
Résoudre les EDO (ou problèmes de Cauchy) suivants après avoir indiqué sur quel(s) intervalle(s) la solution est définie :

1. $(x+1)y'(x)+y(x)=(x+1)\sin(x)$
2. $y'(x)+(3x^2+1)y(x)=x^2e^{-x}$, $y(0)=1$
3. $y'(x)+(3x^2-1)y(x)=x^2e^{x}$, $y(0)=-1$
4. $y'(x)+\dfrac{1}{x-1}y(x)=\dfrac{(x-2)^2}{x-1}$, $y(0)=1$
5. $y'(x)+(4x^3+5)y(x)=x^3e^{-5x}$, $y(0)=1$

Correction
(a) Solution sur $I_1=]-\infty;-1[$ ou $I_2=]-1;+\infty[$ (constante différente sur chacun) : $\big[(x+1)y(x)\big]'=(x+1)\sin(x)$, d'où par IPP $(x+1)y(x)=-(x+1)\cos(x)+\sin(x)+C$, soit

$$y(x)=-\cos(x)+\frac{\sin(x)+C}{x+1},\qquad C\in\mathbb{R}.$$

(b) $a=1$, $b=3x^2+1$, $g=x^2e^{-x}$: $A(x)=x^3+x$, $B(x)=\int x^2e^{x^3}\,dx=\frac{1}{3}e^{x^3}$, d'où la solution générale $y(x)=\left(C+\frac{e^{x^3}}{3}\right)e^{-x^3-x}$.
Avec $y(0)=1$: $C=\frac{2}{3}$, soit $y(x)=\left(\frac{2}{3}+\frac{e^{x^3}}{3}\right)e^{-x^3-x}$.

(c) $a=1$, $b=3x^2-1$, $g=x^2e^{x}$: $A(x)=x^3-x$, $B(x)=\int x^2e^{x^3}\,dx=\frac{e^{x^3}}{3}$, d'où $y(x)=\left(C+\frac{e^{x^3}}{3}\right)e^{-x^3+x}$. Avec $y(0)=-1$: $C=-\frac{4}{3}$, soit $y(x)=\left(-\frac{4}{3}+\frac{e^{x^3}}{3}\right)e^{-x^3+x}$.

(d) Sur $x<1$ (b singulière en 1) : $A(x)=\ln(1-x)$, $e^{A(x)}=1-x$, $B(x)=\int(x-2)^2(-1)\,dx=-\frac{(x-2)^3}{3}$, d'où $y(x)=\left(C-\frac{(x-2)^3}{3}\right)\frac{1}{1-x}$.
Avec $y(0)=1$, on trouve (après simplification du signe) $y(x)=\left(\frac{5}{3}+\frac{(x-2)^3}{3}\right)\frac{1}{x-1}$.

(e) $a=1$, $b=4x^3+5$, $g=x^3e^{-5x}$: $A(x)=x^4+5x$, $B(x)=\int x^3e^{x^4}\,dx=\frac{e^{x^4}}{4}$, d'où $y(x)=\left(C+\frac{e^{x^4}}{4}\right)e^{-x^4-5x}$. Avec $y(0)=1$: $C=\frac{3}{4}$, soit $y(x)=\left(\frac{3}{4}+\frac{e^{x^4}}{4}\right)e^{-x^4-5x}$.

Exercice 1.15
Déterminer la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(x)-2xy(x)=2x,\\ y(1)=0. \end{cases}$$

Correction
L'EDO est linéaire mais aussi à variables séparables :

Linéaire : $a(x)=1$, $b(x)=-2x$, $g(x)=2x$,
- $A(x)=\int\frac{b(x)}{a(x)}\,dx=\int-2x\,dx=-x^2$,
- $B(x)=\int\frac{g(x)}{a(x)}e^{A(x)}\,dx=\int 2xe^{-x^2}\,dx=-e^{-x^2}$,

$y(x)=ce^{x^2}-e^{-x^2}e^{x^2}=ce^{x^2}-1$;

VS : $y'(x)=2x\big(1+y(x)\big)$ donc soit $y(x)=-1$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ soit $y(x)\neq-1$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ et on peut calculer $\int\frac{1}{1+y}\,dy=\int 2x\,dx$ ce qui donne $y(x)=ce^{x^2}-1$.

Prise en compte de la condition initiale : $0=y(1)=ce-1$ ainsi $c=1/e$ et $y(x)=e^{x^2-1}-1$.

Exercice 1.16
(a) Établir s'il existe des solutions de $y'(x)=-2y(x)+e^{-2x}$ qui ont dérivée nulle en $x=0$.
(b) Établir s'il existe des solutions de $y'(x)=-2xy(x)+x$ qui sont constantes.

© 2024-2027 G. Faccanoni

Correction

(a) $a=1$, $b=2$, $g=e^{-2x}$: $\mathrm{A}(x)=2x$, $\mathrm{B}(x)=\int e^{-2x}e^{2x}\,\mathrm{d}x=x$, d'où la solution générale $y(x)=(\mathrm{C}+x)e^{-2x}$. Comme $y'(x)=(1-2\mathrm{C}-2x)e^{-2x}$, on a $y'(0)=1-2\mathrm{C}=0 \iff \mathrm{C}=\frac{1}{2}$: l'unique solution de dérivée nulle en 0 est $y(x)=\left(\frac{1}{2}+x\right)e^{-2x}$.

(b) Plutôt que de calculer $\mathrm{B}(x)$, on cherche directement une solution particulière constante : si $y\equiv\alpha$, l'EDO impose $0=-2x\alpha+x$ pour tout x, soit $\alpha=\frac{1}{2}$. Avec $y_{\mathrm{H}}(x)=\mathrm{C}e^{-x^2}$ (où $\mathrm{A}(x)=x^2$), la solution générale est $y(x)=\mathrm{C}e^{-x^2}+\frac{1}{2}$: c'est bien une fonction constante si et seulement si $\mathrm{C}=0$, auquel cas $y\equiv\frac{1}{2}$.

Exercice 1.17

Dans un circuit électrique de type résistance-inductance, le courant I évolue avec le temps selon

$$\mathrm{I}'(t)+\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{L}}\mathrm{I}(t)=\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{L}}$$

où R, L et V sont des constantes associées aux composantes électriques. Résolvez l'équation différentielle. La solution I tend-elle vers une limite finie ?

Correction

EDO linéaire d'ordre 1 avec $a(t)=1$, $b(t)=\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{L}}$, $g(t)=\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{L}}$: $\mathrm{A}(t)=\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{L}}t$, $\mathrm{B}(t)=\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{L}}\int e^{\mathrm{R}t/\mathrm{L}}\,\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{R}}e^{\mathrm{R}t/\mathrm{L}}$, d'où

$$\mathrm{I}(t)=\alpha e^{-\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{L}}t}+\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{R}},\qquad \alpha\in\mathbb{R},\qquad \text{et}\qquad \mathrm{I}(t)\xrightarrow[t\to+\infty]{}\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{R}}.$$

Exercice 1.18 («Les experts - Toulon»)

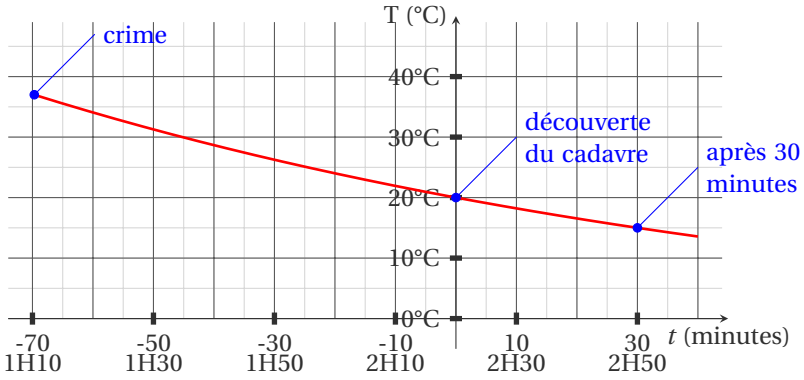
Le corps de la victime a été trouvé sur le lieu du crime à 2H20 de nuit. Après une demi-heure la température du corps est de 15°C. Quand a eu lieu l'homicide si à l'heure de la découverte la température du corps est de 20°C et si la température externe est de −5°C ?

Correction

Comme dans l'exercice de la tasse de café, la loi de Newton $\mathrm{T}'(t)=\gamma(\mathrm{T}(t)-\mathrm{T}_{\mathrm{ext}})$ (avec $\gamma<0$) donne $\mathrm{T}(t)=\mathrm{T}_{\mathrm{ext}}+(\mathrm{T}_0-\mathrm{T}_{\mathrm{ext}})e^{\gamma t}$, $\mathrm{T}_0=\mathrm{T}(0)$. Ici $\mathrm{T}_{\mathrm{ext}}=-5$°C, $\mathrm{T}_0=20$°C (température à la découverte, posée en $t=0$) :

$$\mathrm{T}(t)=-5+25e^{\gamma t}.$$

On sait que $15=\mathrm{T}(30)=-5+25e^{30\gamma}$, d'où $\gamma=\dfrac{\ln(4/5)}{30}$. Pour déterminer l'heure du meurtre, on résout $37=-5+25e^{\gamma t}$ (température corporelle normale), soit $t=30\dfrac{\ln(42/25)}{\ln(4/5)}\simeq-69{,}7$ minutes, c'est-à-dire à 1H10 de la nuit.



Exercice 1.19 («Un gâteau presque parfait»)

Un gâteau est sorti du four à 17H00 quand il est brûlant (100°C). Après 10 minutes sa température est de 80°C et de 65°C à 17H20. Déterminer la température de la cuisine.

Correction
Même loi de Newton que pour les exercices précédents : $T(t) = T_{ext} + (T_0 - T_{ext})e^{\gamma t}$, mais ici T_{ext} est inconnue (au lieu de γ). Avec $T(0) = 100$, $T(10) = 80$, $T(20) = 65$, on doit résoudre le système en γ, D, T_{ext} ($D = 100 - T_{ext}$) :

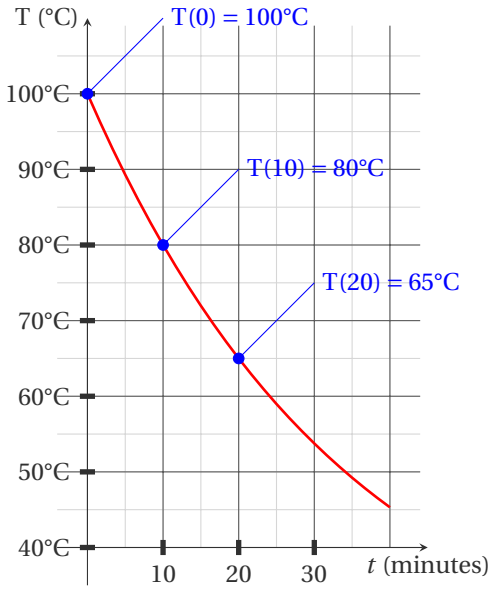
$$\begin{cases} 100 &= T_{ext} + D, \\ 80 &= T_{ext} + De^{10\gamma}, \\ 65 &= T_{ext} + De^{20\gamma}. \end{cases}$$

La première équation donne $D = 100 - T_{ext}$; la deuxième et la troisième donnent $e^{10\gamma} = \dfrac{80 - T_{ext}}{100 - T_{ext}}$ et $e^{20\gamma} = \dfrac{65 - T_{ext}}{100 - T_{ext}}$, d'où

$$\frac{80 - T_{ext}}{100 - T_{ext}} = \frac{e^{20\gamma}}{e^{10\gamma}} = \frac{65 - T_{ext}}{80 - T_{ext}},$$

soit $(80 - T_{ext})^2 = (65 - T_{ext})(100 - T_{ext})$, ce qui donne $T_{ext} = \dfrac{65 \times 100 - 80^2}{5} = 20$. La cuisine est donc à 20°C, et plus généralement

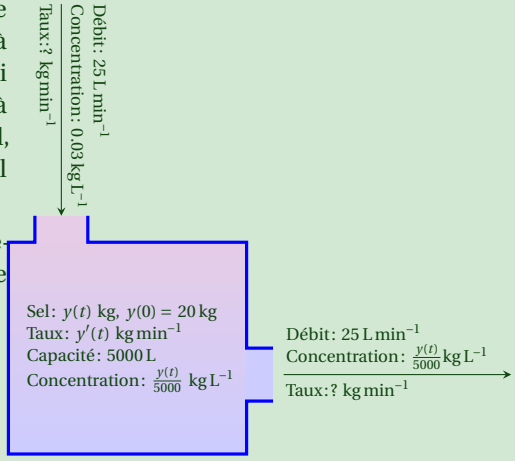
$$T(t) = 20 + 80e^{\frac{\ln(3/4)}{10} t}.$$



On considère un réservoir de capacité 5000 L rempli d'une solution sel/eau parfaitement mélangée contenant 20 kg de sel. Un mélange qui contient 0.03 kg de sel par litre d'eau entre dans le réservoir à un débit de 25 L min^{-1}. La solution est maintenue bien mélangés. Si $y(t)$ désigne la quantité (en kilos) de sel dissoute dans le réservoir à l'instant t, $y'(t)$ représente le taux de variation de la quantité de sel, *i.e.* la différence entre le taux auquel le sel entre et le taux auquel il en sort.

Exercice 1.20

1. Après avoir calculé les taux auxquels le sel entre et sort du réservoir, montrer que cette situation est décrite par le problème de Cauchy
$$\begin{cases} y'(t) = 0.75 - \frac{y(t)}{200}, \\ y(0) = 20. \end{cases}$$
2. Calculer l'unique solutions de ce problème.
3. Combien de sel reste dans le réservoir après une demi-heure ?



Correction

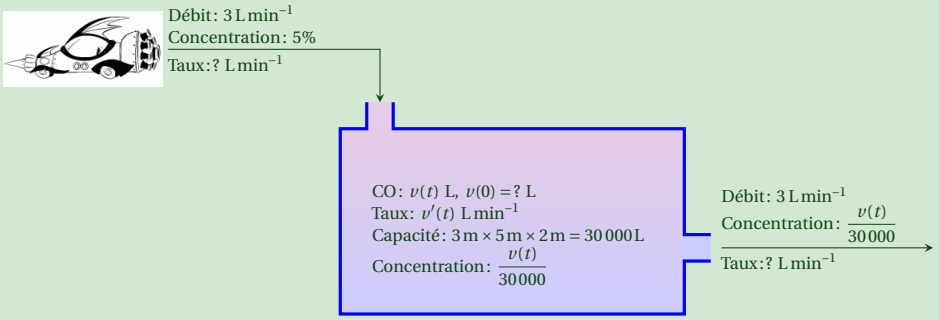
1. Taux d'entrée : $(0.03\,\text{kg})(25\,\text{L min}^{-1}) = 0.75\,\text{kg min}^{-1}$. Le réservoir contenant constamment 5000 L, la concentration est $y(t)/5000$, donc le taux de sortie est $\frac{y(t)}{5000} \times 25\,\text{L min}^{-1} = \frac{y(t)}{200}\,\text{kg min}^{-1}$, d'où $y'(t) = 0.75 - \frac{y(t)}{200}$.
2. EDO linéaire avec $a = 1$, $b = 1/200$, $g = 0.75$: $A(t) = \frac{t}{200}$, $B(t) = 0.75 \int e^{t/200}\,dt = 150e^{t/200}$, d'où $y(t) = Ee^{-t/200} + 150$. La CI $20 = E + 150$ donne $E = -130$, soit $y(t) = 150 - 130e^{-t/200}$.
3. $y(30) = 150 - 130e^{-3/20} \simeq 38.1\,\text{kg}$.

Exercice 1.21
L'air d'un garage de 3 m × 5 m × 2 m est initialement chargée de 0.001% de monoxyde de carbone (CO). À l'instant $t = 0$, on fait tourner un moteur et des fumées toxiques contenant 5% de CO se dégagent de la pièce à raison de

© 2024-2027 G. Faccanoni

3 litres par minute. L'air de la pièce est éliminée à la même vitesse de $3\,\mathrm{L\,min^{-1}}$. On note $v(t)$ le volume de CO présent dans la pièce au temps t, et on suppose que le mélange se fait instantanément (même type de modèle de mélange que l'exercice du réservoir).

1. Montrer que cette situation est décrite par le problème de Cauchy
$$\begin{cases} v'(t) = 0.15 - \frac{v(t)}{10000}, \\ v(0) = 0.3. \end{cases}$$
2. Déterminer $v(t)$, et sa valeur limite lorsque $t \to +\infty$.
3. Le seuil critique pour la santé est de 0.015% de CO. Après combien de temps ce taux est-il atteint ?



Correction

1. Taux de CO produit : $0.05 \times 3\,\mathrm{L\,min^{-1}} = 0.15\,\mathrm{L\,min^{-1}}$. Taux de CO évacué (concentration $v(t)/30000$, débit $3\,\mathrm{L\,min^{-1}}$) : $\frac{v(t)}{10000}\,\mathrm{L\,min^{-1}}$, d'où l'EDO. À $t = 0$: $v(0) = 0.001\% \times 30\,000\,\mathrm{L} = 0.3\,\mathrm{L}$.
2. Même type d'EDO linéaire que l'exercice du réservoir : avec $a = 1$, $b = 1/10000$, $g = 0.15$, on obtient $v(t) = 1500 - (1500 - 0.3)e^{-t/10000} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 1500$.
3. $0.00015 \times 30000 = 4.5 = 1500 - (1500 - 0.3)e^{-t/10000}$ donne $t = 10000 \ln\left(\frac{1500 - 0.3}{1500 - 4.5}\right) \simeq 28.04\,\mathrm{min}$.

Exercice 1.22 (Un escargot sur un élastique)
Un escargot avance d'un mètre par jour sur un élastique d'un kilomètre de long. Mais l'élastique s'étire d'un kilomètre par jour. L'escargot arrivera-t-elle au bout de l'élastique ?
Source : http://allken-bernard.org/pierre/weblog/?p=209

Correction
On note $\mathrm{L}(t)$ la longueur de l'élastique à l'instant t et $\ell(t)$ la distance parcourue par l'escargot (une unité de temps = un jour, longueurs en mètres). On a $\mathrm{L}(0) = 1000$, $\ell(0) = 0$, et il s'agit de voir si $\ell(t) = \mathrm{L}(t)$ pour un certain t.

Pour tout $t \geq 0$, $\mathrm{L}(t) = 1000t + 1000$, et on définit $y(t) = \ell(t)/\mathrm{L}(t)$ la fraction de l'élastique parcourue. La vitesse ℓ' de l'escargot par rapport à l'extrémité fixe est la somme de la vitesse propre (1 m/jour) et de la vitesse du point de l'élastique où il se trouve (proportionnelle à son abscisse) :
$$\ell'(t) = 1 + y(t)\mathrm{L}'(t),$$
d'où
$$y'(t) = \frac{\ell'(t)}{\mathrm{L}(t)} - y(t)\frac{\mathrm{L}'(t)}{\mathrm{L}(t)} = \frac{1}{\mathrm{L}(t)}.$$
Puisque $y(0) = 0$:
$$y(t) = \int_0^t \frac{1}{\mathrm{L}(\tau)}\mathrm{d}\tau = \frac{1}{1000}\ln(1+t), \qquad \ell(t) = y(t)\mathrm{L}(t) = (1+t)\ln(1+t).$$
L'escargot touchera l'extrémité mobile lorsque $\ell(t) = \mathrm{L}(t)$, c'est-à-dire à $t_f = e^{1000} - 1 \simeq 1.97 \times 10^{434}$ jours $\simeq 5.4 \times 10^{431}$ années (environ 3.9×10^{421} fois l'âge de l'univers).

En étudiant $d(t) = \mathrm{L}(t) - \ell(t)$, on trouve que cette distance est maximale[2] en $t_0 = e^{999} - 1$; après cet instant l'escargot se rapproche de l'extrémité pour l'atteindre en $t_f = e^{1000} - 1$. En t_0, l'escargot a déjà parcouru 99,9% de l'élastique mais n'a jamais été aussi loin de son but !

2. $d'(t) = 999 - \ln(1+t)$

Exercice 1.23
Trouver la solution des problèmes de CAUCHY suivants :

1. $\begin{cases} y'(t) + \frac{y(t)}{\tan(t)} = 0, \quad t \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[\\ y(1) = \frac{\pi}{4} \end{cases}$

2. $\begin{cases} y'(t) + \frac{y(t)}{\tan(t)} = 2\cos(t), \quad t \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[\\ y(1) = \frac{\pi}{4} \end{cases}$

Correction

(1) EDO linéaire homogène avec $a = 1$, $b(t) = \frac{1}{\tan(t)}$, continue et strictement positive sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$: $\mathrm{A}(t) = \int \frac{\cos t}{\sin t}\,\mathrm{d}t = \ln(\sin t)$, d'où la solution générale $y_{\mathrm{H}}(t) = \kappa e^{-\ln(\sin t)} = \dfrac{\kappa}{\sin t}$, $\kappa \in \mathbb{R}$. La CI $y(1) = \pi/4$ donne l'unique solution

$$y(t) = \frac{\pi \sin(1)}{4\sin(t)}.$$

(2) On réutilise y_{H} ci-dessus. On remarque que $y_{\mathrm{P}}(t) = \sin(t)$ est solution particulière puisque $y'_{\mathrm{P}}(t) + \frac{y_{\mathrm{P}}(t)}{\tan(t)} = \cos(t) + \frac{\sin(t)}{\tan(t)} = 2\cos(t)$ (sinon, on calcule $\mathrm{B}(t) = 2\int \cos(t) e^{\ln(\sin t)}\,\mathrm{d}t = \sin^2(t)$, d'où $y_{\mathrm{P}}(t) = \mathrm{B}(t)e^{-\mathrm{A}(t)} = \sin(t)$, même résultat). La solution générale est donc $y(t) = \frac{\kappa}{\sin(t)} + \sin(t)$, et la CI $y(1) = \pi/4$ donne

$$y(t) = \left(\frac{\pi}{4} - \sin(1)\right)\frac{\sin(1)}{\sin(t)} + \sin(t).$$

Exercice 1.24
Déterminer la solution générale des EDO suivantes après avoir indiqué sur quel(s) intervalle(s) elle est définie :

1. $3y'(t) + 12y(t) = 4$
2. $y'(t) + y(t) = e^{3t}$
3. $y'(t) + \tan(t)y(t) = \dfrac{1}{\cos(t)}$
4. $y'(t) + \dfrac{t+2}{t}y(t) = \dfrac{e^t}{t^2}$
5. $y'(t) + y(t) = \dfrac{1 - e^{-2t}}{e^t + e^{-t}}$

Correction

(a) Définie sur $\mathbb{R}$. $a = 3$, $b = 12$, $g = 4$: $\mathrm{A}(t) = 4t$, $\mathrm{B}(t) = \int \frac{4}{3}e^{4t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}e^{4t}$, d'où

$$y(t) = \kappa e^{-4t} + \frac{1}{3}, \qquad \kappa \in \mathbb{R}.$$

(b) Définie sur $\mathbb{R}$. $a = 1$, $b = 1$, $g = e^{3t}$: $\mathrm{A}(t) = t$, $\mathrm{B}(t) = \int e^{4t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}e^{4t}$, d'où

$$y(t) = \kappa e^{-t} + \frac{1}{4}e^{3t}, \qquad \kappa \in \mathbb{R}.$$

(c) $b(t) = \tan(t)$ et $g(t) = 1/\cos(t)$ sont continues sur chaque intervalle $\left]-\frac{\pi}{2} + \kappa\pi; \frac{\pi}{2} + \kappa\pi\right[$, $\kappa \in \mathbb{Z}$. On a $\mathrm{A}(t) = \int \tan(t)\,\mathrm{d}t = -\ln|\cos(t)|$, $\mathrm{B}(t) = \int \frac{1}{\cos^2(t)}\,\mathrm{d}t = \tan(t)$, d'où sur chacun de ces intervalles

$$y(t) = \mathrm{C}_\kappa \cos(t) + \sin(t), \qquad \mathrm{C}_\kappa \in \mathbb{R}$$

(C_κ désignant une constante différente sur chaque intervalle).

(d) $b(t) = \frac{t+2}{t}$ et $g(t) = \frac{e^t}{t^2}$ sont continues sur $\mathbb{R}^*$, donc on travaille séparément sur $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$. Équation homogène : $\frac{y'}{y} = -1 - \frac{2}{t} \rightsquigarrow \ln|y| = -t - 2\ln|t| + \mathrm{C} \rightsquigarrow y_{\mathrm{H}}(t) = \kappa\frac{e^{-t}}{t^2}$. On vérifie que $y_{\mathrm{P}}(t) = \frac{e^{-t}}{2t^2}$ est solution particulière. D'où, avec une constante κ_1 sur $]-\infty;0[$ et κ_2 sur $]0;+\infty[$:

$$y(t) = \frac{e^t}{2t^2} + \kappa_{1,2}\frac{e^{-t}}{t^2}.$$

(e) Définie sur $\mathbb{R}$. Équation homogène $y' + y = 0$: $y_{\mathrm{H}}(t) = \kappa e^{-t}$. Pour la solution particulière, variation de la constante $y_{\mathrm{P}}(t) = \mathrm{K}(t)e^{-t}$: en injectant dans l'EDO, $\mathrm{K}'(t) = \dfrac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} = \tanh(t)$, d'où $\mathrm{K}(t) = \ln(\cosh t) + \mathrm{C}$ (on choisit $\mathrm{C} = \ln 2$, soit $\mathrm{K}(t) = \ln(e^t + e^{-t}) - \ln 2 + \ln 2$), donc $y_{\mathrm{P}}(t) = e^{-t}\ln(e^t + e^{-t})$. La solution générale est

$$y(t) = e^{-t}\ln(e^t + e^{-t}) + \kappa e^{-t}, \qquad \kappa \in \mathbb{R}.$$

© 2024-2027 G. FACCANONI

Exercice 1.25
Déterminer la solution générale de l'EDO $t\,y'(t)+(3t+1)\,y(t)=e^{-3t}$ après avoir indiqué sur quel(s) intervalle(s) la solution est définie.

Correction
L'EDO normalisée $y'(t)+\left(3+\frac{1}{t}\right)y(t)=\frac{e^{-3t}}{t}$ n'est définie que pour $t\neq 0$; on la résout donc séparément sur $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$. Dans les deux cas, $\mathrm{A}(t)=3t+\ln|t|$ et $y_{\mathrm{P}}(t)=e^{-3t}$ est une solution particulière évidente (on vérifie $t\,y_{\mathrm{P}}'+(3t+1)\,y_{\mathrm{P}}=t(-3e^{-3t})+(3t+1)e^{-3t}=e^{-3t}$). D'où la solution générale sur chaque intervalle :

$$y(t)=\left(\frac{\kappa_i}{t}+1\right)e^{-3t},\qquad \kappa_i\in\mathbb{R}\ (i=1\text{ sur }]-\infty;0[,\ i=2\text{ sur }]0;+\infty[).$$

Recollement en $t=0$. On a $\lim_{t\to 0^{\pm}} y(t)=\pm\infty\cdot\operatorname{sgn}(\kappa_i)$ sauf si $\kappa_i=0$: la limite n'est finie que si $\kappa_1=\kappa_2=0$. La seule candidate à un prolongement sur $\mathbb{R}$ est donc $\varphi(t)=e^{-3t}$, qui est bien $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ et vérifie l'EDO en $t=0$ (les deux membres valent 1). C'est donc l'unique solution sur $\mathbb{R}$; sur tout intervalle ne contenant pas 0, il existe une infinité de solutions (un paramètre libre κ_i).

Exercice 1.26
Déterminer la solution générale de l'EDO $2t(t+1)\,y'(t)+(t+1)\,y(t)=1$ après avoir indiqué sur quel(s) intervalle(s) la solution est définie.

Correction
L'EDO normalisée $y'(t)+\frac{1}{2t}\,y(t)=\frac{1}{2t(t+1)}$ n'est définie que pour $t\notin\{-1,0\}$; on la résout sur les trois intervalles $]-\infty;-1[$, $]-1;0[$ et $]0;+\infty[$. L'équation homogène $y'+\frac{1}{2t}y=0$ donne dans tous les cas $y_{\mathrm{H}}(t)=\kappa/\sqrt{|t|}$. Une solution particulière s'obtient par variation de la constante (méthode détaillée en cours) ; on trouve, avec une constante κ_i propre à chaque intervalle :

$$y(t)=\begin{cases}\dfrac{\kappa_1}{\sqrt{-t}}+\dfrac{1}{2\sqrt{-t}}\ln\left(\dfrac{\sqrt{-t}+1}{\sqrt{-t}-1}\right) & \text{si } t<-1,\\[2ex] \dfrac{\kappa_2}{\sqrt{-t}}+\dfrac{1}{2\sqrt{-t}}\ln\left(\dfrac{1+\sqrt{-t}}{1-\sqrt{-t}}\right) & \text{si } -1<t<0,\\[2ex] \dfrac{\kappa_3}{\sqrt{t}}+\dfrac{\arctan(\sqrt{t})}{\sqrt{t}} & \text{si } t>0.\end{cases}$$

Recollement. En $t=-1$: la solution sur $]-\infty;-1[$ n'est jamais bornée ($\lim_{t\to-1^-}y(t)=\pm\infty$ quel que soit κ_1), donc *aucun* prolongement par continuité n'est possible en -1, quel que soit κ_1,κ_2. En $t=0$: on a $\lim_{t\to 0^{\mp}}y(t)=\frac{\kappa_{2,3}}{\sqrt{\mp t}}+1$, qui n'est finie que si $\kappa_2=\kappa_3=0$; on pose alors $\varphi(0)=1$, et on vérifie que φ ainsi prolongée est dérivable en 0 (avec $\varphi'(0)=-\frac{1}{3}$).
Conclusion : l'EDO admet une infinité de solutions sur chacun des trois intervalles ouverts ; elle admet une unique solution sur $]-1;+\infty[$ (en prenant $\kappa_2=\kappa_3=0$) ; elle n'admet aucune solution définie sur tout $\mathbb{R}$ (à cause du raccord impossible en -1).

Exercice 1.27
1. Déterminer la solution générale de l'EDO $x^2y'(x)-y(x)=x^2-x+1$ après avoir indiqué sur quels intervalles elle est définie.
2. Vérifier que les solutions ne sont pas prolongeables par continuité à gauche en 0.
3. Vérifier que les solutions sont prolongeables par continuité à droite en 0 et en étudier la dérivabilité à droite en ce point.
4. Montrer que, quelle que soit la constante d'intégration, le graphe de la solution admet une asymptote verticale ainsi qu'une asymptote parallèle à la droite d'équation $y=x$.

Correction
Équation linéaire avec $a(x)=x^2$, $b(x)=-1$, $g(x)=x^2-x+1$; a s'annulant en 0, on résout sur $\mathrm{I_L}=]-\infty;0[$ et $\mathrm{I_R}=]0;+\infty[$.

1. Sur chacun de ces intervalles, $\mathrm{A}(x)=-\int\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{x}$ et, en posant $u=1/x$, on calcule $\mathrm{B}(x)=\int\frac{x^2-x+1}{x^2}e^{1/x}\,\mathrm{d}x=(x-1)e^{1/x}$ (par IPP après le changement de variable). D'où

$$y_{\mathrm{L}}(x)=\mathrm{C_L}e^{-1/x}+x-1\ (x<0),\qquad y_{\mathrm{R}}(x)=\mathrm{C_R}e^{-1/x}+x-1\ (x>0).$$

2. Si $C_L \neq 0$, $\lim_{x\to 0^-} y_L(x) = \mathrm{sgn}(C_L)\times\infty$: pas de prolongement continu en 0^-. (Le cas particulier $C_L = 0$ donne $y_L(x) = x-1$, qui se prolonge continûment — et même $\mathscr{C}^1$, en se recollant avec y_R — en 0 ; c'est le seul cas où une solution de l'EDO est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.)
3. $\lim_{x\to 0^+} y_R(x) = -1$: prolongement continu en posant $y_R(0) = -1$. On calcule $y_R'(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{C_R e^{-1/x}+x}{x} = 1$ (car $e^{-1/x}/x \to 0$), et $\lim_{x\to 0^+} y_R'(x) = 1 = y_R'(0)$: y_R est donc $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^+)$.
4. $x = 0$ est asymptote verticale pour y_L. Pour y_R : $\lim_{x\to+\infty} \frac{y_R(x)}{x} = 1$ et $\lim_{x\to+\infty}\big(y_R(x)-x\big) = C_R-1$, donc $y = x+C_R-1$ est asymptote oblique.

1.6.4. Systèmes linéaires à coefficients constants

Exercice 1.28 (Exponentielle de matrice et formule de Duhamel)
Pour $\mathbb{A}\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on définit l'*exponentielle de matrice* par la série

$$e^{t\mathbb{A}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k\mathbb{A}^k}{k!}, \qquad t\in\mathbb{R},$$

qui converge pour toute matrice $\mathbb{A}$ et tout t. On admet que $t\mapsto e^{t\mathbb{A}}$ est dérivable, de dérivée

$$\frac{d}{dt}e^{t\mathbb{A}} = \mathbb{A}e^{t\mathbb{A}} = e^{t\mathbb{A}}\mathbb{A}$$

(la commutation $\mathbb{A}e^{t\mathbb{A}} = e^{t\mathbb{A}}\mathbb{A}$ vient du fait que les puissances de $\mathbb{A}$ commutent toutes entre elles).
On considère le système différentiel linéaire à coefficients *constants*

$$\mathbf{Y}'(t) = \mathbb{A}\mathbf{Y}(t) + \mathbb{B}(t), \qquad \mathbf{Y}(0) = \mathbf{Y}_0,$$

où $\mathbf{Y}$: $[0,T]\to\mathbb{R}^n$, $\mathbb{A}\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est constante et $\mathbb{B}$: $[0,T]\to\mathbb{R}^n$ est continue : c'est l'analogue vectoriel de l'EDO linéaire scalaire $ay'+by = g$ vue au CM, avec ici $a = 1$.

1. **Dérivation de la formule.** On pose $Z(t) = e^{-t\mathbb{A}}\mathbf{Y}(t)$.
   (a) En dérivant ce produit (matriciel) et en utilisant le fait admis ci-dessus, montrer que
   $$\mathbf{Z}'(t) = e^{-t\mathbb{A}}\mathbb{B}(t).$$
   (b) En intégrant entre 0 et t, puis en multipliant par $e^{t\mathbb{A}}$, montrer que
   $$\mathbf{Y}(t) = e^{t\mathbb{A}}\mathbf{Y}_0 + \int_0^t e^{(t-s)\mathbb{A}}\mathbb{B}(s)\,ds.$$
   C'est la *formule de Duhamel* : on y reconnaît exactement la formule du CM $y(x) = Ce^{-A(x)} + B(x)e^{-A(x)}$, où la constante, le facteur $1/a$ et l'exponentielle scalaire sont remplacés par leurs analogues matriciels.
2. **Application.** On considère le système
   $$\begin{cases} y_1'(t) = -y_1(t), \\ y_2'(t) = y_1(t) - 2y_2(t) + 1, \end{cases} \qquad y_1(0) = 1,\ y_2(0) = 0.$$
   (a) Écrire ce système sous la forme $\mathbf{Y}' = \mathbb{A}\mathbf{Y}+\mathbb{B}$ en précisant $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$.
   (b) Résoudre la première équation (EDO linéaire scalaire déjà vue au CM) pour obtenir $y_1(t)$.
   (c) En substituant $y_1(t)$ dans la seconde équation, on obtient une EDO linéaire scalaire en y_2 seul. La résoudre pour obtenir $y_2(t)$.

Correction
1. (a) $\mathbf{Z}'(t) = \frac{d}{dt}\big(e^{-t\mathbb{A}}\big)\mathbf{Y}(t) + e^{-t\mathbb{A}}\mathbf{Y}'(t) = -\mathbb{A}e^{-t\mathbb{A}}\mathbf{Y}(t) + e^{-t\mathbb{A}}\big(\mathbb{A}\mathbf{Y}(t)+\mathbb{B}(t)\big)$. Comme $\mathbb{A}$ et $e^{-t\mathbb{A}}$ commutent, $-\mathbb{A}e^{-t\mathbb{A}}\mathbf{Y}(t) + e^{-t\mathbb{A}}\mathbb{A}\mathbf{Y}(t) = 0$, d'où $\mathbf{Z}'(t) = e^{-t\mathbb{A}}\mathbb{B}(t)$.
   (b) En intégrant : $\mathbf{Z}(t) - \mathbf{Z}(0) = \int_0^t e^{-s\mathbb{A}}\mathbb{B}(s)\,ds$, soit $e^{-t\mathbb{A}}\mathbf{Y}(t) - \mathbf{Y}_0 = \int_0^t e^{-s\mathbb{A}}\mathbb{B}(s)\,ds$. En multipliant par $e^{t\mathbb{A}}$ (et

 © 2024-2027 G. Faccanoni

$e^{t\mathbb{A}}e^{-s\mathbb{A}} = e^{(t-s)\mathbb{A}}$ car $\mathbb{A}$ commute avec elle-même) :

$$\mathbf{Y}(t) = e^{t\mathbb{A}}\mathbf{Y}_0 + \int_0^t e^{(t-s)\mathbb{A}}\mathbb{B}(s)\,\mathrm{d}s.$$

2. (a) $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathbb{B}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   (b) $y_1' = -y_1$, $y_1(0) = 1 \Rightarrow y_1(t) = e^{-t}$.

   (c) $y_2'(t) + 2y_2(t) = e^{-t} + 1$: EDO linéaire avec $a = 1$, $b = 2$, $g(t) = e^{-t} + 1$.

$$\mathrm{A}(t) = \int 2\,\mathrm{d}t = 2t, \qquad \mathrm{B}(t) = \int (e^{-t}+1)e^{2t}\,\mathrm{d}t = \int (e^t + e^{2t})\,\mathrm{d}t = e^t + \frac{1}{2}e^{2t}.$$

D'où $y_2(t) = \left(\mathrm{C} + e^t + \frac{1}{2}e^{2t}\right)e^{-2t} = \mathrm{C}e^{-2t} + e^{-t} + \frac{1}{2}$. Avec $y_2(0) = 0$: $\mathrm{C} + \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow \mathrm{C} = -\frac{3}{2}$, d'où

$$y_2(t) = -\frac{3}{2}e^{-2t} + e^{-t} + \frac{1}{2}.$$

Vérification avec `sympy`**.** On retrouve ce résultat en calculant $e^{t\mathbb{A}}$ de deux façons : directement, et via la diagonalisation $\mathbb{A} = \mathbb{P}\mathbb{D}\mathbb{P}^{-1}$ (les valeurs propres de $\mathbb{A}$ triangulaire sont ses coefficients diagonaux -1 et -2).

```
import sympy as sp

t, s = sp.symbols('t s', real=True)

A  = sp.Matrix([[-1, 0], [1, -2]])
B  = sp.Matrix([0, 1])
Y0 = sp.Matrix([1, 0])

# --- Calcul direct de exp(tA) ---
expA_direct = sp.simplify((t*A).exp())
print(r"\noindent\textbf{Calcul direct :} \[e^{tA} = " +
 ↪  sp.latex(expA_direct) + r"\]")

# --- Calcul via valeurs propres / vecteurs propres : A = P D P^{-1} ---
eigendata = A.eigenvects()
eigenvals, eigenvecs = [], []
for val, mult, vecs in eigendata:
    for v in vecs:
        eigenvals.append(val); eigenvecs.append(v)
P = sp.Matrix.hstack(*eigenvecs)
D = sp.diag(*eigenvals)
expA_eigen = sp.simplify(P * sp.diag(*[sp.exp(t*v) for v in eigenvals]) *
 ↪  P.inv())

print(r"\noindent\textbf{Calcul après diagonalisation :}")
print(r"\[ P = " + sp.latex(P) + r",\qquad D = " + sp.latex(D) + r" \]")
print(r"\[ e^{tA} = Pe^{tD}P^{-1} = " + sp.latex(expA_eigen) + r" \]")

diff = sp.simplify(expA_direct - expA_eigen)
print(r"\noindent Les deux méthodes coïncident, la différence vaut $" +
 ↪  sp.latex(diff) + r"$.")

# --- Formule de Duhamel : Y(t) = e^{tA} Y0 + int_0^t e^{(t-s)A} B ds ---
integrand = sp.simplify(expA_eigen.subs(t, t - s) * B)
integral  = sp.Matrix([sp.integrate(integrand[i], (s, 0, t)) for i in
 ↪  range(2)])
Y_t = sp.simplify(expA_eigen * Y0 + sp.simplify(integral))
```

```
print(r"\[ Y(t) = e^{tA}Y_0+\int_0^t e^{(t-s)A}B(s)\,ds = " + sp.latex(Y_t) +
 ↪  r" \]")
```

Calcul direct :

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ (e^t - 1)\,e^{-2t} & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Calcul après diagonalisation :

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$e^{tA} = P e^{tD} P^{-1} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ (e^t - 1)\,e^{-2t} & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Les deux méthodes coïncident, la différence vaut $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

$$Y(t) = e^{tA}Y_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}B(s)\,ds = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ \frac{1}{2} + e^{-t} - \frac{3e^{-2t}}{2} \end{bmatrix}$$

On retrouve bien $y_1(t) = e^{-t}$ et $y_2(t) = -\frac{3}{2}e^{-2t} + e^{-t} + \frac{1}{2}$ trouvés à la question précédente.

1.6.5. EDO de Bernoulli

Exercice 1.29 (Dérivation de la formule et application)
On appelle *équation de Bernoulli* toute EDO de la forme

$$u(x)\,y'(x) + v(x)\,y(x) = w(x)\,(y(x))^{\alpha}, \qquad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0;1\},$$

où u, v, w sont des fonctions continues sur I, avec $u \neq 0$ sur $J \subset I$.

1. **Réduction à une EDO linéaire.** On pose $z(x) = (y(x))^{1-\alpha}$.
   (a) Montrer que $z'(x) = (1-\alpha)(y(x))^{-\alpha}y'(x)$.
   (b) Multiplier les deux membres de l'EDO par $(1-\alpha)(y(x))^{-\alpha}$ et montrer que z vérifie l'EDO linéaire

$$u(x)z'(x) + \underbrace{(1-\alpha)\,v(x)}_{b(x)}\,z(x) = \underbrace{(1-\alpha)\,w(x)}_{g(x)}.$$

   (c) En appliquant la formule du CM (EDO linéaires, primitives A et B), écrire $z(x)$ puis conclure que

$$y(x) = \left[(C + B(x))\,e^{-A(x)}\right]^{1/(1-\alpha)},$$

   avec A primitive de $(1-\alpha)\,v/u$ et B primitive de $(1-\alpha)(w/u)e^{A}$.
2. **Application.** Résoudre sur $\mathbb{R}$:

$$y'(x) + \frac{1}{2}y(x) = \frac{x-1}{2}\,(y(x))^3.$$

Correction

1. (a) Dérivation en chaîne : $z' = (1-\alpha)\,y^{-\alpha}y'$. ✓
   (b) On multiplie l'EDO par $(1-\alpha)\,y^{-\alpha}$:

$$u\underbrace{(1-\alpha)\,y^{-\alpha}y'}_{=z'} + v\underbrace{(1-\alpha)\,y^{1-\alpha}}_{=(1-\alpha)z} = (1-\alpha)\,w,$$

   soit $uz' + (1-\alpha)\,vz = (1-\alpha)\,w$: c'est bien une EDO linéaire en z.
   (c) On applique la formule du CM avec $a = u$, $b = (1-\alpha)\,v$, $g = (1-\alpha)\,w$, d'où $z(x) = (C + B(x))\,e^{-A(x)}$ et $y(x) = [z(x)]^{1/(1-\alpha)}$.

© 2024-2027 G. Faccanoni

2. On identifie $\alpha = 3$, $u = 1$, $v = \frac{1}{2}$, $w = \frac{x-1}{2}$.

$$\begin{aligned} A(x) &= (1-3)\int \frac{1/2}{1}\,dx = -x, \\ B(x) &= (1-3)\int \frac{(x-1)/2}{1} e^{-x}\,dx = \int (1-x)e^{-x}\,dx = xe^{-x}, \\ z(x) &= (C + xe^{-x})e^{x} = Ce^{x} + x. \end{aligned}$$

La solution générale est $y(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x + Ce^{x}}}$, définie si $x + Ce^{x} > 0$.

Exercice 1.30
Déterminer la solution générale des EDO suivantes après avoir indiqué sur quelle intervalle la solution est définie :

1. $y'(t) - \frac{1}{t}y(t) = (y(t))^3 \sin(t)$
2. $y'(t) + ty(t) = t^3 (y(t))^2$

Correction

(a) L'EDO $y'(t) - \frac{1}{t}y(t) = (y(t))^3 \sin(t)$ est une équation différentielle de BERNOULLI. Comme $u(t) = 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, on cherche sa solution générale sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$.

- $A(t) = (1-\alpha)\displaystyle\int \frac{v(t)}{u(t)}\,dt = \int \frac{1}{t}\,dt = 2\ln|t|$,
- $B(t) = (1-\alpha)\displaystyle\int \frac{w(t)}{u(t)} e^{A(t)}\,dt = -2\int t^2 \sin(t)\,dt = 2t^2\cos(t) - 4t\sin(t) - 4\cos(t)$,
- $z(t) = \big(C_{1,2} + B(t)\big)\, e^{-A(t)} = \big(C_{1,2} + 2t^2\cos(t) - 4t\sin(t) - 4\cos(t)\big)\, e^{-2\ln|t|} = \frac{C_{1,2} + 2t^2\cos(t) - 4t\sin(t) - 4\cos(t)}{t^2}$,
- $y(t) = (z(t))^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{z(t)}}$

et on conclut que la solution générale de l'EDO de BERNOULLI assignée est

$$y : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$$
$$t \mapsto \begin{cases} \frac{t}{\sqrt{C_1 + 2t^2\cos(t) - 4t\sin(t) - 4\cos(t)}} & \text{si } t < 0 \qquad \text{avec } C_1 \in \mathbb{R}^+, \\ \frac{-t}{\sqrt{C_2 + 2t^2\cos(t) - 4t\sin(t) - 4\cos(t)}} & \text{si } t > 0 \qquad \text{avec } C_2 \in \mathbb{R}^+, \end{cases}$$

(b) L'EDO $y'(t) + ty(t) = t^3 (y(t))^2$ est une équation différentielle de BERNOULLI. Comme $u(t) = 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, on cherche sa solution générale sur $\mathbb{R}$.

- *Solution nulle :* la fonction $y(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ est solution de l'EDO donnée. Toute autre solution ne s'annule jamais. Supposons dans la suite que $y(t) \neq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
- *Réduction à une EDO linéaire du premier ordre :* si on pose $z = 1/y$, *i.e.* $y = 1/z$, elle se réécrit

$$z'(t) - tz(t) = -t^3.$$

Notons que $z = 1/y$ impose $z(t) \neq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
On a $a(t) = 1$, $b(t) = -t$ et $g(t) = -t^3$, tous définis sur $\mathbb{R}$. On pose

- $A(t) = \int \frac{b(t)}{a(t)}\,dt = \int -t\,dt = -t^2/2$,
- $B(t) = \int \frac{g(t)}{a(t)} e^{A(t)}\,dt = \int -t^3 e^{-t^2/2}\,dt = -2\int xe^{x}\,dx = -2(x-1)e^{x} = (2+t^2)e^{-t^2/2}$.

La solution générale est donc

$$z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$t \mapsto Ce^{-A(t)} + B(t)e^{-A(t)} = Ce^{t^2/2} + t^2 + 2 \qquad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

On conclut alors que la solution de l'EDO de Bernoulli donnée s'écrit

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$t \mapsto \frac{1}{Ce^{t^2/2} + t^2 + 2} \qquad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

Exercice 1.31
Calculer la solution générale de chaque EDO en utilisant le changement de variable indiqué (on se contentera de calculs formels sans se préoccuper des ensembles de définition) :

1. $y'(x) = \big(x - y(x)\big)^2 + \big(x - y(x)\big) + 1$ et $u(x) = x - y(x)$;
2. $y'(x) = \big(x + y(x) + 2\big)^2$ et $u(x) = x + y(x) + 2$;
3. $y'(x) = \dfrac{y(x)}{x} + \cos^2\left(\dfrac{y(x)}{x}\right)$ et $u(x) = \dfrac{y(x)}{x}$.

Correction

1. $y(x) = x - u(x)$ donc $y'(x) = 1 - u'(x)$. En remplaçant cela dans l'EDO donnée on trouve $u'(x) = -u^2(x) - u(x)$ qui est à variables séparables : $\int \frac{1}{u(u+1)}\,\mathrm{d}u = \int -1\,\mathrm{d}x$ qu'on réécrit $\int \frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}\,\mathrm{d}u = \int -1\,\mathrm{d}x$ ainsi $\ln \frac{u(x)}{u(x)+1} = -x + c_1$ d'où $u(x) = \frac{c_2 e^{-x}}{1 - c_2 e^{-x}} = \frac{1}{c_3 e^{x} - 1}$ et on conclut $y(x) = x - \frac{1}{c_3 e^{x} - 1}$.
2. $y(x) = u(x) - x - 2$ donc $y'(x) = u'(x) - 1$. En remplaçant cela dans l'EDO donnée on trouve $u'(x) = 1 + u^2(x)$ qui est à variables séparables : $\int \frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \int 1\,\mathrm{d}x$ ainsi $u(x) = \tan(x + c)$ et on conclut $y(x) = -x - 2 + \tan(x + c)$.
3. $y(x) = x u(x)$ donc $y'(x) = u(x) + x u'(x)$. En remplaçant cela dans l'EDO donnée on trouve $u(x) + x u'(x) = u(x) + \cos^2(u(x))$ soit encore $x u'(x) = \cos^2(u(x))$ qui est à variables séparables : $\int \frac{1}{\cos^2(u)}\,\mathrm{d}u = \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ ainsi $\tan(u(x)) = \ln(x)$ d'où $u(x) = \arctan(\ln(x))$ et finalement $y(x) = \arctan(\ln(x)) - x - 2$.

1.6.6. Approximation numérique

Exercice 1.32 (Équation de Matthieu amortie)
Simuler la solution de l'équation de Matthieu amortie pour $t \in [0, 10\pi]$:

$$y''(t) + b y'(t) + a(1 + \varepsilon \cos(t)) y(t) = 0$$

avec $a = 1$, $b = 0{,}1$, $\varepsilon = 1$, $y(0) = 10^{-3}$, $y'(0) = 0$. Tracer $y(t)$, $y'(t)$ et le plan de phase.

Correction
On pose $z_1 = y$ et $z_2 = y'$ pour se ramener au système :

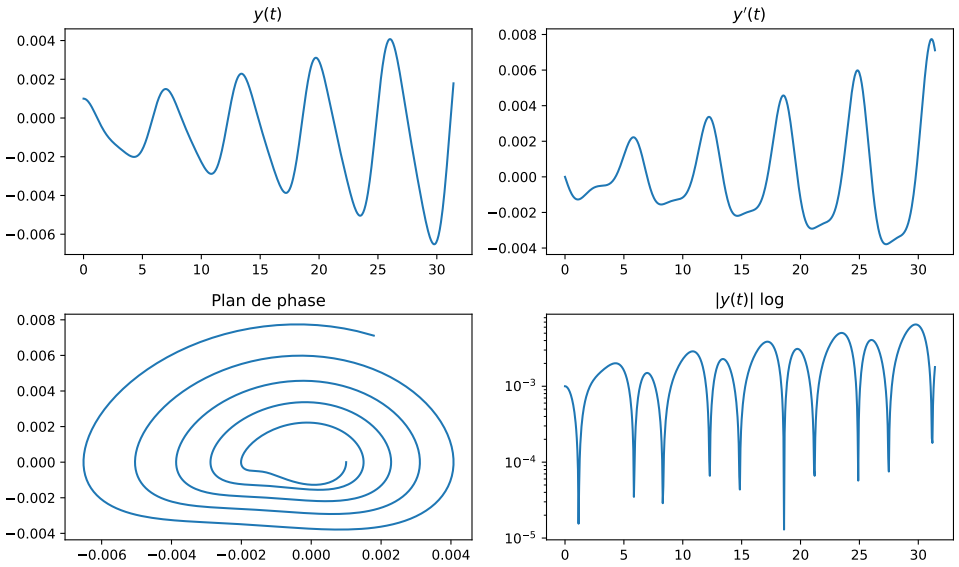
$$\begin{cases} z_1'(t) = z_2(t), \\ z_2'(t) = -b z_2(t) - a(1 + \varepsilon \cos(t)) z_1(t). \end{cases}$$

```
from scipy.integrate import solve_ivp
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

a, b, eps = 1, 0.1, 1
phi = lambda t, zz: [zz[1], -b*zz[1] - a*(1 + eps*np.cos(t))*zz[0]]
sol = solve_ivp(phi, [0, 10*np.pi], [1e-3, 0], max_step=0.05)
t, zz = sol.t, sol.y

fig, axes = plt.subplots(2, 2, figsize=(10, 6))
axes[0,0].plot(t, zz[0]); axes[0,0].set_title(r'$y(t)$')
axes[0,1].plot(t, zz[1]); axes[0,1].set_title(r"$y'(t)$")
axes[1,0].plot(zz[0], zz[1]); axes[1,0].set_title('Plan de phase')
axes[1,1].semilogy(t, np.abs(zz[0])); axes[1,1].set_title(r'$|y(t)|$ log')
plt.tight_layout(); plt.savefig('pendule_force.pdf', bbox_inches='tight')
```


© 2024-2027 G. Faccanoni



Exercice 1.33 (Comparaison EE / EI / CN à la main)
Considérons $y'(t) = -2y(t)$, $t \in [0,1]$, $y(0) = 1$. La solution exacte est $y(t) = e^{-2t}$.

1. Appliquer EE, EI et CN avec N = 4 ($h = 0{,}25$). Compléter le tableau des valeurs.
2. Que se passe-t-il pour EE avec $h = 1$ et $h = 1{,}1$? Donner la condition de stabilité.

Correction
1. On a $\varphi(t, y) = -2y$.
EE: $u_{n+1} = u_n(1-2h) = 0{,}5\,u_n$.
EI: $u_{n+1} + 2hu_{n+1} = u_n$ donne $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+2h} = \dfrac{u_n}{1{,}5}$.
CN: $u_{n+1} = u_n \dfrac{1-h}{1+h} = \dfrac{0{,}75}{1{,}25} u_n = 0{,}6\,u_n$.

n	t_n	$y(t_n) = e^{-2t_n}$	u_n^{EE}	u_n^{EI}	u_n^{CN}
0	0,00	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1	0,25	0,6065	0,5000	0,6667	0,6000
2	0,50	0,3679	0,2500	0,4444	0,3600
3	0,75	0,2231	0,1250	0,2963	0,2160
4	1,00	0,1353	0,0625	0,1975	0,1296

2. Le facteur d'amplification de EE est $\rho = 1 - 2h$.

- $h = 1$: $\rho = -1$, la suite oscille entre ± 1 : limite de stabilité.
- $h = 1{,}1$: $\rho = -1{,}2$, $|\rho| > 1$: instabilité (oscillations divergentes).

Condition de stabilité : $|1 - 2h| < 1$, soit $\boxed{h < 1}$.
EI et CN sont *inconditionnellement stables* : tout $h > 0$ convient.

Définition 1.5 (Convergence et ordre)
Un schéma est *convergent d'ordre* ω si

$$\max_{n=0,\dots,N} |y(t_n) - u_n| = \mathcal{O}(h^\omega) \quad \text{quand } h \to 0.$$

Pour estimer ω numériquement, on calcule l'erreur maximale pour plusieurs valeurs de h, puis on trace ln(erreur) en fonction de $\ln(h)$: la pente de la droite de régression donne ω.

Exercice 1.34 (Implémentation Python et convergence)
Reprendre le problème de Cauchy $y'(t) = 2ty(t)$, $y(0) = 1$, $t \in [0,1]$ (solution exacte e^{t^2}).

1. Pour N = 10, comparer graphiquement les solutions approchées EE, EI, CN et afficher les erreurs maximales.
2. En utilisant la définition ci-dessus, estimer numériquement l'ordre de convergence de chaque schéma (on pourra faire varier N et utiliser `np.polyfit` sur les logarithmes).

Correction

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.optimize import fsolve

t0, T, y0_val = 0, 1, 1
phi       = lambda t, y: 2*t*y
sol_exacte = lambda t: np.exp(t**2)

# --- schémas (bloc autonome) ---
def euler_explicite(phi, tt, y0):
    h = tt[1]-tt[0]; N = len(tt)-1
    uu = np.empty_like(tt); uu[0] = y0
    for n in range(N):
        uu[n+1] = uu[n] + h*phi(tt[n], uu[n])
    return uu

def euler_implicite(phi, tt, y0):
    h = tt[1]-tt[0]; N = len(tt)-1
    uu = np.empty_like(tt); uu[0] = y0
    for n in range(N):
        fct = lambda x, n=n: -x + uu[n] + h*phi(tt[n+1], x)
        uu[n+1] = fsolve(fct, uu[n])[0]
    return uu

def crank_nicolson(phi, tt, y0):
    h = tt[1]-tt[0]; N = len(tt)-1
    uu = np.empty_like(tt); uu[0] = y0
    for n in range(N):
        fct = lambda x, n=n: -x + uu[n] + 0.5*h*(phi(tt[n], uu[n]) +
        ↪  phi(tt[n+1], x))
        uu[n+1] = fsolve(fct, uu[n])[0]
    return uu

# --- Partie 1 : comparaison graphique pour N=10 ---
N  = 10
tt = np.linspace(t0, T, N+1)
yy = sol_exacte(tt)
uu_ee = euler_explicite(phi, tt, y0_val)
uu_ei = euler_implicite(phi, tt, y0_val)
uu_cn = crank_nicolson(phi, tt, y0_val)

print("Partie 1 - erreurs max (N=10) :")
for nom, uu in [("EE", uu_ee), ("EI", uu_ei), ("CN", uu_cn)]:
    print(f"  {nom} : {np.linalg.norm(yy - uu, np.inf):.4e}")

# --- Partie 2 : estimation empirique de l'ordre ---
Ntest, N_base = 8, 8
H = np.empty(Ntest)
```


© 2024-2027 G. Faccanoni

```
err_ee = np.empty(Ntest); err_ei = np.empty(Ntest); err_cn = np.empty(Ntest)
for k in range(1, Ntest+1):
    tt_k = np.linspace(t0, T, k*N_base + 1)
    yy_k = sol_exacte(tt_k)
    H[k-1]      = tt_k[1] - tt_k[0]
    err_ee[k-1] = np.max(np.abs(euler_explicite(phi, tt_k, y0_val) - yy_k))
    err_ei[k-1] = np.max(np.abs(euler_implicite(phi, tt_k, y0_val) - yy_k))
    err_cn[k-1] = np.max(np.abs(crank_nicolson(phi, tt_k, y0_val) - yy_k))

print("\nPartie 2 - ordres de convergence empiriques :")
for nom, err in [("EE", err_ee), ("EI", err_ei), ("CN", err_cn)]:
    omega, _ = np.polyfit(np.log(H), np.log(err), 1)
    print(f"  {nom} : ordre ≈ {omega:.2f}")

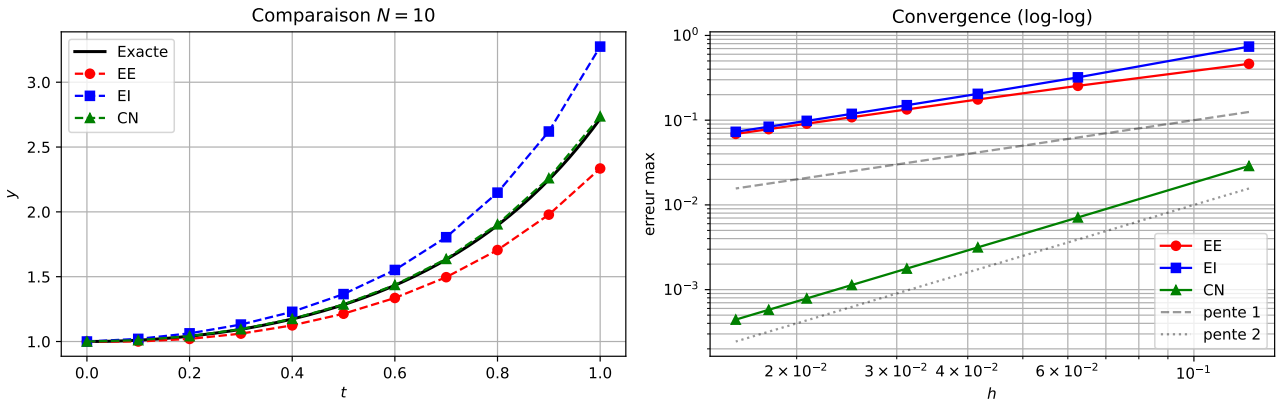
# --- Figures ---
fig, axes = plt.subplots(1, 2, figsize=(12, 4))

t_fin = np.linspace(t0, T, 200)
axes[0].plot(t_fin, sol_exacte(t_fin), 'k-', lw=2, label='Exacte')
axes[0].plot(tt, uu_ee, 'r--o', label='EE')
axes[0].plot(tt, uu_ei, 'b--s', label='EI')
axes[0].plot(tt, uu_cn, 'g--^', label='CN')
axes[0].set_xlabel('$t$'); axes[0].set_ylabel('$y$')
axes[0].set_title('Comparaison $N=10$')
axes[0].legend(); axes[0].grid()

axes[1].loglog(H, err_ee, 'r-o', label='EE')
axes[1].loglog(H, err_ei, 'b-s', label='EI')
axes[1].loglog(H, err_cn, 'g-^', label='CN')
axes[1].loglog(H, H,    'k--', alpha=0.4, label='pente 1')
axes[1].loglog(H, H**2, 'k:',  alpha=0.4, label='pente 2')
axes[1].set_xlabel('$h$'); axes[1].set_ylabel('erreur max')
axes[1].set_title('Convergence (log-log)')
axes[1].legend(); axes[1].grid(True, which='both')

plt.tight_layout()
plt.savefig('exo_comparaison.pdf', bbox_inches='tight')
```

Partie 1 — erreurs max (N=10) : EE : 3.8365e-01 EI : 5.5648e-01 CN : 1.8316e-02
Partie 2 — ordres de convergence empiriques : EE : ordre ≈ 0.92 EI : ordre ≈ 1.11 CN : ordre ≈ 2.01



Interprétation : diviser h par 2 divise l'erreur par 2^{ω} — par 2 pour EE et EI (ordre 1), par 4 pour CN (ordre 2).

CHAPITRE 2

Calcul différentiel et intégrale dans $\mathbb{R}^2$

Dans ce chapitre

2.1 Introduction . . . 45
2.1.1 Représentations de fonctions de deux variables . . . 45
2.2 Lignes ou courbes de niveau . . . 46
2.3 Dérivées partielles du premier ordre et gradient . . . 47
2.3.1 Dérivées partielles premières . . . 48
2.3.2 Dérivées des fonctions composées: règle de dérivation en chaîne (*chain rule*) . . . 49
2.3.3 Droite tangente à une courbe de niveau . . . 50
2.3.4 Gradient . . . 51
2.3.5 Plan tangent et calcul approché . . . 53
2.4 Dérivées partielles de deuxième ordre et matrice Hessienne . . . 55
2.5 Optimisation (dans un ouvert et sans contraintes) . . . 55
2.6 Optimisation approchée: principe de la méthode “descente de gradient” . . . 60
2.6.1 Descente de gradient . . . 61
2.7 Intégrales doubles . . . 62
2.7.1 Applications . . . 66
2.8 💻 Fonctions prédéfinies en Python . . . 68
2.8.1 Calcul formel avec sympy . . . 68
2.8.2 Affichage avec matplotlib . . . 69
2.8.3 Descente de gradient . . . 71
2.9 Exercices . . . 74

2.1. Introduction

Une *fonction* f de $\mathbb{R}^n$ à valeurs réelles associe à tout point $\mathbf{x} \equiv (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ un réel $f(\mathbf{x})$. Le point $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ se note aussi $\mathbf{x}$ ou $\underline{x}$. Pour $n = 2$, on utilise souvent la notation (x, y), pour $n = 3$, (x, y, z).

Le *domaine de définition* de f est l'ensemble $\mathscr{D}_f \subset \mathbb{R}^n$ des points $\mathbf{x} \equiv (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ayant une image par f.

L'ensemble $\mathrm{S} = \left\{ (\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) \,\middle|\, \mathbf{x} \in \mathscr{D}_f \right\}$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ est la *surface représentative* de f, analogue à la courbe représentative d'une fonction d'une variable. La représentation géométrique des fonctions de n variables se fait dans un espace à $n+1$ dimensions, ce qui dépasse la bidimensionnalité des pages d'un livre. Pour contourner cette difficulté, nous nous limiterons aux représentations des fonctions de deux variables, sous forme de dessins en perspective ou de coupes par des plans horizontaux ou verticaux, offrant des informations utiles bien que partielles. Ce problème de visualisation introduit une rupture nette par rapport aux fonctions d'une variable étudiées antérieurement.

2.1.1. Représentations de fonctions de deux variables

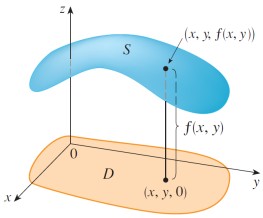
Lorsque $n = 2$, le graphe

$$\mathscr{G}_f \equiv \left\{ (x, y, z = f(x, y)) \,\middle|\, (x, y) \in \mathscr{D}_f \right\}$$

est tridimensionnel, et peut être vu comme le relief d'une région (par exemple, l'altitude en fonction de la longitude et de la latitude). On visualise le graphe d'une fonction

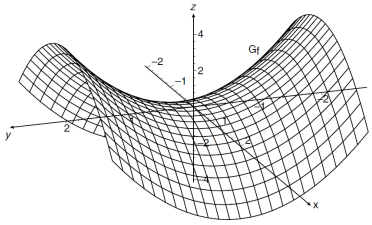
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto f(x, y) \end{aligned}$$

par l'altitude $z = f(x, y)$.



Les axes x et y sont conventionnellement situés dans un plan horizontal (le domaine $\mathscr{D}_f$ apparaît alors comme un sous-ensemble de ce plan), tandis que la dimension verticale est réservée aux valeurs de z. Ainsi, à tout $(x,y) \in \mathscr{D}_f$, dont l'image est $f(x,y) \in \mathbb{R}$, correspond le point du graphe $(x,y,f(x,y)) \in \mathbb{R}^3$. Une mise en perspective permet de visualiser les surfaces en trois dimensions, avec l'axe z toujours vertical. Pour des raisons de lisibilité, les axes x et y peuvent ne pas être présentés selon la même orientation.

EXEMPLE
Le graphe de la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^2 - y^2$ est une surface de $\mathbb{R}^3$ ayant la forme d'une selle de cheval, comme visible ci-dessous.

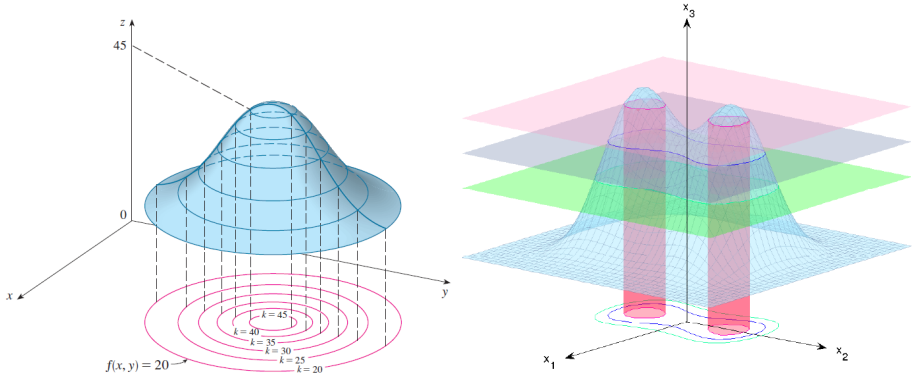


2.2. Lignes ou courbes de niveau

Si on considère des coupes horizontales, on obtient des courbes planes, dites *courbes ou lignes de niveau.*

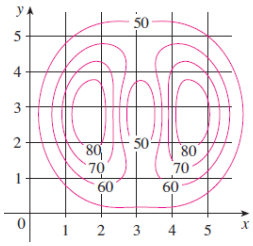
Définition 2.1 (Lignes de niveau)
Soit $k \in \mathbb{R}$ et f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$; la courbe de niveau k de f est la projection sur le plan d'équation $z = 0$ de l'intersection de la surface représentative de f avec le plan horizontal $z = k$, *i.e.* l'ensemble $\{(x,y) \in \mathscr{D} \mid f(x,y) = k\}$.

En pratique, on représente simultanément différentes courbes de niveau pour visualiser la progression du graphe. Cette représentation s'apparente aux cartes géographiques où le niveau correspond à l'altitude. Les courbes de niveau d'une fonction $f(x,y)$ fournissent une représentation géométrique de f sur le plan, tandis que son graphe en donne une dans l'espace.

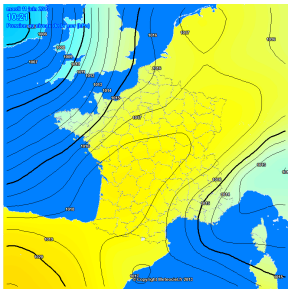


EXEMPLE
L'image ci-contre montre les courbes de niveau d'une fonction f. On peut alors se faire une idée de l'allure de la fonction supposée continue. Par exemple, $f(1,3) \approx 72$, $f(4,5) \approx 56$, et $40 < f(3,3) < 50$ ou $50 < f(3,3) < 60$.

© 2024-2027 G. FACCANONI



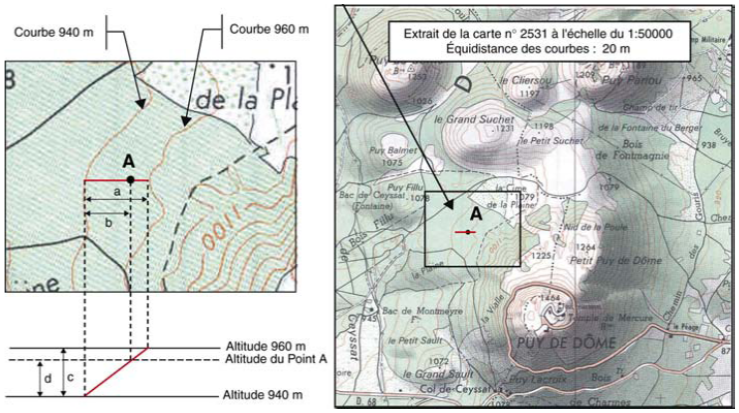
EXEMPLE (CARTES MÉTÉOROLOGIQUE)



Sur une carte météorologique, les courbes de niveau sont les isothermes (lignes reliant les points d'égale température) ou les isobares (lignes reliant les points d'égale pression).

EXEMPLE (CARTES TOPOGRAPHIQUES)
On peut considérer le relief d'une région comme le graphe d'une fonction de deux variables (par exemple, l'altitude en fonction de la longitude et de la latitude). Une courbe de niveau indique les points de même altitude (ici, l'altitude du point A est $940 + d = 940 + cb/a$). En dessinant les courbes de niveau avec leur altitude correspondante, on obtient la *carte topographique du relief*. La lecture d'une carte topographique permet d'obtenir des mesures quantitatives du relief et de faire des observations qualitatives sur sa nature. Par exemple, localiser les points de plus haute et de plus basse altitude, les crêtes, les vallées, les cols, etc., ainsi que les endroits où les pentes sont plus escarpées ou plus douces, correspondant respectivement aux courbes de niveau très rapprochées ou très distantes.

Attention : dans cette représentation, les couleurs ne correspondent pas à la représentation planaire, mais servent à reproduire les ombres.



2.3. Dérivées partielles du premier ordre et gradient

Rappels Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur I, un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. On dit que f *est dérivable* en $x_0 \in$ I s'il existe la limite finie

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

ce qui équivaut à

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Cette limite, notée $f'(x_0)$, est la dérivée de f en x_0.

Pour une fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dont le graphe est une surface de $\mathbb{R}^3$, la situation est différente. Le plan $\mathbb{R}^2$ possède une infinité de directions. Pour étudier comment une fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ évolue lorsque la variable suit l'une ou l'autre direction du plan, considérons d'abord la direction à y fixé. Prenons le point (x_0, y_0) du domaine de f. Son image est $f(x_0, y_0) \in \mathbb{R}$, et le graphe de la fonction, qui est la surface d'équation $z = f(x, y)$ de $\mathbb{R}^3$, comporte le point $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. L'intersection du graphe de f avec le plan vertical $y = y_0$ est la courbe d'équation $z = f(x, y_0)$ de $\mathbb{R}^2$. Le point (x_0, y_0) étant fixé, cette courbe peut être interprétée comme le graphe de la fonction $f_{y=y_0}$ d'une seule variable définie par $f_{y=y_0}(x) = f(x, y_0)$. Si $f_{y=y_0}$ est dérivable en x_0, alors sa dérivée nous renseigne sur la variation de f lorsque (x, y) se déplace le long de la droite horizontale de $\mathbb{R}^2$ passant par (x_0, y_0).

Par analogie, on peut répéter le même raisonnement à x fixé. En conclusion, lorsqu'on fixe toutes les variables sauf une, on obtient une fonction d'une seule variable qui peut être dérivée selon les règles habituelles.

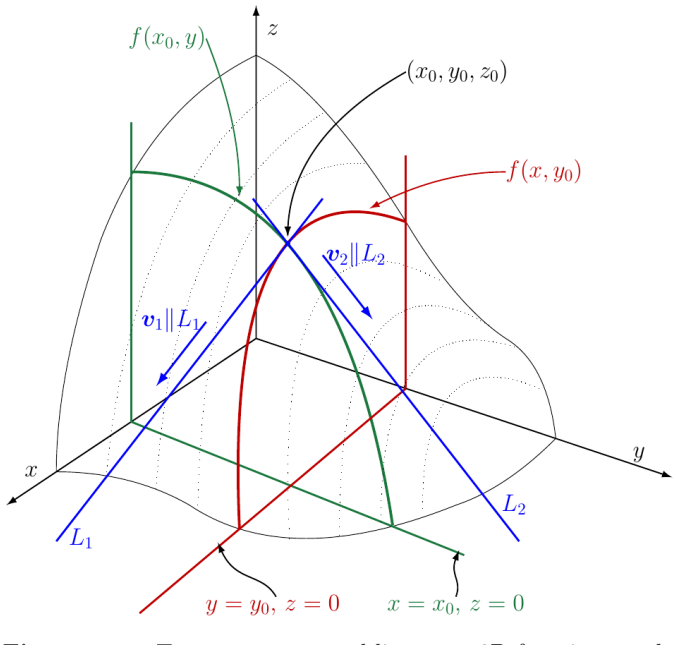
2.3.1. Dérivées partielles premières

Définition 2.2 (Dérivées partielles premières)
Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur une partie ouverte $\mathscr{D}$ de $\mathbb{R}^2$. Soit $(x_0, y_0) \in \mathscr{D}$. Les dérivées partielles de f en (x_0, y_0) sont les dérivées des fonctions partielles f_{y_0} et f_{x_0} évaluées en (x_0, y_0), c'est-à-dire :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0} = \lim_{k \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}.$$

Il s'agit de limites d'une fonction réelle de variable réelle !

Si f admet toutes les dérivées partielles premières, on dit que f est *dérivable.*

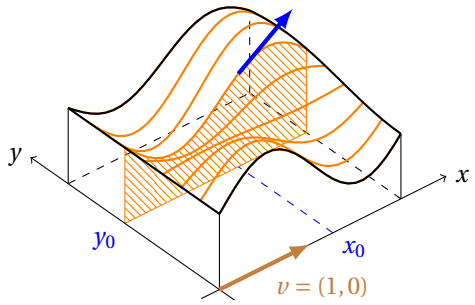


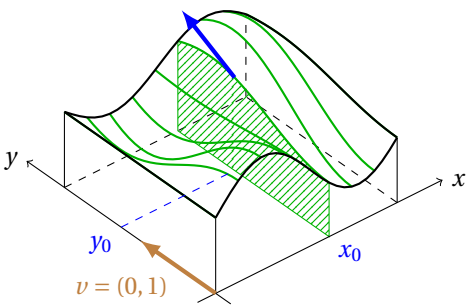
Pour une fonction d'une variable, la dérivée est la pente de la tangente au graphe de la fonction (le graphe étant alors une courbe). Pour une fonction de deux variables $(x, y) \mapsto f(x, y)$, les dérivées partielles indiquent les pentes au graphe de f selon certaines directions (le graphe étant ici une surface). Plus précisément :

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ est la pente du graphe de f en (x_0, y_0) suivant la direction de l'axe (Ox). En effet cette pente est celle de la tangente à la courbe $z = f(x, y_0)$ et est donnée par la dérivée de $x \mapsto f(x, y_0)$ en x_0, c'est donc bien $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$.
- $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ est la pente du graphe de f en (x_0, y_0) suivant la direction de l'axe (Oy).

Sur la figure de gauche, la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ indique la pente de la tranche parallèle à l'axe (Ox) (en orange). Sur la figure de droite, la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial y}$ indique la pente de la tranche parallèle à l'axe (Oy) (en vert).

© 2024-2027 G. Faccanoni





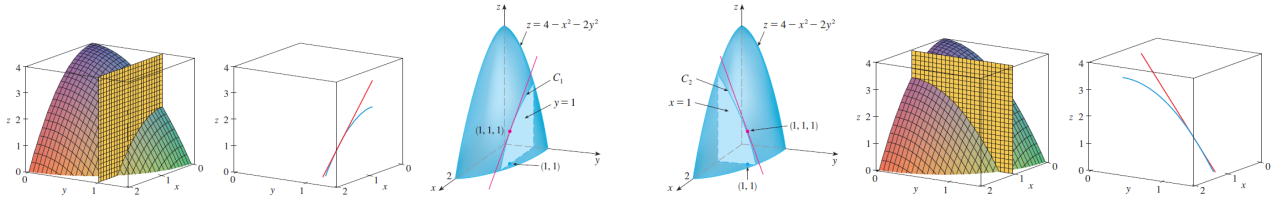
Remarque (Notation)
La dérivée $\frac{\partial f}{\partial x}$ se note aussi $\partial_x f$, $f_{,x}$ ou encore $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_y$ en insistant sur la variable considérée constante. (Attention à ne pas confondre $f_{,x}$, la dérivée de f par rapport à x, avec $f_{x=x_0}$, la fonction partielle associée à f.)

Astuce
En pratique, pour calculer $\partial_x f$ (resp. $\partial_y f$), on dérive f comme si elle était une fonction de la seule variable x (resp. y), l'autre variable étant considérée comme une constante.

EXEMPLE
Soit $f(x,y) = 4 - x^2 - 2y^2$. Le graphe de f est le paraboloïde $z = 4 - x^2 - 2y^2$. On a $\partial_x f(x,y) = -2x$ et $\partial_y f(x,y) = -4y$.

Le plan vertical $y = 1$ intersecte le paraboloïde dans la parabole $z(x) = 2 - x^2$ (courbe C_1 à gauche). La pente de la tangente à cette parabole au point $(1,1)$ est $\partial_x f(1,1) = -2$.

De même, le plan vertical $x = 1$ intersecte le paraboloïde dans la parabole $z(y) = 2 - 2y^2$ (courbe C_2 à droite). La pente de la tangente à cette parabole au point $(1,1)$ est $\partial_y f(1,1) = -4$.



EXEMPLE

1. Pour $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = 3x^2 + xy - 2y^2$, on a $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}^2$, f est continue, $\partial_x f(x,y) = 6x + y$ (car y est considérée constante) et $\partial_y f(x,y) = x - 4y$ (car x est considérée constante).
2. Pour la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z) = 5xz\ln(1+7y)$, on a $\mathscr{D}_f = \{(x,y,z) \mid y > -1/7\}$, f est continue,
$$\partial_x f(x,y,z) = 5z\ln(1+7y), \qquad \partial_y f(x,y,z) = \frac{35xz}{1+7y}, \qquad \partial_z f(x,y,z) = 5x\ln(1+7y).$$
3. Pour $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z) = \cos(x+y^2)e^{-z}$ on a
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = -\sin(x+y^2)e^{-z}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = -2y\sin(x+y^2)e^{-z}, \qquad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = -\cos(x+y^2)e^{-z}.$$
4. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $f(x_1,\dots,x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$, alors pour $i = 1,\dots,n$
$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,\dots,x_n) = 2x_i.$$

2.3.2. Dérivées des fonctions composées : règle de dérivation en chaîne (*chain rule*)

Cas $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ Soit f une fonction de deux variables admettant des dérivées partielles premières et x et y deux fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad\qquad \mathbf{h} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto f(x,y) \qquad\qquad t \mapsto \begin{pmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{pmatrix}$$

Alors la fonction g

$$\begin{array}{ccccc} g:\mathbb{R} & \xrightarrow{\mathbf{h}} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \mathbf{h}(t)=\begin{pmatrix}h_1(t)\\h_2(t)\end{pmatrix} & \longmapsto & g(t)=f(h_1(t),h_2(t)) \end{array}$$

est dérivable et

$$g'(t)=\frac{\partial f}{\partial x}(x(t),y(t))\times x'(t)+\frac{\partial f}{\partial y}(x(t),y(t))\times y'(t)$$

avec $x=h_1(t)$ et $y=h_2(t)$.

Cas $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ Soit f une fonction de deux variables x et y elles-même fonctions des deux variables u et v.

$$\begin{array}{cccc} f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2 & x:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R} & y:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R} & \mathbf{h}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2 \\ (x,y)\mapsto f(x,y) & (u,v)\mapsto x(u,v) & (u,v)\mapsto y(u,v) & (u,v)\mapsto\begin{pmatrix}x(u,v)\\y(u,v)\end{pmatrix} \end{array}$$

On peut définir la fonction composée $g(u,v)=f(x(u,v),y(u,v))$:

$$\begin{array}{ccccc} g: & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\mathbf{h}} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ & (u,v) & \longmapsto & \mathbf{h}(x,y)=\begin{pmatrix}x(u,v)\\y(u,v)\end{pmatrix} & \longmapsto & g(u,v)=f(x(u,v),y(u,v)) \end{array}$$

Lorsque les dérivées partielles premières qui interviennent sont définies, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial u}(u,v)&=\frac{\partial f}{\partial x}(x(u,v),y(u,v))\times\frac{\partial x}{\partial u}(u,v)+\frac{\partial f}{\partial y}(x(u,v),y(u,v))\times\frac{\partial y}{\partial u}(u,v),\\ \frac{\partial g}{\partial v}(u,v)&=\frac{\partial f}{\partial x}(x(u,v),y(u,v))\times\frac{\partial x}{\partial v}(u,v)+\frac{\partial f}{\partial y}(x(u,v),y(u,v))\times\frac{\partial y}{\partial v}(u,v). \end{aligned}$$

En notation matricielle

$$\begin{pmatrix}\partial_u g\\ \partial_v g\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\partial_u x & \partial_u y\\ \partial_v x & \partial_v y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\partial_x f\\ \partial_y f\end{pmatrix}$$

Cas $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ Soit f une fonction d'une variable x et x elle-même une fonction de deux variables u et v.

$$\begin{array}{cc} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} & x:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R} \\ x\mapsto f(x) & (u,v)\mapsto x(u,v) \end{array}$$

On peut définir la fonction composée $g(u,v)=f(x(u,v))$:

$$\begin{array}{ccccc} g: & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{x} & \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ & (u,v) & \longmapsto & x(u,v) & \longmapsto & g(u,v)=f(x(u,v)) \end{array}$$

Lorsque les dérivées partielles premières qui interviennent sont définies, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial u}(u,v)&=f'(x(u,v))\times\frac{\partial x}{\partial u}(u,v),\\ \frac{\partial g}{\partial v}(u,v)&=f'(x(u,v))\times\frac{\partial x}{\partial v}(u,v). \end{aligned}$$

2.3.3. Droite tangente à une courbe de niveau

Définition 2.3 (Droite tangente en (x_0,y_0) à la courbe de niveau $f(x_0,y_0)$)
Au point (x_0,y_0), l'équation de la tangente à la ligne de niveau de f est :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)=0$$

pourvu que le gradient de f en ce point ne soit pas le vecteur nul.

© 2024-2027 G. Faccanoni

EXEMPLE (TANGENTE À UNE COURBE DE NIVEAU)
Considérons la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$. Considérons la ligne de niveau passant par le point $(x_0, y_0) = \left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$. On a

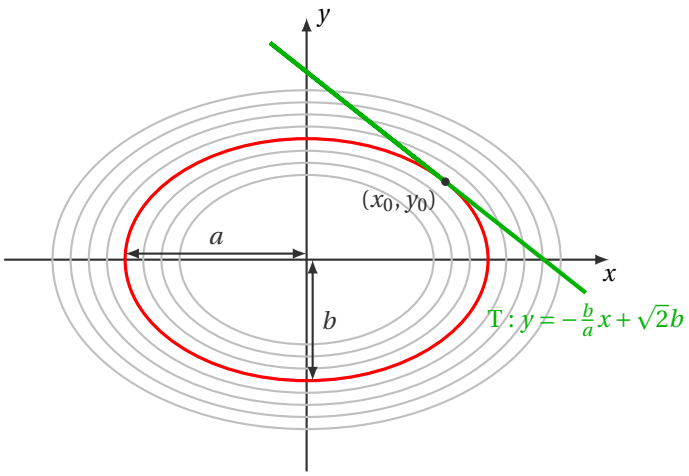
$$f\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right) = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = \frac{a^2}{2a^2} + \frac{b^2}{2b^2} = 1.$$

La courbe de niveau passant par (x_0, y_0) a pour niveau 1 et c'est une ellipse. Calculons maintenant la droite tangente à cette courbe au point (x_0, y_0) : les dérivées partielles en (x_0, y_0) sont

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{2x_0}{a^2} = \frac{2}{a^2}\frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{a} = \frac{1}{x_0}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{2y_0}{b^2} = \frac{2}{b^2}\frac{b}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{b} = \frac{1}{y_0}.$$

L'équation de la droite tangente à l'ellipse $\mathscr{E}$ en ce point est donc

$$\frac{1}{x_0}(x - x_0) + \frac{1}{y_0}(y - y_0) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{1}{x_0}x + \frac{1}{y_0}y = 2 \quad \rightsquigarrow \quad y = 2y_0 - \frac{y_0}{x_0}x \quad \rightsquigarrow \quad y = -\frac{b}{a}x + \sqrt{2}b.$$



2.3.4. Gradient

Définition 2.4 (Vecteur gradient)
Le gradient de la fonction $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ évalué au point $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n)$, noté $\nabla f(\hat{\mathbf{x}})$ ou encore $\mathbf{grad}\, f(\hat{\mathbf{x}})$, est le vecteur dont les composantes sont les dérivées partielles premières :

$$\nabla f(\hat{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f(\hat{\mathbf{x}}) \\ \partial_{x_2} f(\hat{\mathbf{x}}) \\ \vdots \\ \partial_{x_n} f(\hat{\mathbf{x}}) \end{pmatrix}$$

Remarque
Le gradient est un élément de $\mathbb{R}^n$ écrit comme un vecteur colonne. Parfois, pour alléger l'écriture, on peut aussi l'écrire sous la forme d'un vecteur ligne.

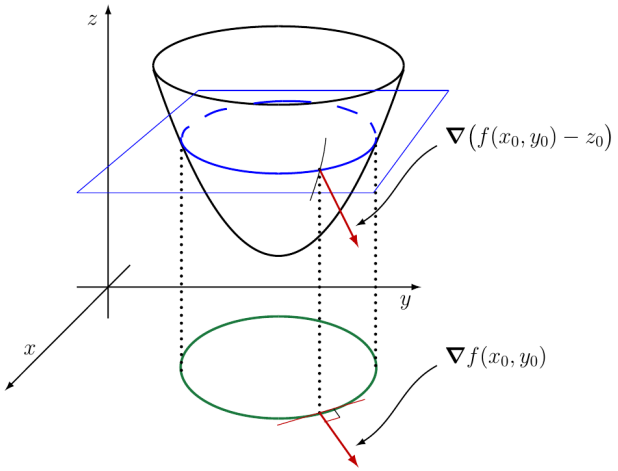
EXEMPLE
Considérons la fonction $f(x,y) = x^2 + 3y$. Son gradient est $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 3 \end{pmatrix}$. Par exemple, au point $(1,2)$, le gradient est $\nabla f(1,2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

EXEMPLE
- $f(x,y) = x^2 y^3$, $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy^3 \\ 3x^2y^2 \end{pmatrix}$. Au point $(x_0, y_0) = (2,1)$, $\nabla f(2,1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \end{pmatrix}$.

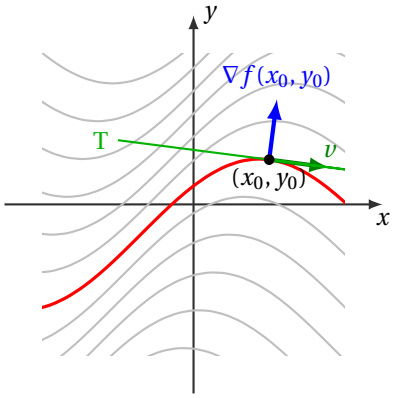
- $f(x,y,z) = x^2\sin(yz)$, $\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x\sin(yz) \\ x^2 z\cos(yz) \\ x^2 y\cos(yz) \end{pmatrix}$.
- $f(x_1,\dots,x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$, $\nabla f(x_1,\dots,x_n) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ \vdots \\ 2x_n \end{pmatrix}$.

Proposition 2.5
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable. On considère les lignes de niveau $f(x,y) = k$. Le vecteur gradient $\nabla f(x_0, y_0)$ est orthogonal à la ligne de niveau de f passant au point (x_0, y_0).

Il indique ainsi la direction dans laquelle la fonction varie le plus vite.

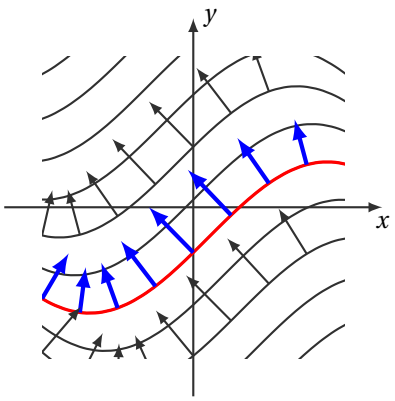


Sur ce premier dessin, sont dessinés la ligne de niveau passant par le point (x_0, y_0) (en rouge), un vecteur tangent v en ce point et la tangente à la ligne de niveau (en vert). Le vecteur gradient est un vecteur du plan qui est orthogonal à la ligne de niveau en ce point (en bleu).



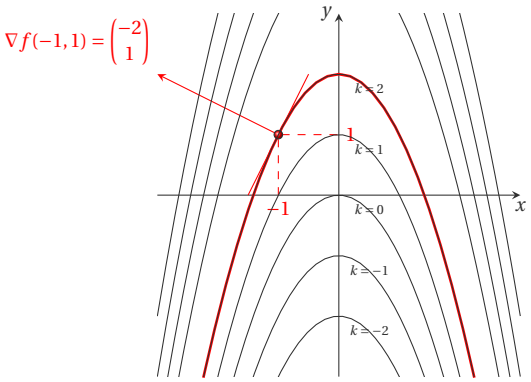
À chaque point du plan, on peut associer un vecteur gradient. Ce vecteur gradient est orthogonal à la ligne de niveau passant par ce point. Nous verrons juste après comment savoir s'il est orienté « vers le haut » ou « vers le bas ».

 © 2024-2027 G. Faccanoni



EXEMPLE
Considérons la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^2 + y$. Le gradient de f est le vecteur $\nabla f(x,y) = (2x,1)^{\mathrm{T}}$. La courbe de niveau k de la fonction f est l'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y = k\}$, autrement dit la parabole d'équation $y = -x^2 + k$. Le gradient est orthogonal à la courbe de niveau de f qui passe par le point (x,y).

Dans la figure ci-dessous on considère le point $(-1,1)$. Le vecteur gradient de f dans ce point vaut $(-2,1)^{\mathrm{T}}$. Le point donné appartient à la courbe de niveau 2 qui a pour équation $y = -x^2 + 2$. La droite tangente à cette courbe au point $(-1,1)$ a pour équation $y = 2x + 3$ qui est orthogonale au gradient.



2.3.5. Plan tangent et calcul approché

Définition 2.6 (Plan tangent)
Soit $\mathscr{D}$ une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$ et soit $f : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable en (x_0, y_0). L'équation du plan tangent au graphe de la fonction $f(x,y)$ en (x_0,y_0) s'écrit

$$\mathrm{L}(x,y) = f(x_0,y_0) + (x - x_0)\partial_x f(x_0,y_0) + (y - y_0)\partial_y f(x_0,y_0)$$

ce qui équivaut, en notant $(h,k) = (x - x_0, y - y_0)$, à

$$\mathrm{L}(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0,y_0) + h\partial_x f(x_0,y_0) + k\partial_y f(x_0,y_0).$$

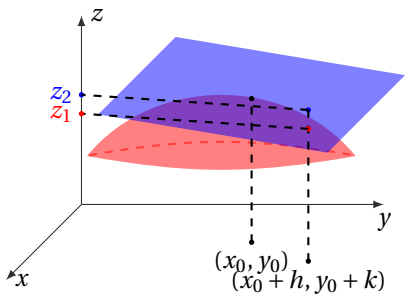
Si h et k sont petits, alors on a

$$f(x,y) \approx \mathrm{L}(x,y).$$

EXEMPLE
Considérons la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^2 + y$. Le gradient de f est le vecteur $\nabla f(x,y) = (2x,1)^{\mathrm{T}}$. Le plan tangent à f en $\hat{\mathbf{x}} = (-1,1)$ s'écrit

$$\mathrm{L}(\mathbf{x}) = f(\hat{\mathbf{x}}) + (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^{\mathrm{T}} \cdot \nabla f(\hat{\mathbf{x}}) = (-1)^2 + 1 + (x+1, y-1) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 - 2(x+1) + (y-1) = -2x + y - 1.$$

On peut approcher la valeur de f en (x_0,y_0) par la valeur du plan tangent au graphe en ce point. Sur la figure ci-dessous sont représentés le graphe de f (en rouge), le plan tangent au-dessus du point (x_0,y_0) (en bleu). La valeur $z_1 = f(x_0 + h, y_0 + k)$ est la valeur exacte donnée par le point de la surface au dessus de $(x_0 + h, y_0 + k)$. On approche cette valeur par $z_2 = f(x_0,y_0) + h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ donnée par le point du plan tangent au dessus de $(x_0 + h, y_0 + k)$.



EXEMPLE
On veut calculer une valeur approchée de $f(1.002, 0.997)$ si $f(x,y) = x^2 y$. Prenons $(x_0, y_0) = (1,1)$, $h = 2 \times 10^{-3}$ et $k = -3 \times 10^{-3}$. On a alors $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2$, donc $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = 2$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 1$. Ainsi

$$f(1+h, 1+k) \simeq f(1,1) + 2h + k \qquad \rightsquigarrow \qquad f(1.002, 0.997) \simeq 1 + 2 \times 2 \times 10^{-3} - 3 \times 10^{-3} \simeq 1.001.$$

Avec une calculatrice, on trouve $f(1.002, 0.997) = 1.000992$: l'approximation est bonne.

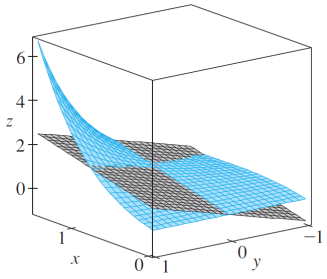
EXEMPLE
On peut calculer le plan tangent à la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = xe^{xy}$ en $(1,0)$ et utiliser sa linéarisation pour approcher $f(1.1, -0.1)$. On a

$$\begin{aligned} f(x,y) &= xe^{xy} & f(1,0) &= 1 \\ \partial_x f(x,y) &= e^{xy} + xye^{xy} & \partial_x f(1,0) &= 1 \\ \partial_y f(x,y) &= x^2 e^{xy} & \partial_y f(1,0) &= 1 \end{aligned}$$

Les trois fonctions f, $\partial_x f$ et $\partial_y f$ sont continues, donc f est différentiable. Sa linéarisation donne

$$f(x,y) \simeq f(1,0) + (x-1)\partial_x f(1,0) + (y-0)\partial_y f(1,0) = 1 + (x-1) + y = x + y,$$

autrement dit $xe^{xy} \simeq x + y$ lorsque $(x,y) \simeq (1,0)$, ainsi $f(1.1, -0.1) \simeq 1.1 - 0.1 = 1$. En effet, $f(1.1, -0.1) = 1.1e^{-0.11} \approx 0.98542$



Cette notion se généralise naturellement pour $n > 2$: il s'agit en fait d'un plan tangent pour $n = 2$ et d'un hyperplan tangent pour $n > 2$. Dans un espace de dimension n, un hyperplan est une variété linéaire de dimension $n-1$.

Définition 2.7 (Plan tangent en $\mathbb{R}^n$)
Soit $\mathscr{D}$ une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$ et soit $f : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable en $\hat{\mathbf{x}}$. L'équation du plan tangent au graphe de la fonction $f(\mathbf{x})$ en $\hat{\mathbf{x}}$ est

$$\mathrm{L}(\mathbf{x}) = f(\hat{\mathbf{x}}) + (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^{\mathrm{T}} \cdot \nabla f(\hat{\mathbf{x}}).$$

ce qui équivaut, en notant $\boldsymbol{\delta h} = (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})$, à

$$\mathrm{L}(\hat{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\delta h}) = f(\hat{\mathbf{x}}) + \boldsymbol{\delta h}^{\mathrm{T}} \cdot \nabla f(\hat{\mathbf{x}}).$$

Si toutes les composantes de $\boldsymbol{\delta h}$ sont petites, alors on a

$$f(\mathbf{x}) \approx \mathrm{L}(\mathbf{x}).$$

 © 2024-2027 G. FACCANONI

2.4. Dérivées partielles de deuxième ordre et matrice Hessienne

Si les fonctions dérivées partielles admettent elles-mêmes des dérivées partielles en (x_0, y_0), ces dérivées sont appelées dérivées partielles secondes, ou dérivées partielles d'ordre 2, de f en (x_0, y_0). On peut, de la même façon, introduire les dérivées partielles d'ordres supérieurs. Les définitions suivantes s'énoncent dans des ensembles ouverts pour éviter les problèmes liés au calcul de limites au bord du domaine.

Définition 2.8 (Dérivées partielles d'ordre 2 pour une fonction de deux variables)
Soit la fonction $f : \mathscr{D} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ où $\mathscr{D}_f$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. On a 2 dérivées partielles d'ordre 1 et donc 4 dérivées partielles d'ordre 2 ainsi notées :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x_0, y_0) \qquad \text{(notée aussi } \partial_{xx} f(x_0, y_0)\text{)},$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x_0, y_0) \qquad \text{(notée aussi } \partial_{xy} f(x_0, y_0)\text{)},$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x_0, y_0) \qquad \text{(notée aussi } \partial_{yx} f(x_0, y_0)\text{)},$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x_0, y_0) \qquad \text{(notée aussi } \partial_{yy} f(x_0, y_0)\text{)}.$$

Les dérivées partielles d'ordre supérieur à 2 se définissent par récurrence de façon analogue. Soit la fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$; on aura n dérivées partielles d'ordre 1, n^2 dérivées partielles d'ordre 2, etc. donc n^k dérivées partielles d'ordre k.

Théorème 2.9 (Théorème de SCHWARZ (ou de CLAIRAUT))
Si les dérivées partielles mixtes $\partial_{xy} f$ et $\partial_{yx} f$ sont continues en (x_0, y_0) alors $\partial_{xy} f(x_0, y_0) = \partial_{yx} f(x_0, y_0)$.

Définition 2.10 (Matrice hessienne)
Soit la fonction $f : \mathscr{D} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ où $\mathscr{D}_f$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. La matrice hessienne de f en (x_0, y_0) est la matrice de taille 2×2 dont les entrées sont les dérivées partielles secondes :

$$\mathrm{H}_f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \partial_{xx} f(x_0, y_0) & \partial_{xy} f(x_0, y_0) \\ \partial_{yx} f(x_0, y_0) & \partial_{yy} f(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

Son déterminant est le réel $\det(\mathrm{H}_f(x_0, y_0)) \equiv \partial_{xx} f(x_0, y_0)\partial_{yy} f(x_0, y_0) - \partial_{xy} f(x_0, y_0)\partial_{yx} f(x_0, y_0)$.

Cette notion se généralise naturellement pour $n > 2$.

EXEMPLE
Les dérivées premières et secondes de la fonction $f(x, y) = -2x^2 + 3xy^2 - y^3$ sont

$$\partial_x f(x, y) = -4x + 3y^2, \qquad \partial_y f(x, y) = 6xy - 3y^2,$$
$$\partial_{xx} f(x, y) = -4, \qquad \partial_{xy} f(x, y) = 6y, \qquad \partial_{yx} f(x, y) = 6y, \qquad \partial_{yy} f(x, y) = 6x - 6y.$$

La matrice hessienne est

$$\mathrm{H}_f(x, y) = \begin{pmatrix} -4 & 6y \\ 6y & 6x - 6y \end{pmatrix}.$$

Dans cet exemple, on remarque que la matrice hessienne de f est symétrique du fait que les dérivées secondes mixtes, $\partial_{xy} f$ et $\partial_{yx} f$, sont égales.

Comme la dérivée seconde pour les fonctions d'une seule variable, la matrice hessienne permet d'étudier la convexité des fonctions de plusieurs variables et joue, dès lors, un rôle important dans leur optimisation.

2.5. Optimisation (dans un ouvert et sans contraintes)

Un optimum ou extremum est soit un maximum soit un minimum, c'est-à-dire la valeur la plus haute ou la plus faible que prend la fonction sur son ensemble de définition ou tout sous-ensemble de son ensemble de définition.

Définition 2.11
Soit f une fonction de $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. On dit que

- f est bornée dans $\mathscr{D}$ s'il existe un nombre réel $M \geq 0$ tel que
$$\forall \mathbf{x} \in \mathscr{D},\ |f(\mathbf{x})| \leq M;$$
- f admet un maximum (resp. minimum) *global* (ou absolu) en $\mathbf{x}_0 \in \mathscr{D}$ si
$$\forall \mathbf{x} \in \mathscr{D},\ f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0) \text{ (resp. } f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0)\text{)};$$
- f admet un maximum (resp. minimum) *local* (ou relatif) en $\mathbf{x}_0 \in \mathscr{D}$ s'il existe une boule de rayon non nul $\mathscr{B}(\mathbf{x}_0, r)$ telle que
$$\forall \mathbf{x} \in \mathscr{D} \cap \mathscr{B}(\mathbf{x}_0, r),\ f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0) \text{ (resp. } f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0)\text{)}.$$

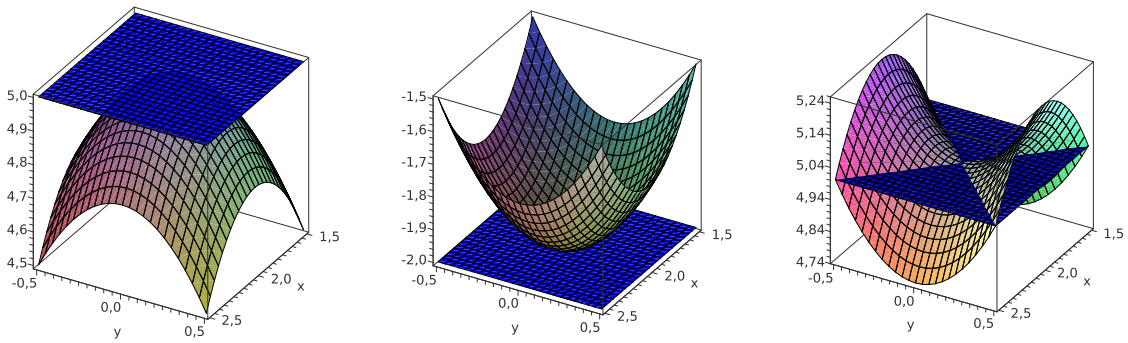
Théorème 2.12 (de FERMAT : condition nécessaire du premier ordre)
Soit $\mathscr{D}$ un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}_0$ un point contenu dans $\mathscr{D}$ et $f : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ en ce point. Si f présente un extremum local alors
$$\nabla f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}.$$

Dans la suite du cours nous chercherons les points pour lesquels une fonction donnée présente un extremum local. D'après le théorème précédent, ces points sont à chercher parmi les points en lesquels le gradient s'annule. On appelle ces points des points stationnaires ou critiques :

Définition 2.13 (Point stationnaire ou critique)
Un point $\mathbf{x}_0$ vérifiant $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ est appelé *point stationnaire* ou *point critique* de f.

Nature d'un point critique : étude directe La condition du premier ordre signifie géométriquement que le plan tangent à la surface d'équation $z = f(x, y)$ au point (x_0, y_0) de coordonnées $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ est horizontal. Après avoir déterminé un point stationnaire $\mathbf{x}_0$, on peut alors déterminer sa nature en étudiant le signe de la différence
$$d(\mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0).$$
Si cette différence est de signe constant pour $\mathbf{h}$ voisin de $\mathbf{0}$, il s'agit d'un extrémum local (un *maximum* si $d < 0$, un *minimum* si $d > 0$). Sinon, il s'agit d'un *point-col* (ou *point-selle*). Mieux, si le signe est constant pour $\mathbf{h}$ quelconque, alors l'extrémum est global.

La figure à gauche illustre le cas d'un *maximum* et la figure au centre le cas d'un *minimum*. La figure à droite illustre le fait que la condition nécessaire d'optimalité n'est pas une condition suffisante ; dans ce cas on dit que f présente un *col* en (x_0, y_0) ou que (x_0, y_0) est un *point-selle* de f. Le mot col vient de l'exemple de la fonction altitude et de la configuration (idéalisée) d'un col de montagne : minimum de la ligne de crête, maximum de la route, sans être un extremum du paysage. Le mot selle vient de l'exemple d'une selle de cheval.



EXEMPLE
On cherche les extrema de la fonction $f(x, y) = x^2 + y^2$ dans le disque ouvert centré en $(0,0)$ de rayon 1, représenté par $\mathscr{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 < 1\right\}$. Le seul candidat extremum est l'unique point critique $(0,0)$ qu'on trouve en résolvant $\partial_x f(x, y) = 0$ et $\partial_y f(x, y) = 0$. La définition implique de façon immédiate que f admet un minimum global en $(0,0)$. En effet
$$f(x, y) = x^2 + y^2 \geq 0 = f(0,0) \qquad \forall (x, y) \in \mathscr{D}_f.$$
En revanche, la fonction n'admet aucun maximum.

 © 2024-2027 G. FACCANONI

EXEMPLE
Chercher les points en lesquels $f(x,y) = x^2 - y^3 + xy$ peut atteindre son minimum.

- **Recherche des points critiques.** On calcule

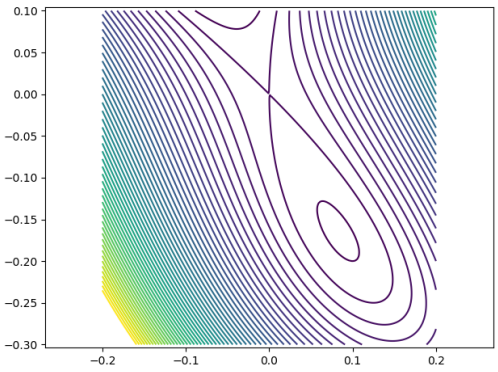
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + y \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -3y^2 + x.$$

On cherche les points (x,y) en lesquels les deux dérivées partielles s'annulent. Par l'annulation de la première dérivée, on a $2x + y = 0$ donc $y = -2x$. Par l'annulation de la seconde dérivée, on a $-3y^2 + x = 0$ ce qui donne par substitution $-12x^2 + x = 0$, ainsi $x(-12x+1) = 0$. Donc soit $x = 0$ et alors on a $y = 0$, soit $x = \frac{1}{12}$ et alors $y = -\frac{1}{6}$. Il y a donc deux points critiques

$$(0,0) \quad \text{et} \quad \left(\frac{1}{12}, -\frac{1}{6}\right).$$

- **Étude du point critique** $(0,0)$**.** On a $f(0,0) = 0$ mais on remarque que $f(0,y) = -y^3$ qui peut être négatif ou positif (selon le signe de y proche de 0), donc en $(0,0)$ il n'y a ni minimum ni maximum.
- **Étude du point critique** $(\frac{1}{12}, -\frac{1}{6})$**.** Il existe un critère (que l'on ne décrira pas ici) qui permet de dire qu'en ce point f admet un minimum local.

Sur le dessin ci-dessous, le minimum est situé à l'intérieur du petit ovale, l'autre point critique en $(0,0)$ correspond à l'intersection de la ligne de niveau $f = 0$ avec elle-même.



Sur l'exemple précédent, nous avons assez facilement calculé les points critiques à partir des deux équations à deux inconnues. Il faut prendre garde que, en toute généralité, **ce n'est pas un système linéaire** et que dans le cas d'une fonction plus compliquée il aurait été impossible de déterminer exactement les points critiques.

On note aussi dans l'exemple précédent que certains points critiques ne sont ni des maximums ni des minimums. L'exemple type, illustré ci-dessous, est celui d'un col appelé aussi point-selle en référence à sa forme de selle de cheval.

Théorème 2.14 (Condition suffisante d'extrémum local dans un ouvert (cas de 2 variables))
Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}^2$ et (x_0, y_0) un point stationnaire ; posons

$$\text{dét}(\mathrm{H}_f(x_0,y_0)) \equiv \partial_{xx} f(x_0,y_0) \cdot \partial_{yy} f(x_0,y_0) - \left(\partial_{xy} f(x_0,y_0)\right)^2,$$

le déterminant de la matrice hessienne de f évalué en (x_0, y_0).

- Si $\text{dét}(\mathrm{H}_f(x_0,y_0)) > 0$, alors f présente un extrémum relatif en (x_0,y_0) ; il s'agit
  - d'un maximum si $\partial_{xx} f(x_0,y_0) < 0$
  - d'un minimum si $\partial_{xx} f(x_0,y_0) > 0$;
- si $\text{dét}(\mathrm{H}_f(x_0,y_0)) < 0$, alors f présente un point-selle (ou point-col) en (x_0,y_0) (*cf.* la figure 2.1) ; ce n'est pas un extrémum ;
- si $\text{dét}(\mathrm{H}_f(x_0,y_0)) = 0$, on ne peut pas conclure à partir des dérivées secondes.

En résumé, si $\partial_x f(x_0,y_0) = 0$ et $\partial_y f(x_0,y_0) = 0$, la nature du point critique (x_0,y_0) est déterminée par le tableaux suivant :

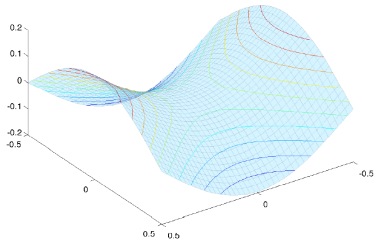



FIGURE 2.1. – Point col ou point selle

$\det(\mathrm{H}_f(x_0,y_0))$	$\partial_{xx}f(x_0,y_0)$	Nature de (x_0,y_0)
+	+	minimum local
+	−	maximum local
−		point-selle
0		on ne peut pas conclure

EXEMPLE
On veut étudier la fonction $f(x,y) = x^2+y^2-2x-4y$ sur $\mathbb{R}^2$. Elle a pour dérivées partielles $\partial_x f(x,y) = 2x-2$ et $\partial_y f(x,y) = 2y-4$ qui ne s'annulent qu'en $(1,2)$, seul point où il peut donc y avoir un extremum local. On étudie directement le signe de la différence

$$d(h,k) = f(1+h,2+k) - f(1,2) = h^2+k^2 > 0.$$

Comme cette différence est positive pour h et k voisins de 0 il s'agit d'un minimum. En effet, $\partial_{xx}f(1,2) = 2 > 0$, $\partial_{yy}f(1,2) = 2$, $\partial_{xy}f(1,2) = 0$ donc $\det(\mathrm{H}_f(1,2)) = 4 > 0$ et il s'agit bien d'un minimum.

EXEMPLE
Pour déterminer les extrema libres de la fonction $f(x,y) = x^2+y^3-2xy-y$ dans $\mathbb{R}^2$, on constate d'abord que f est un polynôme, donc différentiable dans l'ouvert $\mathbb{R}^2$. Les seuls candidats extrema locaux sont les points critiques. Toutefois, nous ne disposons d'aucune garantie à priori sur le fait que les éventuels extrema locaux soient globaux.

Recherche des points critiques On a

$$\nabla f = \mathbf{0} \iff \begin{pmatrix} 2x-2y \\ 3y^2-2x-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff (x,y) = \left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right) \text{ ou } (x,y) = (1,1).$$

Les deux candidats sont donc $\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$ et $(1,1)$.

Classification La matrice hessienne de f en un point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ est

$$\mathrm{H}_f(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_{xx}f(x,y) & \partial_{xy}f(x,y) \\ \partial_{yx}f(x,y) & \partial_{yy}f(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6y \end{pmatrix}.$$

Comme $\det\left(\mathrm{H}_f\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)\right) < 0$ et $\mathrm{D}(1,1) > 0$, alors $\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$ est un point-selle et f admet en $(1,1)$ un minimum local de valeur $f(1,1) = -1$. Ce minimum n'est cependant pas global puisque, par exemple, $f(0,-2) = -6 < f(1,1) = -1$.

EXEMPLE
Une firme produit deux types de biens A et B. Son coût total de fabrication C et la demande respective des deux biens q_A et q_B sont donnés par

$$\mathrm{C} = q_\mathrm{A}^2 + 2q_\mathrm{B}^2 + 10, \tag{2.1}$$
$$q_\mathrm{A} = 40 - 2p_\mathrm{A} - p_\mathrm{B}, \tag{2.2}$$
$$q_\mathrm{B} = 35 - p_\mathrm{A} - p_\mathrm{B}. \tag{2.3}$$

Quels sont les niveaux de production qui maximisent le profit? Quels sont les prix de A et B qui suscitent une demande correspondant à ces niveaux optimaux?

© 2024-2027 G. FACCANONI

Pour répondre à ces questions, on écrit la fonction profit $\Pi(q_A, q_B) = q_A p_A + q_B p_B - C(q_A, q_B)$. De (2.2) et (2.3) on peut déduire

$$p_A = 5 - q_A + p_B, \tag{2.4}$$
$$p_B = 30 + q_A - 2q_B, \tag{2.5}$$

et donc que

$$\Pi(q_A, q_B) = 5q_A - 2q_A^2 + 2q_A q_B - 4q_B^2 + 30q_B - 10.$$

Pour maximiser le profit en fonction du niveau de production, on recherche d'abord les points stationnaires de Π :

$$\nabla\Pi(q_A, q_B) = \begin{pmatrix} 5 - 4q_A + 2q_B \\ 2q_A - 8q_B + 30 \end{pmatrix}, \qquad \nabla\Pi(q_A, q_B) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff (q_A, q_B) = (50/14, 65/14).$$

On étudie la nature de ce point critique en évaluant la matrice Hessienne :

$$H_\Pi(q_A, q_B) = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -8 \end{pmatrix};$$

pour le point stationnaire $(50/14, 65/14)$ on a $\det(H_\Pi)(50/14, 65/14) > 0$ et $\partial_{q_A q_A}\Pi(50/14, 65/14) < 0$, donc le point $(50/14, 65/14)$ est un maximum local de Π. Comme $H_\Pi(q_A, q_B)$ ne dépend pas des variables q_A et q_B, on a $\det(H_\Pi)(q_A, q_B) > 0$ et $\partial_{q_A q_A}\Pi(q_A, q_B) < 0$ en tout point du domaine, autrement dit Π est une fonction concave et le point $(50/14, 65/14)$ est un maximum global de Π. Comme $q_A = 50/14$ et $q_B = 65/14$ maximisent le profit en fonction des niveaux de production, les prix associés à ce niveau de production sont $p_A = 85/14$ et $p_B = 340/14$.

EXEMPLE (LOIS DE SNELL-DESCARTES)
Un rayon lumineux se propage à la vitesse v_1 dans le milieu M_1 et à la vitesse v_2 dans le milieu M_2. Le principe de FERMAT précise que la lumière suit le trajet le plus économique en temps.

En dimension 2. En notant x l'abscisse du point où la trajectoire coupe l'interface, le temps nécessaire pour aller de (x_1, z_1) à (x_2, z_2) en passant par le point d'abscisse x vaut

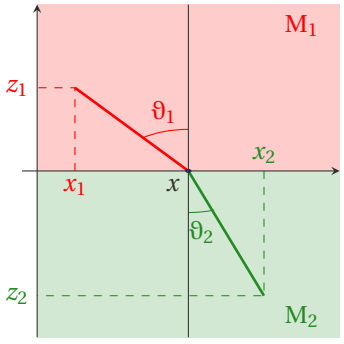
$$t(x) = \frac{\sqrt{(x - x_1)^2 + z_1^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(x_2 - x)^2 + z_2^2}}{v_2}.$$

Cette quantité est (localement) optimale quand sa dérivée par rapport à x s'annule, c'est à dire lorsque

$$\frac{x - x_1}{v_1\sqrt{(x - x_1)^2 + z_1^2}} - \frac{x_2 - x}{v_2\sqrt{(x_2 - x)^2 + z_2^2}} = 0,$$

ce qui conduit à la loi de SNELL-DESCARTES

$$\frac{\sin(\vartheta_1)}{v_1} = \frac{\sin(\vartheta_2)}{v_2}.$$



En dimension 3. Dans le cas tridimensionnel, la situation est similaire. Il s'agit cette fois de déterminer les coordonnées (x, y) dans le plan de l'interface où le rayon coupera celui-ci. Le temps de trajet vaut cette fois

$$t(x, y) = \frac{\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + z_1^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(x_2 - x)^2 + (y_2 - y)^2 + z_2^2}}{v_2}.$$

Il s'agit cette fois d'optimiser par rapport à x et y simultanément, ce qui revient à annuler simultanément les dérivées de t par rapport à x et y, c'est à dire son gradient. Ceci conduit aux équations

$$\nabla t = \mathbf{0} \iff \begin{pmatrix} \frac{x-x_1}{v_1\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+z_1^2}} - \frac{x_2-x}{v_2\sqrt{(x_2-x)^2+(y_2-y)^2+z_2^2}} \\ \frac{y-y_1}{v_1\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+z_1^2}} - \frac{y_2-y}{v_2\sqrt{(x_2-x)^2+(y_2-y)^2+z_2^2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x_2-x \\ y_2-y \end{pmatrix} = \frac{v_2 d_2}{v_1 d_1} \begin{pmatrix} x-x_1 \\ y-y_1 \end{pmatrix}$$

autrement dit, le point du plan de coordonnées (x, y) se trouve dans le segment compris entre (x_1, y_1) et (x_2, y_2). On se ramène donc à un problème bidimensionnel et le raisonnement ci-dessus s'applique directement.

On obtient de la même façon la loi de SNELL-DESCARTES à la réflexion.

Remarque (Optimisation libre *versus* liée)
Imaginez-vous en train de parcourir un chemin de montagne, explorant les hauteurs et les vallées de la région. Dans cette excursion, vous pourriez avoir deux objectifs distincts, chacun reflétant une approche différente de l'optimisation.

D'une part, vous pourriez être un passionné de randonnée, cherchant à atteindre les sommets les plus élevés de la région. Votre but est alors de maximiser l'altitude à laquelle vous vous trouvez, explorant les crêtes les plus spectaculaires et les panoramas les plus impressionnants.

D'autre part, vous pourriez opter pour une approche plus pragmatique. Suivant un chemin balisé, votre objectif est de simplement savoir, à la fin de la journée, à quel point vous vous êtes retrouvé au point le plus élevé ou le plus bas de votre parcours. Vous ne visez pas nécessairement les sommets les plus hauts, mais plutôt les points les plus élevés ou les plus bas sur le chemin que vous avez suivi.

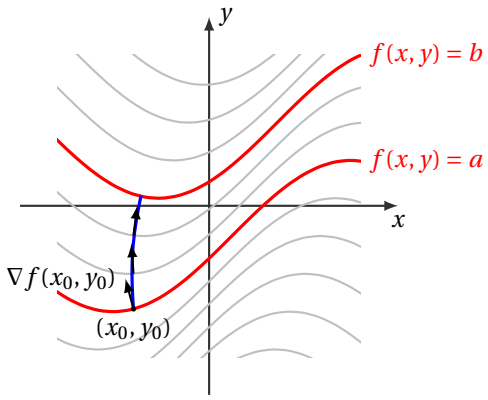
Dans les deux cas, l'altitude est une fonction de deux variables, représentant votre position sur la carte en termes de coordonnées (x, y). L'optimisation dans ce contexte peut être abordée de deux manières différentes : dans le premier cas, dans la quête des sommets les plus élevés, vous cherchez à trouver le maximum de la fonction d'altitude $h(x, y)$. Votre objectif est de découvrir les points les plus hauts de la région, il s'agit d'une optimisation libre (comme à la section précédente). Dans le deuxième cas, lorsque vous suivez un chemin spécifique défini par une équation $g(x, y) = 0$, votre objectif est différent. Vous cherchez alors les points (x_0, y_0) où $g(x_0, y_0)$ est vérifié, tout en assurant que la fonction d'altitude h atteigne un extremum. En d'autres termes, vous cherchez les points les plus élevés ou les plus bas sur le chemin donné, tout en respectant la contrainte imposée par le chemin lui-même. C'est ce qu'on appelle l'optimisation sous contrainte, ou liée, que vous verrez dans le cours d'optimisation.

2.6. Optimisation approchée : principe de la méthode "descente de gradient"

Comme il peut être difficile de calculer les points critiques de façon exacte, vous verrez lors du cours d'"Optimisation" au deuxième semestre des méthodes numériques pour un calcul approché. Voici une petite introduction.

Lignes de plus forte pente Le vecteur gradient $\nabla f(x_0, y_0)$ indique la direction de plus grande pente à partir du point (x_0, y_0).

Autrement dit, si l'on veut, à partir d'un point donné (x_0, y_0) de niveau a, passer au niveau $b > a$ le plus vite possible alors il faut démarrer en suivant la direction du gradient $\nabla f(x_0, y_0)$.

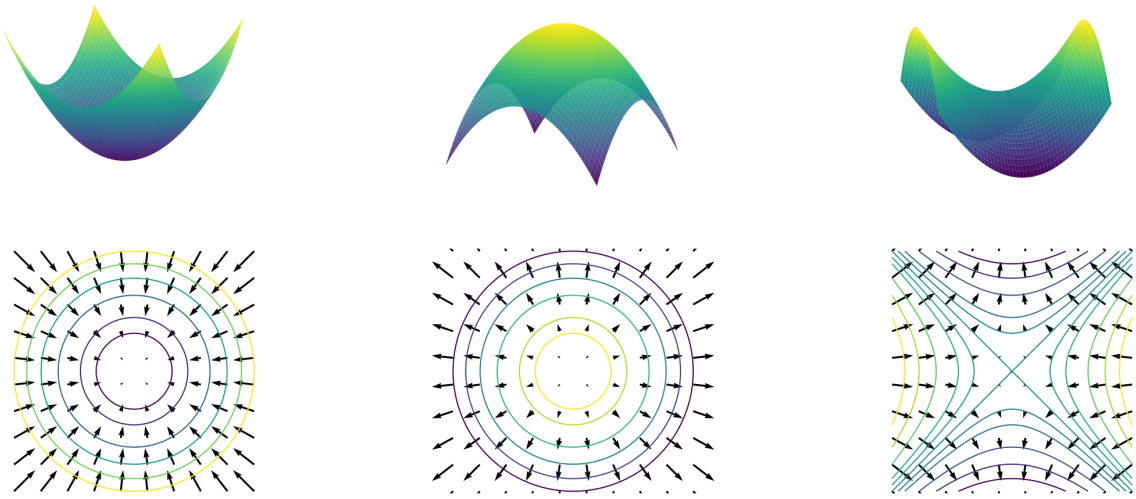


Imaginons une goutte d'eau en haut d'une colline. La goutte d'eau descend en suivant la ligne de plus grande pente et elle s'arrête lorsqu'elle atteint un point bas. C'est exactement ce que fait la descente de gradient : partant d'un point sur une surface, on cherche la pente la plus grande en calculant le gradient et on descend d'un petit pas, on recommence à partir du nouveau point jusqu'à atteindre un minimum local.

© 2024-2027 G. FACCANONI

L'idée de la de la méthode de descente de gradient classique est la suivante : puisque le gradient indique la direction dans laquelle la fonction f croît le plus rapidement, nous allons suivre la direction opposée au gradient, pour laquelle f décroît le plus rapidement. Ainsi, partant d'un point (x_0, y_0) au hasard, on sait dans quelle direction se déplacer pour obtenir un nouveau point (x_1, y_1) en lequel f est plus petite. Et on recommence.

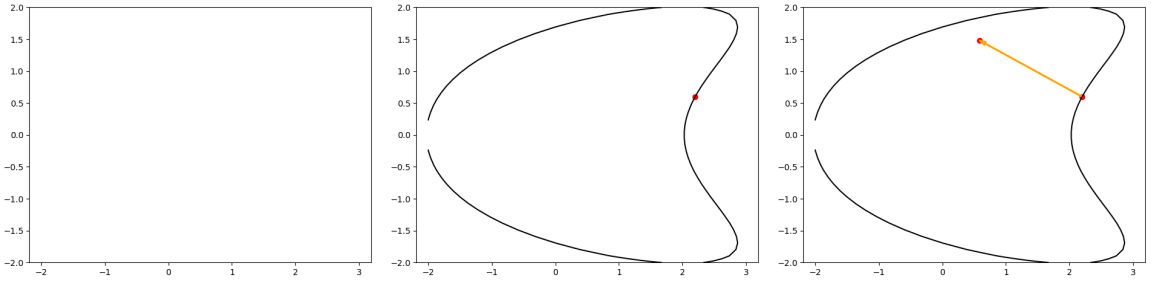
Sur les trois dessins ci-dessous, on a dessiné les lignes de niveau d'une fonction f ainsi que les vecteurs $-\nabla f(x, y)$. On voit que ces vecteurs pointent bien vers le minimum (figure de gauche), s'éloignent d'un maximum (figure centrale), le cas d'un point-selle est spécial (figure de droite). Dans tous les cas, la longueur des vecteurs gradients diminue à l'approche du point critique.



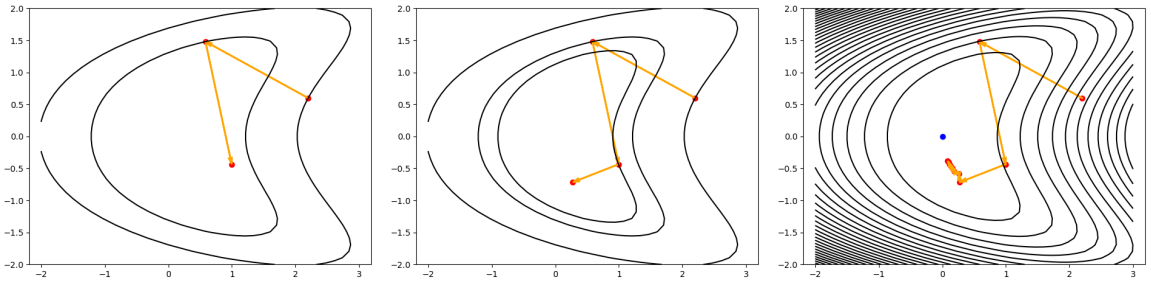
Cas d'un minimum **Cas d'un maximum** **Cas d'un point-selle**

2.6.1. Descente de gradient

On nous donne une fonction f de deux variables (a, b) et nous cherchons un point $(a_{\min}, b_{\min})$ en lequel f atteint un minimum. Voici la méthode expliquée par des dessins sur lesquels ont été tracées des lignes de niveau.



(a) Au départ : rien (b) On part d'un point au hasard (c) On suit l'opposé du gradient



(d) Depuis le nouveau point, on suit l'opposé du gradient (e) On répète le processus (f) La suite converge vers le minimum

FIGURE 2.2. – Illustration de la descente de gradient

Figure (a) Au départ nous n'avons aucune information globale sur f. La seule opération que l'on s'autorise c'est calculer $\nabla f(a,b)$ en certains points.

Figure (b) On choisit un point (a_0,b_0) au hasard. Si on note $c_0 = f(a_0,b_0)$ la valeur de f en ce point, on sait que la ligne de niveau $(f = c_0)$ passe par (a_0,b_0).

Figure (c) On calcule en ce point le gradient de f. On trace l'opposé du gradient : $-\nabla f(a_0,b_0)$. On sait d'une part que la ligne de niveau est orthogonale à ce gradient et surtout que dans la direction de $-\nabla f(a_0,b_0)$, les valeurs de f vont diminuer. On se dirige alors dans la direction opposée au gradient d'un facteur δ (par exemple $\delta = 0.1$). On arrive à un point noté (a_1,b_1). Par construction, si δ est assez petit, la valeur $c_1 = f(a_1,b_1)$ est plus petite que c_0.

Figure (d) On recommence depuis (a_1,b_1). On calcule l'opposé du gradient en (a_1,b_1), on se dirige dans cette nouvelle direction pour obtenir un point (a_2,b_2) où $c_2 = f(a_2,b_2) < c_1$.

Figure (e) On itère le processus pour obtenir une suite de points (a_k,b_k) pour lesquels f prend des valeurs de plus en plus petites.

Figure (f) On choisit de s'arrêter (selon une condition préalablement établie) et on obtient une valeur approchée (a_N,b_N) du point $(a_{\min},b_{\min})$ en lequel f atteint son minimum.

Évidemment avec la vision globale de la fonction, on se dit qu'on aurait pu choisir un point de départ plus près et que certaines directions choisies ne sont pas les meilleures. Mais souvenez-vous que l'algorithme est « aveugle », il ne calcule pas les valeurs de f en les (a_k,b_k) et n'a pas connaissance du comportement de f au voisinage de ces points.

Algorithme de la descente de gradient pour le calcul d'un minimum

Soit une fonction

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto f(x,y) \end{aligned}$$

On se donne un pas $\delta > 0$ et une tolérance $\epsilon > 0$ et on calcule une suite de points $\{(x_k,y_k)\}_k$ par récurrence de la façon suivante :

$$\begin{cases} (x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2 \text{ donné,} \\ (x_{k+1},y_{k+1}) = (x_k,y_k) - \delta \nabla f(x_k,y_k). \end{cases}$$

On s'arrête lorsque $\|\nabla f(x_k,y_k)\| \leq \epsilon$ ou après un certain nombre d'itérations.

Remarque

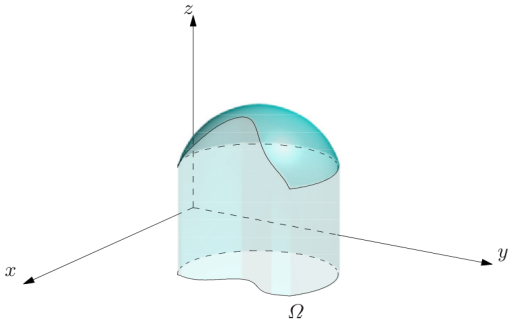
- Plus on choisit le point initial (x_0,y_0) proche d'un minimum local, plus l'algorithme va aboutir rapidement. Mais comme on ne sait pas où est ce minimum local (c'est ce que l'on cherche), le plus simple est de choisir un (x_0,y_0) au hasard.
- Le critère d'arrêt assure qu'en (x_k,y_k) le gradient est très petit. Cela ne garantit pas que ce point soit proche d'un minimum local (et encore moins d'un minimum global). Souvenez-vous : en un minimum local le gradient est nul, mais ce n'est pas parce que le gradient est nul que l'on a atteint un minimum local, cela pourrait être un point-selle voire un maximum local.
- Il est important de calculer $\nabla f(x,y)$ rapidement.
- Le choix du pas δ est crucial. On sait juste que l'on peut choisir δ assez petit de façon à avoir $f(x_{k+1},y_{k+1}) \leq f(x_k,y_k)$ car dans la direction de $-\nabla f(x_k,y_k)$ la fonction f décroît.

  On peut fixer à l'avance un pas δ commun à toutes les itérations, par exemple $\delta = 0.01$. On pourrait également tester à chaque itération plusieurs valeurs de δ par balayage ($\delta = 0.001$, puis $\delta = 0.002\ldots$) et choisir pour δ celui en lequel f prend la plus petite valeur.

2.7. Intégrales doubles

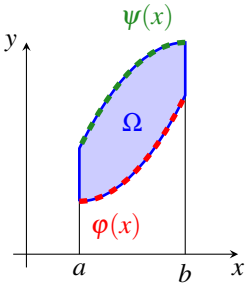
Dans cette dernière section, nous introduisons le concept d'intégrale double, qui est l'intégrale d'une fonction de deux variables. Nous expliquons comment évaluer cette intégrale et illustrons son utilité, notamment pour calculer l'aire d'un domaine d'intégration et le volume d'un solide délimité par le graphe d'une fonction à deux variables.

© 2024-2027 G. Faccanoni



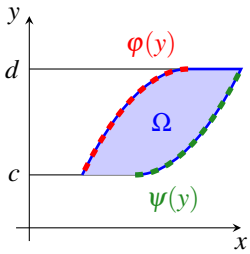
Théorème 2.15 (de FUBINI)
Soient $x \mapsto \varphi(x)$ et $x \mapsto \psi(x)$ deux fonctions continues sur l'intervalle $[a;b]$ avec $\varphi(x) \leq \psi(x)$ pour tout $x \in [a;b]$. Définissons Ω comme l'ensemble des points $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a \leq x \leq b$ et $\varphi(x) \leq y \leq \psi(x)$. Alors l'intégrale double de $f(x,y)$ sur Ω peut être évaluée comme suit :

$$\iint_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$



Si le domaine Ω le permet, on peut échanger les rôles de x et de y. Soient $y \mapsto \varphi(y)$ et $y \mapsto \psi(y)$ deux fonctions continues sur l'intervalle $[c;d]$ avec $\varphi(y) \leq \psi(y)$ pour tout $y \in [c;d]$. Définissons Ω comme l'ensemble des points $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $c \leq y \leq d$ et $\varphi(y) \leq x \leq \psi(y)$. Alors l'intégrale double de $f(x,y)$ sur O$mega$ peut être évaluée comme suit :

$$\iint_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_c^d \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$



Quelquefois, en inversant l'ordre d'intégration sur un domaine élémentaire, une intégrale double qui semble difficile à évaluer peut devenir relativement simple à résoudre.

EXEMPLE
Soient $f(x,y) = xe^{xy}$ et $\mathscr{R} = [0;1] \times [0;2]$. Alors

$$\iint_{\mathscr{R}} xe^{xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^2 xe^{xy}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x\left(\int_0^2 e^{xy}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 x\left[\frac{e^{xy}}{x}\right]_{y=0}^{y=2}\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^1 x\left(\frac{e^{2x}}{x} - \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 e^{2x} - 1\,\mathrm{d}x = \left[\frac{e^{2x}}{2} - x\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{e^2}{2} - 1 - \frac{1}{2} + 0 = \frac{e^2}{2} - \frac{3}{2}.$$

EXEMPLE
On veut calculer le volume du solide qui s'élève sur le domaine Ω du plan Oxy délimité par la droite d'équation $y = 2x$ et la parabole $y = x^2$ et couverte par le paraboloïde $z = x^2 + y^2$.

Première méthode. Le domaine Ω peut être décrit par

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq 2x\right\}.$$

Le volume se calcule alors par

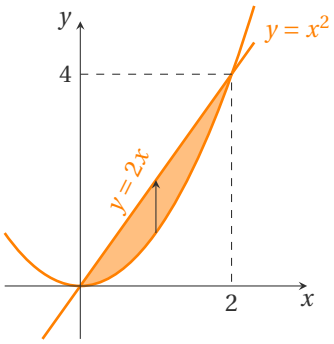
$$\iint_\Omega (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3}\right]_{y=x^2}^{y=2x}\mathrm{d}x = \int_0^2 \left(x^2(2x) + \frac{(2x)^3}{3} - x^2(x^2) - \frac{(x^2)^3}{3}\right)\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^2 \left(\frac{14x^3}{3} - x^4 + \frac{x^6}{3}\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{7x^4}{6} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{21}\right]_{x=0}^{x=2} = \frac{216}{35}.$$

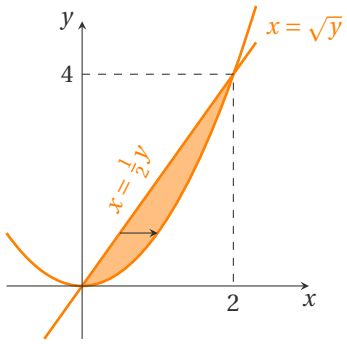
Deuxième méthode. Le domaine Ω peut être décrit par

$$\Omega = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \le y \le 4, \sqrt{y} \le x \le y/2 \right\}.$$

Le volume se calcule alors par

$$\iint_\Omega (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^4 \int_{y/2}^{\sqrt{y}} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^4 \left[\frac{x^3}{3} + xy^2 \right]_{x=y/2}^{x=\sqrt{y}} \mathrm{d}y = \int_0^4 \left(\frac{\sqrt{y}^3}{3} + \sqrt{y}y^2 - \frac{(y/2)^3}{3} - (y/2)y^2 \right) \mathrm{d}y$$
$$= \int_0^4 \left(\frac{y^{3/2}}{3} + y^{5/2} - \frac{13y^3}{24} \right) \mathrm{d}y = \left[\frac{2y^{5/2}}{15} + \frac{2y^{7/2}}{7} - \frac{13y^4}{96} \right]_{y=0}^{y=4} = \frac{216}{35}.$$





Remarque (Cas très particulier)
Si Ω est le rectangle $\Omega = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, a \le x \le b, c \le y \le d \right\}$ et si f est le produit d'une fonction qui ne dépend que de x et d'une fonction qui ne dépend que de y, *i.e.* $f(x,y) = h(x)g(y)$, alors

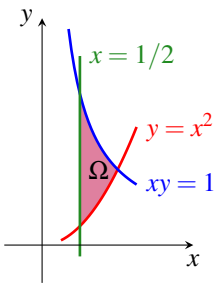
$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \left(\int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x \right) \left(\int_c^d g(y)\,\mathrm{d}y \right).$$

EXEMPLE
Soit $\mathrm{R} = [0;1] \times [0;2]$; on veut calculer l'intégrale double $\iint_\mathrm{R} xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. On a

$$\iint_\mathrm{R} xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^2 xy\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \left(\int_0^1 x\,\mathrm{d}x \right) \left(\int_0^2 y\,\mathrm{d}y \right) = \left[\frac{x^2}{2} \right]_{y=0}^{y=1} \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=2} = \frac{1}{2}.$$

EXEMPLE
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ l'ensemble délimité par les courbes d'équation $x = \frac{1}{2}$, $xy = 1$ et $y = x^2$.

On veut calculer l'intégrale double $\iint_\Omega 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. Cette intégrale mesure l'aire de la zone coloriée et on peut la calculer par plusieurs méthodes. Pour cela, il faut tout d'abord calculer les points d'intersection des courbes qui délimitent Ω :



$$\begin{cases} xy = 1, \\ y = x^2, \end{cases} \iff (x,y) = (1,1);$$

$$\begin{cases} x = 1/2, \\ y = x^2, \end{cases} \iff (x,y) = (1/2, 1/4);$$

$$\begin{cases} x = 1/2, \\ xy = 1, \end{cases} \iff (x,y) = (1/2, 2).$$

1. On calcule l'intégrale double $\iint_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ avec $f(x,y) = 1$ pour tout $(x,y) \in \Omega$:

© 2024-2027 G. FACCANONI

- soit par

$$\iint_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{1/2}^{1}\int_{x^2}^{1/x} 1\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{1/2}^{1} [y]_{x^2}^{1/x}\,\mathrm{d}x = \int_{1/2}^{1} \frac{1}{x} - x^2\,\mathrm{d}x = \ln(1) - \frac{1}{3} + \ln(2) + \frac{1}{24} = \ln(2) - \frac{7}{8};$$

- soit par

$$\begin{aligned}\iint_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_{1/4}^{1}\int_{1/2}^{\sqrt{y}} 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_{1}^{2}\int_{1/2}^{1/y} 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{1/4}^{1} [x]_{1/2}^{\sqrt{y}}\,\mathrm{d}y + \int_{1}^{2} [x]_{1/2}^{1/y}\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{1/4}^{1} \sqrt{y} - \frac{1}{2}\,\mathrm{d}y + \int_{1}^{2} \frac{1}{y} - \frac{1}{2}\,\mathrm{d}y = \left[\frac{y^{3/2}}{3/2} - \frac{y}{2}\right]_{1/4}^{1} + \left[\ln(y) - \frac{y}{2}\right]_{1}^{2} = \ln(2) - \frac{7}{24}.\end{aligned}$$

2. On calcul l'aire comme au lycée :

$$\int_{1/2}^{1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x - \int_{1/2}^{1} x^2\,\mathrm{d}x = [\ln(x)]_{1/2}^{1} - \left[\frac{x^3}{3}\right]_{1/2}^{1} = \ln(1) + \ln(2) - \frac{1}{3} + \frac{1}{24} = \ln(2) - \frac{7}{24}.$$

Proposition 2.16 (Changement de variables)
Soient $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $\psi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ deux bijections de classe $\mathscr{C}^1$. Considérons la fonction de changement de variables

$$\begin{aligned}&\mathrm{F}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\\ &(u,v) \mapsto \big(x = \varphi(u,v), y = \psi(u,v)\big)\end{aligned}$$

Soit $f(x,y)$ une fonction continue sur un domaine D fermé et borné, alors

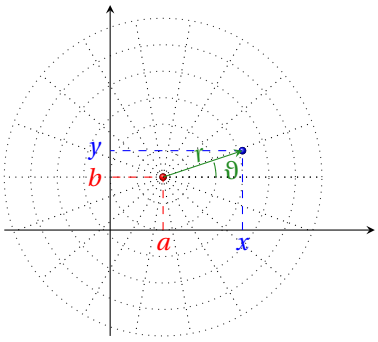
$$\iint_{\mathrm{D}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\mathrm{D}} f(\varphi(u,v),\psi(u,v))\cdot|\mathrm{J}|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v,$$

où $\mathrm{J} = \partial_u\varphi\partial_v\psi - \partial_v\varphi\partial_u\psi$, appelé jacobien, est le déterminant de la matrice $\begin{bmatrix}\partial_u\varphi & \partial_v\varphi\\ \partial_u\psi & \partial_v\psi\end{bmatrix}$ appelée jacobienne de la fonction F.

Cas des coordonnées polaires

$$(r,\vartheta) \mapsto \big(x = a + r\cos(\vartheta), y = b + r\sin(\vartheta)\big)$$

où $(r,\vartheta) \in \mathbb{R}_+^* \times [0;2\pi[$ sont les coordonnées du point $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(a,b)\}$.



Cette application a pour jacobien

$$\begin{aligned}\mathrm{J} &= \det\begin{pmatrix}\partial_r x & \partial_\vartheta x\\ \partial_r y & \partial_\vartheta y\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}\cos(\vartheta) & -r\sin(\vartheta)\\ \sin(\vartheta) & r\cos(\vartheta)\end{pmatrix}\\ &= r\cos^2(\vartheta) + r\sin^2(\vartheta) = r\end{aligned}$$

donc

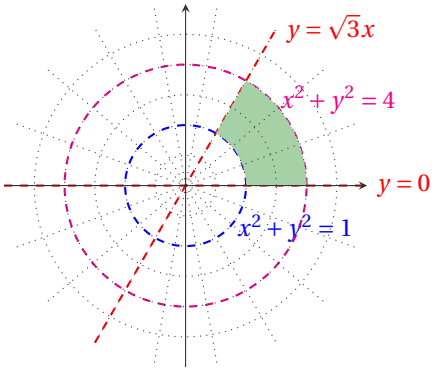
$$\iint_{\mathrm{D}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{\mathrm{D}} f(a + r\cos(\vartheta), b + r\sin(\vartheta))\cdot r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\vartheta.$$

EXEMPLE
On veut intégrer la fonction $f(x,y) = \dfrac{1}{1+x^2+y^2}$ sur l'ensemble

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 < y < \sqrt{3}x \text{ et } 1 < x^2 + y^2 < 4\right\}.$$

Si on passe en coordonnées polaires on a

$$\Omega = \left\{(r,\vartheta) \in \mathbb{R}_+^* \times [0;2\pi[\;\middle|\; 0 < \vartheta < \frac{\pi}{3} \text{ et } 1 < r < 2\right\}.$$



On doit alors calculer

$$\int_\Omega \frac{1}{1+r^2}\, r\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\vartheta = \int_0^{\pi/3}\int_1^2 \frac{r}{1+r^2}\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\vartheta = \left(\int_0^{\pi/3} \mathrm{d}\vartheta\right)\left(\int_1^2 \frac{r}{1+r^2}\, \mathrm{d}r\right) = \frac{\pi}{3}\left[\frac{\ln(1+r^2)}{2}\right]_1^2 = \frac{\pi \ln(5/2)}{6}.$$

EXEMPLE

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, \mathrm{d}x = \sqrt{\left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, \mathrm{d}x\right)\left(\int_0^{+\infty} e^{-y^2}\, \mathrm{d}y\right)} = \sqrt{\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-x^2-y^2}\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x} = \sqrt{\int_0^{+\infty}\int_0^{\pi/2} r e^{-r^2}\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}r}$$
$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}\int_0^{+\infty} r e^{-r^2}\, \mathrm{d}r} = \sqrt{\frac{\pi}{2}\left[-\frac{e^{-r^2}}{2}\right]_0^{+\infty}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

2.7.1. Applications

Définition 2.17 (Aire)
L'intégrale double $\iint_A 1\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$ mesure l'aire de A.

EXEMPLE (AIRE D'UN DISQUE)
Calculons l'aire d'un disque D_R de rayon $R > 0$: on se place dans un système de coordonnées centré sur le centre du disque, qui a donc pour équation $x^2 + y^2 \leq R^2$. Alors

$$D_R = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2+y^2 \leq R^2 \right\} = \left\{ (r,\vartheta) \in \mathbb{R}_+^* \times [0;2\pi[\,\middle|\, r \leq R^2 \right\}$$

et

$$\iint_{D_R} 1\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\int_0^R r\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\vartheta = \int_0^{2\pi}\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^R \mathrm{d}\vartheta = \frac{R^2}{2}\int_0^{2\pi} 1\, \mathrm{d}\vartheta = \pi R^2.$$

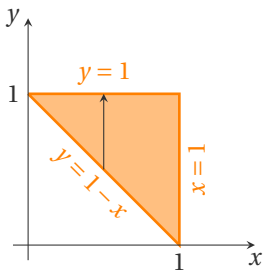
Remarquons que dans ce cas on aurait pu utiliser directement ce qu'on a appris au premier semestre : si nous ne conservons que les valeurs positives de y, on obtiendra un demi-disque, ensemble des points :

$$\left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, -R \leq x \leq R \text{ et } 0 \leq y \leq \sqrt{R^2-x^2} \right\}.$$

C'est la surface sous la courbe de la fonction $x \mapsto f(x) = \sqrt{R^2-x^2}$ dans l'intervalle $[-R;R]$. Comme c'est une fonction positive, l'aire correspondante égale l'intégrale $\int_{-R}^R \sqrt{R^2-x^2}\, \mathrm{d}x$. Pour calculer celle-ci, effectuons le changement de variable $x = R\cos(t)$. On souhaite que x varie dans l'intervalle $[-R;R]$, on prend donc t variant dans l'intervalle $[0;\pi]$ par exemple. Là, la fonction $\varphi(t) = R\cos(t)$ est continûment dérivable sur $[0;\pi]$. De plus $\sqrt{R^2-x^2} = R\sin(t)$ car le sinus est positif ou nul sur $[0;\pi]$. On a donc, en effectuant ce changement de variable

$$\begin{aligned}
&\int_{-R}^R \sqrt{R^2-x^2}\, \mathrm{d}x \qquad\qquad\qquad\

Par exemple, supposons qu'une charge est distribuée sur le domaine A de la figure ci-contre de telle sorte que la densité de charge en (x,y) est $\sigma(x,y)=xy$, mesurée en coulombs par mètre carré ($\mathrm{C\,m^{-2}}$). Alors la charge totale est



$$\begin{aligned}\mathrm{Q}&=\iint_{\mathrm{A}}\sigma(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^1\int_{1-x}^1 xy\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x=\int_0^1\left[x\frac{y^2}{2}\right]_{y=1-x}^{y=1}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\int_0^1 x\left(1-(1-x)^2\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1\left(2x^2-x^3\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4\right]_0^1=\frac{5}{24}.\end{aligned}$$

La charge totale est donc de $\frac{5}{24}$C.

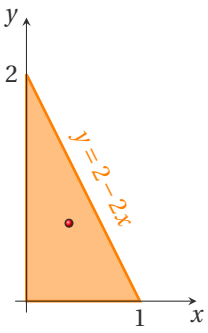
Définition 2.19 (Centre de gravité)
Si $f(x,y)$ est la densité au point (x,y), le centre de gravité de la partie A se trouve en $(x_{\mathrm{G}},y_{\mathrm{G}})$ ainsi définis

$$x_{\mathrm{G}}=\frac{\iint_{\mathrm{A}}xf(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\iint_{\mathrm{A}}f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y},\qquad y_{\mathrm{G}}=\frac{\iint_{\mathrm{A}}yf(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\iint_{\mathrm{A}}f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}.$$

Physiquement cela signifie que la plaque A se comporte comme si toute sa masse était concentrée en son centre d'inertie. Par exemple, elle est en équilibre horizontal lorsqu'elle repose sur son centre d'inertie.

EXEMPLE
On veut déterminer la masse et le centre d'inertie d'une fine plaque de métal triangulaire dont les sommets sont en $(0,0)$, $(1,0)$ et $(0,2)$, sachant que la fonction densité est $f(x,y)=1+3x+y$.

Le triangle est représenté dans la figure ci-contre (l'équation de la frontière supérieure est $y=2-2x$). La masse de la plaque de métal est



$$\begin{aligned}m&=\iint_{\mathrm{A}}f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^1\int_0^{2-2x}(1+3x+y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^1\left[y+3xy+\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=2-2x}\mathrm{d}x=\int_0^1\left[2-2x+3x(2-2x)+\frac{(2-2x)^2}{2}\right]\mathrm{d}x\\&=4\int_0^1(1-x^2)\,\mathrm{d}x=4\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{8}{3}.\end{aligned}$$

Le moment de la plaque de métal entière par rapport à l'axe Ox est

$$\iint_{\mathrm{A}}xf(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^1\int_0^{2-2x}x(1+3x+y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x=\int_0^1\left[xy+3x^2y+\frac{xy^2}{2}\right]_{y=0}^{y=2-2x}\mathrm{d}x=4\int_0^1(x-x^3)\,\mathrm{d}x=4\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right]_0^1=1$$

et le moment de la plaque de métal entière par rapport à l'axe Oy est

$$\begin{aligned}\iint_{\mathrm{A}}yf(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y&=\int_0^1\int_0^{2-2x}y(1+3x+y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x=\int_0^1\left[\frac{y^2}{2}+3x\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}\right]_{y=0}^{y=2-2x}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\int_0^1(7-9x-3x^2+5x^3)\,\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{3}\left[7x-\frac{9}{2}x^2-x^3+\frac{5}{4}x^4\right]_0^1=\frac{11}{6}.\end{aligned}$$

Les coordonnées du centre d'inertie sont donc $\left(\frac{1}{\frac{8}{3}},\frac{\frac{11}{6}}{\frac{8}{3}}\right)=\left(\frac{3}{8},\frac{11}{16}\right)$.

2.8. Fonctions prédéfinies en Python

2.8.1. Calcul formel avec sympy

Avec `sympy`, nous pouvons effectuer des calculs symboliques tels que le gradient et la matrice hessienne d'une fonction donnée. Il est également possible de trouver les points critiques de cette fonction. Si ces points critiques existent et sont calculables exactement, nous pouvons ensuite évaluer la matrice hessienne en chacun de ces points pour déterminer leur nature.

```
import sympy as sp

# Définition des symboles
x, y = sp.symbols('x y', real=True)

# La fonction
f = lambda x,y : 2*x-y**3+x**2*y
print(f"$f(x,y) = {sp.latex(f(x,y))}$\n\n")

# Le gradient
df_dx = sp.diff(f(x,y),x)
df_dy = sp.diff(f(x,y),y)
print(f"$\\nabla f(x,y) = ({sp.latex(df_dx)},{sp.latex(df_dy)})^T$\n\n")

# Équation du plan tangent en (1, 1)
x0, y0 = 1, 1
plan_tangent = f(x0,y0) + (x-x0)*df_dx.subs({x:x0,y:y0}) +
 ↪  (y-y0)*df_dy.subs({x:x0,y:y0})
print(f"Équation du plan tangent en ({x0}, {y0}) :
 ↪  ${sp.latex(plan_tangent)}$\n\n")

# Points critiques
critical_points = sp.solve([df_dx, df_dy], (x, y))
print(f"$\\text{{Points critiques}} = {sp.latex(critical_points)}$\n\n")

# La matrice Hessienne
d2f_dxx = sp.diff(df_dx,x)
d2f_dxy = sp.diff(df_dx,y)
d2f_dyx = sp.diff(df_dy,x)
d2f_dyy = sp.diff(df_dy,y)
hessian = sp.Matrix([[d2f_dxx, d2f_dxy], [d2f_dyx, d2f_dyy]])
print(f"$H(x,y) = {sp.latex(hessian)}$\qquad")

det_hessian = d2f_dxx*d2f_dyy - d2f_dxy*d2f_dyx
print(f"$\\det(H(x,y)) = {sp.latex(det_hessian)}$\n\n")

print("Analyse de la nature des points critiques\n")
for x_c,y_c in critical_points:
    hessian_at_critical = sp.Matrix([[d2f_dxx, d2f_dxy], [d2f_dyx,
     ↪  d2f_dyy]]).subs({x:x_c, y:y_c})
    det_hessian_at_critical = det_hessian.subs({x:x_c, y:y_c})
    print(f"$(x_c,y_c) = ({sp.latex(x_c)},{sp.latex(y_c)})$\qquad")
    print(f"$H(x_c,y_c) = {sp.latex(hessian_at_critical)}$\qquad")
    print(f"$\\det(H(x_c,y_c)) = {sp.latex(det_hessian_at_critical)}$\n")
```


© 2024-2027 G. Faccanoni

De la même manière, on peut lui demander de calculer des intégrales. Voici le calcul du deuxième exemple :

$$\iint_\Omega (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3}\right]_{y=x^2}^{y=2x} \mathrm{d}x = \int_0^2 \left(x^2(2x) + \frac{(2x)^3}{3} - x^2(x^2) - \frac{(x^2)^3}{3}\right) \mathrm{d}x$$
$$= \int_0^2 \left(\frac{14x^3}{3} - x^4 - \frac{x^6}{3}\right) \mathrm{d}x = \left[\frac{7x^4}{6} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{21}\right]_{x=0}^{x=2} = \frac{216}{35}.$$

```python
import sympy as sp

# Définition des symboles
x, y = sp.symbols('x y', real=True)

# Définition des bornes du domaine
y_min = x**2
y_max = 2*x

# Fonction à intégrer
f = x**2 + y**2

# Intégrale intérieure (par rapport à y)
inner = sp.integrate(f, (y, y_min, y_max))

# Intégrale extérieure (par rapport à x)
outer = sp.integrate(inner, (x, 0, 2))

# Affichage
print(f"$$\\int_0^2 \\int_{{{sp.latex(y_min)}}}^{{{sp.latex(y_max)}}}
 ↪  ({sp.latex(f)})\\dy\\dx = "
      f"\\int_0^2 {sp.latex(inner)}\\dx = {sp.latex(outer)}$$")
```

$$\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^2 -\frac{x^6}{3} - x^4 + \frac{14x^3}{3}\,\mathrm{d}x = \frac{216}{35}$$

2.8.2. Affichage avec matplotlib

Pour visualiser une fonction de deux variables, nous utiliserons `matplotlib`. Nous commencerons par afficher les courbes de niveau, puis nous verrons comment représenter la surface en trois dimensions. Il existe de nombreuses variantes et options de coloriage possibles ; pour plus de détails, consultez la documentation officielle.

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

f = lambda x,y : 2*x-y**3+x**2*y

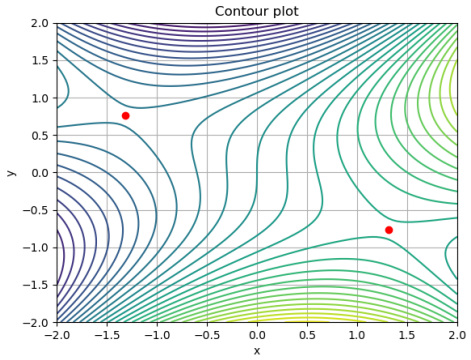
x = np.linspace(-2,2,100)
y = np.linspace(-2,2,100)
X,Y = np.meshgrid(x,y)
Z = f(X,Y)

plt.figure()
plt.contour(X,Y,Z, levels=30)
#contour = plt.contour(X,Y,Z, levels=30)
#plt.clabel(contour, inline=True, fontsize=8)
```

```
# plt.contourf(X,Y,Z, levels=30)

xx_c = [-3**0.25, 3**0.25]
yy_c = [3**(-0.25), -3**(-0.25)]
plt.scatter( xx_c, yy_c, color='red')

plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.title('Contour plot')
plt.grid(True)
plt.savefig('contour_plot.png')
# plt.show()
```



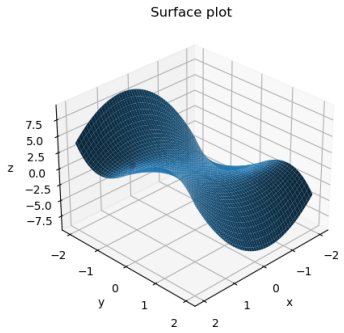

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D

f = lambda x,y : 2*x-y**3+x**2*y

x = np.linspace(-2,2,100)
y = np.linspace(-2,2,100)
X,Y = np.meshgrid(x,y)
Z = f(X,Y)

plt.figure()
ax = plt.axes(projection='3d')
ax.view_init(30, 45)
ax.plot_surface(X, Y, Z)
xx_c = [-3**0.25, 3**0.25]
yy_c = [3**(-0.25), -3**(-0.25)]
zz_c = [f(x_c,y_c) for x_c,y_c in zip(xx_c,yy_c)]
ax.scatter(xx_c, yy_c, zz_c, color='red')
ax.set_xlabel('x')
ax.set_ylabel('y')
ax.set_zlabel('z')
ax.set_title('Surface plot')
plt.savefig('surface_plot.png')
# plt.show()
```


© 2024-2027 G. Faccanoni



2.8.3. Descente de gradient

Essayons de voir comment la descente de gradient permet de s'approcher du minimum de la fonction $f(x,y) = x^2 + y^2$

```
import sympy as sp
x, y = sp.symbols('x y', real=True)

f = lambda x, y: x**2 + y**2
grad_f = [sp.diff(f(x, y), x), sp.diff(f(x, y), y)]

# Paramètres de la descente de gradient
eps = 1 / sp.S(100)
delta = 1 / sp.S(10)

# Initialisation
print(f"{'k':<5} {'xk':<15} {'yk':<15} {'||grad_f||':<15}")
xk, yk = 1 , 1
grad_f_k = [g.subs({x: xk, y: yk}) for g in grad_f]
norm_grad = sp.sqrt(sum(g**2 for g in grad_f_k))
k = 0
print(f"{k:<5} {float(xk):<15.10f} {float(yk):<15.10f}
 ↪ {float(norm_grad):<15.10f}")
x_vals, y_vals, z_vals = [xk], [yk], [f(xk,yk)]

# Boucle de la descente de gradient
while sp.sqrt(sum(g**2 for g in grad_f_k)) >= eps:
    xk = xk - delta * grad_f_k[0]
    yk = yk - delta * grad_f_k[1]
    grad_f_k = [g.subs({x: xk, y: yk}) for g in grad_f]
    k += 1
    norm_grad = sp.sqrt(sum(g**2 for g in grad_f_k))
    print(f"{k:<5} {float(xk):<15.10f} {float(yk):<15.10f}
     ↪ {float(norm_grad):<15.10f}")
    x_vals.append(float(xk))
    y_vals.append(float(yk))
    z_vals.append(float(f(xk,yk)))

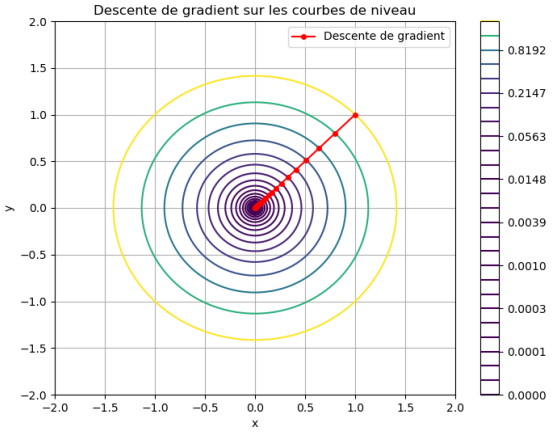
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
x_range = np.linspace(-2, 2, 400)
y_range = np.linspace(-2, 2, 400)
X, Y = np.meshgrid(x_range, y_range)
Z = f(X,Y)
```

```
plt.figure(figsize=(8, 6))
contour = plt.contour(X, Y, Z, levels=sorted(z_vals), cmap='viridis')
plt.colorbar(contour)

# Tracer les étapes de la descente de gradient
plt.plot(x_vals, y_vals, 'ro-', label='Descente de gradient', markersize=4)
plt.title("Descente de gradient sur les courbes de niveau")
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.savefig('descente_sympy.png')
plt.show()
```

k	xk	yk	||grad_f||
0	1.0000000000	1.0000000000	2.8284271247
1	0.8000000000	0.8000000000	2.2627416998
2	0.6400000000	0.6400000000	1.8101933598
3	0.5120000000	0.5120000000	1.4481546879
4	0.4096000000	0.4096000000	1.1585237503
5	0.3276800000	0.3276800000	0.9268190002
6	0.2621440000	0.2621440000	0.7414552002
7	0.2097152000	0.2097152000	0.5931641602
8	0.1677721600	0.1677721600	0.4745313281
9	0.1342177280	0.1342177280	0.3796250625
10	0.1073741824	0.1073741824	0.3037000500
11	0.0858993459	0.0858993459	0.2429600400
12	0.0687194767	0.0687194767	0.1943680320
13	0.0549755814	0.0549755814	0.1554944256
14	0.0439804651	0.0439804651	0.1243955405
15	0.0351843721	0.0351843721	0.0995164324
16	0.0281474977	0.0281474977	0.0796131459
17	0.0225179981	0.0225179981	0.0636905167
18	0.0180143985	0.0180143985	0.0509524134
19	0.0144115188	0.0144115188	0.0407619307
20	0.0115292150	0.0115292150	0.0326095446
21	0.0092233720	0.0092233720	0.0260876357
22	0.0073786976	0.0073786976	0.0208701085
23	0.0059029581	0.0059029581	0.0166960868
24	0.0047223665	0.0047223665	0.0133568695
25	0.0037778932	0.0037778932	0.0106854956
26	0.0030223145	0.0030223145	0.0085483965

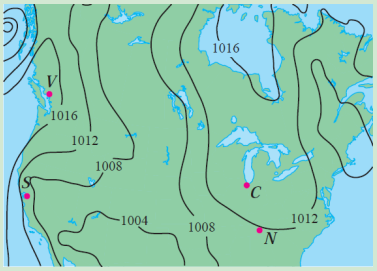
© 2024-2027 G. Faccanoni


Descente de gradient sur les courbes de niveau
Descente de gradient
x
y
0.8192
0.2147
0.0563
0.0148
0.0039
0.0010
0.0003
0.0001
0.0000

2.9. Exercices

Exercice 2.1
Dans la figure ci-contre on a tracé les isobares de l'Amérique du Nord au 12 août 2008. La pression indiquée est mesurée en millibars (mbar).

1. Donner une estimation de la pression
   - à Nashville (point N),
   - à Chicago (point C),
   - à San Francisco (point S)
   - et à Vancouver (point V).
2. Dans quelle ville le vent est le plus fort ?



Correction

1. - Au point N la pression est de 1012 mbar environ,
   - au point C la pression est de 1013 mbar environ,
   - au point S la pression est de 1010 mbar environ,
   - au point V la pression est comprise entre 1016 mbar et 1020 mbar ou entre 1012 mbar et 1016 mbar.
2. Le vent est plus fort à San Francisco car les lignes de pression sont le plus rapprochées.

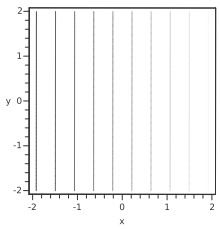
Exercice 2.2
Déterminer les courbes de niveau des fonctions suivantes :

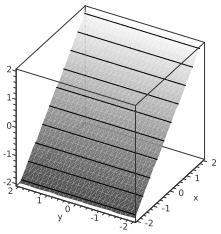
$$f(x,y)=x, \qquad f(x,y)=y+1, \qquad f(x,y)=x+y-1, \qquad f(x,y)=e^{y-x^2}, \qquad f(x,y)=y-\cos(x).$$

Esquissez ensuite leurs graphes (le graphe peut être vu comme un empilement de courbes de niveau qui forment une surface dans $\mathbb{R}^3$).

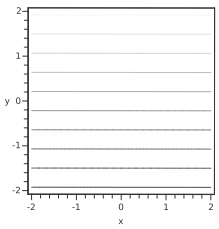
Correction

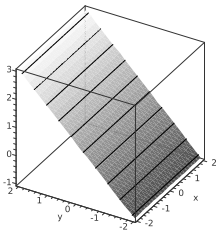
- $f(x,y)=x$:
  $f(x,y)=\kappa$ ssi $x=\kappa$, les courbes de niveau sont des droites verticales et la surface représentative de f est un plan.



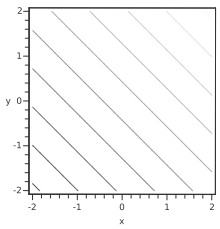


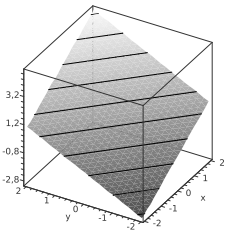
- $f(x,y)=y+1$:
  $f(x,y)=\kappa$ ssi $y=\kappa-1$, les courbes de niveau sont des droites horizontales et la surface représentative de f est un plan.





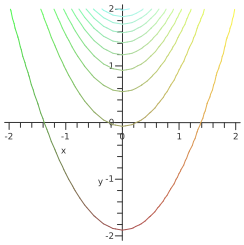
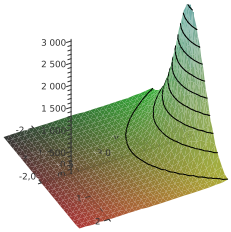
- $f(x,y)=x+y-1$:
  $f(x,y)=\kappa$ ssi $y=-x+(\kappa+1)$, les courbes de niveau sont des droites de pente -1 et la surface représentative de f est un plan.



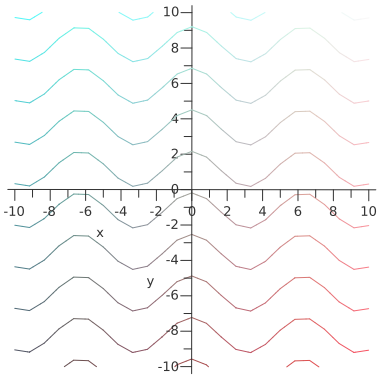
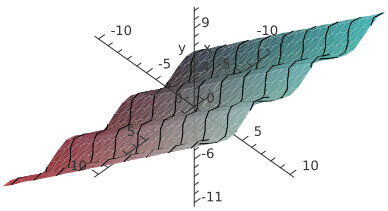


© 2024-2027 G. Faccanoni

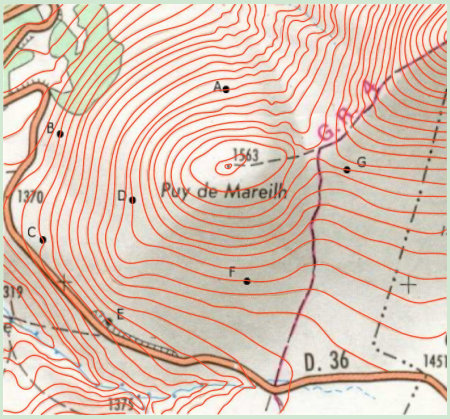
- $f(x,y) = e^{y-x^2}$:
  $f(x,y) = \kappa$ ssi $y = x^2 + \ln(\kappa)$, les courbes de niveau sont des paraboles. On observe notamment la croissance exponentielle marquée lorsque les valeurs prises par y sont grandes et celles prises par $|x|$ sont petites.

- $f(x,y) = y - \cos(x)$:
  $f(x,y) = \kappa$ ssi $y = \cos(x) + \kappa$

Exercice 2.3 (Cartes topographiques du relief)



Sur une *carte topographique*, les courbes de niveau désignent les points de même altitude. On observe sur l'extrait de carte ci-contre de l'institut Géographique National (IGN), des courbes qui donnent une idée du relief (Massif du Sancy). Elles représentent des coupes horizontales successives du terrain à des altitudes qui varient de 10 mètres en 10 mètres. Tous les points de même altitude sont situés sur la même courbe de niveau.

1. Compléter le tableau

Point	A	B	C	D	E	F	G
Altitude		1370					

2. Lorsque les courbes de niveau se resserrent, que peut-on dire du relief?
3. La rivière coule-t-elle d'est en ouest ou vice-versa?

Correction

1. On a

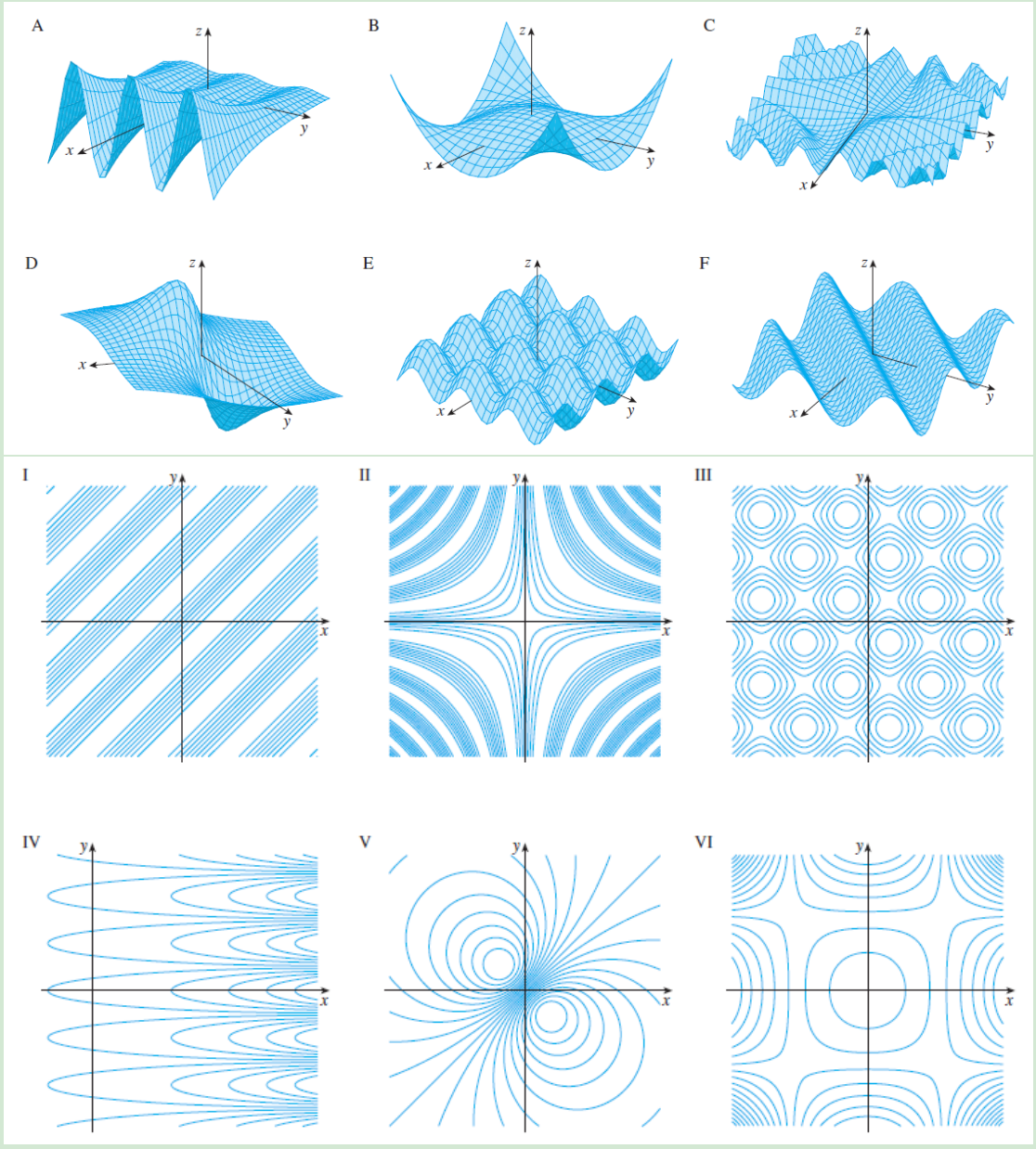
Point	A	B	C	D	E	F	G
Altitude	1470	1370	1380	1470	1400	1460	1520

2. Les endroits du relief où les pentes sont plus escarpées ou plus douces correspondent respectivement aux courbes de niveau très rapprochées ou très distantes.

3. La rivière coule de l'est à l'ouest.

Exercice 2.4
Associer chaque fonction (1-6) à sa surface (A-F) et à ses courbes de niveau (I-VI). Commencer par associer chaque surface à ses courbes de niveau.

1. $f(x,y) = \sin(xy)$
2. $f(x,y) = \sin(x-y)$
3. $f(x,y) = (1-x^2)(1-y^2)$
4. $f(x,y) = \dfrac{x-y}{1+x^2+y^2}$
5. $f(x,y) = e^x \cos(y)$
6. $f(x,y) = \sin(x) - \sin(y)$



Correction

1. C-II : la fonction est périodique en x et en y ; f ne change pas quand on échange x et y, *i.e.* le graphe est symétrique par rapport au plan d'équation $y = x$; $f(0,y) = f(x,0) = 0$.
2. F-I : la fonction est périodique en x et en y ; f est constante si $y = x + \kappa$.
3. B-VI : $f(\pm 1, y) = f(x, \pm 1) = 0$; la trace dans le plan xz est $z = 1 - x^2$ et dans le plan yz est $z = 1 - y^2$.
4. D-V : $f(x,x) = 0$; $f(x,y) > 0$ si $x > y$; $f(x,y) < 0$ si $x < y$.

© 2024-2027 G. Faccanoni

5. A-IV : la fonction est périodique en y ;
6. E-III : la fonction est périodique en x et en y.

Exercice 2.5
Calculer toutes les dérivées partielles d'ordre 1 des fonctions données :

1. $f(x,y) = y^5 - 3xy$
2. $f(x,y) = x^2+3xy^2-6y^5$
3. $f(x,y) = x\cos(e^{xy})$
4. $f(x,y) = \frac{x}{y}$
5. $f(x,y) = x^y$
6. $f(x,y,z) = x\cos(xz) + \ln(2-\sin^2(y+z))$
7. $f(x,t) = e^{-t}\cos(\pi x)$
8. $z(x,y) = (2x+3y)^{10}$
9. $f(x,y) = \frac{ax+by}{cx+dy}$
10. $\mathrm{F}(x,y) = \int_y^x \cos(e^t)\,\mathrm{d}t$

Correction

1. $\partial_x f(x,y) = -3y$ et $\partial_y f(x,y) = 5y^4 - 3x$
2. $\partial_x f(x,y) = 2x + 3y^2$ et $\partial_y f(x,y) = 6xy - 30y^4$
3. $\partial_x f(x,y) = \cos(e^{xy}) - xye^{xy}\sin(e^{xy})$ et $\partial_y f(x,y) = -x^2e^{xy}\sin(e^{xy})$
4. $\partial_x f(x,y) = 1/y$ et $\partial_y f(x,y) = -x/y^2$
5. $\partial_x f(x,y) = yx^y/x$ et $\partial_y f(x,y) = \ln(x)x^y$ ⚠ $x^y = e^{y\ln(x)}$ donc $x>0$
6. $\partial_x f(x,y,z) = \cos(xz) - xz\sin(xz)$, $\partial_y f(x,y,z) = \dfrac{-2\sin(y+z)\cos(y+z)}{2-\sin^2(y+z)}$ et $\partial_z f(x,y,z) = -x^2\sin(xz) + \dfrac{-2\sin(y+z)\cos(y+z)}{2-\sin^2(y+z)}$
7. $\partial_x f(x,t) = -\pi e^{-t}\sin(\pi x)$ et $\partial_t f(x,t) = -e^{-t}\cos(\pi x)$
8. $\partial_x z(x,y) = 20(2x+3y)^9$ et $\partial_y z(x,y) = 30(2x+3y)^9$
9. $\partial_x f(x,y) = \frac{(ad-bc)y}{(cx+dy)^2}$ et $\partial_y f(x,y) = \frac{(bc-ad)x}{(cx+dy)^2}$
10. $\partial_x \mathrm{F}(x,y) = \cos(e^x)$ et $\partial_y \mathrm{F}(x,y) = -\cos(e^y)$

On vérifie nos calculs avec le module `sympy` de python :

```
import sympy as sp
sp.init_printing()

x, y, z, t, a, b, c, d = sp.symbols('x y z t a b c d', real=True)

functions = [
    (y**5 - 3*x*y, (x, y)),
    (x**2 + 3*x*y**2 - 6*y**5, (x, y)),
    (x*sp.cos(sp.exp(x*y)), (x, y)),
    (x/y, (x, y)),
    (x**y, (x, y)),
    (x*sp.cos(x*z) + sp.ln(2 - sp.sin(y + z)**2), (x, y, z)),
    (sp.exp(-t)*sp.cos(sp.pi*x), (x, t)),
    ((2*x + 3*y)**10, (x, y)),
    ((a*x + b*y)/(c*x + d*y), (x, y)),
    (sp.Integral(sp.cos(sp.exp(t)), (t, y, x)), (x, y))
]

for i, (f, vars) in enumerate(functions, 1):
    var_list = ", ".join(sp.latex(v) for v in vars)
    fx_name = f"f_{{{i}}}({var_list})"

    line = f"{fx_name} = {sp.latex(f)}"

    for var in vars:
        deriv = sp.diff(f, var)
        line += f",\\quad \\partial_{{{sp.latex(var)}}}{fx_name} =
        ↪ {sp.latex(deriv)}"
```

```
    print(f"${line}$\n")
```

$f_1(x,y) = -3xy + y^5$, $\partial_x f_1(x,y) = -3y$, $\partial_y f_1(x,y) = -3x + 5y^4$
$f_2(x,y) = x^2 + 3xy^2 - 6y^5$, $\partial_x f_2(x,y) = 2x + 3y^2$, $\partial_y f_2(x,y) = 6xy - 30y^4$
$f_3(x,y) = x\cos(e^{xy})$, $\partial_x f_3(x,y) = -xye^{xy}\sin(e^{xy}) + \cos(e^{xy})$, $\partial_y f_3(x,y) = -x^2 e^{xy}\sin(e^{xy})$
$f_4(x,y) = \frac{x}{y}$, $\partial_x f_4(x,y) = \frac{1}{y}$, $\partial_y f_4(x,y) = -\frac{x}{y^2}$
$f_5(x,y) = x^y$, $\partial_x f_5(x,y) = \frac{x^y y}{x}$, $\partial_y f_5(x,y) = x^y \log(x)$
$f_6(x,y,z) = x\cos(xz) + \log\left(2 - \sin^2(y+z)\right)$, $\partial_x f_6(x,y,z) = -xz\sin(xz) + \cos(xz)$, $\partial_y f_6(x,y,z) = -\frac{2\sin(y+z)\cos(y+z)}{2-\sin^2(y+z)}$, $\partial_z f_6(x,y,z) = -x^2\sin(xz) - \frac{2\sin(y+z)\cos(y+z)}{2-\sin^2(y+z)}$
$f_7(x,t) = e^{-t}\cos(\pi x)$, $\partial_x f_7(x,t) = -\pi e^{-t}\sin(\pi x)$, $\partial_t f_7(x,t) = -e^{-t}\cos(\pi x)$
$f_8(x,y) = (2x+3y)^{10}$, $\partial_x f_8(x,y) = 20(2x+3y)^9$, $\partial_y f_8(x,y) = 30(2x+3y)^9$
$f_9(x,y) = \frac{ax+by}{cx+dy}$, $\partial_x f_9(x,y) = \frac{a}{cx+dy} - \frac{c(ax+by)}{(cx+dy)^2}$, $\partial_y f_9(x,y) = \frac{b}{cx+dy} - \frac{d(ax+by)}{(cx+dy)^2}$
$f_{10}(x,y) = \int_y^x \cos(e^t)\,dt$, $\partial_x f_{10}(x,y) = \cos(e^x)$, $\partial_y f_{10}(x,y) = -\cos(e^y)$

Exercice 2.6
Calculer toutes les dérivées partielles des fonctions suivantes :

1. $f(x,y) = 3x^2 + xy - 2y^2$
2. $f(x,y) = 4 - x^2 - 2y^2$
3. $f(x,y) = y^5 - 3xy$
4. $f(x,y) = x^2 + 3xy^2 - 6y^5$
5. $f(x,y) = x\cos(e^{xy})$
6. $f(x,y) = \frac{x}{y}$
7. $f(x,t) = e^{-t}\cos(\pi x)$
8. $f(x,y) = (2x+3y)^{10}$
9. $f(x,y) = \frac{ax+by}{cx+dy}$
10. $f(x,y) = x^y$

Correction

1. $\partial_x f(x,y) = 6x + y$ (car y est considérée constante) et $\partial_y f(x,y) = x - 4y$ (car x est considérée constante)
2. $\partial_x f(x,y) = -2x$ et $\partial_y f(x,y) = -4y$
3. $\partial_x f(x,y) = -3y$ et $\partial_y f(x,y) = 5y^4 - 3x$
4. $\partial_x f(x,y) = 2x + 3y^2$ et $\partial_y f(x,y) = 6xy - 30y^4$
5. $\partial_x f(x,y) = \cos(e^{xy}) - xye^{xy}\sin(e^{xy})$ et $\partial_y f(x,y) = -x^2 e^{xy}\sin(e^{xy})$
6. $\partial_x f(x,y) = 1/y$ et $\partial_y f(x,y) = -x/y^2$
7. $\partial_x f(x,t) = -\pi e^{-t}\sin(\pi x)$ et $\partial_t f(x,t) = -e^{-t}\cos(\pi x)$
8. $\partial_x f(x,y) = 20(2x+3y)^9$ et $\partial_y f(x,y) = 30(2x+3y)^9$
9. $\partial_x f(x,y) = \frac{(ad-bc)y}{(cx+dy)^2}$ et $\partial_y f(x,y) = \frac{(bc-ad)x}{(cx+dy)^2}$
10. $\partial_x f(x,y) = yx^y/x$ et $\partial_y f(x,y) = \ln(x)x^y$ ⚠ $x^y = e^{y\ln(x)}$ donc $x > 0$

Exercice 2.7 (Loi de Fick)
Les lois de diffusion de Fick décrivent la diffusion. Les expériences de Fick portaient sur la mesure des concentrations et des flux de sel, diffusant entre deux réservoirs à travers des tubes d'eau.

La deuxième loi de Fick prédit comment la diffusion fait changer la concentration en fonction du temps. Notons φ la concentration (une fonction qui dépend de l'emplacement x et du temps t) et soit D le coefficient de diffusion (supposé constant). La deuxième loi de Fick postule que, pour tout (t,x),

$$\partial_t \varphi = \partial_x\left(D\partial_x \varphi\right).$$

Montrer que la fonction suivante est solution de cette équation différentielle :

$$\varphi(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D t}}\exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right).$$

© 2024-2027 G. Faccanoni

Correction
Dans un premier temps, pour simplifier nos calculs, nous allons introduire des constantes auxiliaires : on pose $A \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{4\pi D}}$ et $B = -\frac{1}{4D}$ ainsi

$$\varphi(t,x) = \frac{A}{\sqrt{t}} \exp\left(B\frac{x^2}{t}\right).$$

Il est alors plus simple de calculer les dérivées partielles :

$$\partial_t\varphi(t,x) = \frac{-A}{2t\sqrt{t}} \exp\left(B\frac{x^2}{t}\right) - \frac{A}{\sqrt{t}} B\frac{x^2}{t^2} \exp\left(B\frac{x^2}{t}\right) = -\frac{A}{2} \times \frac{2Bx^2+t}{t^2\sqrt{t}} \exp\left(B\frac{x^2}{t}\right)$$
$$\partial_x\varphi(t,x) = \frac{2ABx}{t\sqrt{t}} \exp\left(B\frac{x^2}{t}\right)$$
$$\partial_x\left(\partial_x\varphi(t,x)\right) = D\partial_x\left(\partial_x\varphi(t,x)\right) = \frac{2ABD(2Bx^2+t)}{t^2\sqrt{t}} \exp\left(B\frac{x^2}{t}\right)$$

La relation s'écrit donc

$$\partial_t\varphi(t,x) - D\partial_x\left(\partial_x\varphi(t,x)\right) = \left[-\frac{A}{2} \times \frac{2Bx^2+t}{t^2\sqrt{t}} - \frac{2ABD(2Bx^2+t)}{t^2\sqrt{t}}\right] \exp\left(B\frac{x^2}{t}\right) = -\frac{A(1+4BD)(2Bx^2+t)}{2t^2\sqrt{t}} \exp\left(B\frac{x^2}{t}\right).$$

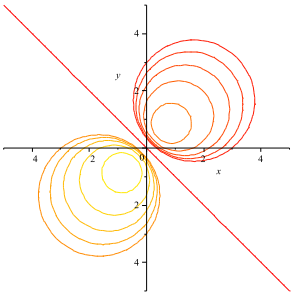
En remplaçant B par sa définition on a $(4BD+1) = 0$ ainsi l'égalité est satisfaite pour tout (t,x).

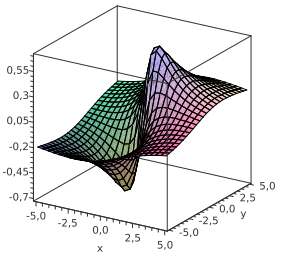
Exercice 2.8
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = \dfrac{x+y}{1+x^2+y^2}$.

1. Déterminer et représenter les courbes de niveau de f.
2. Calculer les dérivées partielles premières de f.
3. Écrire l'équation du plan tangent à la surface définie par f au point $(0,0)$.

Correction

1. Les courbes de niveau de f sont définies par l'équation $f(x,y) = k$, où k est une constante réelle. Cela revient à résoudre :
$$\frac{x+y}{1+x^2+y^2} = k,$$
ce qui donne l'équation implicite
$$x+y = k(1+x^2+y^2).$$
Pour $k = 0$, cette équation devient $x+y = 0$, qui est la droite d'équation $y = -x$.
Pour $k \neq 0$, l'équation peut être réécrite sous la forme :
$$x^2+y^2-\frac{1}{k}x-\frac{1}{k}y+1 = 0.$$
Cette équation représente un cercle [1] pour certaines valeurs de k. En effet, pour $0 < k^2 < \frac{1}{2}$, l'équation correspond à un cercle de centre $\left(\frac{1}{2k}, \frac{1}{2k}\right)$ et de rayon
$$r = \sqrt{\frac{1}{2k^2}-1}.$$





1. Le cercle de centre (x_c, y_c) et rayon $r > 0$ a pour équation $(x-x_c)^2+(y-y_c)^2 = r^2$ soit encore $x^2+y^2-2x_cx-2y_cy+x_c^2+y_c^2-r^2 = 0$.

2. Calculons les dérivées partielles premières de f

$$\partial_x f(x,y) = \frac{(1+x^2+y^2)-2x(x+y)}{(1+x^2+y^2)^2} = \frac{1+y^2-x^2-2xy}{(1+x^2+y^2)^2},$$

$$\partial_y f(x,y) = \frac{(1+x^2+y^2)-2y(x+y)}{(1+x^2+y^2)^2} = \frac{1+x^2-y^2-2xy}{(1+x^2+y^2)^2}.$$

3. L'équation du plan tangent à la surface définie par f en $(0,0)$ s'obtient en utilisant l'expression du développement de Taylor au premier ordre. Les dérivées partielles premières en $(0,0)$ sont

$$\partial_x f(0,0) = 1, \quad \partial_y f(0,0) = 1.$$

Ainsi, l'équation du plan tangent en $(0,0)$ est donnée par

$$z = f(0,0) + \partial_x f(0,0)\cdot x + \partial_y f(0,0)\cdot y = 0 + 1\cdot x + 1\cdot y = x + y.$$

```python
import sympy as sp

# Définition des symboles
x, y = sp.symbols('x y')

# Définition de la fonction f(x, y)
f = (x + y) / (1 + x**2 + y**2)

# Calcul des dérivées partielles premières
df_dx = sp.diff(f, x).simplify()
df_dy = sp.diff(f, y).simplify()

# Affichage des dérivées partielles premières
print("df/dx = ", df_dx)
print("df/dy = ", df_dy)

# Équation du plan tangent en (0, 0)
x0, y0 = 0, 0
plan_tangent = f.subs({x:x0,y:y0}) + (x-x0)*df_dx.subs({x:x0,y:y0}) +
 ↪  (y-y0)*df_dy.subs({x:x0,y:y0})

# Affichage de l'équation du plan tangent
print(f"Équation du plan tangent en ({x0}, {y0}) :", plan_tangent)
```

```
df/dx =  (x**2 - 2*x*(x + y) + y**2 + 1)/(x**2 + y**2 + 1)**2
df/dy =  (x**2 + y**2 - 2*y*(x + y) + 1)/(x**2 + y**2 + 1)**2
Équation du plan tangent en (0, 0) : x + y
```

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D

# Définition de la fonction f(x, y)
f = lambda x,y : (x + y) / (1 + x**2 + y**2)

# Génération des données pour la surface
x = np.linspace(-3, 3, 100)
y = np.linspace(-3, 3, 100)
X, Y = np.meshgrid(x, y)
```


© 2024-2027 G. Faccanoni

```
Z = f(X, Y)

# Tracé de la surface
fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
ax.plot_surface(X, Y, Z, cmap='viridis')

# Tracé des courbes de niveau
ax.contour(X, Y, Z, 10, offset=0, zdir='z', cmap='viridis')

# Définition des étiquettes des axes
ax.set_xlabel('x')
ax.set_ylabel('y')
ax.set_zlabel('f(x, y)')
ax.set_title('$f(x, y) = \\frac{x + y}{1 + x^2 + y^2}$')

plt.show()
```

Exercice 2.9
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2(\mathbb{R}^2)$ et (a,b) un point de $\mathbb{R}^2$. On suppose que

$$\partial_x f(a,b) = 0, \qquad \partial_y f(a,b) = 0, \qquad \partial_{xx} f(a,b) = 1, \qquad \partial_{yy} f(a,b) = 2, \qquad \partial_{xy} f(a,b) = 3.$$

Le point (a,b) est-il un point critique ? Si oui, de quelle nature ?

Correction
Le point (a,b) est un point critique de f car les dérivées premières de f s'annulent en ce point.
Pour déterminer la nature du point critique, calculons le déterminant de la matrice hessienne $\mathrm{H}_f(a,b)$:

$$\mathrm{H}_f(a,b) = \begin{pmatrix} \partial_{xx} f(a,b) & \partial_{xy} f(a,b) \\ \partial_{xy} f(a,b) & \partial_{yy} f(a,b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de cette matrice est :

$$\det(\mathrm{H}_f(a,b)) = 1 \times 2 - 3 \times 3 = 2 - 9 = -7.$$

Comme le déterminant de la hessienne est négatif, le point (a,b) est un point selle.

Exercice 2.10
On suppose que $(1,1)$ est un point critique d'une fonction f dont les dérivées secondes sont continues. Dans chaque cas, que peut-on dire au sujet de f ?

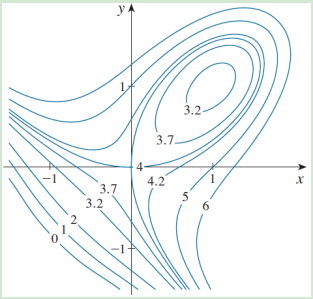
1. $\partial_{xx} f(1,1) = 4$, $\partial_{xy} f(1,1) = 1$, $\partial_{yy} f(1,1) = 2$;
2. $\partial_{xx} f(1,1) = 4$, $\partial_{xy} f(1,1) = 3$, $\partial_{yy} f(1,1) = 2$.

Correction
1. D'abord on calcule $\det(\mathrm{H}_f(1,1)) = \partial_{xx} f(1,1)\partial_{yy} f(1,1) - (\partial_{xy} f(1,1))^2 = 7$. Comme $\det(\mathrm{H}_f(1,1)) > 0$ et $\partial_{xx} f(1,1) > 0$, f a un minimum local en $(1,1)$.
2. D'abord on calcule $\det(\mathrm{H}_f(1,1)) = \partial_{xx} f(1,1)\partial_{yy} f(1,1) - (\partial_{xy} f(1,1))^2 = -1$. Comme $\det(\mathrm{H}_f(1,1)) < 0$, f a un point-selle en $(1,1)$.

Exercice 2.11
À partir de la carte des courbes de niveau représentée sur la figure ci-contre, localiser les points critiques de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et préciser, pour chacun de ces points, s'il s'agit d'un point-selle, d'un maximum local ou d'un minimum local.

Vérifier ensuite le raisonnement sachant que

$$f(x,y) = 4 + x^3 + y^3 - 3xy.$$



Correction
À partir de la carte des courbes de niveau, on peut faire les observations suivantes.

- Au point $(1,1)$, les courbes de niveau entourent le point de manière ovale, indiquant que les valeurs de f augmentent lorsque l'on s'éloigne du point dans toutes les directions. Cela suggère un minimum local à proximité de $(1,1)$.
- Au point $(0,0)$, les courbes de niveau ressemblent à des hyperboles, ce qui suggère un point-selle, car les valeurs de f augmentent dans certaines directions et diminuent dans d'autres.

Vérifions cette analyse à l'aide des dérivées de f.

Points critiques : Calculons les dérivées partielles premières :

$$\partial_x f(x,y) = 3x^2 - 3y, \quad \partial_y f(x,y) = 3y^2 - 3x.$$

Un point critique est une solution du système $\partial_x f(x,y) = 0$ et $\partial_y f(x,y) = 0$. Résolvons ce système

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - y = 0 \\ x^4 - x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - y = 0 \\ x(x^3 - 1) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - y = 0 \\ x = 0 \text{ ou } x = 1 \end{cases}$$

Cela donne les deux points critiques suivants : $(1,1)$ et $(0,0)$.

Étude des points critiques : Pour étudier la nature des points critiques, calculons les dérivées secondes

$$\partial_{xx} f(x,y) = 6x, \quad \partial_{xy} f(x,y) = -3, \quad \partial_{yy} f(x,y) = 6y.$$

Le déterminant de la matrice hessienne est donné par

$$\det(\mathrm{H}_f(x,y)) = \partial_{xx} f(x,y) \cdot \partial_{yy} f(x,y) - (\partial_{xy} f(x,y))^2 = 36xy - 9.$$

Analyse des points critiques :

- Pour le point critique $(1,1)$:

$$\det(\mathrm{H}_f(1,1)) = 36 \times 1 \times 1 - 9 = 36 - 9 = 27 > 0, \quad \partial_{xx} f(1,1) = 6 > 0.$$

Comme $\det(\mathrm{H}_f(1,1)) > 0$ et $\partial_{xx} f(1,1) > 0$, le point $(1,1)$ est un minimum local.

- Pour le point critique $(0,0)$:

$$\det(\mathrm{H}_f(0,0)) = 36 \times 0 \times 0 - 9 = -9 < 0.$$

Comme $\det(\mathrm{H}_f(0,0)) < 0$, le point $(0,0)$ est un point-selle.

```python
import sympy as sp

x, y = sp.symbols('x y', real=True)

f = 4 + x**3 + y**3 - 3*x*y
grad_f = [sp.diff(f, var) for var in (x, y)]
hess_f = [[sp.diff(df, var1) for var1 in (x, y)] for df in grad_f]

print("Fonction f(x, y) :", f)
print("Gradient de f(x, y) :", grad_f)
print("Matrice hessienne de f(x, y) :", hess_f)
```


© 2024-2027 G. Faccanoni

```
stationary_points = sp.solve(grad_f, (x, y))
print("Points stationnaires :", stationary_points)
print()

# Afficher la nature des points stationnaires
for point in stationary_points:
    hess_matrix_evaluated = [[entry.subs({x: point[0], y: point[1]}) for
    ↪  entry in row] for row in hess_f]
    determinant = sp.det(sp.Matrix(hess_matrix_evaluated))
    if determinant < 0:
        nature = 'Point de selle'
    elif determinant > 0:
        if hess_matrix_evaluated[0][0] < 0:
            nature = 'Maximum'
        else:
            nature = 'Minimum'
    else:
        nature = 'Indéterminé'
    print("Point stationnaire :", point)
    print("Matrice hessienne évaluée en le point :", hess_matrix_evaluated)
    print("Déterminant de la matrice hessienne :", determinant)
    print("Nature du point :", nature)
    print()
```

```
Fonction f(x, y) : x**3 - 3*x*y + y**3 + 4
Gradient de f(x, y) : [3*x**2 - 3*y, -3*x + 3*y**2]
Matrice hessienne de f(x, y) : [[6*x, -3], [-3, 6*y]]
Points stationnaires : [(0, 0), (1, 1)]

Point stationnaire : (0, 0)
Matrice hessienne évaluée en le point : [[0, -3], [-3, 0]]
Déterminant de la matrice hessienne : -9
Nature du point : Point de selle

Point stationnaire : (1, 1)
Matrice hessienne évaluée en le point : [[6, -3], [-3, 6]]
Déterminant de la matrice hessienne : 27
Nature du point : Minimum
```

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

f = lambda x, y : 4 + x**3 + y**3 - 3*x*y

# Création de la grille pour le tracé
x_vals = np.linspace(-2, 2, 400)
y_vals = np.linspace(-2, 2, 400)
X, Y = np.meshgrid(x_vals, y_vals)
Z = f(X, Y)

# Points stationnaires
stationary_points = [(0, 0), (1, 1)]
```

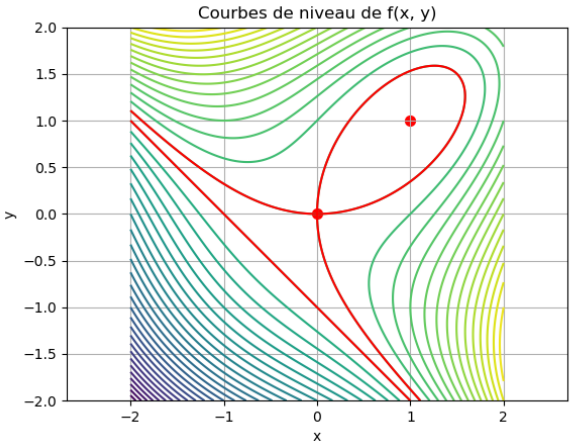
```python
# Calculer les valeurs de la fonction en ces points
stationary_values = sorted([f(point[0], point[1]) for point in
 ↪  stationary_points])

# Tracer les courbes de niveau
plt.contour(X, Y, Z, levels=50)
# Ajouter des courbes de niveau spécifiquement pour les valeurs aux points
 ↪  stationnaires
plt.contour(X, Y, Z, levels=stationary_values, colors='red')

plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.title('Courbes de niveau de f(x, y)')
plt.grid(True)
plt.axis('equal')

# Ajouter les points stationnaires
for point in stationary_points:
    plt.scatter(point[0], point[1], color='red', s=50)

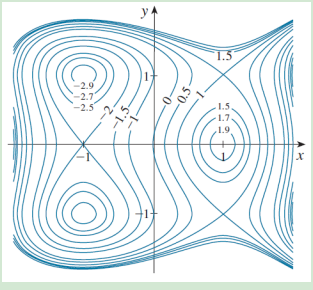
plt.savefig('courbes_de_niveau.png')
# plt.show()
```



Exercice 2.12
À partir de la carte des courbes de niveau représentée sur la figure ci-contre, localiser les points critiques de $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et préciser, pour chacun de ces points, s'il s'agit d'un point-selle, d'un maximum local ou d'un minimum local.

Vérifier ensuite cette analyse sachant que

$$f(x,y) = 3x - x^3 - 2y^2 + y^4.$$



Correction
À partir de la figure des courbes de niveau, plusieurs points critiques peuvent être identifiés :

- aux points $(-1,-1)$ et $(-1,1)$, les courbes de niveau entourent les points. Cela suggère que les valeurs de f augmentent lorsque l'on s'éloigne de ces points dans toutes les directions, ce qui est caractéristique de minima locaux ;

© 2024-2027 G. Faccanoni

- au point $(1,0)$, les courbes de niveau entourent le point, ce qui suggère que les valeurs de f diminuent lorsque l'on s'éloigne du point dans toutes les directions, ce qui est caractéristique d'un maximum local ;
- aux points $(-1,0)$, $(1,1)$, et $(1,-1)$, les valeurs de f augmentent dans certaines directions et diminuent dans d'autres, ce qui suggère des points-selles.

Passons maintenant à la vérification analytique de cette analyse en trouvant les points critiques et en déterminant leur nature.

Les points critiques sont les solutions du système

$$\nabla f = \mathbf{0} \rightsquigarrow \begin{cases} 3-3x^2=0 \\ -4y+4y^3=0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x^2-1=0 \\ y(y^2-1)=0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} (x-1)(x+1) \\ y(y-1)(y+1)=0 \end{cases}$$

Ainsi, les points critiques sont : $(1,0)$, $(1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,0)$, $(-1,1)$, et $(-1,-1)$.

Calculons les dérivées secondes

$$\partial_{xx} f(x,y) = -6x, \quad \partial_{xy} f(x,y) = 0, \quad \partial_{yy} f(x,y) = 12y^2 - 4.$$

Le déterminant de la matrice hessienne $\mathrm{H}_f(x,y)$ est donné par

$$\det(\mathrm{H}_f(x,y)) = \partial_{xx} f(x,y) \cdot \partial_{yy} f(x,y) - (\partial_{xy} f(x,y))^2 = -72xy^2 + 24x = -6x(12y^2-4).$$

Analysons maintenant chaque point critique :

Point critique (x_0,y_0)	dét$(\mathrm{H}_f(x_0,y_0))$	$\partial_{xx} f(x_0,y_0)$	Conclusion
$(1,0)$	$24>0$	$-6<0$	f a un maximum local en $(1,0)$
$(1,1)$	$-48<0$		f a un point-selle en $(1,1)$
$(1,-1)$	$-48<0$	$-6<0$	f a un point-selle en $(1,-1)$
$(-1,0)$	$-24<0$		f a un point-selle en $(-1,0)$
$(-1,1)$	$48>0$	$6>0$	f a un minimum local en $(-1,1)$
$(-1,-1)$	$48>0$	$6>0$	f a un minimum local en $(-1,-1)$

Exercice 2.13
Une montagne a la forme de la surface $z(x,y) = 2xy - 2x^2 - y^2 - 8x + 6y + 4$ (l'unité de mesure est de 100 mètres). Si le niveau de la mer correspond à $z=0$, quelle est la hauteur de la montagne ?

Correction
Il s'agit d'évaluer $z(x,y)$ dans le point de maximum. Cherchons d'abord les points critiques :

$$\nabla z(x,y) = \begin{pmatrix} 2y-4x-8 \\ 2x-2y+6 \end{pmatrix}$$

et $\nabla z(x,y) = \mathbf{0}$ ssi $(x,y) = (-1,2)$. On établie la nature du point critique en étudiant le déterminant de la matrice hessienne :

$$\partial_{xx} f(x,y) = -4 < 0, \qquad \partial_{yy} f(x,y) = -2, \qquad \partial_{xy} f(x,y) = 2,$$

et $\partial_{xx} f(-1,2)\partial_{yy} f(-1,2) - (\partial_{xy} f(-1,2))^2 = 4 > 0$ donc $(-1,2)$ est un maximum. Comme $z(-1,2) = 14$, la montagne est haute 1400 mètre.

Exercice 2.14
Si f est une fonction continue d'une seule variable réelle et si f admet deux maxima sur un intervalle alors il existe un minimum compris entre les deux maxima. Le but de cet exercice est de montrer que ce résultat ne s'étend pas en deux dimensions.

Considérons la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = 4y^2 e^x - 2y^4 - e^{4x}$. Montrer que cette fonctions admet deux maxima mais aucun autre point critique.

Correction

- f est de classe $\mathscr{C}^2$ dans son domaine de définition, l'ouvert $\mathbb{R}^2$.

- Recherche de points critiques :

$$\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{cases}4y^2e^x-4e^{4x}=0\\ 8ye^x-8y^3=0\end{cases} \iff \begin{cases}4e^x(y^2-e^{3x})=0\\ 8y(e^x-y^2)=0\end{cases} \begin{matrix}\nearrow\\ \searrow\end{matrix} \begin{cases}y=0\\ -4e^{4x}=0\end{cases} \text{ ou } \begin{cases}e^x=y^2\\ y^2=e^{3x}=y^6\end{cases} \iff (x,y)=(0,\pm 1).$$

  On a deux points critiques : $(0,1)$ et $(0,-1)$.

- Nature des points critiques :

$$\mathrm{H}_f(x,y)=\begin{pmatrix}4y^2e^x-16e^{4x} & 8ye^x\\ 8ye^x & 8e^x-24y^2\end{pmatrix}, \qquad \text{dét}(\mathrm{H}_f(x,y))=32e^x\left((e^x-3y^2)(y^2-4e^{3x})-2y^2e^x\right).$$

  $\det\left(\mathrm{H}_f(0,\pm 1)\right)=128>0$ et $\partial_{xx}f(0,\pm 1,)=-12<0$ donc les points $(0,\pm 1)$ sont des maxima.

Exercice 2.15
Déterminer et établir la nature des points critiques des fonction $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définies par

1. $f(x,y)=x^2+xy+y^2+y$
2. $f(x,y)=xy-2x-2y-x^2-y^2$
3. $f(x,y)=(x-y)(1-xy)$
4. $f(x,y)=y^3+3x^2y-6x^2-6y^2+2$
5. $f(x,y)=x^3+y^3-3xy+3$
6. $f(x,y)=xy(1-x-y)$
7. $f(x,y)=x^3-12xy+8y^3$
8. $f(x,y)=xy+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$
9. $f(x,y)=e^x\cos(y)$
10. $f(x,y)=y\cos(x)$
11. $f(x,y)=y^2+xy\ln(x)$
12. $f(x,y)=\frac{x^2y}{2}+x^2+\frac{y^3}{3}-4y$
13. $f(x,y)=\frac{x^2y}{2}-x^2+\frac{y^3}{3}-4y$
14. $f(x,y)=\frac{xy^2}{2}+\frac{x^3}{3}-4x+y^2$
15. $f(x,y)=(x^2-y^2)e^{(-x^2-y^2)}$
16. $f(x,y)=(y^2-x^2)e^{(-x^2-y^2)}$
17. $f(x,y)=x^4+y^4-2(x-y)^2$
18. $f(x,y)=x^4+y^4-4(x-y)^2$
19. $f(x,y,z)=\frac{x^2}{2}+xyz-z+y$
20. $f(x,y)=(x-1)^2+2y^2$
21. $f(x,y)=x^2+xy+y^2-2x-y$
22. $f(x,y)=x^3y^2(6-x-y)$
23. $f(x,y)=e^{x-y}(x^2-2y^2)$
24. $f(x,y)=\frac{8}{x}+\frac{x}{y}+y$
25. $f(x,y)=x^2-\cos(y)$
26. $f(x,y)=(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}$
27. $f(x,y)=x^3+y^2-6(x^2-y^2)$
28. $f(x,y)=(x^2+y^2-y^3)e^{-y}$

Correction

1. $f(x,y)=x^2+xy+y^2+y$
   - f est de classe $\mathscr{C}^2$ dans son domaine de définition, l'ouvert $\mathbb{R}^2$.
   - Recherche de points critiques :

$$\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{cases}2x+y=0\\ x+2y+1=0\end{cases} \iff (x,y)=\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right).$$

     On a un unique point critique : $\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)$.
   - Nature du point critique :

$$\mathrm{H}_f(x,y)=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}, \qquad \text{dét}(\mathrm{H}_f(x,y))=3.$$

     $\text{dét}\left(\mathrm{H}_f\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)\right)>0$ et $\partial_{xx}f\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)>0$ donc $\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)$ est un minimum.
2. $f(x,y)=xy-2x-2y-x^2-y^2$
   - f est de classe $\mathscr{C}^2$ dans son domaine de définition, l'ouvert $\mathbb{R}^2$.
   - Recherche de points critiques :

$$\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{cases}y-2-2x=0\\ x-2-2y=0\end{cases} \iff (x,y)=(-2,-2).$$

     On a un unique point critique : $(-2,-2)$.

© 2024-2027 G. Faccanoni

- Nature du point critique :

$$\mathrm{H}_f(x,y) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \text{dét}(\mathrm{H}_f(x,y)) = 3.$$

$\text{dét}(\mathrm{H}_f(-2,-2)) > 0$ et $\partial_{xx} f(-2,-2) < 0$ donc $(-2,-2)$ est un maximum.

3. $f(x,y) = (x-y)(1-xy)$
   - f est de classe $\mathscr{C}^2$ dans son domaine de définition, l'ouvert $\mathbb{R}^2$.
   - Recherche de points critiques :

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 1 - 2xy + y^2 = 0 \\ -1 - x^2 + 2xy = 0 \end{cases} \iff (x,y) \in \{(-1,-1),(1,1)\}.$$

   On a deux points critiques : $(-1,-1)$ et $(1,1)$.
   - Nature des points critiques :

$$\mathrm{H}_f(x,y) = \begin{pmatrix} -2y & -2x+2y \\ -2x+2y & 2x \end{pmatrix}, \qquad \text{dét}(\mathrm{H}_f(x,y)) = -4xy - 4(y-x)^2.$$

   $\text{dét}(\mathrm{H}_f(-1,-1)) < 0$ donc $(-1,-1)$ est un point-selle ;
   $\text{dét}(\mathrm{H}_f(1,1)) < 0$ donc $(1,1)$ est un point-selle.

4. $f(x,y) = y^3 + 3x^2y - 6x^2 - 6y^2 + 2$
   - f est de classe $\mathscr{C}^2$ dans son domaine de définition, l'ouvert $\mathbb{R}^2$.
   - Recherche de points critiques :

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 6xy - 12x = 0 \\ 3y^2 + 3x^2 - 12y = 0 \end{cases} \iff (x,y) \in \{(0,0),(0,4),(2,2),(-2,2)\}.$$

   On a quatre points critiques : $(0,0)$, $(0,4)$, $(2,2)$ et $(-2,2)$.
   - Nature des points critiques :

$$\mathrm{H}_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6y-12 & 6x \\ 6x & 6y-12 \end{pmatrix}, \qquad \text{dét}(\mathrm{H}_f(x,y)) = (6y-12)^2 - 36x^2 = 36\Big((y-2)^2 - x^2\Big).$$

   $\text{dét}(\mathrm{H}_f(0,0)) > 0$ et $\partial_{xx} f(0,0) < 0$ donc $(0,0)$ est un maximum ;
   $\text{dét}(\mathrm{H}_f(0,4)) > 0$ et $\partial_{xx} f(0,4) > 0$ donc $(0,4)$ est un minimum ;
   $\text{dét}(\mathrm{H}_f(2,2)) < 0$ donc $(2,2)$ est un point-selle ;
   $\text{dét}(\mathrm{H}_f(-2,2)) < 0$ donc $(-2,2)$ est un point-selle.

5. $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy + 3$.
   - f est de classe $\mathscr{C}^2$ dans son domaine de définition, l'ouvert $\mathbb{R}^2$.
   - Recherche de points critiques :

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 3(x^2 - y) = 0 \\ 3(y^2 - x) = 0 \end{cases} \iff (x,y) \in \{(0,0),(1,1)\}.$$

   On a deux points critiques : $(0,0)$ et $(1,1)$.
   - Nature des points critiques :

$$\mathrm{H}_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}, \qquad \text{dét}(\mathrm{H}_f(x,y)) = 36xy - 9.$$

   $\text{dét}(\mathrm{H}_f(0,0)) = -9 < 0$ donc $(0,0)$ est un point-selle ;
   $\text{dét}(\mathrm{H}_f(1,1)) = 27 > 0$ et $\partial_{xx} f(1,1) = 6 > 0$, donc $(1,1)$ est un minimum.

6. $f(x,y) = xy(1-x-y)$
   - f est de classe $\mathscr{C}^2$ dans son domaine de définition, l'ouvert $\mathbb{R}^2$.

- Recherche de points critiques :

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{cases} y - 2xy - y^2 = 0 \\ x - x^2 - 2xy = 0 \end{cases} \iff (x,y) \in \left\{ (0,0), (1,0), (0,1), \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \right\}.$$

On a quatre points critiques : $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ et $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

- Nature des points critiques :

$$\mathrm{H}_f(x,y) = \begin{pmatrix} -2y & 1-2x-2y \\ 1-2x-2y & -2x \end{pmatrix}, \qquad \text{dét}(\mathrm{H}_f(x,y)) = 4xy - (1-2x-2y)^2$$

$\text{dét}(\mathrm{H}_f(0,0)) < 0$ donc $(0,0)$ est un point-selle ;
$\text{dét}(\mathrm{H}_f(1,0)) < 0$ donc $(1,0)$ est un point-selle ;
$\text{dét}(\mathrm{H}_f(0,1)) < 0$ donc $(0,1)$ est un point-selle ;
$\text{dét}\left(\mathrm{H}_f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)\right) > 0$ et $\partial_{xx} f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) < 0$ donc $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) < 0$ est un maximum.

7. $f(x,y) = x^3 - 12xy + 8y^3$
   - f est de classe $\mathscr{C}^2$ dans son domaine de définition, l'ouvert $\mathbb{R}^2$.
   - Recherche de points critiques :

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{cases} 3x^2 - 12y = 0 \\ -12x + 24y^2 = 0 \end{cases} \iff (x,y) \in \{(0,0), (2,1)\}.$$

   On a deux points critiques : $(0,0)$, et $(2,1)$.
   - Nature des points critiques :

$$\mathrm{H}_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -12 \\ -12 & 48y \end{pmatrix}, \qquad \text{dét}(\mathrm{H}_f(x,y)) = 144(2xy - 1)$$

   $\text{dét}(\mathrm{H}_f(0,0)) < 0$ donc $(0,0)$ est un point-selle ;
   $\text{dét}(\mathrm{H}_f(2,1)) > 0$ et $\partial_{xx} f(2,1) > 0$ donc $(2,1)$ est un minimum.

8. $f(x,y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$
   - f est de classe $\mathscr{C}^2$ dans son domaine de définition, l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,\kappa) \mid \kappa \in \mathbb{R}\} \setminus \{(\kappa,0) \mid \kappa \in \mathbb{R}\}$.
   - Recherche de points critiques :

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{cases} y - \frac{1}{x^2} = 0 \\ x - \frac{1}{y^2} = 0 \end{cases} \iff (x,y) = (1,1).$$

   On a un unique point critique : $(1,1)$.
   - Nature du point critique :

$$\mathrm{H}_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{2}{x^3} & 1 \\ 1 & \frac{2}{y^3} \end{pmatrix}, \qquad \text{dét}(\mathrm{H}_f(x,y)) = \frac{4}{(xy)^3} - 1$$

   $\text{dét}(\mathrm{H}_f(1,1)) > 0$ et $\partial_{xx} f(1,1) > 0$ donc $(1,1)$ est un minimum.

9. $f(x,y) = e^x \cos(y)$
   - f est de classe $\mathscr{C}^2$ dans son domaine de définition, l'ouvert $\mathbb{R}^2$.
   - Recherche de points critiques :

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{cases} e^x \cos(y) = 0 \\ -e^x \sin(y) = 0 \end{cases} \iff \nexists (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

   Cette fonction n'admet aucun point critique.

10. $f(x,y) = y\cos(x)$
    - f est de classe $\mathscr{C}^2$ dans son domaine de définition, l'ouvert $\mathbb{R}^2$.

© 2024-2027 G. Faccanoni

- Recherche de points critiques :

$$\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{cases}-y\sin(x)=0\\ \cos(x)=0\end{cases} \iff (x,y)=\left(\frac{\pi}{2}+\kappa\pi,0\right),\quad \kappa\in\mathbb{Z}.$$

On a une infinité de points critiques alignés sur la droite d'équation $y=0$ et qui ont ordonnée $x=\frac{\pi}{2}+\kappa\pi$ avec $\kappa\in\mathbb{Z}$.

- Nature des points critiques :

$$\mathrm{H}_f(x,y)=\begin{pmatrix}-y\cos(x) & -\sin(x)\\ -\sin(x) & 0\end{pmatrix},\qquad \text{dét}(\mathrm{H}_f(x,y))=-\sin^2(x)$$

$\text{dét}\left(\mathrm{H}_f\left(\frac{\pi}{2}+\kappa\pi,0\right)\right)<0$ donc ils sont tous des points-selle.

11. $f(x,y)=y^2+xy\ln(x)$
- f est de classe $\mathscr{C}^2$ dans son domaine de définition, l'ouvert $\mathscr{D}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, x>0\right\}$.
- Recherche de points critiques :

$$\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{cases}y(\ln(x)+1)=0\\ 2y+x\ln(x)=0\end{cases} \iff (x,y)\in\left\{(1,0);\left(\frac{1}{e},\frac{1}{2e}\right)\right\}$$

On a deux points critiques : $(1,0)$ et $\left(\frac{1}{e},\frac{1}{2e}\right)$.

- Nature des points critiques :

$$\mathrm{H}_f(x,y)=\begin{pmatrix}\frac{y}{x} & 1+\ln(x)\\ 1+\ln(x) & 2\end{pmatrix},\qquad \text{dét}(\mathrm{H}_f(x,y))=2\frac{y}{x}-(1+\ln(x))^2$$

$\text{dét}(\mathrm{H}_f(1,0))<0$ donc $(1,0)$ est un point-selle ;
$\text{dét}\left(\mathrm{H}_f\left(\frac{1}{e},\frac{1}{2e}\right)\right)>0$ et $\partial_{xx}f\left(\frac{1}{e},\frac{1}{2e}\right)>0$ donc $\left(\frac{1}{e},\frac{1}{2e}\right)$ est un minimum.

12. $f(x,y)=\frac{x^2y}{2}+x^2+\frac{y^3}{3}-4y$
- f est de classe $\mathscr{C}^2$ dans son domaine de définition, l'ouvert $\mathbb{R}^2$.
- Recherche de points critiques :

$$\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{cases}xy+2x=0\\ \frac{x^2}{2}+y^2-4=0\end{cases} \iff (x,y)\in\{(0,-2),(0,2)\}.$$

On a deux points critiques : $(0,-2)$ et $(0,2)$.

- Nature des points critiques :

$$\mathrm{H}_f(x,y)=\begin{pmatrix}y+2 & x\\ x & 2y\end{pmatrix},\qquad \text{dét}(\mathrm{H}_f(x,y))=2y(y+2)-x$$

$\text{dét}(\mathrm{H}_f(0,2))>0$ et $\partial_{xx}f(0,2)=4>0$ donc $(0,2)$ est un minimum pour f ;
comme $\text{dét}(\mathrm{H}_f(0,-2))=0$, on ne peut pas conclure en utilisant la matrice hessienne (l'étude du signe de la distance dans ce cas est trop compliquée).

13. $f(x,y)=\frac{x^2y}{2}-x^2+\frac{y^3}{3}-4y$
- f est de classe $\mathscr{C}^2$ dans son domaine de définition, l'ouvert $\mathbb{R}^2$.
- Recherche de points critiques :

$$\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{cases}xy-2x=0\\ \frac{x^2}{2}+y^2-4=0\end{cases} \iff (x,y)\in\{(0,-2),(0,2)\}.$$

On a deux points critiques : $(0,-2)$ et $(0,2)$.

- Nature des points critiques :

$$\mathrm{H}_f(x,y)=\begin{pmatrix}y-2 & x\\ x & 2y\end{pmatrix},\qquad \text{dét}(\mathrm{H}_f(x,y))=2y(y-2)-x$$

$\text{dét}(\mathrm{H}_f(0,-2))>0$ et $\partial_{xx}f(0,-2)<0$ donc $(0,-2)$ est un maximum pour f ;
comme $\text{dét}(\mathrm{H}_f(0,2))=0$, on ne peut pas conclure en utilisant la matrice hessienne (l'étude du signe de la distance dans ce cas est trop compliquée).

14. $f(x,y) = \frac{xy^2}{2} + \frac{x^3}{3} - 4x + y^2$

- f est de classe $\mathscr{C}^2$ dans son domaine de définition, l'ouvert $\mathbb{R}^2$.
- Recherche de points critiques :

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{cases}\frac{y^2}{2} + x^2 - 4 = 0\\ xy + 2y = 0\end{cases} \iff (x,y) \in \{(-2,0),(2,0)\}.$$

On a deux points critiques : $(0,-2)$ et $(0,2)$.

- Nature des points critiques :

$$\mathrm{H}_f(x,y) = \begin{pmatrix}2x & y\\ y & x+2\end{pmatrix}, \qquad \text{dét}(\mathrm{H}_f(x,y)) = 2x(x+2) - y$$

$\text{dét}(\mathrm{H}_f(2,0)) > 0$ et $\partial_{xx} f(2,0) = 4 > 0$ donc $(2,0)$ est un minimum pour f ;
comme $\text{dét}(\mathrm{H}_f(-2,0)) = 0$, on ne peut pas conclure en utilisant la matrice hessienne (l'étude du signe de la distance dans ce cas est trop compliquée).

15. $f(x,y) = (x^2 - y^2)e^{(-x^2-y^2)}$

- f est de classe $\mathscr{C}^2$ dans son domaine de définition, l'ouvert $\mathbb{R}^2$.
- Recherche de points critiques :

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{cases}2x(1 - x^2 + y^2)e^{(-x^2-y^2)} = 0\\ 2y(-1 - x^2 + y^2)e^{(-x^2-y^2)} = 0\end{cases} \iff (x,y) \in \{(0,0),(0,1),(0,-1),(1,0),(-1,0)\}.$$

On a 5 points critiques : $(0,0)$, $(0,1)$, $(0,-1)$, $(1,0)$ et $(-1,0)$.

- Nature des points critiques :

$$\begin{aligned}\partial_{xx} f(x,y) &= 2e^{(-x^2-y^2)}(1 - 5x^2 + y^2 + 2x^4 - 2x^2y^2),\\ \partial_{xy} f(x,y) &= 4xy(x^2 - y^2)e^{(-x^2-y^2)},\\ \partial_{yy} f(x,y) &= 2e^{(-x^2-y^2)}(-1 - x^2 + 5y^2 + 2x^2y^2 - 2y^4).\end{aligned}$$

$$\mathrm{H}_f(x,y) = \begin{pmatrix}\partial_{xx} f(x,y) & \partial_{xy} f(x,y)\\ \partial_{xy} f(x,y) & \partial_{yy} f(x,y)\end{pmatrix}, \qquad \text{dét}(\mathrm{H}_f(x,y)) = \partial_{xx} f(x,y)\partial_{yy} f(x,y) - (\partial_{xy} f(x,y))^2$$

On a alors

(x_0,y_0)	$\partial_{xx} f(x_0,y_0)$	$\partial_{xy} f(x_0,y_0)$	$\partial_{yy} f(x_0,y_0)$	$\text{dét}(\mathrm{H}_f(x_0,y_0))$	
$(0,0)$	2	0	-2	-4	c'est un point-selle
$(1,0)$	$-\frac{4}{e}$	0	$-\frac{4}{e}$	$\frac{16}{e^2}$	c'est un maximum
$(-1,0)$	$-\frac{4}{e}$	0	$-\frac{4}{e}$	$\frac{16}{e^2}$	c'est un maximum
$(0,1)$	$\frac{4}{e}$	0	$\frac{4}{e}$	$\frac{16}{e^2}$	c'est un minimum
$(0,-1)$	$\frac{4}{e}$	0	$\frac{4}{e}$	$\frac{16}{e^2}$	c'est un minimum

16. $f(x,y) = (y^2 - x^2)e^{(-x^2-y^2)}$

- f est de classe $\mathscr{C}^2$ dans son domaine de définition, l'ouvert $\mathbb{R}^2$.
- Recherche de points critiques :

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{cases}2x(-1 + x^2 - y^2)e^{(-x^2-y^2)} = 0\\ 2y(1 + x^2 - y^2)e^{(-x^2-y^2)} = 0\end{cases} \iff (x,y) \in \{(0,0),(0,1),(0,-1),(1,0),(-1,0)\}.$$

On a 5 points critiques : $(0,0)$, $(0,1)$, $(0,-1)$, $(1,0)$ et $(-1,0)$.

© 2024-2027 G. Faccanoni

- Nature des points critiques :

$$\begin{aligned}\partial_{xx}f(x,y) &= -2e^{(-x^2-y^2)}(1-5x^2+y^2+2x^4-2x^2y^2),\\ \partial_{xy}f(x,y) &= -4xy(x^2-y^2)e^{(x^2-y^2)},\\ \partial_{yy}f(x,y) &= -2e^{(-x^2-y^2)}(-1-x^2+5y^2+2x^2y^2-2y^4).\end{aligned}$$

$$\mathrm{H}_f(x,y)=\begin{pmatrix}\partial_{xx}f(x,y) & \partial_{xy}f(x,y)\\ \partial_{xy}f(x,y) & \partial_{yy}f(x,y)\end{pmatrix},\qquad \text{dét}(\mathrm{H}_f(x,y))=\partial_{xx}f(x,y)\partial_{yy}f(x,y)-(\partial_{xy}f(x,y))^2$$

On a alors

(x_0,y_0)	$\partial_{xx}f(x_0,y_0)$	$\partial_{xy}f(x_0,y_0)$	$\partial_{yy}f(x_0,y_0)$	$\text{dét}(\mathrm{H}_f(x_0,y_0))$	
$(0,0)$	-2	0	2	-4	c'est un point-selle
$(1,0)$	$\frac{4}{e}$	0	$\frac{4}{e}$	$\frac{16}{e^2}$	c'est un minimum
$(-1,0)$	$\frac{4}{e}$	0	$\frac{4}{e}$	$\frac{16}{e^2}$	c'est un minimum
$(0,1)$	$-\frac{4}{e}$	0	$-\frac{4}{e}$	$\frac{16}{e^2}$	c'est un maximum
$(0,-1)$	$-\frac{4}{e}$	0	$-\frac{4}{e}$	$\frac{16}{e^2}$	c'est un maximum

17. $f(x,y)=x^4+y^4-2(x-y)^2$

- f est de classe $\mathscr{C}^2$ dans son domaine de définition, l'ouvert $\mathbb{R}^2$. Comme la restriction $f(x,0)=x^4-2x^2$ tend vers $+\infty$ pour x qui tend vers $\pm\infty$, il n'y a pas de maximum global sur $\mathbb{R}^2$. Comme $\mathbb{R}^2$ est ouvert, un extrémum relatif de f vérifie la condition nécessaire $\nabla f(x,y)=0$.
- Recherche de points critiques :

$$\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\iff\begin{cases}4(x^3-x+y)=0\\4(y^3+x-y)=0\end{cases}\iff (x,y)\in\Big\{(0,0),(\sqrt{2},-\sqrt{2}),(-\sqrt{2},\sqrt{2})\Big\}.$$

On a 3 points critiques :[2] $(0,0)$, $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ (on note que $f(x,y)=f(-x,-y)$).

- Nature des points critiques :

$$\mathrm{H}_f(x,y)=\begin{pmatrix}12x^2-4 & 4\\ 4 & 12y^2-4\end{pmatrix},\qquad \text{dét}(\mathrm{H}_f(x,y))=16\Big((3x^2-1)(3y^2-1)-1\Big).$$

$\text{dét}(\mathrm{H}_f(\sqrt{2},-\sqrt{2}))=384>0$ et $\partial_{xx}f(\sqrt{2},-\sqrt{2})=20>0$ donc $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ est un minimum pour f ;
$\text{dét}(\mathrm{H}_f(-\sqrt{2},\sqrt{2}))=384>0$ et $\partial_{xx}f(-\sqrt{2},\sqrt{2})=20>0$ donc $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ est un minimum pour f ;
comme $\text{dét}(\mathrm{H}_f(0,0))=0$, on ne peut pas conclure en utilisant la matrice hessienne.
Pour connaître la nature du point $(0,0)$ on étudie le signe de $d(h,k)=f(h,k)-f(0,0)$ pour h et k voisins de 0 :

$$d(h,k)=h^4+k^4-2(h-k)^2;$$

comme $d(h,0)=(h^2-2)h^2<0$ lorsque h est voisin de 0 mais $d(h,h)=2h^4>0$, alors $(0,0)$ est un point-selle.
Remarquons qu'avec des transformations algébriques, on peut réécrire la fonction sous la forme

$$f(x,y)=(x^2-2)^2+(y^2-2)^2+2(x+y)^2-8\geq 8\qquad\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

Comme $f(\sqrt{2},-\sqrt{2})=f(-\sqrt{2},\sqrt{2})=-8$, les points $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ sont des minima globaux.

18. $f(x,y)=x^4+y^4-4(x-y)^2$

- f est de classe $\mathscr{C}^2$ dans son domaine de définition, l'ouvert $\mathbb{R}^2$. Comme la restriction $f(x,0)=x^4-4x^2$ tend vers $+\infty$ pour x qui tend vers $\pm\infty$, il n'y a pas de maximum global sur $\mathbb{R}^2$. Comme $\mathbb{R}^2$ est ouvert, un extrémum relatif de f vérifie la condition nécessaire $\nabla f(x,y)=0$.

2. $\begin{cases}4x^3-4x+4y=0\\4y^3+4x-4y=0\end{cases}\implies\begin{cases}x^3+y^3=0\\y^3+x-y=0\end{cases}\implies\begin{cases}x=-y\\(y^2-2)y=0\end{cases}$

- Recherche de points critiques :

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{cases}4(x^3-2x+2y)=0\\4(y^3+2x-2y)=0\end{cases} \iff (x,y)\in\{(0,0),(2,-2),(-2,2)\}.$$

On a 3 points critiques :[3] $(0,0)$, $(2,-2)$ et $(-2,2)$ (on note que $f(x,y)=f(-x,-y)$).

- Nature des points critiques :

$$\mathrm{H}_f(x,y) = \begin{pmatrix}12x^2-8 & 8\\ 8 & 12y^2-8\end{pmatrix}, \qquad \text{dét}(\mathrm{H}_f(x,y)) = 48\Big(3x^2y^2-2(x^2+y^2)\Big).$$

  - $\text{dét}(\mathrm{H}_f(2,-2)) = 1536 > 0$ et $\partial_{xx}f(2,-2) = 40 > 0$ donc $(2,-2)$ est un minimum local pour f ;
  - $\text{dét}(\mathrm{H}_f(-2,2)) = 1536 > 0$ et $\partial_{xx}f(-2,2) = 40 > 0$ donc $(-2,2)$ est un minimum local pour f ;
  - comme $\text{dét}(\mathrm{H}_f(0,0)) = 0$, on ne peut pas conclure en utilisant la matrice hessienne. Pour connaître la nature du point $(0,0)$ on étudie le signe de $d(h,k) = f(h,k) - f(0,0)$ pour h et k voisins de 0 :

$$d(h,k) = h^4 + k^4 - 4(h-k)^2;$$

comme $d(h,0) = (h^2-4)h^2 < 0$ lorsque h est voisin de 0 mais $d(h,h) = 2h^4 > 0$, alors $(0,0)$ est un point-selle.

Remarquons qu'avec des transformations algébriques, on peut réécrire la fonction sous la forme

$$f(x,y) = (x^2-4)^2 + (y^2-4)^2 + 4(x+y)^2 - 32 \geq -32 \qquad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

Comme $f(2,-2) = f(-2,2) = -32$, les points $(2,-2)$ et $(-2,2)$ sont des minima globaux.

19. $f(x,y,z) = \frac{x^2}{2} + xyz - z + y$

- f est définie sur $\mathbb{R}^3$ à valeur dans $\mathbb{R}$; comme la restriction $f(0,0,z) = -z$ tend vers $\pm\infty$ pour z qui tend vers $\mp\infty$, il n'y a pas d'extremum global sur $\mathbb{R}^3$. Comme $\mathbb{R}^3$ est ouvert, un extrémum relatif de f vérifie la condition nécessaire $\nabla f(x,y,z) = 0$.
- Recherche de points critiques :

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{cases}x+yz=0\\xz+1=0\\xy-1=0\end{cases} \iff (x,y,z) = (1,1,-1).$$

Il n'y a qu'un point critique : $(1,1,-1)$.

- Nature du point critique : on étudie le signe de $\Delta f(h,k,l) \equiv f(1+h,1+k,-1+l)$ pour h, k et l voisins de 0 (les termes de degré 1 en h, k et l doivent disparaître) :

$$\Delta f(h,k,l) = \frac{h^2+1+2h}{2} + (1+h)(1+k)(-1+l) - (-1+l) + (1+k) - \frac{3}{2} = \frac{h^2}{2} + hkl + hl - hk + kl.$$

Il ne reste que transformer Δf si on pense qu'il s'agit d'un extrémum ou fournir des restrictions qui se contredisent si on pense que ce n'est pas un extrémum. Comme les deux restrictions à deux courbes continues passant par l'origine $\Delta f(h,0,h) = \frac{3}{2}h^2 > 0$ et $\Delta f(h,h,0) = -\frac{1}{2}h^2 < 0$ donnent des signes différents, on conclut que ce n'est pas un extrémum.

20. $f(x,y) = (x-1)^2 + 2y^2$

- f est de classe $\mathscr{C}^2$ dans son domaine de définition, l'ouvert $\mathbb{R}^2$.
- Recherche de points critiques :

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{cases}2x-2=0\\4y=0\end{cases} \iff (x,y) = (1,0).$$

On a un seul point critique : $(1,0)$.

3. $\begin{cases}4x^3-8x+8y=0\\4y^3+8x-8y=0\end{cases} \implies \begin{cases}x^3-2(x-y)=0\\y^3+2(x-y)=0\end{cases} \implies \begin{cases}x^3+y^3=0\\y^3+2x-2y=0\end{cases} \implies \begin{cases}x=-y\\(y^2-4)y=0\end{cases} \implies \begin{cases}x=-y\\y=0 \text{ ou } y=2 \text{ ou } y=-2\end{cases}$

© 2024-2027 G. Faccanoni

- Nature du point critique :

$$\mathrm{H}_f(x,y)=\begin{pmatrix}2&0\\0&4\end{pmatrix},\qquad \text{dét}(\mathrm{H}_f(x,y))=8.$$

$\text{dét}(\mathrm{H}_f(1,0))=8>0$ et $\partial_{xx}f(1,0)=2>0$ donc $(1,0)$ est un minimum pour f.

21. $f(x,y)=x^2+xy+y^2-2x-y$
- f est de classe $\mathscr{C}^2$ dans son domaine de définition, l'ouvert $\mathbb{R}^2$.
- Recherche de points critiques :

$$\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\iff\begin{cases}2x+y-2=0\\x+2y-1=0\end{cases}\iff(x,y)=(1,0).$$

On a un seul point critique : $(1,0)$.
- Nature du point critique :

$$\mathrm{H}_f(x,y)=\begin{pmatrix}2&1\\1&4\end{pmatrix},\qquad \text{dét}(\mathrm{H}_f(x,y))=7.$$

$\text{dét}(\mathrm{H}_f(1,0))=8>0$ et $\partial_{xx}f(1,0)=2>0$ donc $(1,0)$ est un minimum pour f.

22. $f(x,y)=x^3y^2(6-x-y)$
- f est de classe $\mathscr{C}^2$ dans son domaine de définition, l'ouvert $\mathbb{R}^2$.
- Recherche de points critiques :

$$\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\iff\begin{cases}3x^2y^2(6-x-y)-x^3y^2=0\\2x^3y(6-x-y)-x^3y^2=0\end{cases}\iff(x,y)\in\{(3,2),(t,0),(0,t)\mid t\in\mathbb{R}\}.$$

On a une infinité de points critiques : les points $(t,0)$ et $(0,t)$ pour $t\in_{\mathrm{R}}$ sont des points critiques ainsi que le point $(3,2)$.
- Nature des points critiques :

$$\begin{aligned}\partial_{xx}f(x,y)&=6xy^2(6-x-y)-6x^2y^2,\\\partial_{xy}f(x,y)&=6x^2y(6-x-y)-3x^2y^2-2x^3y,\\\partial_{yy}f(x,y)&=2x^3(6-x-y)-4x^3y.\end{aligned}$$

$$\mathrm{H}_f(x,y)=\begin{pmatrix}\partial_{xx}f(x,y)&\partial_{xy}f(x,y)\\\partial_{xy}f(x,y)&\partial_{yy}f(x,y)\end{pmatrix},\qquad \text{dét}(\mathrm{H}_f(x,y))=\partial_{xx}f(x,y)\partial_{yy}f(x,y)-(\partial_{xy}f(x,y))^2$$

$\text{dét}(\mathrm{H}_f(3,2))>0$ et $\partial_{xx}f(3,2)<0$ donc $(3,2)$ est un maximum pour f.
$\text{dét}(\mathrm{H}_f(t,0))=0$ pour tout $t\in\mathbb{R}$: l'étude de la matrice hessienne ne permet pas de conclure pour les points sur l'axe d'équation $y=0$. Pour connaître la nature de ces points on étudie le signe de $d(h,k)=f(t+h,0+k)-f(t,0)=(t+h)^3k^2(6-t-h-k)$ pour h et k proches de 0. On conclut que les points $(t,0)$ pour $t<0$ ou $t>6$ sont des maxima, les points $(t,0)$ pour $0<t<6$ sont des minima et les points $(0,0)$ et $(6,0)$ sont des points-selle.
$\text{dét}(\mathrm{H}_f(0,t))=0$ pour tout $t\in\mathbb{R}$: l'étude de la matrice hessienne ne permet pas de conclure pour les points sur les axes. Pour connaître la nature de ces points on étudie le signe de $d(h,k)=f(0+h,t+k)-f(0,t)=h^3(t+k)^2(6-t-h-k)$ pour h et k proches de 0. On conclut que les points $(0,t)$ sont des points-selle pour tout $t\in\mathbb{R}$.

23. $f(x,y)=e^{x-y}(x^2-2y^2)$
- f est de classe $\mathscr{C}^2$ dans son domaine de définition, l'ouvert $\mathbb{R}^2$.
- Recherche de points critiques :

$$\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\iff\begin{cases}(x^2-2y^2+2x)e^{x-y}=0\\(-x^2+2y^2-4y)e^{x-y}=0\end{cases}\iff(x,y)\in\{(0,0),(-4,-2)\}.$$

On a deux points critiques : $(0,0)$ et $(-4,-2)$.

- Nature des points critiques :

$$\partial_{xx}f(x,y) = e^{x-y}(x^2-2y^2+4x+2), \qquad \partial_{xy}f(x,y) = e^{x-y}(-x^2+2y^2-2x-4y), \qquad \partial_{yy}f(x,y) = e^{x-y}(x^2-2y^2+8y-4);$$

$$\mathrm{H}_f(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_{xx}f(x,y) & \partial_{xy}f(x,y) \\ \partial_{xy}f(x,y) & \partial_{yy}f(x,y) \end{pmatrix}, \qquad \det(\mathrm{H}_f(x,y)) = \partial_{xx}f(x,y)\partial_{yy}f(x,y) - (\partial_{xy}f(x,y))^2.$$

On en déduit que

(x_0,y_0)	$\partial_{xx}f(x_0,y_0)$	$\partial_{xy}f(x_0,y_0)$	$\partial_{yy}f(x_0,y_0)$	$\det(\mathrm{H}_f(x_0,y_0))$	
$(-4,-2)$	$-6e^{-2}$	$8e^{-2}$	$-12e^{-2}$	$8e^{-4}$	maximum
$(0,0)$	2	0	-4	-8	point-selle

24. $f(x,y) = \frac{8}{x} + \frac{x}{y} + y$
    - f est de classe $\mathscr{C}^2$ dans son domaine de définition, l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \mid xy = 0\}$.
    - Recherche de points critiques :

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \frac{1}{y} - \frac{8}{x^2} = 0 \\ 1 - \frac{x}{y^2} = 0 \end{cases} \iff (x,y) = (4,2).$$

      On a un unique point critique : $(4,2)$.
    - Nature du point critique :

$$\mathrm{H}_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{16}{x^3} & -\frac{1}{y^2} \\ -\frac{1}{y^2} & \frac{2x}{y^3} \end{pmatrix}, \qquad \det(\mathrm{H}_f(x,y)) = \frac{1}{y^3}\left(\frac{16}{x^2} - \frac{1}{y}\right).$$

      $\det(\mathrm{H}_f(4,2)) > 0$ et $\partial_{xx}f(4,2) > 0$ donc $(4,2)$ est un minimum pour f.

25. $f(x,y) = x^2 - \cos(y)$
    - f est de classe $\mathscr{C}^2$ dans son domaine de définition, l'ouvert $\mathbb{R}^2$.
    - Recherche de points critiques :

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2x = 0 \\ \sin(y) = 0 \end{cases} \iff \iff (x,y) \in \{(0,k\pi) \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

      On a une infinité de points critiques qui s'écrivent $(0,k\pi)$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
    - Nature du point critique :

$$\mathrm{H}_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \cos(y) \end{pmatrix}, \qquad \det(\mathrm{H}_f(x,y)) = 2\cos(y).$$

      $\det(\mathrm{H}_f(0,k\pi)) = (-1)^k$ et $\partial_{xx}f(0,k\pi) > 0$ pour tout$k \in \mathbb{Z}$ donc $(0,k\pi)$ est un minimum si k est pair et un point-selle si k est impair.

26. $f(x,y) = (x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}$.

    On peut remarquer que si on passe aux coordonnées polaire on obtient $w(r) \equiv f(r\cos(\vartheta), r\sin(\vartheta)) = r^2e^{-r^2}$, autrement-dit on obtient une fonction de la seule variable $r > 0$ et on a $w'(r) = 2r(1-r^2)e^{-r^2}$ qui s'annule pour $r = 1$ et dont l'étude des variations montre qu'il s'agit d'un minimum. Il faut étudier séparément le cas $(x = 0, y = 0)$ car il n'est pas pris en compte lorsqu'on passe aux coordonnées polaire. Si on n'a pas remarqué cette symétrie, on étudie la fonction comme dans les cas précédents :
    - f est de classe $\mathscr{C}^2$ dans son domaine de définition, l'ouvert $\mathbb{R}^2$.
    - Recherche de points critiques :

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2x(1-x^2-y^2)e^{-(x^2+y^2)} = 0 \\ 2y(1-x^2-y^2)e^{-(x^2+y^2)} = 0 \end{cases}$$

      On a une infinité de points critiques : le point $(0,0)$ et les points (x,y) qui appartiennent au cercle $x^2+y^2 = 1$.

© 2024-2027 G. Faccanoni

- Nature du point critique : comme $f(x,y) \geq 0$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $f(x,y) = 0$ ssi $(x,y) \neq (0,0)$ ou (x,y) est tel que $x^2+y^2-1=0$, on en déduit qu'ils sont des minima (le calcul des dérivées secondes porte à des calculs très longues et inutiles dans ce cas).

27. $f(x,y) = x^3 + y^2 - 6(x^2-y^2)$
    - f est de classe $\mathscr{C}^2$ dans son domaine de définition, l'ouvert $\mathbb{R}^2$.
    - Recherche de points critiques :

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{cases} 3x(x-4)=0 \\ 3y(y+4)=0 \end{cases} \iff (x,y) \in \{(0,0),(0,-4),(4,0),(4,-4)\}.$$

      On a quatre points critiques : $(0,0)$, $(0,-4)$, $(4,0)$ et $(4,-4)$.
    - Nature des points critiques :

$$\mathrm{H}_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6(x-2) & 0 \\ 0 & 6(y+2) \end{pmatrix}, \qquad \text{dét}(\mathrm{H}_f(x,y)) = 36(x-2)(y+2).$$

      $\text{dét}(\mathrm{H}_f(0,0)) < 0$ donc $(0,0)$ est un point-selle ;
      $\text{dét}(\mathrm{H}_f(0,-4)) > 0$ et $\partial_{xx} f(0,-4) < 0$ donc $(0,-4)$ est un maximum ;
      $\text{dét}(\mathrm{H}_f(4,0)) > 0$ et $\partial_{xx} f(4,0) > 0$ donc $(4,0)$ est un minimum ;
      $\text{dét}(\mathrm{H}_f(4,-4)) < 0$ $(4,-4)$ est un point-selle.

28. $f(x,y) = (x^2+y^2-y^3)e^{-y}$
    - f est de classe $\mathscr{C}^2$ dans son domaine de définition, l'ouvert $\mathbb{R}^2$.
    - Recherche de points critiques :

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2xe^{-y}=0 \\ (-x^2+2y-4y^2+y^3)e^{-y}=0 \end{cases} \iff (x,y) \in \left\{(0,0),(0,2-\sqrt{2}),(0,2+\sqrt{2})\right\}.$$

      On a quatre trois critiques : $(0,0)$, $(0,2-\sqrt{2})$ et $(0,2+\sqrt{2})$.
    - Nature des points critiques :

$$\mathrm{H}_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2e^{-y} & -2xe^{-y} \\ -2xe^{-y} & (2+x^2-10y+7y^2-y^3)e^{-y} \end{pmatrix}, \qquad \text{dét}(\mathrm{H}_f(x,y)) = \left(4-2x^2-20y+14y^2-2y^3\right)e^{-2y}.$$

      $\text{dét}(\mathrm{H}_f(0,0)) > 0$ et $\partial_{xx} f(0,0) > 0$ donc $(0,0)$ est un minimum ;
      $\text{dét}(\mathrm{H}_f(0,2-\sqrt{2})) < 0$ donc $(0,2-\sqrt{2})$ est un point-selle ;
      $\text{dét}(\mathrm{H}_f(0,2+\sqrt{2})) > 0$ et $\partial_{xx} f(0,2+\sqrt{2}) > 0$ donc $(0,2+\sqrt{2})$ est un minimum.

Exercice 2.16
La société d'Adèle produit deux types d'ampoules : E17 et E24. Indiquons par x le nombre de milliers d'ampoules de type E17 produites et supposons que la demande pour ce type de lampes est donnée par $p_1 = 50 - x$, où p_1 est le prix de vente en euros. De même, indiquons par y le nombre de milliers d'ampoules de type E24 produites et supposons que la demande pour ce type est donnée par $p_2 = 60 - 2y$, où p_2 est aussi le prix de vente en euros. Les coûts communs de production de ces ampoules est $\mathrm{C} = 2xy$ (en milliers d'euros). Par conséquent, le bénéfice de la société d'Adèle (en milliers d'euros) est une fonction de deux variables x et y. Déterminer le profit maximal d'Adèle.

Correction
La fonction profit en milliers d'euros est $p(x,y) = p_1 x + p_2 y - \mathrm{C}(x,y) = 50x - x^2 + 60y - 2y^2 - 2xy$. Pour maximiser le profit, on cherche d'abord les points stationnaires :

$$\nabla p = \mathbf{0} \iff \begin{pmatrix} 50-2x-2y \\ 60-4y-2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{cases} x=20, \\ y=5. \end{cases}$$

Pour établir la nature de ces points, on étudie la matrice hessienne :

$$\begin{aligned} &\partial_{xx} p(x,y) = -2, && \partial_{xx} p(20,5) = -2 < 0, \\ &\partial_{xy} p(x,y) = -2, && \partial_{xy} p(20,5) = -2, \\ &\partial_{yy} p(x,y) = -4, && \partial_{yy} p(20,5) = -4, \end{aligned}$$

et $\det(\mathrm{H}_f(20,5)) = (-2)(-4) - (-2)^2 = 4 > 0$ donc $(20,5)$ est un point de maximum pour p et le profit maximal vaut $p(20,5) = 650$. La société d'Adèle réalise le profit maximal de 650000 euros lorsqu'elle vend 20000 ampoules E17 à 30 euros l'une et 5000 ampoules E24 à 50 euros l'une.

Exercice 2.17
Vous êtes le directeur financier de la firme SANBON & FILS. Cette entreprise a investi 3000 euros pour mettre au point un nouveau parfum. Le coût de la production est de 3 euros par flacon de 100 mL. L'expert consulté par M. SANBON père a établi que si la firme consacre x euros en publicité pour son parfum et que le prix de vente d'un flacon est de y euros, la firme vendra exactement $300+6\sqrt{x}-10y$ pièces. La firme SANBON & FILS fixe évidemment x et y de manière à maximiser son profit. En tant que directeur financier, il vous incombe de déterminer ces valeurs.

Correction
- Revenu de la vente : $y(300+6\sqrt{x}-10y)$
- Coût de production : $3(300+6\sqrt{x}-10y)$
- Coût de développement et de publicité : $3000+x$
- Profit = (Revenu de la vente) - (Coût de production) - (Coût de développement et de publicité)

Le profit de la firme à maximiser est donc la fonction

$$\begin{aligned} f\colon (\mathbb{R}_+^*)^2 &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x,y) = (y-3)(300+6\sqrt{x}-10y) - x - 3000 \end{aligned}$$

La condition nécessaire s'écrit

$$\begin{cases} \partial_x f(x,y) = \frac{3(y-3)}{\sqrt{x}} - 1 = 0 \\ \partial_y f(x,y) = 330 + 6\sqrt{x} - 20y = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad (x_0,y_0) = (164025, 138).$$

La hessienne en ce point est définie négative :

$$\begin{cases} \partial_{xx} f(x,y) = -\frac{3(y-3)}{2\sqrt{x^3}} \\ \partial_{xy} f(x,y) = \frac{3}{\sqrt{x}} \\ \partial_{yy} f(x,y) = \frac{30(y-3)}{\sqrt{x^3}} - \frac{3}{\sqrt{x}} \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \det(\mathrm{H}_f(x_0,y_0)) = -\frac{241}{32805}.$$

Comme $\partial_{xx} f(x_0,y_0) = -20$, on a bien un maximum. La firme SANBON & FILS va donc consacrer 164025 euros à la promotion de son nouveau parfum et vendre le flacon de 100 mL à 138 euros. Elle réalisera de la sorte le profit maximal de $f(164025, 138) = 15225$ euros.

Exercice 2.18 (Une fabrication optimale)
Votre société s'occupe de la fabrication d'une pièce mécanique. Celle-ci dépend de deux paramètres réels x et y (à priori non-contraints) de la façon suivante : le coût unitaire de fabrication d'une pièce est égal à

$$c(x,y) = x^2 + 2y^2$$

tandis que le taux de pièces défectueuses (compris entre 0 et 1) est égal à

$$t(x,y) = \frac{1}{1+(xy)^2}.$$

On cherche à maximiser la rentabilité totale du processus de fabrication. On prendra pour fonction objectif le coût unitaire moyen d'une pièce non-défectueuse, qui est égal au coût de fabrication d'une pièce divisé par le taux de pièces non-défectueuses, et on tentera de le simplifier autant que possible.

Correction
La fonction à minimiser s'écrit $f(x,y) = \frac{c(x,y)}{1-t(x,y)} = \frac{x^2+2y^2}{1-\frac{1}{1+(xy)^2}} = \frac{(x^2+2y^2)(1+x^2y^2)}{x^2y^2} = \frac{1}{y^2} + x^2 + \frac{2}{x^2} + 2y^2$. La condition nécessaire s'écrit

$$\begin{cases} \partial_x f(x,y) = 2\frac{x^4-2}{x^3} = 0 \\ \partial_y f(x,y) = 2\frac{2y^4-1}{y^3} = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad (x_0,y_0) = (\sqrt[4]{2}, 1/\sqrt[4]{2}).$$

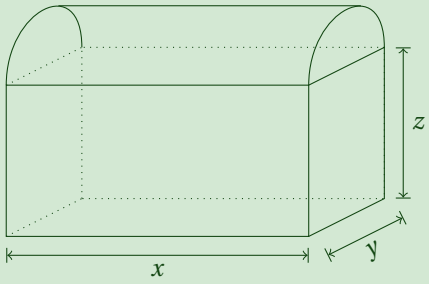
 © 2024-2027 G. FACCANONI

La hessienne en ce point est définie positive :

$$\begin{cases} \partial_{xx} f(x,y) = 2\frac{x^4+6}{x^4} \\ \partial_{xy} f(x,y) = 0 \\ \partial_{yy} f(x,y) = 2\frac{2y^4+3}{y^4} \end{cases} \implies \text{dét}(\mathrm{H}_f(x_0,y_0)) = 4\frac{2+6}{2}\frac{1+3}{1/2} > 0.$$

Comme $\partial_{xx} f(x_0,y_0) > 0$, on a bien un minimum. En choisissant $(x,y) = (\sqrt[4]{2}, 1/\sqrt[4]{2})$, le coût unitaire moyen d'une pièce non-défectueuse est minimale et égal à $4\sqrt{2}$.

Exercice 2.19
Une boîte a la forme d'un parallélépipède surmonté par un demi-cylindre comme dans la figure ci-dessous



On cherche les valeurs $x, y, z \in \mathbb{R}_+^*$ qui minimisent la surface totale S de la boîte pour un volume V égal à C.

1. Écrire $\mathrm{S}(x,y,z)$
2. Écrire $\mathrm{V}(x,y,z)$
3. Exprimer $z(x,y)$ comme solution de l'équation $\mathrm{V}(x,y,z) = \mathrm{C}$
4. Écrire $\tilde{\mathrm{S}}(x,y) = \mathrm{S}(x,y,z(x,y))$. Calculer et établir la nature des points critiques de $\tilde{\mathrm{S}}(x,y)$

Correction

1. $\mathrm{S}(x,y,z) = xy + 2xz + 2yz + \pi\left(\frac{y}{2}\right)^2 + \pi\frac{y}{2}x = \left(1+\frac{\pi}{2}\right)xy + \frac{\pi}{4}y^2 + 2(x+y)z$
2. $\mathrm{V}(x,y,z) = xyz + \frac{1}{2}\pi\left(\frac{y}{2}\right)^2 x = xyz + \frac{\pi}{8}xy^2$
3. $\mathrm{V}(x,y,z) = \mathrm{C} \iff z = \frac{\mathrm{C}-\frac{\pi}{8}xy^2}{xy}$ donc $z(x,y) = \frac{\mathrm{C}}{xy} - \frac{\pi}{8}y$
4. $\tilde{\mathrm{S}}(x,y) = \mathrm{S}(x,y,z(x,y)) = \left(1+\frac{\pi}{2}\right)xy + \frac{\pi}{4}y^2 + 2(x+y)\left(\frac{\mathrm{C}}{xy} - \frac{\pi}{8}y\right) = \left(1+\frac{\pi}{4}\right)xy + \frac{2\mathrm{C}}{x} + \frac{2\mathrm{C}}{y}$
   - Calcul des points critiques :

$$\nabla\tilde{\mathrm{S}}(x,y) = \begin{pmatrix} \left(1+\frac{\pi}{4}\right)y - \frac{2\mathrm{C}}{x^2} \\ \left(1+\frac{\pi}{4}\right)x - \frac{2\mathrm{C}}{y^2} \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \nabla\tilde{\mathrm{S}}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff (x,y) = \left(\sqrt[3]{\frac{2\mathrm{C}}{1+\frac{\pi}{4}}}, \sqrt[3]{\frac{2\mathrm{C}}{1+\frac{\pi}{4}}}\right)$$

   Il existe un seul point critique qui est $\left(\sqrt[3]{\frac{2\mathrm{C}}{1+\frac{\pi}{4}}}, \sqrt[3]{\frac{2\mathrm{C}}{1+\frac{\pi}{4}}}\right)$.
   - Nature des points critiques :

$$\mathrm{H}_{\tilde{\mathrm{S}}}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{4\mathrm{C}}{x^3} & 1+\frac{\pi}{4} \\ 1+\frac{\pi}{4} & \frac{4\mathrm{C}}{y^3} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \det(\mathrm{H}_{\tilde{\mathrm{S}}}(x,y)) = \frac{16\mathrm{C}^2}{x^3y^3} - \left(1+\frac{\pi}{4}\right)^2$$

   donc

$$\mathrm{H}_{\tilde{\mathrm{S}}}\left(\sqrt[3]{\frac{2\mathrm{C}}{1+\frac{\pi}{4}}}, \sqrt[3]{\frac{2\mathrm{C}}{1+\frac{\pi}{4}}}\right) = \begin{pmatrix} 2\left(1+\frac{\pi}{4}\right) & 1+\frac{\pi}{4} \\ 1+\frac{\pi}{4} & 2\left(1+\frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \det\left(\mathrm{H}_{\tilde{\mathrm{S}}}\left(\sqrt[3]{\frac{2\mathrm{C}}{1+\frac{\pi}{4}}}, \sqrt[3]{\frac{2\mathrm{C}}{1+\frac{\pi}{4}}}\right)\right) = 3\left(1+\frac{\pi}{4}\right)^2.$$

   On conclut que l'unique point critique est bien un minimum et l'on a

$$z\left(\sqrt[3]{\frac{2\mathrm{C}}{1+\frac{\pi}{4}}}, \sqrt[3]{\frac{2\mathrm{C}}{1+\frac{\pi}{4}}}\right) = \frac{\mathrm{C}}{\left(\frac{2\mathrm{C}}{1+\frac{\pi}{4}}\right)^{2/3}} - \frac{\pi}{8}\left(\frac{2\mathrm{C}}{1+\frac{\pi}{4}}\right)^{2/3}.$$

```python
import sympy as sp

x, y, z, C = sp.symbols('x y z C', positive=True)

S = (1 + sp.pi/2) * x * y + (sp.pi / 4) * y**2 + 2 * (x + y) * z
V = x * y * z + (sp.pi / 8) * x * y**2
z_sol = sp.solve(V - C, z)[0]
S_tilde = S.subs(z, z_sol).simplify()
grad_S_tilde = [sp.diff(S_tilde, var) for var in (x, y)]
H_S_tilde = sp.hessian(S_tilde, (x, y))
det_H_S_tilde = H_S_tilde.det()

x_c, y_c = sp.solve(grad_S_tilde, (x, y), domain=sp.S.Reals)[0]
H_S_tilde_at_critical = H_S_tilde.subs({x: x_c, y: y_c})
det_H_S_tilde_at_critical = det_H_S_tilde.subs({x: x_c, y: y_c}).simplify()

results = {
    'S(x,y,z)': S,
    'V(x,y,z)': V,
    'z(x,y)': z_sol,
    r'\tilde S(x,y)': S_tilde,
    r'\nabla \tilde S(x,y)': grad_S_tilde,
    r'H(x,y)': H_S_tilde,
    r'\det(H(x,y))': det_H_S_tilde,
    r'(x_c, y_c)': (x_c, y_c),
    r'H(x_c,y_c)': H_S_tilde_at_critical,
    r'\det(H(x_c,y_c))': det_H_S_tilde_at_critical
}

for key, value in results.items():
    print(f"${key}=\n{sp.latex(value)}$\n")
```

$$S(x,y,z) = xy\left(1+\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi y^2}{4} + z\left(2x+2y\right)$$
$$V(x,y,z) = \frac{\pi x y^2}{8} + xyz$$
$$z(x,y) = \frac{C}{xy} - \frac{\pi y}{8}$$
$$\tilde{S}(x,y) = \frac{2C}{y} + \frac{2C}{x} + \frac{\pi xy}{4} + xy$$
$$\nabla\tilde{S}(x,y) = \left[-\frac{2C}{x^2} + \frac{\pi y}{4} + y,\ -\frac{2C}{y^2} + \frac{\pi x}{4} + x\right]$$
$$H(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{4C}{x^3} & \frac{\pi}{4}+1 \\ \frac{\pi}{4}+1 & \frac{4C}{y^3} \end{bmatrix}$$
$$\det(H(x,y)) = \frac{256C^2 - 8\pi x^3y^3 - 16x^3y^3 - \pi^2x^3y^3}{16x^3y^3}$$
$$(x_c,y_c) = \left(\frac{2\sqrt[3]{C}}{\sqrt[3]{\pi+4}},\ \frac{2\sqrt[3]{C}}{\sqrt[3]{\pi+4}}\right)$$
$$H(x_c,y_c) = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{2}+2 & \frac{\pi}{4}+1 \\ \frac{\pi}{4}+1 & \frac{\pi}{2}+2 \end{bmatrix}$$
$$\det(H(x_c,y_c)) = \frac{3\pi^2}{16} + 3 + \frac{3\pi}{2}$$

Intégrales doubles, coordonnées cartésiennes

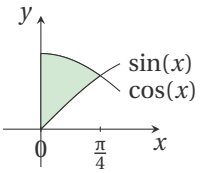
Exercice 2.20
Soit $\mathscr{D}$ la région comprise entre le graphe de la fonction d'équation $y = \sin(x)$ et le graphe de la fonction $y = \cos(x)$ pour x entre 0 et $\frac{\pi}{4}$. Décrire le domaine d'intégration $\mathscr{D}$ en coordonnées cartésiennes et calculer l'intégrale $\iint_{\mathscr{D}} (y+1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

© 2024-2027 G. Faccanoni

Correction

$\mathscr{D} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}, \sin(x) \leq y \leq \cos(x) \right\}$

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathscr{D}} (y+1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^{\pi/4} \int_{\sin(x)}^{\cos(x)} (y+1)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/4} \left[\frac{y^2}{2} + y \right]_{y=\sin(x)}^{y=\cos(x)} \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\pi/4} \left(\frac{\cos^2(x) - \sin^2(x)}{2} + \cos(x) - \sin(x) \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\pi/4} \left(\frac{\cos(2x)}{2} + \cos(x) - \sin(x) \right) \mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{\sin(2x)}{4} + \sin(x) + \cos(x) \right]_{x=0}^{x=\pi/4} = \sqrt{2} - \frac{3}{4}.
\end{aligned}$$




```
from sympy import symbols, sin, cos, pi, Integral, simplify, latex, integrate
x, y = symbols('x y')

inner = Integral( (y+1) , (y, sin(x), cos(x)))
inner_eval = inner.doit()
inner_simplified = simplify(inner_eval)

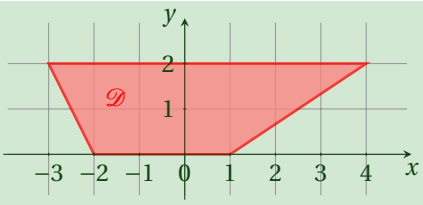
outer = Integral(inner_simplified, (x, 0, pi/4))
outer_eval = outer.doit()
outer_simplified = simplify(outer_eval)

step1 = r"\iint_{\mathcal{D}} (y+1)\,dx\,dy"
step2 = r"\int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_{\sin(x)}^{\cos(x)} (y+1)\dy\dx"
step3 = r"\int_0^{\frac{\pi}{4}} " + latex(inner_eval) + r" \dx"
step4 = r"\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left( " + latex(inner_simplified) + r"
↪  \right) \dx"
step5 = latex(outer_simplified)

latex_align = r"\begin{align*}" + "\n"
latex_align += step1 + r" &= " + step2 + r" \\" + "\n"
latex_align += r"&= " + step3 + r" \\" + "\n"
latex_align += r"&= " + step4 + r" \\" + "\n"
latex_align += r"&= " + step5 + "\n"
latex_align += r"\end{align*}"
print(latex_align)
```

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathscr{D}} (y+1)\,dx\,dy &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_{\sin(x)}^{\cos(x)} (y+1)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} -\frac{\sin^2(x)}{2} - \sin(x) + \frac{\cos^2(x)}{2} + \cos(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\cos(2x)}{2} + \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \right) \mathrm{d}x \\
&= -\frac{3}{4} + \sqrt{2}
\end{aligned}$$

Exercice 2.21



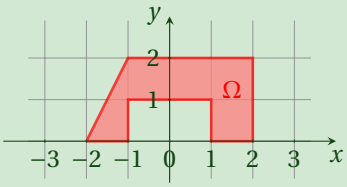
$$\iint_{\mathscr{D}} y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = ?$$

Correction

$$\mathscr{D} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \le y \le 2, -\frac{1}{2}y - 2 \le x \le \frac{3}{2}y + 1 \right\},$$

$$\iint_{\mathscr{D}} y \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \int_{-\frac{1}{2}y-2}^{\frac{3}{2}y+1} y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^2 \Big[yx \Big]_{x=-\frac{1}{2}y-2}^{x=\frac{3}{2}y+1} \mathrm{d}y = \int_0^2 y(2y+3)\,\mathrm{d}y = \frac{34}{3}.$$

Exercice 2.22



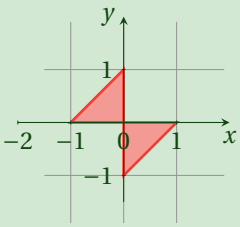
$$\iint_{\Omega} x \,\mathrm{d}\Omega = ?$$

Correction

$$\Omega = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \le y \le 2, \frac{1}{2}y - 2 \le x \le 2 \right\} \setminus \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, -1 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 \right\},$$

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} x \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x &= \int_0^2 \int_{\frac{y}{2}-2}^{2} x \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \int_0^1 \int_{-1}^{1} x \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^2 \Big[\frac{x^2}{2} \Big]_{x=\frac{y}{2}-2}^{x=2} \mathrm{d}y - \int_0^1 \Big[\frac{x^2}{2} \Big]_{x=-1}^{x=1} \mathrm{d}y = \int_0^2 -\frac{y^2}{8} + y \,\mathrm{d}y - 0 = \Big[-\frac{y^3}{24} + \frac{y^2}{2} \Big]_{y=0}^{y=2} = \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

Exercice 2.23



$$\iint_{\mathscr{D}} xy \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = ?$$

Correction

$$\mathscr{D} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, -1 \le x \le 0, 0 \le y \le x+1 \right\} \cup \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \le x \le 1, x-1 \le y \le 0 \right\}$$

donc

$$\begin{aligned} \iint_{\mathscr{D}} y \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x &= \int_{-1}^0 \int_0^{x+1} xy \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \int_{x-1}^0 xy \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^0 \Big[x\frac{y^2}{2} \Big]_0^{x+1} \mathrm{d}x + \int_0^1 \Big[x\frac{y^2}{2} \Big]_{x-1}^0 \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^0 x^3 + 2x^2 + x \,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_0^1 x^3 - 2x^2 + x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\Big[\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \Big]_{-1}^0 - \frac{1}{2}\Big[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \Big]_0^1 = -\frac{1}{12}. \end{aligned}$$

© 2024-2027 G. Faccanoni

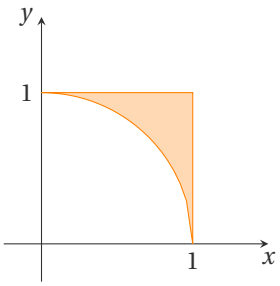
Exercice 2.24 (Distance moyenne parcourue à pied pour rejoindre une porte d'embarquement)
Dans les aéroports, les portes d'embarquements dans un terminal sont souvent alignées. Si on arrive à une porte d'embarquement et on doit rejoindre une autre porte d'embarquement pour une correspondance, quelle proportion de la longueur du terminal doit-on parcourir en moyenne ? Un manière de modéliser cette situation est de choisir au hasard deux nombres $x \in [0;1]$, $y \in [0;1]$ et de calculer la valeur moyenne de $|x-y|$, *i.e.* $\int_0^1 \int_0^1 |x-y| \, dx \, dy$. Calculer cette intégrale.

Correction

$$\int_0^1 \int_0^1 |x-y| \, dx \, dy = \int_0^1 \int_0^x (x-y) \, dy \, dx + \int_0^1 \int_x^1 (y-x) \, dy \, dx = \int_0^1 \left[xy - \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=x} dx + \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2} - xy \right]_{y=x}^{y=1} dx$$
$$= \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} \right) dx + \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - x + \frac{x^2}{2} \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - x + x^2 \right) dx = \left[\frac{1}{2}x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{3}.$$

Exercice 2.25
Calculer l'intégrale double $\iint_D f(x,y) \, dx \, dy$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \, 0 \leq x \leq 1, \, 0 \leq y \leq 1, \, 1 \leq x^2+y^2\}$ et $f(x,y) = \frac{xy}{1+x^2+y^2}$.

Correction
La partie D de $\mathbb{R}^2$ est l'intersection du carré $[0;1] \times [0;1]$ et de l'extérieur du cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 1. La fonction f est continue sur D.

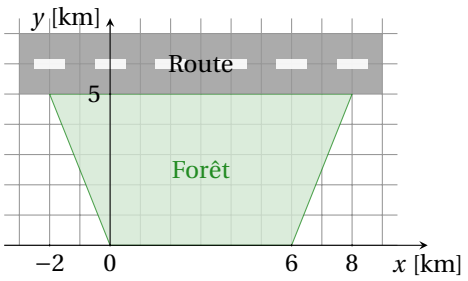


À l'aide du théorème de Fubini (et du dessin pour ne pas se tromper sur les bornes) on peut écrire

$$I = \iint_D \frac{xy}{1+x^2+y^2} \, dx \, dy = \int_0^1 \int_{\sqrt{1-x^2}}^1 \frac{xy}{1+x^2+y^2} \, dy \, dx = \int_0^1 \frac{x}{2} \int_{\sqrt{1-x^2}}^1 \frac{2y}{1+x^2+y^2} \, dy \, dx$$
$$= \int_0^1 \frac{x}{2} \left[\ln(1+x^2+y^2) \right]_{\sqrt{1-x^2}}^1 dx = \int_0^1 \frac{x}{2} \left[\ln(2+x^2) - \ln(2) \right] dx = \int_0^1 \frac{x}{2} \ln\left(1 + \frac{x^2}{2}\right) dx$$
$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \ln(1+u) \, du = \frac{1}{2} \left[(1+u)\ln(1+u) - u \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{4} \ln \frac{3}{2} - \frac{1}{4}.$$

Calcul d'aires et centres de gravité, coordonnées cartésiennes

Exercice 2.26 (Population de lapins)
Une forêt est à coté d'une route (voir la figure ci-contre). La densité de la population de lapins qui vivent dans la forêt est proportionnelle à la distance de la route. Plus précisément, elle vaut 0 au niveau de la route et vaut 10 lapins par kilomètre carré au coté opposé de la forêt. Estimer la population totale de lapins dans la forêt.



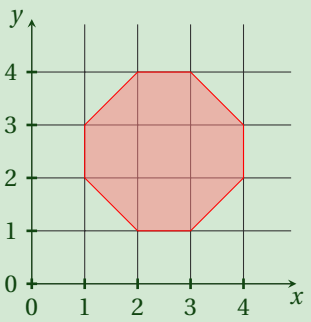
Correction

- La forêt (domaine d'intégration) s'écrit
$$\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, -2\le x\le 0, -\frac{5}{2}x\le y\le 5\right\}\cup\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0\le x\le 6, 0\le y\le 5\right\}\cup\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, 6\le x\le 8, \frac{5}{2}x-15\le y\le 5\right\}$$
ou encore, ce qui est plus simple,
$$\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0\le y\le 5, -\frac{2}{5}y\le x\le \frac{2}{5}(15+y)\right\}$$
- La densité est une fonction affine de la seule variable y (comme la route est horizontale, la distance ne dépend que de la coordonnées y), *i.e.* $\delta(y)=my+q$ avec m et q à déterminer. On sait que $\delta(5)=0$ et $\delta(0)=10$ donc $\delta(y)=2(5-y)$.
- La population totale de lapins qui vivent dans la forêt est
$$\int_0^5\int_{-\frac{2}{5}y}^{\frac{2}{5}(15+y)}\delta(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\int_0^5(5-y)\int_{-\frac{2}{5}y}^{\frac{2}{5}(15+y)}1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\int_0^5(5-y)\frac{2}{5}(15+2y)\,\mathrm{d}y = \frac{4}{5}\int_0^5 75-5y-2y^2\,\mathrm{d}y = \frac{550}{3}.$$

Exercice 2.27

Soit $\mathscr{D}$ la plaque homogène représentée dans la figure. *Sans* faire de calculs d'intégrales, en déduire les valeurs de

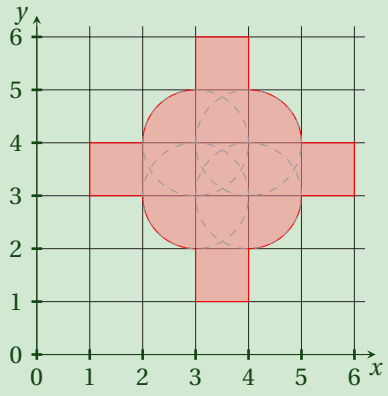
$$\iint_{\mathscr{D}}1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\qquad \iint_{\mathscr{D}}x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\qquad \iint_{\mathscr{D}}y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$



Correction
L'aire mesure 7 et le centre de gravité a coordonnées $(5/2,5/2)$ donc
$$\iint_{\mathscr{D}}1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=7,\qquad \iint_{\mathscr{D}}x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=35/2,\qquad \iint_{\mathscr{D}}y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=35/2.$$

Exercice 2.28
Soit $\mathscr{D}$ la plaque homogène représentée dans la figure. **Sans** faire de calculs d'intégrales, en déduire les valeurs de

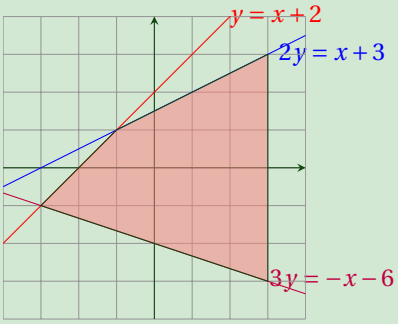
$$\iint_{\mathscr{D}}1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\qquad \iint_{\mathscr{D}}x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\qquad \iint_{\mathscr{D}}y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$



Correction
L'aire mesure $9+\pi$ et le centre de gravité a coordonnées $(7/2,7/2)$ donc
$$\iint_{\mathscr{D}}1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=9+\pi,\qquad \iint_{\mathscr{D}}x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=(9+\pi)7/2,\qquad \iint_{\mathscr{D}}y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=(9+\pi)7/2.$$

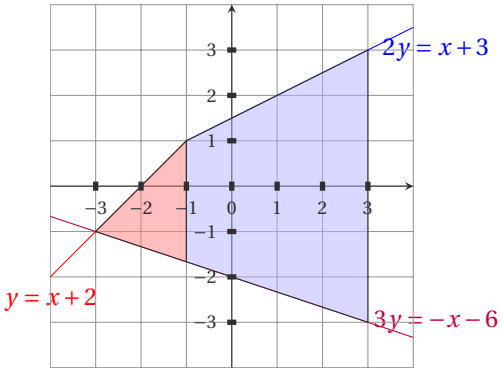
© 2024-2027 G. Faccanoni

Exercice 2.29
Calculer l'aire de la région coloriée en figure



Correction
Soit $\mathscr{D}$ le domaine. Pour calculer l'aire on peut soit utiliser un simple calcul géométrique soit se rappeler que l'aire est donnée par l'intégrale double

$$\iint_{\mathscr{D}} 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

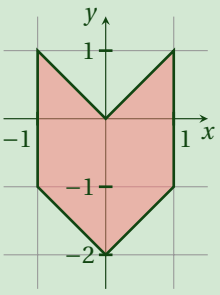


Pour ce calcul on décompose la région en deux parties et on obtient

$$\begin{aligned}\iint_{\mathscr{D}} 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_{-3}^{-1}\int_{-\frac{1}{3}x-2}^{x+2} 1\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{3}\int_{-\frac{1}{3}x-2}^{\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}} 1\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-3}^{-1} x+2+\frac{1}{3}x+2\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{3}\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}+\frac{1}{3}x+2\,\mathrm{d}x = \int_{-3}^{-1}\frac{4}{3}x+4\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{3}\frac{5}{6}x+\frac{7}{2}\,\mathrm{d}x = 20.\end{aligned}$$

On peut le refaire en découpant horizontalement au lieu que verticalement et on peut aussi le refaire avec des intégrales d'une seule variable

Exercice 2.30



Calculer les coordonnées du centre de gravité de la plaque supposée homogène dessinée ci-contre (vous pouvez éviter le calcul d'intégrales, mais *justifiez votre raisonnement*).

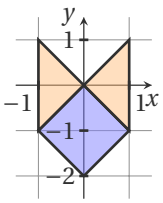
Correction
Pour calculer les coordonnées (x_G, y_G) du centre de gravité on doit calculer d'abord les trois intégrales doubles suivantes :

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathscr{D}} 1\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{0}\int_{-x-2}^{-x} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1}\int_{x-2}^{x} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} 2\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} 2\,\mathrm{d}x = 4,\\
\iint_{\mathscr{D}} x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{0}\int_{-x-2}^{-x} x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1}\int_{x-2}^{x} x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} 2x\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} 2x\,\mathrm{d}x = 0,\\
\iint_{\mathscr{D}} y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{0}\int_{-x-2}^{-x} y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1}\int_{x-2}^{x} y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} (-4x-4)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{0}^{1} (4x-4)\,\mathrm{d}x\\
&= -2\int_{-1}^{0} (x+1)\,\mathrm{d}x + 2\int_{0}^{1} (x-1)\,\mathrm{d}x = -2
\end{aligned}$$

et on en déduit que

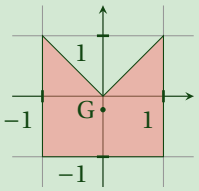
$$x_G = \frac{\iint_{\mathscr{D}} x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x}{\iint_{\mathscr{D}} 1\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x} = 0, \quad y_G = \frac{\iint_{\mathscr{D}} y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x}{\iint_{\mathscr{D}} 1\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x} = -\frac{1}{2}.$$

En fait, aucune intégrale n'est nécessaire car
- la première intégrale correspond à l'aire de la figure qu'on peut calculer géométriquement,
- la deuxième intégrale est forcément nulle car le centre de gravité appartient à l'axe des y par symétrie donc $x_G = 0$,
- la troisième intégrale n'est pas nécessaire car pour calculer y_G. Il suffit en effet de découper la plaque comme dans la figure ci-contre : la plaque supérieure a centre de gravité en $(0,0)$, la plaque inférieure a centre de gravité en $(-1,0)$ et les deux plaques ont la même aire donc la plaque totale a centre de gravité en $(0,-0{,}5)$ (ce raisonnement permet en effet de calculer directement x_G et y_G) :



$$y_G = y_{G_{\text{supérieure}}} \frac{\text{Aire supérieure}}{\text{Aire totale}} + y_{G_{\text{inférieure}}} \frac{\text{Aire inférieure}}{\text{Aire totale}} = 0\frac{1}{2} + (-1)\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

Exercice 2.31
Calculer les coordonnées du centre de gravité G de la plaque supposée homogène dessinée ci-dessous (éviter le calcul d'intégrales lorsqu'il est possible, mais *justifier le raisonnement*) :



Correction
Pour calculer les coordonnées (x_G, y_G) du centre de gravité on doit calculer d'abord les trois intégrales doubles suivantes :

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathscr{D}} 1\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{0}\int_{-1}^{-x} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1}\int_{-1}^{x} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} (-x+1)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} (x+1)\,\mathrm{d}x = 3,\\
\iint_{\mathscr{D}} x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{0}\int_{-1}^{-x} x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1}\int_{-1}^{x} x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} (-x^2+x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} (x^2+x)\,\mathrm{d}x = 0,\\
\iint_{\mathscr{D}} y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{0}\int_{-1}^{-x} y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1}\int_{-1}^{x} y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} (x^2-1)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{0}^{1} (x^2-1)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (x^2-1)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3} - x\right]_{-1}^{1} = -\frac{2}{3}
\end{aligned}$$

et on en déduit que

$$x_G = \frac{\iint_{\mathscr{D}} x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x}{\iint_{\mathscr{D}} 1\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x} = 0, \quad y_G = \frac{\iint_{\mathscr{D}} y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x}{\iint_{\mathscr{D}} 1\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x} = -\frac{2}{9}.$$

En fait, aucune des trois intégrales est nécessaire car
- la première intégrale correspond à l'aire de la figure qu'on peut calculer géométriquement,
- la deuxième intégrale est forcément nulle car le centre de gravité appartient à l'axe des y par symétrie donc $x_G = 0$,

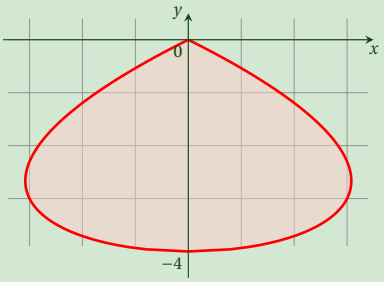
© 2024-2027 G. Faccanoni

- la troisième intégrale n'est pas nécessaire car pour calculer y_G. Il suffit en effet de découper la plaque en deux (la plaque supérieur correspond aux points d'ordonnée positive, la plaque inférieure aux points d'ordonnée négative). La plaque supérieure a aire 1 et centre de gravité en $(0,1/3)$, la plaque inférieure a aire 2 centre de gravité en $(0,-1/2)$, donc la plaque totale a aire 3 et centre de gravité en $(0,-2/9)$ car

$$y_G = y_{G_{\text{supérieure}}} \frac{\text{Aire supérieure}}{\text{Aire totale}} + y_{G_{\text{inférieure}}} \frac{\text{Aire inférieure}}{\text{Aire totale}} = \frac{1}{3}\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\frac{2}{3} = -\frac{1}{2}$$

Exercice 2.32 (Aire d'une châtaigne)
Calculer l'aire de

$$\mathscr{D} = \left\{ \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \middle| \quad y<0, \quad x^2 < y^4(y+4) \quad \right\}.$$



Correction

$$\text{Aire} = \iint_{\mathscr{D}} 1 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-4}^{0} \int_{-y^2\sqrt{y+4}}^{y^2\sqrt{y+4}} 1 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-4}^{0} [x]_{-y^2\sqrt{y+4}}^{y^2\sqrt{y+4}} \,\mathrm{d}y = \int_{-4}^{0} 2y^2\sqrt{y+4}\,\mathrm{d}y$$
$$= 4\int_0^2 t^2(t^2-4)^2\,\mathrm{d}t = 4\int_0^2 t^6 - 8t^4 + 16t^2\,\mathrm{d}t = 4\left[\frac{t^7}{7} - 8\frac{t^5}{5} + 16\frac{t^3}{3}\right]_0^2 = \frac{2^{12}}{105}.$$

Exercice 2.33 (Aire d'un cœur)
On se propose de calculer l'aire de l'ensemble $\mathscr{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 2x^2 - 2|x|(y+1) + (y+1)^2 - 1 \le 0\right\}$.

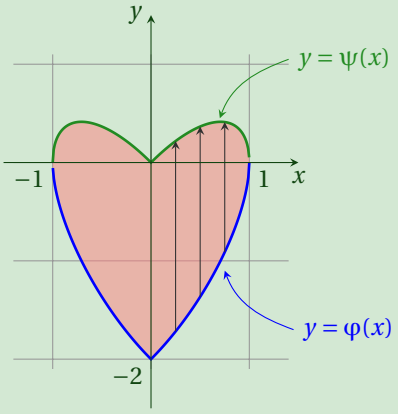
1. Déterminer tout d'abord les deux fonctions $y = \varphi(x)$ et $y = \psi(x)$ telles que

$$\mathscr{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, -1 \le x \le 1 \text{ et } \varphi(x) \le y \le \psi(x)\right\}.$$

2. Par le changement de variable $x = \sin(t)$, montrer qu'une primitive de la fonction $\sqrt{1-x^2}$ sur $[0;1]$ est

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x\sqrt{1-x^2} + \arcsin(x)}{2}.$$

3. En utilisant la symétrie de la figure, calculer l'aire de l'ensemble $\mathscr{D}$.



Correction

1. Pour trouver les équations des deux fonctions $y = \varphi(x)$ et $y = \psi(x)$ on remarque que

$$(y+1)^2 - 2|x|(y+1) + (2x^2-1) = 0 \iff (y+1) = |x| \pm \sqrt{|x|^2 - (2x^2-1)} \iff y = -1 + |x| \pm \sqrt{1-x^2}$$

donc $\varphi(x) = -1 + |x| - \sqrt{1-x^2}$ et $\psi(x) = -1 + |x| + \sqrt{1-x^2}$.
2. On calcule une primitive de la fonction $\sqrt{1-x^2}$ sur $[0;1]$ par le changement de variable $x = \sin(t)$:

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{1-\sin^2(t)}\cos(t)\,\mathrm{d}t = \int \cos^2(t)\,\mathrm{d}t = \sin(t)\cos(t) + \int \sin^2(t)\,\mathrm{d}t$$
$$= \sin(t)\cos(t) + \int 1\,\mathrm{d}t - \int \cos^2(t)\,\mathrm{d}t = \sin(t)\cos(t) + t - \int \cos^2(t)\,\mathrm{d}t = x\sqrt{1-x^2} + \arcsin(x) - \int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

donc

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}y = \frac{x\sqrt{1-x^2}+\arcsin(x)}{2}.$$

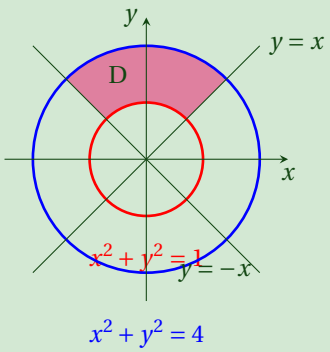
3. En utilisant la symétrie de la figure par rapport à la droite d'équation $x = 0$, on trouve

$$\mathrm{Aire}(\mathscr{D}) = \iint_{\mathscr{D}} 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\int_0^1 \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\int_0^1 \psi(x) - \varphi(x)\,\mathrm{d}y$$
$$= 4\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}y = 4\left[\frac{x\sqrt{1-x^2}+\arcsin(x)}{2}\right]_0^1 = 2\arcsin(1) = \pi.$$

Intégrales doubles, coordonnées polaires

Exercice 2.34
Calculer l'intégrale double

$$\iint_{\mathrm{D}} (x^2+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$



Correction
La région D s'écrit en coordonnées cartésiennes

$$\mathrm{D} = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, -\sqrt{2}\le x\le -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ et } -x\le y\le\sqrt{4-x^2}\right\}$$
$$\cup\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, -\frac{1}{\sqrt{2}}\le x\le\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ et } \sqrt{1-x^2}\le y\le\sqrt{4-x^2}\right\}$$
$$\cup\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, \frac{1}{\sqrt{2}}\le x\le\sqrt{2} \text{ et } x\le y\le\sqrt{4-x^2}\right\}$$

donc

$$\iint_{\mathrm{D}} (x^2+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-\sqrt{2}}^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}\int_{-x}^{\sqrt{4-x^2}} (x^2+y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (x^2+y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{2}}\int_{x}^{\sqrt{4-x^2}} (x^2+y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

C'est un peu compliqué… Si on décrit la région D en coordonnées polaires centrées en $(0;0)$ on obtient

$$\mathrm{D} = \left\{(r,\vartheta) \,\middle|\, 1\le r\le 2, \frac{\pi}{4}\le\vartheta\le\frac{3\pi}{4}\right\}$$

donc

© 2024-2027 G. Faccanoni

$$\iint_D (x^2+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\int_1^2 (r^2\cos^2(\vartheta)+r\sin(\vartheta))\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\vartheta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\int_1^2 (r^3\cos^2(\vartheta)+r^2\sin(\vartheta))\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\vartheta$$
$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\int_1^2 r^3\cos^2(\vartheta)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\vartheta + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\int_1^2 r^2\sin(\vartheta)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\vartheta = \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\cos^2(\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta\right)\times\left(\int_1^2 r^3\,\mathrm{d}r\right)+\left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\sin(\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta\right)\times\left(\int_1^2 r^2\,\mathrm{d}r\right)$$
$$= \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\frac{1+\cos(2\vartheta)}{2}\,\mathrm{d}\vartheta\right)\times\left(\int_1^2 r^3\,\mathrm{d}r\right)+\left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\sin(\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta\right)\times\left(\int_1^2 r^2\,\mathrm{d}r\right)$$
$$= \left[\frac{2\vartheta+\sin(2\vartheta)}{4}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\times\left[\frac{r^4}{4}\right]_1^2+\left[-\cos(\vartheta)\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\times\left[\frac{r^3}{3}\right]_1^2 = \left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)\times\frac{15}{4}+\sqrt{2}\times\frac{7}{3} = \frac{15}{16}\pi-\frac{15}{8}+\frac{7}{3}\sqrt{2}.$$

Exercice 2.35
Soit $\mathscr{D} = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2-4x+y^2+2y+3\le 0\right\}$. Calculer $\displaystyle\iint_{\mathscr{D}} \frac{1}{1+(x-2)^2+(y+1)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

Correction
Remarquons que l'équation $x^2-4x+y^2+2y+3=0$ définit un cercle de centre $(2,-1)$ et rayon $\sqrt{2}$. On passe alors aux coordonnées polaires :

$$\begin{cases} x = 2+r\cos(\vartheta), \\ y = -1+r\sin(\vartheta), \\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\vartheta, \end{cases}$$

et on obtient

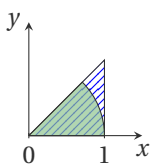
$$\iint_{\mathscr{D}} \frac{1}{1+(x-2)^2+(y+1)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} \frac{r}{1+r^2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\vartheta = \pi\int_0^{\sqrt{2}}\frac{2r}{1+r^2}\,\mathrm{d}r = \pi\left[\ln(1+r^2)\right]_0^{\sqrt{2}} = \pi\ln(3).$$

Exercice 2.36
Trouver les erreurs :

1. soit $\mathscr{D} = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2+y^2\le 4\right\}$, alors
$$\iint_{\mathscr{D}} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\int_0^2 r^2\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\vartheta = \left(\int_0^{2\pi}1\,\mathrm{d}\vartheta\right)\times\left(\int_0^2 r^2\,\mathrm{d}r\right) = \frac{16}{3}\pi;$$
2. soit $\mathscr{D}$ la région délimitée par la droite d'équation $x=1$, la droite d'équation $y=0$ et la droite d'équation $y=x$; alors, si on passe aux coordonnées polaires, on a
$$\iint_{\mathscr{D}} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{\pi/4}\int_0^1 r^2\cos(\vartheta)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\vartheta.$$

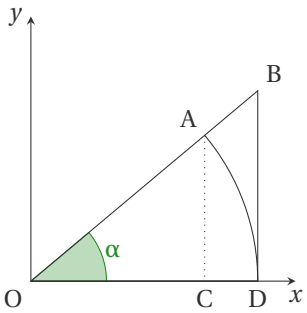
Correction

1. Quand on passe aux coordonnées polaires on a $x = r\cos(\vartheta)$, $y = r\sin(\vartheta)$ et $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\vartheta$ donc
$$\iint_{\mathscr{D}} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\int_0^2 r^3\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\vartheta = \left(\int_0^{2\pi}1\,\mathrm{d}\vartheta\right)\times\left(\int_0^2 r^3\,\mathrm{d}r\right) = 8\pi.$$
2. Le domaine $\mathscr{D} = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0\le x\le 1, 0\le y\le x\right\}$ est un triangle (hachuré dans la figure ci-dessous) tandis que le domaine $\left\{(r,\vartheta)\in\mathbb{R}_+^*\times[0,2\pi[\,\middle|\, 0\le r\le 1, 0\le\vartheta\le\frac{\pi}{4}\right\}$ (colorié dans la figure ci-dessous) est un huitième du disque unitaire :



Comme les domaines d'intégration sont différents, les deux intégrales sont différentes aussi. Si on utilise les coordonnées polaires pour décrire l'ensemble $\mathscr{D}$ on a

$$\left\{(r,\vartheta)\in\mathbb{R}_+^*\times[0,2\pi[\;\middle|\;0\le\vartheta\le\frac{\pi}{4},0\le r\le\sqrt{1+\tan^2(\vartheta)}\right\}=\left\{(r,\vartheta)\in\mathbb{R}_+^*\times[0,2\pi[\;\middle|\;0\le\vartheta\le\frac{\pi}{4},0\le r\le\frac{1}{\cos(\vartheta)}\right\}.$$



$\mathrm{OA}=\mathrm{OD}=\mathrm{R}$
$\mathrm{OC}=\mathrm{R}\cos(\alpha)$
$\mathrm{BD}=\mathrm{R}\tan(\alpha)$
$\mathrm{OB}=\mathrm{R}\sqrt{1+\tan^2(\alpha)}$

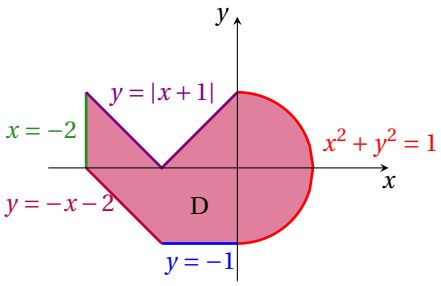
En effet,

$$\iint_{\mathscr{D}} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^1\int_0^x x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x=\int_0^1\left[xy\right]_{y=0}^{y=x}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x=\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3};$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\frac{1}{\cos(\vartheta)}} r^2\cos(\vartheta)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\vartheta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\frac{r^3}{3}\cos(\vartheta)\right]_{r=0}^{r=\frac{1}{\cos(\vartheta)}}\mathrm{d}\vartheta=\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^2(\vartheta)}\,\mathrm{d}\vartheta=\frac{1}{3}\Big[\tan(\vartheta)\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{3}.$$

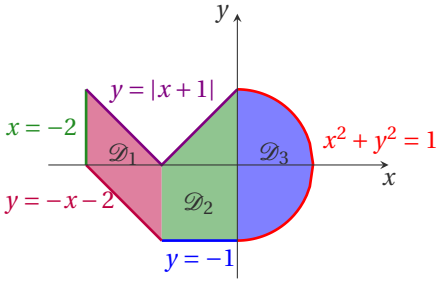
Exercice 2.37 (La baleine)
Calculer l'intégrale double

$$\iint_{\mathrm{D}} x^2 y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$



Correction
L'ensemble d'intégration peut être décrit comme la réunion des trois domaines disjoints suivants :

$$\begin{aligned}
\mathscr{D}_1&=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\;\middle|\;-2\le x<-1,\;-x-2\le y<-x-1\right\},\\
\mathscr{D}_2&=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\;\middle|\;-1\le x<0,\;-1\le y<x+1\right\},\\
\mathscr{D}_3&=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\;\middle|\;x\ge 0,\;x^2+y^2\le 1\right\}\\
&=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\;\middle|\;0\le x\le 1,\;-\sqrt{1-x^2}\le y\le\sqrt{1-x^2}\right\}\\
&=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\;\middle|\;0\le y\le 1,\;0\le x\le\sqrt{1-y^2}\right\}\\
&=\left\{(r,\vartheta)\in\mathbb{R}_+\times[-\pi;\pi[\;\middle|\;0<r\le 1,\;-\frac{\pi}{2}\le\vartheta\le\frac{\pi}{2}\right\}.
\end{aligned}$$



Par définition on a

$$\iint_{\mathrm{D}} x^2 y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_{\mathscr{D}_1} x^2 y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint_{\mathscr{D}_2} x^2 y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint_{\mathscr{D}_3} x^2 y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Calculons chaque intégrale :

- $\iint_{\mathscr{D}_1} x^2 y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$:

© 2024-2027 G. Faccanoni

$$\iint_{\mathscr{D}_1} x^2 y \,dx\,dy = \int_{-2}^{-1}\int_{-x-2}^{-x-1} x^2 y \,dy\,dx = \int_{-2}^{-1} x^2 \left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=-x-2}^{y=-x-1} dx = \int_{-2}^{-1} x^2\left(\frac{(-x-1)^2}{2} - \frac{(-x-2)^2}{2}\right) dx$$
$$= -\int_{-2}^{-1} x^3 + \frac{3}{2}x^2\,dx = -\left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{2}\right]_{x=-2}^{x=-1} = \frac{1}{4}$$

- $\iint_{\mathscr{D}_2} x^2 y \,dx\,dy$:

$$\iint_{\mathscr{D}_2} x^2 y \,dx\,dy = \int_{-1}^{0}\int_{-1}^{x+1} x^2 y \,dy\,dx = \int_{-1}^{0} x^2 \left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=-1}^{y=x+1} dx = \int_{-1}^{0} x^2\left(\frac{(x+1)^2}{2} - \frac{(-1)^2}{2}\right) dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} x^4 + 2x^3\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{2}\right]_{x=-1}^{x=0} = -\frac{3}{20}$$

- $\iint_{\mathscr{D}_3} x^2 y \,dx\,dy = 0$ car le domaine est symétrique par rapport à l'axe des abscisses et la fonction à intégrer est impaire par rapport à y. Si on n'a pas remarqué la symétrie, il suffit d'utiliser les coordonnées polaires :

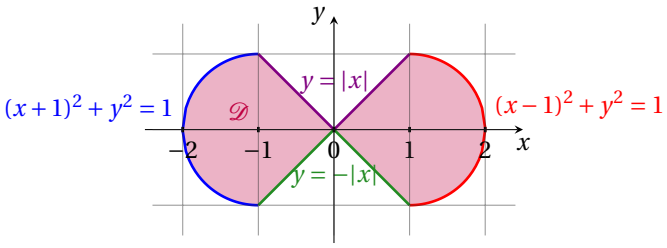
$$\iint_{\mathscr{D}_3} x^2 y \,dx\,dy = \int_0^1\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(r^4\cos^2(\vartheta)\sin(\vartheta)\right) d\vartheta\,dr = \left(\int_0^1 r^4\,dr\right)\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2(\vartheta)\sin(\vartheta)\,d\vartheta\right) = \left[\frac{r^5}{5}\right]_0^1\left[-\frac{\cos^3(\vartheta)}{3}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 0$$

En conclusion,

$$\iint_{\mathrm{D}} x^2 y \,dx\,dy. = \frac{1}{4} - \frac{3}{20} + 0 = \frac{1}{10}.$$

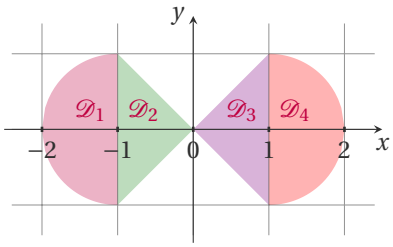
Exercice 2.38
Calculer l'intégrale double

$$\iint_{\mathscr{D}} xy^2 \,dx\,dy.$$



Correction
Il s'agit de la réunion des quatre domaines :

$$\mathscr{D}_1 = \{(x,y) \mid x \le -1,\ (x+1)^2 + y^2 \le 1\},$$
$$\mathscr{D}_2 = \{(x,y) \mid -1 \le x \le 0,\ x \le y \le -x\},$$
$$\mathscr{D}_3 = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1,\ -x \le y \le x\},$$
$$\mathscr{D}_4 = \{(x,y) \mid x \ge 0,\ (x-1)^2 + y^2 \le 1\}.$$



Par définition on a

$$\iint_{\mathscr{D}} xy^2 \,dx\,dy = \iint_{\mathscr{D}_1} xy^2 \,dx\,dy + \iint_{\mathscr{D}_2} xy^2 \,dx\,dy + \iint_{\mathscr{D}_3} xy^2 \,dx\,dy + \iint_{\mathscr{D}_4} xy^2 \,dx\,dy.$$

Calculons chaque intégrale :

$$\iint_{\mathscr{D}_1} xy^2 \,dx\,dy = \int_{\pi/2}^{3\pi/2}\int_0^1 r^4\cos(\vartheta)\sin^2(\vartheta)\,dr\,d\vartheta = \left(\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\cos(\vartheta)\sin^2(\vartheta)\,d\vartheta\right)\left(\int_0^1 r^4\,dr\right) = \left[\frac{\sin^3(\vartheta)}{3}\right]_{\vartheta=\pi/2}^{\vartheta=3\pi/2}\left[\frac{r^5}{5}\right]_{r=0}^{r=1} = -\frac{2}{15}$$

$$\iint_{\mathscr{D}_2} xy^2 \,dx\,dy = \int_{-1}^{0}\int_{x}^{-x} xy^2 \,dy\,dx = \int_{-1}^{0} x\left[\frac{y^3}{3}\right]_{y=x}^{y=-x} dx = \int_{-1}^{0} x\left(\frac{(-x)^3}{3} - \frac{(x)^3}{3}\right) dx = -\frac{2}{3}\int_{-1}^{0} x^4\,dx = -\frac{2}{3}\left[\frac{x^5}{5}\right]_{x=-1}^{x=0} = -\frac{2}{15}$$

$$\iint_{\mathscr{D}_3} xy^2 \,dx\,dy = \int_0^1\int_{-x}^{x} xy^2 \,dy\,dx = \int_0^1 x\left[\frac{y^3}{3}\right]_{y=-x}^{y=x} dx = \int_0^1 x\left(\frac{x^3}{3} - \frac{(-x)^3}{3}\right) dx = \frac{2}{3}\int_0^1 x^4\,dx = \frac{2}{3}\left[\frac{x^5}{5}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{2}{15}$$

$$\iint_{\mathscr{D}_4} xy^2 \,dx\,dy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^1 r^4\cos(\vartheta)\sin^2(\vartheta)\,dr\,d\vartheta = \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos(\vartheta)\sin^2(\vartheta)\,d\vartheta\right)\left(\int_0^1 r^4\,dr\right) = \left[\frac{\sin^3(\vartheta)}{3}\right]_{\vartheta=-\pi/2}^{\vartheta=\pi/2}\left[\frac{r^5}{5}\right]_{r=0}^{r=1} = \frac{2}{15}$$

En conclusion,

$$\iint_{\mathscr{D}} xy^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0.$$

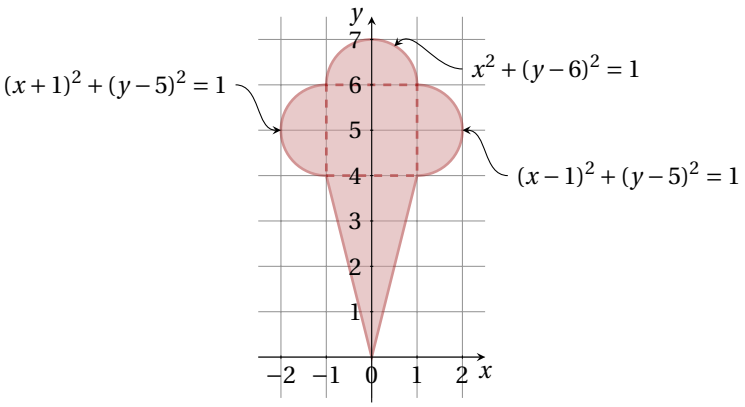
Ce résultat était prévisible car le domaine est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et la fonction à intégrer est impaire par rapport à x.

Exercice 2.39
Calculer

$$\iint_{\mathscr{D}} y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

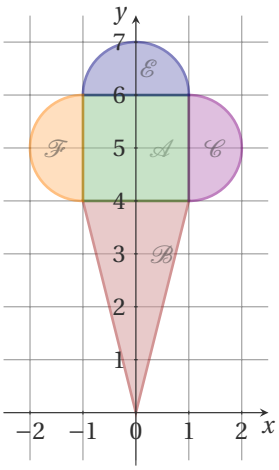
où l'ensemble d'intégration est celui colorié dans la figure ci-contre.

(Le trait discontinue suggère un découpage du domaine d'intégration)



Correction

Méthode I On décompose le domaine d'intégration en cinq parties sur lesquelles sera facile de calculer l'intégrale donnée :



$$\iint_{\mathscr{D}} y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{\mathscr{A}} y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_{\mathscr{B}} y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_{\mathscr{C}} y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_{\mathscr{E}} y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_{\mathscr{F}} y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$\mathscr{A} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, -1 \le x \le 1, 4 \le y \le 6\right\},$$
$$\mathscr{B} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \le y \le 4, -\frac{y}{4} \le x \le \frac{y}{4}\right\},$$
$$\mathscr{C} = \left\{(r,t) \in \mathbb{R}_+^* \times [-\pi;\pi[\,\middle|\, 0 \le r \le 1, -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}\right\}, \text{ avec } x = 1 + r\cos(t), y = 5 + r\sin(t),$$
$$\mathscr{E} = \left\{(r,t) \in \mathbb{R}_+^* \times [0;2\pi[\,\middle|\, 0 \le r \le 1, 0 \le t \le \pi\right\}, \text{ avec } x = r\cos(t), y = 6 + r\sin(t),$$
$$\mathscr{F} = \left\{(r,t) \in \mathbb{R}_+^* \times [0;2\pi[\,\middle|\, 0 \le r \le 1, \frac{\pi}{2} \le t \le \frac{3\pi}{2}\right\}, \text{ avec } x = -1 + r\cos(t), y = 5 + r\sin(t),$$

$$\iint_{\mathscr{A}} y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1}\int_{4}^{6} y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \left(\int_{-1}^{1} 1 \,\mathrm{d}x\right) \times \left(\int_{4}^{6} y \,\mathrm{d}y\right) = 2 \times \left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=4}^{y=6} = 20$$

$$\iint_{\mathscr{B}} y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-0}^{4}\int_{-y/4}^{y/4} y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{0}^{4} [yx]_{x=-y/4}^{x=y/4} \,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_{0}^{4} y^2 \,\mathrm{d}x = \left[\frac{y^3}{6}\right]_{y=0}^{y=4} = \frac{32}{3}$$

$$\iint_{\mathscr{C}} y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{0}^{1}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} r(5 + r\sin(t)) \,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}r = \left(\int_{0}^{1} 5r \,\mathrm{d}r\right) \times \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1 \,\mathrm{d}t\right) + \left(\int_{0}^{1} r^2 \,\mathrm{d}r\right) \times \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin(t) \,\mathrm{d}t\right)$$
$$= \left[5\frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{r=1} \times \left[t\right]_{t=-\pi/2}^{t=\pi/2} + \left[\frac{r^3}{3}\right]_{r=0}^{r=1} \times \left[-\cos(t)\right]_{t=-\pi/2}^{t=\pi/2} = \frac{5\pi}{2}$$

$$\iint_{\mathscr{E}} y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{0}^{1}\int_{0}^{\pi} r(6 + r\sin(t)) \,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}r = \left(\int_{0}^{1} 6r \,\mathrm{d}r\right) \times \left(\int_{0}^{\pi} 1 \,\mathrm{d}t\right) + \left(\int_{0}^{1} r^2 \,\mathrm{d}r\right) \times \left(\int_{0}^{\pi} \sin(t) \,\mathrm{d}t\right)$$
$$= \left[6\frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{r=1} \times \left[t\right]_{t=0}^{t=\pi} + \left[\frac{r^3}{3}\right]_{r=0}^{r=1} \times \left[-\cos(t)\right]_{t=0}^{t=\pi} = 3\pi + \frac{2}{3}$$

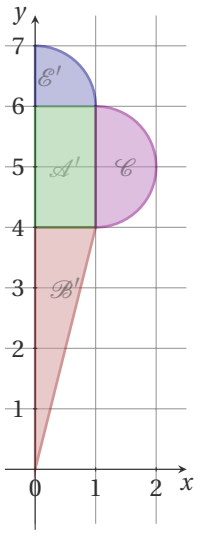
$$\iint_{\mathscr{F}} y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{\mathscr{C}} y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Conclusion :

$$\iint_{\mathscr{D}} y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 20 + \frac{34}{3} + 8\pi.$$

© 2024-2027 G. Faccanoni

Méthode II La fonction et le domaine d'intégration sont symétriques par rapport au plan d'équation $x = 0$, par conséquent il suffit de calculer l'intégrale sur une moitié du domaine d'intégration :



$$\iint_{\mathscr{D}} y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\left(\iint_{\mathscr{A}'} y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_{\mathscr{B}'} y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_{\mathscr{C}} y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_{\mathscr{E}'} y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)$$

$$\mathscr{A}' = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0\le x\le 1, 4\le y\le 6\right\},$$
$$\mathscr{B}' = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0\le x\le 1, 4x\le y\le 4\right\},$$
$$\mathscr{C} = \left\{(r,t)\in\mathbb{R}_+^*\times[-\pi;\pi[\,\middle|\, 0\le r\le 1, -\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}\right\}, \text{ avec } x = 1+r\cos(t), y = 5+r\sin(t),$$
$$\mathscr{E}' = \left\{(r,t)\in\mathbb{R}_+^*\times[0;2\pi[\,\middle|\, 0\le r\le 1, 0\le t\le\frac{\pi}{2}\right\}, \text{ avec } x = r\cos(t), y = 6+r\sin(t),$$

$$\iint_{\mathscr{A}'} y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1\int_4^6 y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \left(\int_0^1 1\,\mathrm{d}x\right)\times\left(\int_4^6 y\,\mathrm{d}y\right) = 1\times\left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=4}^{y=6} = 10$$

$$\iint_{\mathscr{B}'} y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1\int_{4x}^4 y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1\left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=4x}^{y=4}\mathrm{d}x = 8\int_0^1(1-x^2)\,\mathrm{d}x = 8\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{16}{3}$$

$$\iint_{\mathscr{C}} y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1\int_{-\pi/2}^{\pi/2} r(5+r\sin(t))\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}r = \left(\int_0^1 5r\,\mathrm{d}r\right)\times\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2}1\,\mathrm{d}t\right) + \left(\int_0^1 r^2\,\mathrm{d}r\right)\times\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin(t)\,\mathrm{d}t\right)$$
$$= \left[5\frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{r=1}\times\left[t\right]_{t=-\pi/2}^{t=\pi/2} + \left[\frac{r^3}{3}\right]_{r=0}^{r=1}\times\left[-\cos(t)\right]_{t=-\pi/2}^{t=\pi/2} = \frac{5\pi}{2}$$

$$\iint_{\mathscr{E}'} y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1\int_0^{\pi/2} r(6+r\sin(t))\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}r = \left(\int_0^1 6r\,\mathrm{d}r\right)\times\left(\int_0^{\pi/2}1\,\mathrm{d}t\right) + \left(\int_0^1 r^2\,\mathrm{d}r\right)\times\left(\int_0^{\pi/2}\sin(t)\,\mathrm{d}t\right)$$
$$= \left[6\frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{r=1}\times\left[t\right]_{t=0}^{t=\pi/2} + \left[\frac{r^3}{3}\right]_{r=0}^{r=1}\times\left[-\cos(t)\right]_{t=0}^{t=\pi/2} = \frac{3}{2}\pi + \frac{1}{3}$$

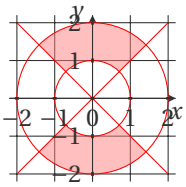
Conclusion :

$$\iint_{\mathscr{D}} y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\left(10+\frac{17}{3}+4\pi\right).$$

Exercice 2.40
Après avoir représenté graphiquement l'ensemble $\mathscr{A}$, calculer l'intégrale

$$\iint_{\mathscr{A}} \frac{x}{y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad \text{avec} \qquad \mathscr{A} = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, 1\le x^2+y^2\le 4,\ |y|\ge|x|\right\}.$$

Correction
L'ensemble $\mathscr{A}$ est la partie coloriée dans la figure ci-dessous :



En passant en coordonnées polaires

$$x = r\cos(\vartheta), \qquad y = r\sin(\vartheta), \qquad \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\vartheta$$

on obtient

$$\mathscr{A} = \left\{ (r,\vartheta) \in \mathbb{R}_+ \times [0;2\pi[\;\middle|\; 1 \le r \le 2 \text{ et } \frac{\pi}{4} \le \vartheta \le \frac{3\pi}{4} \right\} \cup \left\{ (r,\vartheta) \in \mathbb{R}_+ \times [0;2\pi[\;\middle|\; 1 \le r \le 2 \text{ et } \frac{5\pi}{4} \le \vartheta \le \frac{7\pi}{4} \right\}$$

et donc

$$\iint_{\mathscr{A}} \frac{x}{y}\,dx\,dy = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_1^2 \frac{\cos(\vartheta)}{\sin(\vartheta)} r\,dr\,d\vartheta + \int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} \int_1^2 \frac{\cos(\vartheta)}{\sin(\vartheta)} r\,dr\,d\vartheta = \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\cos(\vartheta)}{\sin(\vartheta)}\,d\vartheta + \int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} \frac{\cos(\vartheta)}{\sin(\vartheta)}\,d\vartheta \right) \left(\int_1^2 r\,dr \right) = 0.$$

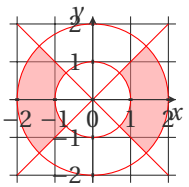
car

$$\int \frac{\cos(t)}{\sin(t)}\,dt = \ln(|\sin(t)|).$$

Exercice 2.41
Après avoir représenté graphiquement l'ensemble $\mathscr{A}$, calculer l'intégrale

$$\iint_{\mathscr{A}} \frac{y}{x}\,dx\,dy \qquad \text{avec} \qquad \mathscr{A} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 1 \le x^2+y^2 \le 4,\ |y| \le |x| \right\}.$$

Correction
L'ensemble $\mathscr{A}$ est la partie coloriée dans la figure ci-dessous :



En passant en coordonnées polaires

$$x = r\cos(\vartheta), \qquad y = r\sin(\vartheta), \qquad dx\,dy = r\,dr\,d\vartheta$$

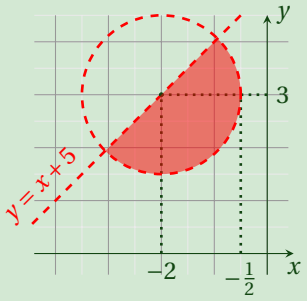
on obtient

$$\iint_{\mathscr{A}} \frac{y}{x}\,dx\,dy = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_1^2 \frac{\sin(\vartheta)}{\cos(\vartheta)} r\,dr\,d\vartheta + \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \int_1^2 \frac{\sin(\vartheta)}{\cos(\vartheta)} r\,dr\,d\vartheta = \left(\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(\vartheta)}{\cos(\vartheta)}\,d\vartheta + \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{\sin(\vartheta)}{\cos(\vartheta)}\,d\vartheta \right) \left(\int_1^2 r\,dr \right) = 0$$

car

$$\int \frac{\sin(t)}{\cos(t)}\,dt = -\ln(|\cos(t)|).$$

Exercice 2.42



Soit $\mathscr{D}$ la partie coloriée en figure.

- Décrire $\mathscr{D}$ en coordonnées cartésiennes.
- Trouver un changement de variables adéquat pour décrire $\mathscr{D}$ en coordonnées polaires.
- Calculer $\displaystyle\iint_{\mathscr{D}} \frac{x-y}{\sqrt{(x+2)^2+(y-3)^2}}\,dx\,dy$.

Correction
Le domaine d'intégration est le demi cercle de centre $(-2,3)$ et rayon $r = \frac{3}{2}$ qui se trouve sous la droite d'équation $y = x+5$, autrement dit

$$\mathscr{D} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; (x+2)^2+(y-3)^2 < \frac{9}{4},\ y < x+5 \right\}.$$

© 2024-2027 G. Faccanoni

Avec le changement de variables

$$\begin{cases} x = -2 + r\cos(\phi), \\ y = 3 + r\sin(\phi), \end{cases}$$

on obtient

$$\iint_{\mathscr{D}} \frac{x-y}{\sqrt{(x+2)^2+(y-3)^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{\mathscr{D}} \frac{-2+r\cos(\phi)-3-r\sin(\phi)}{r}\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi$$

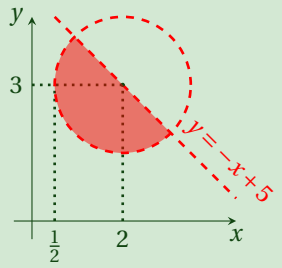
où

$$\mathscr{D} = \left\{ (r,\phi) \in \mathbb{R}\times[\pi/2, 5\pi/2] \;\middle|\; 0 < r < \frac{3}{2},\ \frac{5}{4}\pi < \phi < \frac{9}{4}\pi \right\}.$$

Donc

$$\begin{aligned} \iint_{\mathscr{D}} \frac{-2+r\cos(\phi)-3-r\sin(\phi)}{r}\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi &= \left(\int_0^{\frac{3}{2}} \int_{\frac{5}{4}\pi}^{\frac{9}{4}\pi} -5 + r(\cos(\phi)-\sin(\phi))\,\mathrm{d}\phi\mathrm{d}r \right) \\ &= \left(-5\int_0^{\frac{3}{2}} \int_{\frac{5}{4}\pi}^{\frac{9}{4}\pi} 1\,\mathrm{d}\phi\mathrm{d}r \right) + \left(\int_0^{\frac{3}{2}} \int_{\frac{5}{4}\pi}^{\frac{9}{4}\pi} r(\cos(\phi)-\sin(\phi))\,\mathrm{d}\phi\mathrm{d}r \right) \\ &= -5\left(\int_0^{\frac{3}{2}} 1\,\mathrm{d}r \right)\left(\int_{\frac{5}{4}\pi}^{\frac{9}{4}\pi} 1\,\mathrm{d}\phi \right) + \left(\int_0^{\frac{3}{2}} r\,\mathrm{d}r \right)\left(\int_{\frac{5}{4}\pi}^{\frac{9}{4}\pi} \cos(\phi)-\sin(\phi)\,\mathrm{d}\phi \right) \\ &= -\frac{15}{2}\pi + \frac{9}{4}\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Exercice 2.43



Soit $\mathscr{D}$ la partie coloriée en figure.

- Décrire $\mathscr{D}$ en coordonnées cartésiennes.
- Trouver un changement de variables adéquat pour décrire $\mathscr{D}$ en coordonnées polaires.
- Calculer $\displaystyle\iint_{\mathscr{D}} \frac{x-y}{(x-2)^2+(y-3)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

Correction

Le domaine d'intégration est le demi cercle de centre $(2,3)$ et rayon $r = \frac{3}{2}$ qui se trouve sous la droite d'équation $y = -x+5$, autrement dit

$$\mathscr{D} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; (x-2)^2+(y-3)^2 < \frac{9}{4},\ y < -x+5 \right\}.$$

Avec le changement de variables

$$\begin{cases} x = 2 + r\cos(\phi), \\ y = 3 + r\sin(\phi), \end{cases}$$

on obtient

$$\iint_{\mathscr{D}} \frac{x-y}{(x-2)^2+(y-3)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{\mathscr{D}} \frac{2+r\cos(\phi)-3-r\sin(\phi)}{r^2}\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi$$

où

$$\mathscr{D} = \left\{ (r,\phi) \in \mathbb{R}\times[0,2\pi] \;\middle|\; 0 < r < \frac{3}{2},\ \frac{3}{4}\pi < \phi < \frac{7}{4}\pi \right\}.$$

Donc

$$\iint_{\mathscr{D}} \frac{2+r\cos(\phi)-3-r\sin(\phi)}{r^2}\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi = -\iint_{\mathscr{D}} \frac{1}{r}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi + \iint_{\mathscr{D}} \cos(\phi)-\sin(\phi)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi = -\pi\int_0^{\frac{3}{2}} \frac{1}{r}\,\mathrm{d}r + \frac{3}{2}\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{7}{4}\pi} \cos(\phi)-\sin(\phi)\,\mathrm{d}\phi = \infty.$$

Calcul d'aires et centres de gravité, coordonnées polaires

Exercice 2.44
Un disque de rayon 5 cm a densité $10\,\mathrm{g\,cm^{-2}}$ dans son centre, densité $0\,\mathrm{g\,cm^{-2}}$ sur le bord et la densité est une fonction linéaire de la distance du centre. Calculer la masse du disque.

Correction
Décrivons le disque en coordonnées polaires centrées dans le centre du disque. Soit ϱ la densité : elle ne dépend que de la distance r du centre et l'on a $\varrho(0) = 10$, $\varrho(5) = 0$ et elle est linéaire donc $\varrho(r) = 2(5-r)$. La masse du disque est donc

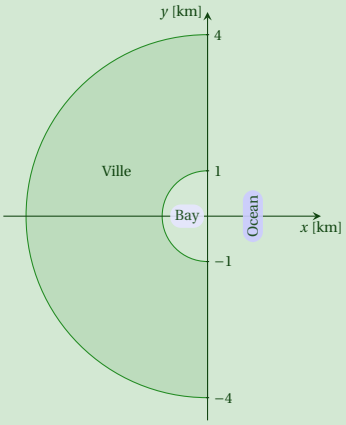
$$\int_0^5 \int_0^{2\pi} \rho(r) r \,\mathrm{d}\vartheta \,\mathrm{d}r = 2\int_0^5 \int_0^{2\pi} r(5-r)\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}r = 2\left(\int_0^5 r(5-r)\,\mathrm{d}r\right)\left(\int_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}\vartheta\right) = 4\pi\left[5\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3}\right]_{r=0}^{r=5} = \frac{5^3}{3}2\pi.$$

Exercice 2.45
Considérons un disque de métal de rayon 3 cm et prenons un repère centré dans son centre. À la distance r de l'origine, la densité du métal par unité de surface est $\frac{1}{r^2+1}$. Calculer la masse du disque.

Correction
Décrivons le disque en coordonnées polaires centrées dans le centre du disque. La masse du disque est

$$\int_0^3 \int_0^{2\pi} \frac{r}{r^2+1}\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}r = \left(\int_0^3 \frac{r}{r^2+1}\,\mathrm{d}r\right) \times \left(\int_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}\vartheta\right) = \pi\left(\int_0^3 \frac{2r}{r^2+1}\,\mathrm{d}r\right) = \pi\left[\ln(r^2+1)\right]_{r=0}^{r=3} = \pi\ln(10).$$

Exercice 2.46



Une ville entoure une baie comme dans la figure ci-contre. La densité de population de la ville (en milliers de personnes par kilomètre carré) est $\delta(r,\vartheta)$, où r et ϑ sont les coordonnées polaires et les distances sont mesurées en kilomètres. Plus loin on vit de la baie et plus la densité de population diminue. De même, plus loin on vit de l'océan et plus la densité de population diminue. Laquelle des fonctions suivantes décrit au mieux cette situation ?

1. $\delta(r,\vartheta) = (4-r)(2+\cos(\vartheta))$
2. $\delta(r,\vartheta) = (4-r)(2+\sin(\vartheta))$
3. $\delta(r,\vartheta) = (4+r)(2+\cos(\vartheta))$

En déduire une estimation de la population totale de la ville.

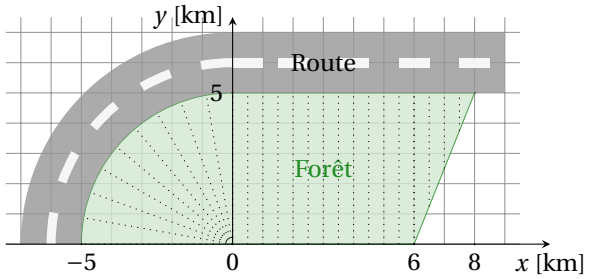
Correction

- La ville (domaine d'intégration) s'écrit
$$\left\{(r,\vartheta) \in \mathbb{R}_+^* \times [0;2\pi[\;\middle|\; 1 \le r \le 4, \frac{\pi}{2} \le \vartheta \le \frac{3\pi}{2}\right\}.$$
- La fonctions qui décrit au mieux la densité de population est $\delta(r,\vartheta) = (4-r)(2+\cos(\vartheta))$; en effet, pour tout ϑ_0 fixé dans $[\pi/2;3\pi/2]$, la fonction $f_{\vartheta_0}(r) \equiv \delta(r,\vartheta_0)$ est monotone décroissante et pour tout r_0 fixé dans $[1;4]$, la fonction $g_{r_0}(\vartheta) \equiv \delta(r_0,\vartheta)$ est monotone décroissante sur $[\pi/2;\pi]$ et monotone croissante sur $[\pi;3\pi/2]$.
- La population totale qui vit dans la ville est
$$\int_1^4 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \delta(r,\vartheta) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\vartheta = \int_1^4 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} r(4-r)(2+\cos(\vartheta))\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\vartheta = \left(\int_1^4 r(4-r)\,\mathrm{d}r\right) \times \left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (2+\cos(\vartheta))\,\mathrm{d}\vartheta\right)$$
$$= \left[2r^2 - \frac{r^3}{3}\right]_{r=1}^{r=4} \times \left[2\vartheta + \sin(\vartheta)\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = 18(\pi-1).$$

© 2024-2027 G. Faccanoni

Exercice 2.47 (Population de lièvres)

Une forêt est à coté d'une route (voir la figure ci-contre). La densité de la population de lièvres ℓ qui vivent dans la forêt est proportionnelle à la distance de la route. Plus précisément, elle vaut 0 au bord de la route et vaut 10 lièvres par kilomètre carré au coté opposé de la forêt (*i.e.* $\ell(x) = 10$ pour $x = [0;6]$). Estimer la population totale de lièvres dans la forêt.



Correction

- La forêt (domaine d'intégration) s'écrit

$$\left\{(r,\vartheta)\in\mathbb{R}^+\times[0,2\pi]\;\middle|\;0\le r\le 5,\frac{\pi}{2}\le\vartheta\le\pi\right\}\cup\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\;\middle|\;0\le y\le 5,0\le x\le\frac{2}{5}(15+y)\right\}$$

- Calcul de la fonction à intégrer :
  - pour $x<0$, la densité est une fonction affine de la seule variable r (comme la route est un arc de cercle, la distance ne dépend que de la coordonnées r), *i.e.* $\ell(r) = mr+q$ avec m et q à déterminer. On sait que $\ell(5) = 0$ et $\ell(0) = 10$ donc $\ell(r) = 2(5-r)$.
  - pour $x>0$, la densité est une fonction affine de la seule variable y (comme la route est horizontale, la distance ne dépend que de la coordonnées y), *i.e.* $\ell(y) = my+q$ avec m et q à déterminer. On sait que $\ell(5) = 0$ et $\ell(0) = 10$ donc $\ell(y) = 2(5-y)$.
- La population totale de lapins qui vivent dans la forêt est

$$\begin{aligned}
\int_0^5\left(\int_{\pi/2}^{\pi}\ell(r)r\,\mathrm{d}\vartheta\right)\mathrm{d}r+\int_0^5\left(\int_0^{\frac{2}{5}(15+y)}\ell(y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y &= \left(\int_0^5\ell(r)r\,\mathrm{d}r\right)\times\left(\int_{\pi/2}^{\pi}\mathrm{d}\vartheta\right)+2\int_0^5\left((5-y)\left(\int_0^{\frac{2}{5}(15+y)}1\,\mathrm{d}x\right)\right)\mathrm{d}y\\
&= \frac{\pi}{2}\left(\int_0^5 10r-2r^2\,\mathrm{d}r\right)+2\left(\int_0^5(5-y)\frac{2}{5}(15+y)\,\mathrm{d}y\right)\\
&= \pi\left(\int_0^5 5r-r^2\,\mathrm{d}r\right)+\frac{4}{5}\left(\int_0^5 75-5y-2y^2\,\mathrm{d}y\right)\\
&= \pi\left[5\frac{r^2}{2}-\frac{r^3}{3}\right]_0^5+\frac{4}{5}\left[75y-5\frac{y^2}{2}-2\frac{y^3}{3}\right]_0^5\\
&= \frac{5^3}{6}\pi+\frac{4}{5}\left[3\times5^3-\frac{5^3}{2}-2\frac{5^3}{3}\right]\\
&= \left(\frac{1}{6}\pi+\frac{4}{3}\right)5^3=\frac{125}{6}\pi+\frac{550}{3}.
\end{aligned}$$

Exercice 2.48

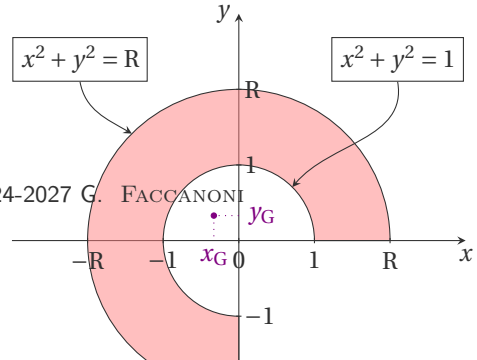
Soit R > 1. Après avoir représenté graphiquement la région

$$\mathscr{D}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\;\middle|\;y\ge0,1\le x^2+y^2\le\mathrm{R}\right\}\cup\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\;\middle|\;xy\ge0,1\le x^2+y^2\le\mathrm{R}\right\},$$

calculer les coordonnées de son centre de gravité en supposant la région $\mathscr{D}$ homogène. À partir de quelle valeur de R le centre de gravité appartient à $\mathscr{D}$?

Correction

On trace d'abord les courbes d'équation $x^2+y^2=1$ et $x^2+y^2=\mathrm{R}$ avec $\mathrm{R}>1$ et on colore l'ensemble $\mathscr{D}$.



© 2024-2027 G. Faccanoni

On décrit ensuite $\mathscr{D}$ en coordonnées polaires centrées en $(0,0)$: on a une bijection de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ dans lui même définie par $x = r\cos(\vartheta)$, $y = r\sin(\vartheta)$ pour $(r,\vartheta) \in \mathbb{R}_+^* \times [0,2\pi[$, ainsi

$$\mathscr{D} = \left\{ (r,\vartheta) \in \mathbb{R}_+^* \times [0,2\pi[\;\middle|\; 0 < r \leq \mathrm{R}, 0 \leq \vartheta \leq \frac{3\pi}{2} \right\}.$$

On calcule alors

$$\iint_{\mathscr{D}} 1 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_1^{\mathrm{R}} \int_0^{3\pi/2} r \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\vartheta = \left(\int_1^{\mathrm{R}} r \,\mathrm{d}r\right) \times \left(\int_0^{3\pi/2} 1 \,\mathrm{d}\vartheta\right) = \frac{3\pi(\mathrm{R}^2-1)}{4};$$
$$\iint_{\mathscr{D}} x \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_1^{\mathrm{R}} \int_0^{3\pi/2} r^2\cos(\vartheta) \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\vartheta = \left(\int_1^{\mathrm{R}} r^2 \,\mathrm{d}r\right) \times \left(\int_0^{3\pi/2} \cos(\vartheta) \,\mathrm{d}\vartheta\right) = -\frac{(\mathrm{R}^3-1)}{3};$$
$$\iint_{\mathscr{D}} y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_1^{\mathrm{R}} \int_0^{3\pi/2} r^2\sin(\vartheta) \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\vartheta = \left(\int_1^{\mathrm{R}} r^2 \,\mathrm{d}r\right) \times \left(\int_0^{3\pi/2} \sin(\vartheta) \,\mathrm{d}\vartheta\right) = \frac{(\mathrm{R}^3-1)}{3}.$$

Le centre de gravité a coordonnées $(x_{\mathrm{G}}, y_{\mathrm{G}})$ données par

$$x_{\mathrm{G}} = \frac{\iint_{\mathscr{D}} x \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\iint_{\mathscr{D}} 1 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}, \qquad y_{\mathrm{G}} = \frac{\iint_{\mathscr{D}} y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\iint_{\mathscr{D}} 1 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}.$$

On obtient finalement

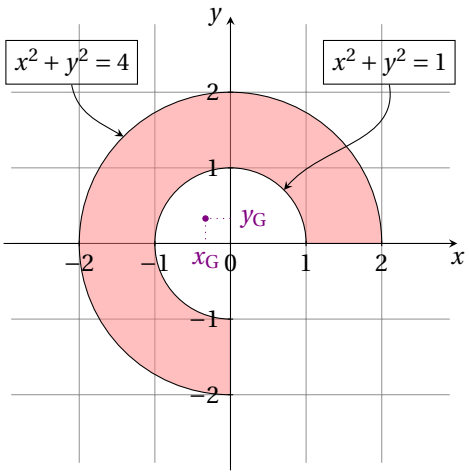
$$x_{\mathrm{G}} = \frac{-\frac{(\mathrm{R}^3-1)}{3}}{\frac{3\pi(\mathrm{R}^2-1)}{4}} = -\frac{4(\mathrm{R}^2+\mathrm{R}+1)}{9\pi(\mathrm{R}+1)}, \qquad y_{\mathrm{G}} = \frac{\frac{(\mathrm{R}^3-1)}{3}}{\frac{3\pi(\mathrm{R}^2-1)}{4}} = \frac{4(\mathrm{R}^2+\mathrm{R}+1)}{9\pi(\mathrm{R}+1)}.$$

Le centre de gravité appartient à $\mathscr{D}$ si et seulement si $1 \leq x_{\mathrm{G}}^2 + y_{\mathrm{G}}^2 \leq \mathrm{R}$:

$$1 \leq \left(-\frac{4(\mathrm{R}^2+\mathrm{R}+1)}{9\pi(\mathrm{R}+1)}\right)^2 + \left(\frac{4(\mathrm{R}^2+\mathrm{R}+1)}{9\pi(\mathrm{R}+1)}\right)^2 \leq 4 \iff \begin{cases} \frac{\mathrm{R}^2+\mathrm{R}+1}{\mathrm{R}+1} \geq \frac{9\pi}{4\sqrt{2}}, \\ \frac{\mathrm{R}^2+\mathrm{R}+1}{\mathrm{R}+1} \leq \frac{9\pi\sqrt{2}}{4}, \end{cases} \iff \mathrm{R} > \frac{c+\sqrt{c^2+4c}}{2} \approx 4.826617132$$

avec $c \equiv \frac{9\pi}{4\sqrt{2}} - 1$.

Exercice 2.49
Soit $\mathscr{D}$ la région représentée en figure ci-contre. Calculer les coordonnées de son centre de gravité $(x_{\mathrm{G}}, y_{\mathrm{G}})$ en supposant la région $\mathscr{D}$ homogène.



Correction
Le centre de gravité a coordonnées $(x_{\mathrm{G}}, y_{\mathrm{G}})$ données par

$$x_{\mathrm{G}} = \frac{\iint_{\mathscr{D}} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\iint_{\mathscr{D}} 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}, \qquad y_{\mathrm{G}} = \frac{\iint_{\mathscr{D}} y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\iint_{\mathscr{D}} 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}.$$

Il convient de passer aux coordonnées polaires et on obtient

$$\iint_{\mathscr{D}} 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{3\pi/2} \int_1^2 r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \left(\int_0^{3\pi/2} \mathrm{d}\theta\right)\left(\int_1^2 r\,\mathrm{d}r\right) = \frac{9}{4}\pi,$$
$$\iint_{\mathscr{D}} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{3\pi/2} \int_1^2 r^2\cos(\theta)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \left(\int_0^{3\pi/2} \cos(\theta)\,\mathrm{d}\theta\right)\left(\int_1^2 r^2\,\mathrm{d}r\right) = -\frac{7}{3},$$
$$\iint_{\mathscr{D}} y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{3\pi/2} \int_1^2 r^2\sin(\theta)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \left(\int_0^{3\pi/2} \sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\right)\left(\int_1^2 r^2\,\mathrm{d}r\right) = \frac{7}{3}.$$

© 2024-2027 G. Faccanoni

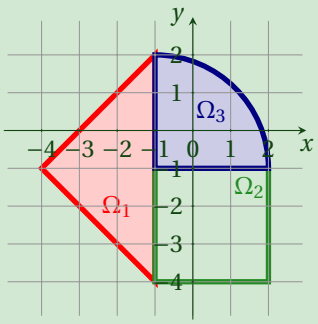
Donc

$$x_G = -\frac{28}{27\pi}, \qquad y_G = \frac{14}{3}\frac{2}{3\pi} = \frac{28}{27\pi}.$$

Remarquons que seul le calcul explicite de la dernière intégrale est nécessaire car

- $\iint_{\mathscr{D}} 1\,dx\,dy$ représente l'aire de la plaque que l'on peut calculer géométriquement comme la différence des 3/4 du cercle de rayon 2 ôtés des 3/4 du cercle de rayon 1, *i.e.* $(2^2\pi - \pi)3/4 = 9\pi/4$,
- $x_G = -y_G$ car la droite d'équation $y = -x$ est un axe de symétrie de la plaque.

Exercice 2.50
On se propose de calculer (x_G, y_G) les coordonnées du centre de gravité de la plaque homogène Ω esquissée dans la figure ci-dessous :



1. On décompose la plaque comme union de trois plaques Ω_i comme en figure. Décrire Ω_1 et Ω_2 en variables cartésiennes et Ω_3 en variables polaires (écrire explicitement le changement en variables polaires).
2. Pour $i = 1,2,3$, calculer l'aire de Ω_i. En déduire l'aire de Ω.
3. Pour $i = 1,2,3$, calculer (x_{G_i}, y_{G_i}) les coordonnées du centre de gravité de la plaque Ω_i. En déduire (x_G, y_G).

NB Lorsqu'il est possible, éviter le calcul d'intégrales !

Correction

1. Le changement de variables polaires pour Ω_3 est

$$\begin{cases} x = -1 + r\cos(\vartheta), \\ y = -1 + r\sin(\vartheta) \end{cases} \quad \text{avec } (r,\vartheta) \in \mathbb{R}_+^* \times [0;2\pi[$$

et l'on a

$$\Omega_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x \in [-4;-1],\ y \in [-x-5; x+3]\right\},$$
$$\Omega_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x \in [-1;2],\ y \in [-4;-1]\right\},$$
$$\Omega_3 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x \in [-1;2],\ y \in [-1;2],\ (x+1)^2 + (y+1)^2 \le 3^2\right\} = \left\{(r,\vartheta) \in \mathbb{R}_+^* \times [0;2\pi[\,\middle|\, r \in]0;3],\ \vartheta \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]\right\}.$$

2. Aire(Ω)=Aire(Ω_1)+Aire(Ω_2)+Aire(Ω_3)=$9 + 9 + \frac{9}{4}\pi = 9\left(2 + \frac{\pi}{4}\right)$.
3. Pour calculer (x_G, y_G) on calcule (x_{G_i}, y_{G_i}) les coordonnées du centre de gravité de chaque plaque Ω_i :

- $x_{G_1} = \frac{\iint_{\Omega_1} x\,dx\,dy}{\text{Aire}(\Omega_1)} = -2$ car

$$\iint_{\Omega_1} x\,dx\,dy = \int_{-4}^{-1}\int_{-x-5}^{x+3} x\,dy\,dx = \int_{-4}^{-1} x\left[y\right]_{y=-x-5}^{y=x+3} dx = \int_{-4}^{-1} x(2x+8)\,dx = \int_{-4}^{-1} 2x^2 + 8x\,dx = \left[\frac{2}{3}x^3 + 4x^2\right]_{x=-4}^{x=-1} = -18,$$

- $y_{G_1} = -1$ par symétrie de la plaque Ω_1 par rapport à la droite d'équation $y = -1$;
- $x_{G_2} = \frac{1}{2}$ par symétrie de la plaque Ω_2 par rapport à la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$,
- $y_{G_2} = -\frac{5}{2}$ par symétrie de la plaque Ω_2 par rapport à la droite d'équation $y = -\frac{5}{2}$;

- $x_{G_3} = \frac{\iint_{\Omega_3} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\mathrm{Aire}(\Omega_3\ )} = \frac{4}{\pi} - 1$ car

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega_1} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} (-1+r\cos(\vartheta))\,r\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}r = \int_0^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} -r\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}r + \int_0^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2\cos(\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}r\\ &= -\left(\int_0^3 r\,\mathrm{d}r\right)\times\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,\mathrm{d}\vartheta\right) + \left(\int_0^3 r^2\,\mathrm{d}r\right)\times\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta\right)\\ &= -\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^3\times\frac{\pi}{2} + \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^3\times\left[\sin(\vartheta)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{9}{4}\pi + 9 = 9\left(1-\frac{\pi}{4}\right),\end{aligned}$$

- $y_{G_3} = x_{G_3}$ par symétrie de la plaque Ω_3 par rapport à la droite d'équation $y = x$.

On conclut que

$$(x_G, y_G) = \left(-\frac{\pi}{2+\pi}, \frac{2-\pi}{2+\pi}\right).$$

Exercice 2.51
La valeur moyenne d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sur un domaine $\mathscr{R} \subset \mathbb{R}^2$ est définie par

$$f_{\mathrm{moy}} \overset{\mathrm{def}}{=} \frac{1}{\mathrm{Aire}(\mathscr{R})}\iint_{\mathscr{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

1. Une lentille circulaire de rayon 2 cm présente, en tout point situé à r cm de son centre, une épaisseur de $\left(1-\frac{r^2}{4}\right)$ cm. Déterminer l'épaisseur moyenne de cette lentille.
2. La température (en degrés Celsius) en un point (x,y) d'une plaque plane est modélisée par la fonction $\mathrm{T}(x,y) = 5xy + x^2$ où x et y sont exprimés en mètres. Calculer la température moyenne de la portion de la plaque ayant la forme d'un losange, définie par

$$\mathscr{P} = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \text{ tel que } |2x+y|\le 4 \text{ et } |2x-y|\le 4\right\}.$$

Correction

1. L'épaisseur moyenne de la lentille est donné par

$$\frac{\int_0^2\int_0^{2\pi}\left(1-\frac{r^2}{4}\right)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\vartheta}{4\pi} = \frac{2\pi\int_0^2\left(r-\frac{r^3}{4}\right)\mathrm{d}r}{4\pi} = \frac{1}{2}\left[\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{16}\right]_0^2 = \frac{1}{2}.$$

2. Le domaine est symétrique par rapport à l'axe des abscisses et $\mathrm{T}(x,-y) = -\mathrm{T}(x,y)$ donc

$$\iint_{\mathscr{P}} \mathrm{T}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\iint_{\mathscr{P}^+} \mathrm{T}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

où

$$\begin{aligned}\mathscr{P}^+ &= \mathscr{P}\cap\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, y\ge 0\right\}\\ &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, -4\le x\le 0 \text{ et } 0\le y\le 2x+4\right\}\cup\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0\le x\le 4 \text{ et } 0\le y\le -2x+4\right\}\end{aligned}$$

et

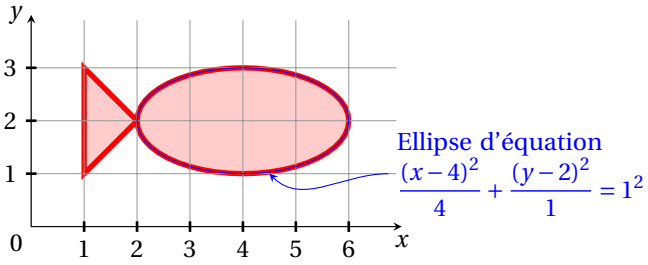
$$\mathrm{Aire}(\mathscr{P}) = 2\mathrm{Aire}(\mathscr{P}^+) = 32\,\mathrm{cm}.$$

© 2024-2027 G. Faccanoni

Donc la température moyenne de la plaque est donné par

$$\begin{aligned}
T_{moy} &= \frac{2\iint_{\mathscr{D}^+} T(x,y)\,dx\,dy}{32} \\
&= \frac{1}{16}\left(\int_{-4}^{0}\int_{0}^{2x+4}(5xy+x^2)\,dy\,dx + \int_{0}^{4}\int_{0}^{-2x+4}(5xy+x^2)\,dy\,dx\right) \\
&= \frac{1}{16}\left(\int_{-4}^{0}\left[5x\frac{y^2}{2}+x^2y\right]_0^{2x+4}dx + \int_{0}^{4}\left[5x\frac{y^2}{2}+x^2y\right]_0^{-2x+4}dx\right) \\
&= \frac{1}{16}\left(\int_{-4}^{0}5x\frac{(2x+4)^2}{2}+x^2(2x+4)\,dx + \int_{0}^{4}5x\frac{(-2x+4)^2}{2}+x^2(-2x+4)\,dx\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\int_{-4}^{0}3x^3+7x^2+2x\,dx + \int_{0}^{4}2x^3-9x^2+10x\,dx\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\left[\left(\frac{3}{4}x^2+\frac{7}{3}x+1\right)x^2\right]_{-4}^{0} + \left[\left(\frac{1}{2}x^2-3x+5\right)x^2\right]_0^4\right) = -\frac{16}{3}.
\end{aligned}$$

Exercice 2.52 (Centre de gravité d'un poisson)
Calculer les coordonnées du centre de gravité G de la plaque $\mathscr{D}$ en figure supposée homogène (éviter le calcul d'intégrales lorsqu'il est possible, mais *justifier le raisonnement*) :



Correction
Tout d'abord remarquons que le corps du poisson est une ellipse d'équation

$$\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{(x-4)^2}{2^2}+\frac{(y-2)^2}{1^2}=1^2\right\}.$$

Pour calculer les coordonnées (x_G, y_G) du centre de gravité on doit calculer d'abord les trois intégrales doubles suivantes :

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathscr{D}} 1\,dy\,dx &= \int_1^2\int_x^{4-x}1\,dy\,dx + \int_0^{2\pi}\int_0^1 2r\,dr\,d\vartheta = \int_1^2(4-2x)\,dx + \int_0^{2\pi}1\,d\vartheta = 1+2\pi, \\
\iint_{\mathscr{D}} x\,dy\,dx &= \int_1^2\int_x^{4-x}x\,dy\,dx + \int_0^{2\pi}\int_0^1(4+2r\cos(\vartheta))2r\,dr\,d\vartheta = \int_1^2\left(4x-2x^2\right)dx + \int_0^{2\pi}\left(4+\frac{4}{3}\cos(\vartheta)\right)d\vartheta \\
&= \int_1^2\left(2x^2-\frac{2}{3}x^3\right)dx + \left[4\vartheta+\frac{4}{3}\sin(\vartheta)\right]_0^{2\pi} = \frac{4}{3}+8\pi, \\
\iint_{\mathscr{D}} y\,dy\,dx &= \int_1^2\int_x^{4-x}y\,dy\,dx + \int_0^{2\pi}\int_0^1(2+r\sin(\vartheta))2r\,dr\,d\vartheta = \int_1^2\left(\frac{(4-x)^2}{2}-\frac{x^2}{2}\right)dx + \int_0^{2\pi}\left(2+\frac{2}{3}\sin(\vartheta)\right)d\vartheta \\
&= \int_1^2(8-4x)\,dx + \left[2\vartheta-\frac{2}{3}\cos(\vartheta)\right]_0^{2\pi} = 2+4\pi
\end{aligned}$$

et on en déduit que

$$x_G = \frac{\iint_{\mathscr{D}} x\,dy\,dx}{\iint_{\mathscr{D}} 1\,dy\,dx} = \frac{\frac{4}{3}+8\pi}{1+2\pi}, \quad y_G = \frac{\iint_{\mathscr{D}} y\,dy\,dx}{\iint_{\mathscr{D}} 1\,dy\,dx} = \frac{2+4\pi}{1+2\pi} = 2.$$

En fait, aucune des trois intégrales est nécessaire car on peut les calculer géométriquement comme suit (cf. figure 2.3)

- $\iint_{\mathscr{D}} 1\,dy\,dx = \text{Aire}(\mathscr{D}) = \text{Aire}(\mathscr{T}) + \text{Aire}(\mathscr{E}) = 1+2\pi$,
- $x_G = \frac{\text{Aire}(\mathscr{T})}{\text{Aire}(\mathscr{D})}x_{G_{\mathscr{T}}} + \frac{\text{Aire}(\mathscr{E})}{\text{Aire}(\mathscr{D})}x_{G_{\mathscr{E}}} = \frac{4/3+8\pi}{1+2\pi}$
- $y_G = 2$ car la droite d'équation $y=2$ est un axe de symétrie pour la plaque.

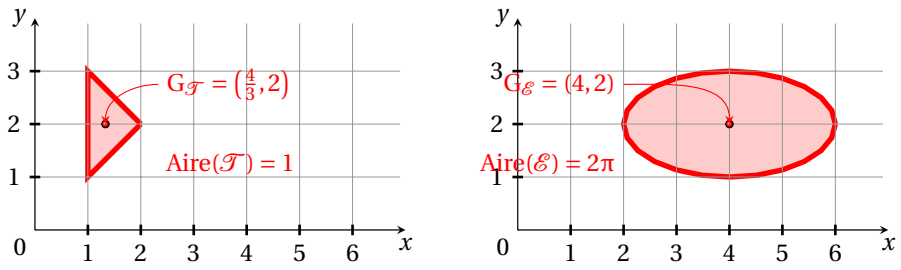
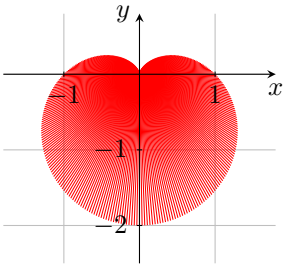


FIGURE 2.3. – Exercice 2.52

Exercice 2.53 (Aire de la cardioïde)
L'équation de la cardioïde est paramétrée par φ comme suit : $(x = r(\varphi)\cos(\varphi), y = r(\varphi)\sin(\varphi))$ où $r(\varphi) = 1 - \sin(\varphi)$ et $\varphi \in [-\pi;\pi]$. Considérons le domaine délimité par cette courbe, *i.e.* l'ensemble décrit en coordonnées polaires par

$$\{(r,\varphi) \mid -\pi \le \varphi \le \pi, \quad 0 \le r \le 1 - \sin(\varphi)\}$$

Calculer l'aire de cette ensemble. Calculer ensuite son centre de gravité en la considérant une plaque homogène de densité surfacique de masse 1.



Correction
Rappelons d'abord que

$$\begin{aligned} \cos^2(t) = \tfrac{1+\cos(2t)}{2} \quad &\Longrightarrow \quad \int \cos^2(t)\,\mathrm{d}t = \int \tfrac{1+\cos(2t)}{2}\,\mathrm{d}t = \tfrac{t}{2} + \tfrac{\sin(2t)}{4} + C, \\ \sin^2(t) = \tfrac{1-\cos(2t)}{2} \quad &\Longrightarrow \quad \int \sin^2(t)\,\mathrm{d}t = \int \tfrac{1-\cos(2t)}{2}\,\mathrm{d}t = \tfrac{t}{2} - \tfrac{\sin(2t)}{4} + C, \end{aligned}$$

et que

$$\int \cos(\varphi)\sin^n(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = \frac{\sin^{n+1}(\varphi)}{n+1}, \qquad \int \sin(\varphi)\cos^n(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = -\frac{\cos^{n+1}(\varphi)}{n+1}, \qquad n \ge 0.$$

On peut alors calculer la surface de la cardioïde :

$$\begin{aligned} \text{Aire} &= \int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{1-\sin(\varphi)} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{1-\sin(\varphi)}\mathrm{d}\varphi = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{(1-\sin(\varphi))^2}{2}\,\mathrm{d}\varphi \\ &= \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\,\mathrm{d}\varphi + \int_{-\pi}^{\pi} -2\sin(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi + \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2(\varphi)}{2}\,\mathrm{d}\varphi \\ &= \pi + 0 + \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos(2\varphi)}{4}\,\mathrm{d}\varphi = \pi + \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{3}{2}\pi. \end{aligned}$$

Pour calculer le centre de gravité on doit calculer les intégrales

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{1-\sin(\varphi)} r\cos(\varphi)\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi, \qquad \int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{1-\sin(\varphi)} r\sin(\varphi)\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi.$$

On a

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{1-\sin(\varphi)} r\cos(\varphi)\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi &= \int_{-\pi}^{\pi}\cos(\varphi)\left(\int_{0}^{1-\sin(\varphi)} r^2\right)\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \int_{-\pi}^{\pi}\cos(\varphi)\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{1-\sin(\varphi)}\mathrm{d}\varphi \\ &= \int_{-\pi}^{\pi}\cos(\varphi)\frac{(1-\sin(\varphi))^3}{3}\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{3}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(\varphi)(1-\sin(\varphi)+\sin^2(\varphi)-\sin^3(\varphi))\,\mathrm{d}\varphi = 0 \end{aligned}$$

 © 2024-2027 G. FACCANONI

et

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{1-\sin(\varphi)} r\sin(\varphi) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi &= \int_{-\pi}^{\pi}\sin(\varphi)\left(\int_{0}^{1-\sin(\varphi)} r^2\right)\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \int_{-\pi}^{\pi}\sin(\varphi)\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{1-\sin(\varphi)}\mathrm{d}\varphi\\ &= \int_{-\pi}^{\pi}\sin(\varphi)\frac{(1-\sin(\varphi))^3}{3}\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{3}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(\varphi)-3\sin^2(\varphi)+3\sin^3(\varphi)-\sin^4\varphi\,\mathrm{d}\varphi =\\ &= \frac{1}{3}\left(0-3\pi+0-\frac{3}{4}\pi\right) = -\frac{5}{4}\pi\end{aligned}$$

car

$$\begin{aligned}&\int_{-\pi}^{\pi}\sin(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = \big[\cos(\varphi)\big]_{-\pi}^{\pi} = 0,\\ &\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos(2\varphi)}{2}\,\mathrm{d}\varphi = \left[\frac{\varphi}{2}-\frac{\sin(2\varphi)}{4}\right]_{-\pi}^{\pi} = \pi,\\ &\int_{-\pi}^{\pi}\sin^3(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = \int_{-\pi}^{\pi}\sin(\varphi)(1-\cos^2(\varphi))\,\mathrm{d}\varphi = \int_{-\pi}^{\pi}\sin(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi - \int_{-\pi}^{\pi}\sin(\varphi)\cos^2(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = \left[-\cos(\varphi)+\frac{\cos^3\varphi}{3}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0,\\ &\int_{-\pi}^{\pi}\sin^4\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1-\cos(2\varphi)}{2}\right)^2\mathrm{d}\varphi = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{4}\,\mathrm{d}\varphi - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(2\varphi)\,\mathrm{d}\varphi + \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(2\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = \frac{\pi}{2}+0+\frac{1}{4}\left[\varphi+\frac{\sin(2\varphi)}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{3}{4}\pi.\end{aligned}$$

On obtient les coordonnées du centre de gravité

$$x_G = \frac{\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{1-\sin(\varphi)} r\cos(\varphi) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi}{\text{Aire}} = \frac{0}{\frac{3}{2}\pi} = 0, \qquad y_G = \frac{\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{1-\sin(\varphi)} r\cos(\varphi) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi}{\text{Aire}} = \frac{-\frac{5}{4}\pi}{\frac{3}{2}\pi} = -\frac{5}{6}.$$

Exercice 2.54 (Aire des trèfles de HABENICHT)
Calculer l'aire de la région définie en coordonnées polaires par

$$\mathscr{D} = \{(r,\phi)\in\mathbb{R}^+\times[0,2\pi]\ :\ r\le 1+\cos(k\phi)+\sin^2(k\phi),\ k\in\mathbb{N}^*\}.$$

Suggestion : utiliser les formules de duplication $\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta)-1 = 1-2\sin^2(\theta)$ et calculer au préalable les intégrales suivantes

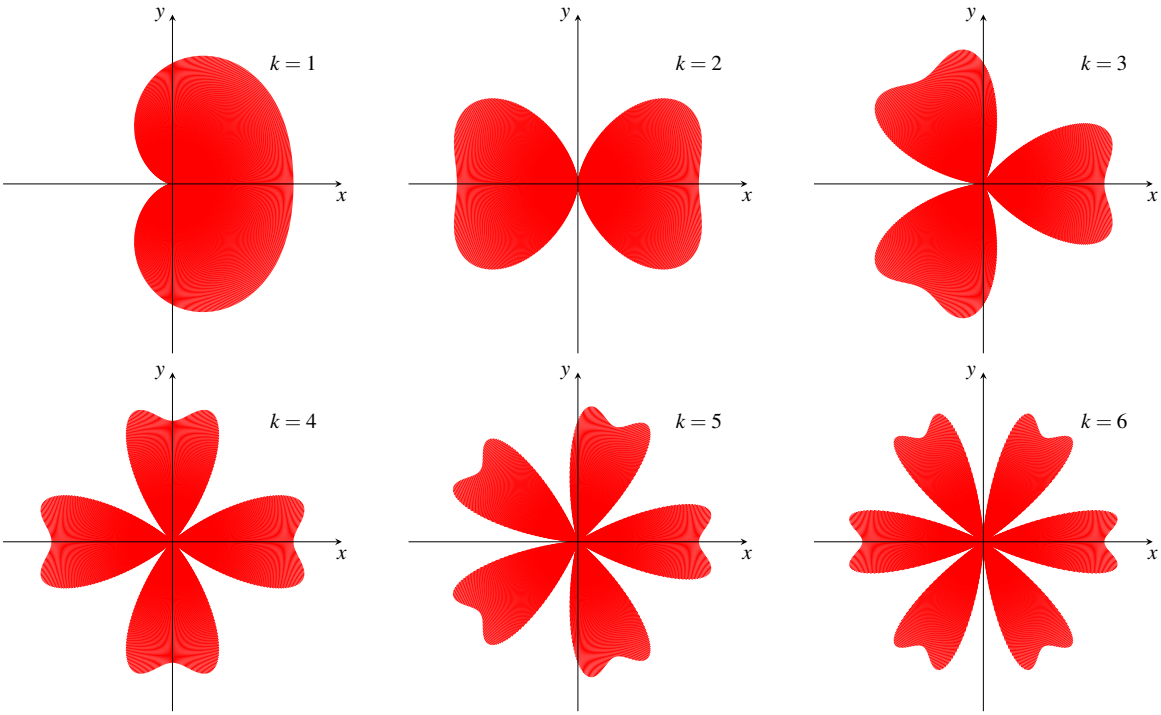
$$\int_0^{2k\pi} 1\,\mathrm{d}\alpha,\quad \int_0^{2k\pi}\cos(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha,\quad \int_0^{2k\pi}\cos^2(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha,\quad \int_0^{2k\pi}\cos(\alpha)\sin^2(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha,\quad \int_0^{2k\pi}\sin^2(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha,\quad \int_0^{2k\pi}\sin^4(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha.$$

Correction
On a

$$\begin{aligned}&\int_0^{2k\pi} 1\,\mathrm{d}\alpha = \big[\alpha\big]_0^{2k\pi} = 2k\pi, && \int_0^{2k\pi}\cos(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha = \big[\sin(\alpha)\big]_0^{2k\pi} = 0,\\ &\int_0^{2k\pi}\cos^2(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha = \frac{1}{4}\big[\sin(2\alpha)+2\alpha\big]_0^{2k\pi} = k\pi, && \int_0^{2k\pi}\cos(\alpha)\sin^2(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha = \Big[\frac{\sin^3(\alpha)}{3}\Big]_0^{2k\pi} = 0,\\ &\int_0^{8\pi}\sin^2(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha = \frac{1}{4}\big[2\alpha-\sin(2\alpha)\big]_0^{2k\pi} = k\pi, && \int_0^{2k\pi}\sin^4(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha = \frac{1}{32}\big[24\alpha-8\sin(2\alpha)+\sin(4\alpha)\big]_0^{2k\pi} = \frac{3}{4}k\pi.\end{aligned}$$

L'aire est donnée, en coordonnées polaires, par

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathscr{D}} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta &= \int_0^{2\pi}\int_0^{1+\cos(k\phi)+\sin^2(k\phi)} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{1+\cos(k\phi)+\sin^2(k\phi)}\mathrm{d}\phi \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos(k\phi)+\sin^2(k\phi))^2\,\mathrm{d}\phi \\
&= \frac{1}{2k}\int_0^{2k\pi}(1+\cos(\alpha)+\sin^2(\alpha))^2\,\mathrm{d}\alpha \\
&= \frac{1}{2k}\int_0^{2k\pi}1+\cos^2(\alpha)+\sin^4(\alpha)+2\cos(\alpha)+2\sin^2(\alpha)+2\cos(\alpha)\sin^2(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha \\
&= \frac{1}{2k}\left[\int_0^{2k\pi}1\,\mathrm{d}\alpha+\int_0^{2k\pi}\cos^2(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha+\int_0^{2k\pi}\sin^4(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha+2\int_0^{2k\pi}\cos(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha+2\int_0^{2k\pi}\sin^2(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha+2\int_0^{2k\pi}\cos(\alpha)\sin^2(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha\right] \\
&= \frac{1}{2k}\left[2k\pi+k\pi+\frac{3}{4}k\pi+0+2k\pi+0\right] = \frac{23}{8}\pi.
\end{aligned}$$



© 2024-2027 G. Faccanoni

CHAPITRE 3

Interpolation

Étant donné $(n+1)$ points de $\mathbb{R}^2$, *i.e.* $n+1$ couples $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^n$, le problème consiste à trouver une fonction $\varphi = \varphi(x)$ telle que $\varphi(x_i) = y_i$. On dit alors que φ interpole l'ensemble de valeurs $\{y_i\}_{i=0}^n$ aux nœuds $\{x_i\}_{i=0}^n$. Les quantités y_i représentent les valeurs aux nœuds x_i d'une fonction f connue analytiquement ou de données expérimentales. Dans le premier cas, l'approximation a pour but de remplacer f par une fonction plus simple (en vue par exemple d'un calcul numérique d'intégrale ou de dérivée). Dans le second cas, le but est d'avoir une représentation synthétique de données expérimentales (dont le nombre peut être très élevé).

La fonction φ appartient généralement à un espace vectoriel de dimension finie ; l'interpolation consiste donc à trouver ses coordonnées par rapport à une base choisie. On peut également considérer des interpolations composites ou « par morceaux » (ou encore des interpolations par fonctions *splines*) si φ est composée de polynômes définis sur des sous-intervalles dans l'espace vectoriel par morceaux.

On parle d'*interpolation polynomiale* quand φ est un polynôme, et d'*interpolation de Fourier* lorsque φ est une série de Fourier.

Dans ce chapitre

3.1 Interpolation polynomiale . . . 123
3.1.1 Bases canonique, de LAGRANGE, de NEWTON de $\mathbb{R}_n[x]$ et coordonnées du polynôme d'interpolation 123
3.1.2 Fonctions prédéfinies en Python . . . 127
3.1.3 Les défauts de l'interpolation polynomiale . . . 128
3.1.4 Interpolation polynomiale composite: splines . . . 130
3.1.5 Splines avec SciPy . . . 131
3.1.6 Deux exemples complets . . . 131
3.2 Généralisation: l'interpolation dans un espace vectoriel quelconque . . . 134
3.2.1 Cas particulier: l'interpolation Trigonométrique et FFT . . . 135
3.3 Exercices . . . 139
3.3.1 Révisions: espaces vectoriels et bases dans $\mathbb{R}_n[x]$ . . . 139
3.3.2 Interpolation polynomiale . . . 145
3.3.3 Interpolation trigonométrique . . . 161

3.1. Interpolation polynomiale

Supposons que l'on veuille chercher un polynôme $p_n \in \mathbb{R}_n[x]$, $n \geq 0$ (c'est-à-dire un polynôme de degré au plus n) qui, pour des valeurs $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ distinctes données (appelés nœuds d'interpolation), prenne les valeurs $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$ respectivement, c'est-à-dire

$$p_n(x_i) = y_i \qquad \text{pour } 0 \leq i \leq n. \tag{3.1}$$

Si un tel polynôme existe, il est appelé *polynôme d'interpolation* ou *polynôme interpolant*.

3.1.1. Bases canonique, de Lagrange, de Newton de $\mathbb{R}_n[x]$ et coordonnées du polynôme d'interpolation

Base canonique. Une manière apparemment simple de résoudre ce problème est d'écrire le polynôme dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$:

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n,$$

où $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont des coefficients qui devront être déterminés. Les $(n+1)$ relations (3.1) s'écrivent alors

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + \ldots a_n x_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + \ldots a_n x_1^n = y_1 \\ \ldots \\ a_0 + a_1 x_n + \ldots a_n x_n^n = y_n \end{cases}$$

Puisque les valeurs x_i et y_i sont connues, ces relations forment un système linéaire de $(n+1)$ équations en les $(n+1)$ inconnues $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ qu'on peut mettre sous la forme matricielle

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \ldots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

Ainsi, le problème consistant à chercher le polynôme p_n satisfaisant (3.1) peut se réduire à résoudre le système linéaire (3.2) (cette matrice s'appelle matrice de VANDERMONDE).

> Étant donné $n+1$ points distincts $x_0, \ldots, x_n$ et $n+1$ valeurs correspondantes $y_0, \ldots, y_n$, il existe un unique polynôme $p_n \in \mathbb{R}_n[x]$ tel que $p_n(x_i) = y_i$, pour $i = 0, \ldots n$ qu'on peut écrire sous la forme
>
> $$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \qquad \text{avec} \qquad \begin{pmatrix} 1 & x_0 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \ldots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Base de Lagrange. Malheureusement, résoudre une système linéaire de $(n+1)$ équations à $(n+1)$ inconnues n'est pas une tache triviale. Cette méthode pour trouver le polynôme p_n n'est donc pas une bonne méthode en pratique. On se demande alors s'il existe une autre base $\{L_0, L_1, L_2, \ldots, L_n\}$ de $\mathbb{R}_n[x]$ telle que le polynôme p_n s'écrit

$$p_n(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x) + \cdots + y_n L_n(x),$$

autrement dit s'il existe une base telle que les coordonnées du polynôme dans cette base ne sont rien d'autre que les valeurs connues $y_0, y_1, \ldots, y_n$. Pour trouver une telle base, commençons par imposer le passage du polynôme par les $n+1$ points donnés : les $(n+1)$ relations (3.1) imposent la condition

$$L_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \text{pour } 0 \le i, j \le n,$$

ce qui donne

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}.$$

Il est facile de vérifier que

- $L_i(x) \in \mathbb{R}_n[x]$ car le numérateur de $L_i(x)$ est un produit de n termes $(x - x_j)$ avec $i \neq j$ et est donc un polynôme de degré n et le dénominateur de $L_i(x)$ est une constante,
- $L_i(x_j) = 0$ si $i \neq j$, $0 \le i \le n$,
- $L_i(x_i) = 1$.

De plus, les polynômes $L_0, L_1, L_2, \ldots, L_n$ sont linéairement indépendants car si l'équation $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i L_i(x) = 0$ doit être satisfaite pour tout $x \in \mathbb{R}$ alors en particulier elle doit être satisfaite pour $x = x_j$ pour tout $j = 0, 1, \ldots, n$ et puisque $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i L_i(x_j) = \alpha_j$, on conclut que tous les α_j sont nuls. Par conséquent, la famille $\{L_0, L_1, L_2, \ldots, L_n\}$ forme une base de $\mathbb{R}_n[x]$.

Il est important de remarquer que nous avons construit explicitement une solution du problème (3.1) et ceci pour n'importe quelles valeurs $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$ données. Ceci montre que le système linéaire (3.2) a toujours une unique solution.

© 2024-2027 G. FACCANONI

Étant donné $n+1$ points distincts $x_0,\dots,x_n$ et $n+1$ valeurs correspondantes $y_0,\dots,y_n$, il existe un unique polynôme $p_n \in \mathbb{R}_n[x]$ tel que $p_n(x_i) = y_i$, pour $i = 0,\dots n$ qu'on peut écrire sous la forme

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \mathrm{L}_i(x) \qquad \text{où} \quad \mathrm{L}_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Cette relation est appelée formule d'interpolation de LAGRANGE et les polynômes L_i sont les polynômes caractéristiques (de LAGRANGE).

```
import sympy as sp
x = sp.symbols('x')
n = 2 # degré
p = sp.polys.specialpolys.interpolating_poly(n+1, x, X='x', Y='y')
print(f"\\[ p(x) = {sp.latex(p)} \\]")
```

$$p(x) = \frac{y_0\,(x-x_1)\,(x-x_2)}{(x_0-x_1)\,(x_0-x_2)} + \frac{y_1\,(x-x_0)\,(x-x_2)}{(-x_0+x_1)\,(x_1-x_2)} + \frac{y_2\,(x-x_0)\,(x-x_1)}{(-x_0+x_2)\,(-x_1+x_2)}$$

Base de Newton. Cependant, cette méthode n'est pas encore la plus efficace d'un point de vue pratique. En effet, pour calculer le polynôme d'interpolation d'un ensemble de $n+1$ points on doit calculer les $n+1$ polynômes $\{\mathrm{L}_0, \mathrm{L}_1, \mathrm{L}_2, \dots, \mathrm{L}_n\}$. Si ensuite on ajoute un point d'interpolation, on doit calculer les $n+2$ polynômes $\left\{\tilde{\mathrm{L}}_0, \tilde{\mathrm{L}}_1, \tilde{\mathrm{L}}_2, \dots, \tilde{\mathrm{L}}_{n+1}\right\}$ qui diffèrent tous des $n+1$ calculés précédemment. La méthode de NEWTON est basée sur le choix d'une autre base de sort à ce que l'ajout d'un point comporte juste l'ajout d'une fonction de base.
Considérons la famille de polynômes $\{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ où [1]

$$\begin{aligned} &\omega_0(x) = 1, \\ &\omega_k(x) = \prod_{i=0}^{k-1} (x - x_i) = (x - x_{k-1})\omega_{k-1}(x), \qquad \forall k = 1,\dots,n. \end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que

- $\omega_k(x) \in \mathbb{R}_n[x]$,
- la famille $\{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ est génératrice de $\mathbb{R}_n[x]$
- la famille $\{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ est libre.

Par conséquent, la famille $\{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ forme une base de $\mathbb{R}_n[x]$.
Si on choisit comme base de $\mathbb{R}_n[x]$ la famille $\{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$, le problème du calcul du polynôme d'interpolation p_n est alors ramené au calcul des coefficients $\{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ tels que

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \omega_i(x).$$

Si on a calculé les $n+1$ coefficients $\{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ et on ajoute un point d'interpolation, il n'y a plus à calculer que le coefficient α_{n+1} car la nouvelle base est déduite de l'autre base en ajoutant simplement le polynôme ω_{n+1}.

Pour calculer tous les coefficients on introduit la notion de *différence divisée*: soit $\left\{(x_i, y_i)\right\}_{i=0}^{n}$ un ensemble de $n+1$ points distincts.

- La différence divisée d'ordre 1 de x_{i-1} et x_i est

$$f[x_{i-1}, x_i] \equiv \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}.$$

- La différence divisée d'ordre n des $n+1$ points $x_0,\dots,x_n$ est définie par récurrence en utilisant deux différences divisées d'ordre $n-1$ comme suit :

$$f[x_0,\dots,x_n] \equiv \frac{f[x_1,\dots,x_n] - f[x_0,\dots,x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

1. Notons que le dernier point x_n n'intervient pas dans la construction de cette base.

Pour expliciter le processus récursif, les différences divisées peuvent être calculées en les disposant de la manière suivante dans un tableau :

i	x_i	y_i	$f[x_{i-1},x_i]$	$f[x_{i-2},x_{i-1},x_i]$	$f[x_{i-3},x_{i-2},x_{i-1},x_i]$	$f[x_{i-4},x_{i-3},x_{i-2},x_{i-1},x_i]$	$\dots$
0	x_0	$\boxed{y_0}$					
1	x_1	y_1	$\boxed{f[x_0,x_1]}$				
2	x_2	y_2	$f[x_1,x_2]$	$\boxed{f[x_0,x_1,x_2]}$			
3	x_3	y_3	$f[x_2,x_3]$	$f[x_1,x_2,x_3]$	$\boxed{f[x_0,x_1,x_2,x_3]}$		
4	x_4	y_4	$f[x_3,x_4]$	$f[x_2,x_3,x_4]$	$f[x_1,x_2,x_3,x_4]$	$\boxed{f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4]}$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\boxed{\ddots}$

Soit $\{(x_i,y_i)\}_{i=0}^n$ un ensemble de $n+1$ points distincts. Le polynôme d'interpolation p_n sous la forme de NEWTON est donné par

$$p_n(x)=\sum_{i=0}^{n}\omega_i(x)f[x_0,\dots,x_i]$$

où

$$\begin{aligned}
\omega_0(x)&=1,\\
\omega_k(x)&=\prod_{i=1}^{k-1}(x-x_i)=(x-x_{k-1})\omega_{k-1}(x), \qquad \forall k=1,\dots,n;\\
f[x_k]&=y_k, \qquad \forall k=0,\dots,n,\\
f[x_0,\dots,x_k]&\equiv\frac{f[x_1,\dots,x_k]-f[x_0,\dots,x_{k-1}]}{x_k-x_0}, \qquad \forall k=1,\dots,n.
\end{aligned}$$

Notation réduite : dans la suite on notera

$$f_{i-1,i}=f[x_{i-1},x_i]=\frac{y_i-y_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} \qquad\qquad f_{0,\dots,n}=f[x_0,\dots,x_n]=\frac{f_{1,\dots,n}-f_{0,\dots,n-1}}{x_n-x_0}.$$

i	x_i	y_i	$f_{i-1,i}$	$f_{i-2,i-1,i}$	$f_{i-3,i-2,i-1,i}$	$f_{i-4,i-3,i-2,i-1,i}$	$\dots$
0	x_0	$\boxed{y_0}$					
1	x_1	y_1	$\boxed{f_{01}=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}}$				
2	x_2	y_2	$f_{12}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$	$\boxed{f_{012}=\frac{f_{12}-f_{01}}{x_2-x_0}}$			
3	x_3	y_3	$f_{23}=\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}$	$f_{123}=\frac{f_{23}-f_{12}}{x_3-x_1}$	$\boxed{f_{0123}=\frac{f_{123}-f_{012}}{x_3-x_0}}$		
4	x_4	y_4	$f_{34}=\frac{y_4-y_3}{x_4-x_3}$	$f_{234}=\frac{f_{34}-f_{23}}{x_4-x_2}$	$f_{1234}=\frac{f_{234}-f_{123}}{x_4-x_1}$	$\boxed{f_{01234}=\frac{f_{1234}-f_{0123}}{x_4-x_0}}$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\boxed{\ddots}$

Soit $\{(x_i,y_i)\}_{i=0}^n$ un ensemble de $n+1$ points distincts. Le polynôme d'interpolation p_n sous la forme de NEWTON est donné par

$$p_n(x)=\sum_{i=0}^{n}\omega_i(x)f_{0,\dots,i}=y_0\omega_0(x)+f_{01}\omega_1(x)+f_{012}\omega_2(x)+\cdots+f_{012\dots n}\omega_n(x)$$

où

$$\begin{aligned}
\omega_0(x)&=1,\\
\omega_k(x)&=\prod_{i=1}^{k-1}(x-x_i)=(x-x_{k-1})\omega_{k-1}(x), \qquad \forall k=1,\dots,n;\\
f_k&=y_k, \qquad \forall k=0,\dots,n,\\
f_{0,\dots,k}&\equiv\frac{f_{1,\dots,k}-f_{0,\dots,k-1}}{x_k-x_0}, \qquad \forall k=1,\dots,n.
\end{aligned}$$

© 2024-2027 G. FACCANONI

Comme le montre la définition des différences divisées, des points supplémentaires peuvent être ajoutés pour créer un nouveau polynôme d'interpolation sans recalculer les coefficients. De plus, si un point est modifié, il est inutile de recalculer l'ensemble des coefficients. Autre avantage, si les x_i sont équirépartis, le calcul des différences divisées devient nettement plus rapide. Par conséquent, l'interpolation polynomiale dans une base de NEWTON est privilégiée par rapport à une interpolation dans la base de LAGRANGE pour des raisons pratiques.

```
import sympy as sp

def divided_diff(xx, yy):
    n = len(yy)
    if n == 1:
        return yy[0]
    else:
        return (divided_diff(xx[1:], yy[1:]) - divided_diff(xx[:-1],
        ↪  yy[:-1])) / sp.S(xx[-1] - xx[0])

def newton_interpolation(x, xx, yy):
    n = len(xx)
    p = 0
    for i in range(n):
        p += divided_diff(xx[:i+1], yy[:i+1]) * sp.prod([x - xx[j] for j
        ↪  in range(i)])
    return p

x = sp.symbols('x')

for n in range(3):
    x_data = sp.symbols('x:'+str(n+1))
    y_data = sp.symbols('y:'+str(n+1))
    p = newton_interpolation(x, x_data, y_data)
    print("Nombre de points :", n+1, "Polynôme de Newton p(x) = ", p)
```

```
Nombre de points : 1 Polynôme de Newton p(x) =  y0
Nombre de points : 2 Polynôme de Newton p(x) =  y0 + (x - x0)*(-y0 + y1)/(-x0 + x1)
Nombre de points : 3 Polynôme de Newton p(x) =  y0 + (x - x0)*(x - x1)*((-y1 + y2)/(-x1
 ↪  + x2) - (-y0 + y1)/(-x0 + x1))/(-x0 + x2) + (x - x0)*(-y0 + y1)/(-x0 + x1)
```

3.1.2. 💻 Fonctions prédéfinies en Python

- Avec numpy (calcul numérique) :

```
p_coeff = numpy.polyfit(xx_p, yy_p, deg=len(xx_p)-1)
numpy.polyval(p_coeff, xx_eval)
```

- Avec sympy (calcul formel) :

```
p = sympy.interpolate(list(zip(xx_p, yy_p)), x)  # canonique
p = sp.polys.specialpolys.interpolating_poly(n, x, X=xx_p, Y=yy_p)  #
 ↪  Lagrange
[p.subs({x: val}) for val in xx_eval]
```

Exemple :

```python
# Given data to interpolate
xx_p = [0, 1, 2]
yy_p = [3, 2, 7]
# Given data to evaluate the function
xx_eval = [1/2, 3/2]

# NumPy Polynomial interpolation using numpy.polyfit and numpy.polyval
import numpy as np
p = np.polyfit(xx_p, yy_p, deg=len(xx_p)-1)
B = np.polyval(p, xx_eval)
print("Evaluation with NumPy Polynomial Interpolation:", B)

# SymPy interpolation
import sympy as sp
x = sp.Symbol('x')
polynomial = sp.interpolate(list(zip(xx_p, yy_p)), x) # canonique
print("Polynome dans la base canonique : ",polynomial)
p = sp.polys.specialpolys.interpolating_poly(n+1, x, X=xx_p, Y=yy_p)  #
↪ Lagrange
print("Polynome dans la base de Lagrange : ",p)
xx_eval = [sp.Rational(1,2), sp.Rational(3,2)]
y_eval = [polynomial.subs({x: val}) for val in xx_eval]
print("Evaluation with SymPy Polynomial Interpolation:", y_eval)
```

```
Evaluation with NumPy Polynomial Interpolation: [1.75 3.75]
Polynome dans la base canonique :  3*x**2 - 4*x + 3
Polynome dans la base de Lagrange :  -2*x*(x - 2) + 7*x*(x - 1)/2 + 3*(x - 2)*(x - 1)/2
Evaluation with SymPy Polynomial Interpolation: [7/4, 15/4]
```

3.1.3. Les défauts de l'interpolation polynomiale

Malheureusement les polynômes d'interpolation ne forment pas une suite convergente vers une fonction analytique f.

Si $y_i = f(x_i)$ pour $i = 1,2,\dots,n$, $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ étant une fonction donnée de classe $\mathscr{C}^n(\mathrm{I})$ où I est le plus petit intervalle contenant les nœuds distincts $\{x_i\}_{i=0}^n$, alors il existe $\xi \in \mathrm{I}$ tel que l'erreur d'interpolation au point $x \in \mathrm{I}$ est donnée par

$$\mathrm{E}_{n-1}(x) \overset{\text{def}}{=} f(x) - p_{n-1}(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\omega_n(x)$$

avec $p_{n-1} \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ le polynôme d'interpolation.

Dans le cas d'une distribution uniforme de nœuds, *i.e.* quand $x_i = x_{i-1} + h$ avec $i = 1,2,\dots,n$ et $h > 0$ et x_0 donnés, on a

$$|\omega_n(x)| \leq (n-1)!\frac{h^n}{4}$$

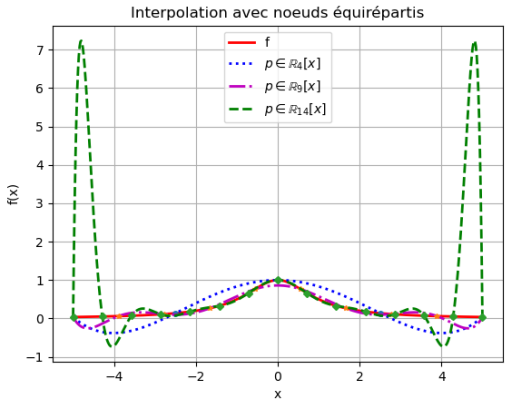
et donc

$$\max_{x\in\mathrm{I}}|\mathrm{E}_{n-1}(x)| \leq \frac{\max_{x\in\mathrm{I}}|f^{(n)}(x)|}{4n}h^n.$$

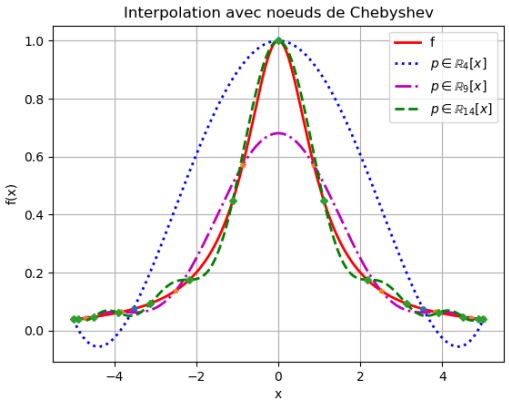
Malheureusement, **on ne peut pas déduire de cette relation que l'erreur tend vers** 0 **quand** n **tend vers l'infini**, bien que $h^n/(4n)$ tend effectivement vers 0. En fait, il existe des fonctions f pour lesquelles $\max_{x\in\mathrm{I}}|\mathrm{E}_{n-1}(x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Ce résultat frappant indique qu'**en augmentant le degré** n **du polynôme d'interpolation, on n'obtient pas nécessairement une meilleure reconstruction de** f**.**

Ce phénomène est bien illustré par la fonction de Runge de l'exemple ci-dessous.

© 2024-2027 G. Faccanoni



(a) Distribution équirepartie des nœuds



(b) Nœuds de CHEBYSHEV-GAUSS-LOBATTO

FIGURE 3.1. – Interpolation de LAGRANGE, exemple de RUNGE

EXEMPLE

Soit la fonction $f\colon [-5,5] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. La fonction f est infiniment dérivable sur $[-5,5]$ et $|f^{(n)}(\pm 5)|$ devient très rapidement grand lorsque n tend vers l'infini. Si on considère une distribution uniforme des nœuds on voit que l'erreur tend vers l'infini quand n tend vers l'infini. Ceci est lié au fait que la quantité $\max_{x\in[-5,5]} |f^{(n)}(x)|$ tend plus vite vers l'infini que $\frac{h^n}{4n}$ tend vers zéro. La figure 3.1a montre ses polynômes interpolants de degrés 3, 5 et 10 pour une distribution équirepartie des nœuds. Cette absence de convergence est également mise en évidence par les fortes oscillations observées sur le graphe du polynôme d'interpolation (absentes sur le graphe de f), particulièrement au voisinage des extrémités de l'intervalle. Ce comportement est connu sous le nom de *phénomène de* RUNGE.

On peut éviter le phénomène de RUNGE en choisissant correctement la distribution des nœuds d'interpolation. Sur un intervalle $[a,b]$, on peut par exemple considérer les nœuds de CHEBYSHEV-GAUSS-LOBATTO (voir figure 3.1b)

$$x_i = \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2}\cos\left(\frac{\pi}{n-1}(i-1)\right), \qquad \text{pour } i = 0,\dots,n$$

Pour cette distribution particulière de nœuds, il est possible de montrer que, si f est dérivable sur $[a,b]$, alors p_n converge vers f quand $n \to +\infty$ pour tout $x \in [a,b]$. Les nœuds de CHEBYSHEV-GAUSS-LOBATTO, qui sont les abscisses des nœuds équirépartis sur le demi-cercle unité, se trouvent à l'intérieur de $[a,b]$ et sont regroupés près des extrémités de l'intervalle.

Les courbes des figures 3.1a et 3.1b peuvent été obtenues par les instructions suivantes :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from numpy.polynomial.polynomial import Polynomial

# Fonction de Runge
f = lambda x: 1 / (1 + x**2)

# Points d'affichage
x = np.linspace(-5, 5, 500)
y = f(x)

# Nombre de points pour l'interpolation
n_points = [5, 10, 15]

# Styles et labels pour les courbes
line_styles = ['b:', 'm-.', 'g--']

# Styles pour les points d'interpolation
marker_styles = ['o', '*', 'D']
```

```python
# Labels pour les courbes
labels = [f"$p \in \\mathbb{{R}}_{{{n-1}}}[x]$" for n in n_points]

# Fonction d'interpolation et d'affichage
def interpolate_and_plot(nodes_func, n_points, line_styles, marker_styles,
 ↪  labels, title, filename):
    # Fonction de Runge
    plt.plot(x, f(x), 'r-', linewidth=2, label="f")
    # Interpolations
    for n, style, mark, label in zip(n_points, line_styles, marker_styles,
     ↪  labels):
        # Calcul des nœuds et des valeurs interpolées
        x_n = nodes_func(n)
        y_n = f(x_n)
        p_n = Polynomial.fit(x_n, y_n, n-1)
        y_interp = p_n(x)
        # Tracer la courbe interpolée et les points
        plt.plot(x, y_interp, style, linewidth=2, label=label)
        plt.plot(x_n, y_n, mark, markersize=4)

    plt.legend()
    plt.title(title)
    plt.xlabel("x")
    plt.ylabel("f(x)")
    plt.grid(True)
    plt.savefig(filename)
    # plt.show()

# Noeuds équirépartis
plt.figure()
nodes_equir = lambda n: np.linspace(-5, 5, n)
interpolate_and_plot(nodes_equir, n_points, line_styles, marker_styles,
 ↪  labels, "Interpolation avec noeuds équirépartis",
 ↪  "Images/runge_lagrange.png")

# Noeuds de Chebyshev
plt.figure()
nodes_cheb = lambda n: -5 * np.cos(np.pi * np.arange(n) / (n-1))
interpolate_and_plot(nodes_cheb, n_points, line_styles, marker_styles,
 ↪  labels, "Interpolation avec noeuds de Chebyshev",
 ↪  "Images/runge_lagrangeTGL.png")
```

3.1.4. Interpolation polynomiale composite : splines

On a mis en évidence le fait que, quand les nœuds d'interpolation sont équirépartis, on ne peut pas garantir la convergence uniforme du polynôme interpolatoire de LAGRANGE vers f. L'interpolation de LAGRANGE de bas degré est cependant suffisamment précise quand elle est utilisée sur des intervalles assez petits, y compris avec des nœuds équirépartis (ce qui est commode en pratique). Il est donc naturel d'introduire une partition de $[a;b]$ en n sous-intervalles $[x_i, x_{i+1}]$, tels que $[a;b] = \cup_{0\leq i\leq n-1}[x_i, x_{i+1}]$ et d'utiliser l'interpolation de LAGRANGE sur chaque sous-intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ en utilisant m nœuds équirépartis avec m petit (généralement $m = 1$ ou 3).

Évidemment tout polynôme de degré k est une spline, mais en pratique une spline est constituée de polynômes différents sur chaque sous-intervalle. Il peut donc y avoir des discontinuités de la dérivée k-ième aux nœuds internes $x_1, \ldots, x_{n-1}$. Ici nous allons considérer seulement le cas $m = 1$, *i.e.* des splines linéaires : étant donné une distribution (non nécessairement uniforme) de nœuds $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$, on approche f par une fonction continue qui, sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, est définie par le segment joignant les deux points $(x_i, f(x_i))$ et $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$. Cette fonction est appelée interpolation linéaire par morceaux (ou *spline* linéaire).

© 2024-2027 G. FACCANONI

Définition 3.1 (*Splines* linéaires)
Étant donné $n+1$ points distincts $x_0,\dots,x_n$ de $[a;b]$ avec $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$, la fonction $\ell\colon [a;b]\to\mathbb{R}$ est une spline linéaire relative aux nœuds $\{x_i\}$ si

$$\begin{cases}\ell(x)|_{[x_i;x_i+1]}\in\mathbb{R}_1, & i=1,1,\dots,n-1,\\ \ell\in\mathscr{C}^0([a;b]).\end{cases}$$

Autrement dit, dans chaque sous-intervalle $[x_i;x_i+1]$, la fonction $\ell\colon [x_i,x_{i+1}]\to\mathbb{R}$ est le segment qui connecte le point (x_i,y_i) au point (x_{i+1},y_{i+1}) ; elle s'écrit donc

$$\ell(x)|_{[x_i;x_i+1]}=y_i+\frac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}-x_i}(x-x_i)$$

Il est intéressant de noter que la commande `plot(x,y)`, utilisée pour afficher le graphe d'une fonction f sur un intervalle donné $[a,b]$, remplace en fait la fonction par une interpolée linéaire par morceaux, les points d'interpolation étant les composantes du vecteur x.

Le principale défaut de cette interpolation par morceaux est que ℓ n'est que continue. Or, dans des nombreuses applications, il est préférable d'utiliser des fonctions ayant au moins une dérivée continue. On peut construire pour cela une fonction s_3 comme l'interpolation d'Hermite des points $(x_i,f(x_i),f'(x_i))$ et $(x_{i+1},f(x_{i+1}),f'(x_{i+1}))$ sur chaque $[x_i;x_i+1]$ pour $i=1,1,\dots,n-1$.

TO DO interpolation d'Hermite, splines cubiques

3.1.5. Splines avec SciPy

to do

https://docs.scipy.org/doc/scipy/tutorial/interpolate/1D.html#tutorial-interpolate-1dsection

3.1.6. Deux exemples complets

Exemple
On se propose de calculer le polynôme d'interpolation de l'ensemble de points $\{(-1,1),(0,0),(1,1)\}$. On cherche donc $p_2\in\mathbb{R}_2[x]$ tel que $p_2(x_i)=y_i$ pour $i=0,\dots,2$. On calculera enfin la spline linéaire associée aux mêmes points.

Sympy.

```
# Given data to interpolate
xx_p = [-1, 0, 1]
yy_p = [1, 0, 1]

import sympy as sp
x = sp.Symbol('x')
polynomial = sp.interpolate(list(zip(xx_p, yy_p)), x)
print(f"p(x) = {polynomial}")
xx_eval = [sp.Rational(i,2) for i in range(-3,4) ] # To evaluate the
 ↪ function
print( *[f"p({x_val})={polynomial.subs({x:x_val})}" for x_val in
 ↪ xx_eval] )
```

```
p(x) = x**2
p(-3/2)=9/4 p(-1)=1 p(-1/2)=1/4 p(0)=0 p(1/2)=1/4 p(1)=1 p(3/2)=9/4
```

Numpy.

```
# Given data to interpolate
xx_p = [-1, 0, 1]
yy_p = [1, 0, 1]

import numpy as np
```

```
p = np.polyfit(xx_p, yy_p, deg=len(xx_p)-1)
xx_eval = np.linspace(-1.5,1.5,7) # To evaluate the function
B = np.polyval(p, xx_eval)
print( *[f" p({x})={b:.2f}" for x,b in zip(xx_eval,B)] )
```

```
p(-1.5)=2.25  p(-1.0)=1.00  p(-0.5)=0.25  p(0.0)=-0.00  p(0.5)=0.25  p(1.0)=1.00
↪  p(1.5)=2.25
```

Méthode directe. Si on écrit $p_2(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$, on cherche $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ tels que

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

En résolvant ce système linéaire par la méthode du pivot de Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

on trouve $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = 0$ et $\alpha_2 = 1$ ainsi $p_2(x) = x^2$.

Méthode de Lagrange. On a

$$p_2(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x) = \frac{x(x-1)}{(-1-0)(-1-1)} + \frac{(x-(-1))(x-0)}{(1-(-1))(1-0)} = \frac{1}{2}x(x-1) + \frac{1}{2}(x+1)x = x^2$$

Méthode de Newton. On commence par construire le tableau des différences divisées :

i	x_i	y_i	$f[x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$
0	-1	$\boxed{1}$		
1	0	0	$\boxed{-1}$	
2	1	1	1	$\boxed{1}$

On a alors

$$\begin{aligned} p_2(x) &= \sum_{i=0}^{2} \omega_i(x) f[x_0, \dots, x_i] \\ &= \omega_0(x) f[x_0] + \omega_1(x) f[x_0, x_1] + \omega_2(x) f[x_0, x_1, x_2] \\ &= \omega_0(x) - \omega_1(x) + \omega_2(x) \\ &= 1 - (x+1) + x(x+1) = x^2. \end{aligned}$$

Méthode astucieuse. $x = 0$ est une racine du polynôme, il s'écrit alors comme $p(x) = x\mathrm{R}(x)$ avec $\mathrm{R} \in \mathbb{R}_1[x]$, autrement dit $p(x) = x(ax+b)$. Comme $p(-1) = p(1)$, le polynôme est pair, donc $b = 0$. Enfin, comme $p(1) = 1$, on conclut que $a = 1$.

Spline linéaire.

$$s_1(x) = \begin{cases} -x & \text{si } -1 \le x \le 0, \\ x & \text{si } 0 \le x \le 1. \end{cases}$$

EXEMPLE

1. On se propose de calculer le polynôme d'interpolation de la fonction $f(x) = \sin(x)$ en les 3 points $x_i = \frac{\pi}{2} i$ avec $i = 0, 1, 2$. On cherche donc $p_2 \in \mathbb{R}_2[x]$ tel que $p_2(x_i) = \sin(x_i)$ pour $i = 0, \dots, 2$. Calculer ensuite la spline linéaire associée aux même points.
2. Maintenant on veut calculer le polynôme d'interpolation de la même fonction en les 4 points $x_i = \frac{\pi}{2} i$ avec $i = 0, 1, 2, 3$, *i.e.* on a juste ajouté le point $x = 3\pi/2$. On cherche donc $p_3 \in \mathbb{R}_3[x]$ tel que $p_3(x_i) = \sin(x_i)$ pour $i = 0, \dots, 3$.

1. On commence par le cas où on interpole f en 3 points.

© 2024-2027 G. FACCANONI

Méthode directe. Si on écrit $p_2(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$, on cherche $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ tels que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{\pi}{2} & \frac{\pi^2}{4} \\ 1 & \pi & \pi^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En résolvant ce système linéaire[2] on trouve $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = \frac{4}{\pi}$ et $\alpha_2 = -\frac{4}{\pi^2}$ ainsi $p_2(x) = \frac{4}{\pi}x - \frac{4}{\pi^2}x^2 = \frac{4}{\pi^2}x(\pi - x)$.

Méthode de Lagrange. On a

$$p_2(x) = y_0 \mathrm{L}_0(x) + y_1 \mathrm{L}_1(x) + y_2 \mathrm{L}_2(x) = \frac{x(x-\pi)}{\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \pi\right)} = -\frac{4}{\pi^2}x(x-\pi).$$

Méthode de Newton. On commence par construire le tableau des différences divisées :

i	x_i	y_i	$f[x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$
0	0	$\boxed{0}$		
1	$\frac{\pi}{2}$	1	$\boxed{\frac{2}{\pi}}$	
2	π	0	$-\frac{2}{\pi}$	$\boxed{-\frac{4}{\pi^2}}$

On a alors

$$\begin{aligned} p_2(x) &= \sum_{i=0}^{2} \omega_i(x) f[x_0, \dots, x_i] \\ &= \omega_0(x) f[x_0] + \omega_1(x) f[x_0, x_1] + \omega_2(x) f[x_0, x_1, x_2] \\ &= \frac{2}{\pi}\omega_1(x) - \frac{4}{\pi^2}\omega_2(x) \\ &= \frac{2}{\pi}x - \frac{4}{\pi^2}x\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= -\frac{4}{\pi^2}x(x-\pi). \end{aligned}$$

Spline linéaire.

$$s_1(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}x & \text{si } 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, \\ -\frac{2}{\pi}(x-\pi) & \text{si } \frac{\pi}{2} \le x \le \pi. \end{cases}$$

2. Maintenant on veut calculer le polynôme d'interpolation de la même fonction en un point de plus.

Méthode directe. Si on écrit $p_3(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3$, on cherche $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tels que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{\pi}{2} & \frac{\pi^2}{4} & \frac{\pi^3}{8} \\ 1 & \pi & \pi^2 & \pi^3 \\ 1 & \frac{3\pi}{2} & \frac{9\pi^2}{4} & \frac{27\pi^3}{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

En résolvant ce système linéaire on trouve $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = \frac{16}{3\pi}$, $\alpha_2 = -\frac{8}{\pi^2}$ et $\alpha_3 = \frac{8}{3\pi^3}$.

Méthode de Lagrange. On a

$$\begin{aligned} p_3(x) = y_0 \mathrm{L}_0(x) + y_1 \mathrm{L}_1(x) + y_2 \mathrm{L}_2(x) + y_3 \mathrm{L}_3(x) &= \frac{x(x-\pi)\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)}{\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \pi\right)\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{2}\right)} - \frac{x\left(x - \frac{\pi}{2}\right)(x-\pi)}{\frac{3\pi}{2}\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{3\pi}{2} - \pi\right)} \\ &= \frac{4}{\pi^3}x(x-\pi)\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) - \frac{4}{3\pi^3}x\left(x - \frac{\pi}{2}\right)(x-\pi). \end{aligned}$$

2. Par la méthode du pivot de Gauss on obtient

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{\pi}{2} & \frac{\pi^2}{4} & 1 \\ 1 & \pi & \pi^2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\pi}{2} & \frac{\pi^2}{4} & 1 \\ 0 & \pi & \pi^2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\pi}{2} & \frac{\pi^2}{4} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{\pi^2}{2} & -2 \end{array}\right)$$

Méthode de Newton. Il suffit de calculer une différence divisée en plus, *i.e.* ajouter une ligne au tableau :

i	x_i	y_i	$f[x_{i-1},x_i]$	$f[x_{i-2},x_{i-1},x_i]$	$f[x_{i-3},x_{i-2},x_{i-1},x_i]$
0	0	$\boxed{0}$			
1	$\frac{\pi}{2}$	1	$\boxed{\frac{2}{\pi}}$		
2	π	0	$-\frac{2}{\pi}$	$\boxed{-\frac{4}{\pi^2}}$	
3	$\frac{3\pi}{2}$	-1	$-\frac{2}{\pi}$	0	$\boxed{\frac{8}{3\pi^3}}$

On a alors

$$\begin{aligned} p_3(x) &= \sum_{i=0}^{3} \omega_i(x) f[x_0,\dots,x_i] \\ &= p_2(x) + \omega_3(x) f[x_0,x_1,x_2,x_3] \\ &= -\frac{4}{\pi^2}x(x-\pi) + \frac{8}{3\pi^3}\omega_3(x) \\ &= -\frac{4}{\pi^2}x(x-\pi) + \frac{8}{3\pi^3}x\left(x-\frac{\pi}{2}\right)(x-\pi) \\ &= \frac{8}{3\pi^3}x(x^2-3\pi x+2\pi^2). \end{aligned}$$

Spline linéaire.

$$s_1(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}x & \text{si } 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, \\ -\frac{2}{\pi}(x-\pi) & \text{si } \frac{\pi}{2} \le x \le \pi \\ -\frac{2}{\pi}(x-\pi) & \text{si } \pi \le x \le \frac{3\pi}{2}. \end{cases}$$

Remarque
Si n est petit il est souvent plus simple de calculer directement les coefficients a_0, a_1, …, a_n en résolvant le système linéaire (3.2).

3.2. Généralisation : l'interpolation dans un espace vectoriel quelconque

Une généralisation de l'interpolation polynomiale consiste à chercher la fonction interpolant les $n+1$ points donnés non pas dans $\mathbb{R}_n[x]$ mais dans un autre espace vectoriel $\mathcal{V}$ engendré par $n+1$ fonctions libres $\{\varphi_j,\ j=0,\dots,n\}$. On peut considérer par exemple des fonctions trigonométriques $\varphi_j(x)=\cos(jx)$, des fonctions exponentielles $\varphi_j(x)=e^{jx}$ etc. Le choix des fonctions $\{\varphi_j\}$ est en pratique dicté par la forme supposée de la loi décrivant les données.

On considère donc un ensemble de $(n+1)$ points $\{(x_i,y_i)\}_{i=0}^n$ et on cherche une fonction $f(x)=\sum_{j=0}^n a_j\varphi_j(x)$ telle que $f(x_i)=y_i$ où $a_0,a_1,a_2,\dots,a_n$ sont des coefficients qui devront être déterminés. Les $(n+1)$ relations s'écrivent alors

$$\begin{cases} a_0\varphi_0(x_0)+a_1\varphi_1(x_0)+\dots a_n\varphi_n(x_0)=y_0 \\ a_0\varphi_0(x_1)+a_1\varphi_1(x_1)+\dots a_n\varphi_n(x_1)=y_1 \\ \dots \\ a_0\varphi_0(x_n)+a_1\varphi_1(x_n)+\dots a_n\varphi_n(x_n)=y_n \end{cases}$$

Puisque les valeurs x_i et y_i sont connues, ces relations forment un système linéaire de $(n+1)$ équations en les $(n+1)$ inconnues $a_0,a_1,a_2,\dots,a_n$ qu'on peut mettre sous la forme matricielle

$$\begin{pmatrix} \varphi_0(x_0) & \varphi_1(x_0) & \dots & \varphi_n(x_0) \\ \varphi_0(x_1) & \varphi_1(x_1) & \dots & \varphi_n(x_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_0(x_n) & \varphi_1(x_n) & \dots & \varphi_n(x_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

Ainsi, le problème consistant à chercher la fonction f peut se réduire à résoudre le système linéaire (3.3).

© 2024-2027 G. Faccanoni

Étant donné $n+1$ points distincts $x_0,\dots,x_n$ et $n+1$ valeurs correspondantes $y_0,\dots,y_n$, il existe une unique fonction f de l'espace vectoriel $\mathcal{V}$ de base $\{\varphi_0(x),\varphi_1(x),\dots,\varphi_n(x)\}$ telle que $f(x_i)=y_i$, pour $i=0,\dots n$ qu'on peut écrire sous la forme

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i\varphi_j(x) \qquad \text{avec} \quad \begin{pmatrix} \varphi_0(x_0) & \varphi_1(x_0) & \dots & \varphi_n(x_0)\\ \varphi_0(x_1) & \varphi_1(x_1) & \dots & \varphi_n(x_1)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \varphi_0(x_n) & \varphi_1(x_n) & \dots & \varphi_n(x_n)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0\\ a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_0\\ y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}.$$

EXEMPLE
On se propose d'interpoler la fonction $f:[0;2\pi]\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=x(x-2\pi)e^{-x}$ en les points $\{x_0=0,x_1=\pi\}$ dans l'espace vectoriel engendré par les 2 fonctions libres $\{\varphi_0,\varphi_1\}$ définies par $\varphi_j(x)=\cos(jx)$.

On cherche donc a_0 et a_1 tels que $g(x)=a_0+a_1\cos(x)$ vérifie $g(0)=0$ et $g(\pi)=-\pi^2e^{-\pi}$. On doit ainsi résoudre le système linéaire de deux équations en les deux inconnues a_0 et a_1 suivant :

$$\begin{pmatrix}1 & \cos(0)\\ 1 & \cos(\pi)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\ a_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ -\pi^2e^{-\pi}\end{pmatrix} \quad i.e. \quad \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\ a_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ -\pi^2e^{-\pi}\end{pmatrix}.$$

On trouve $a_0=-\frac{\pi^2e^{-\pi}}{2}=-a_1$ et

$$g(x)=\frac{\pi^2e^{-\pi}}{2}(-1+\cos(x)).$$

Deux cas particuliers :

- si $\varphi_j(x)=x^j$ on retrouve le cas du fitting polynomial,
- si $\varphi_j(x)=\cos(jx)$ ou $\phi_j(x)=\sin(jx)$ on parle d'interpolation trigonométrique et il n'est pas nécessaire de calculer les coefficients en résolvant le système linéaire (3.3), il existe une méthode plus rapide : FFT.

3.2.1. Cas particulier : l'interpolation Trigonométrique et FFT

On veut approcher une fonction **périodique** $f:[0;2\pi]\to\mathbb{C}$, *i.e.* satisfaisant $f(0)=f(2\pi)$, par un polynôme trigonométrique $\tilde{f}$, *i.e.* une combinaison linéaire de sinus et de cosinus, qui interpole f aux $n+1$ nœuds équidistants $x_j=jh\in[0;2\pi[$ avec $j=0,\dots,n$ et $h=\frac{2\pi}{n+1}$. On remarque que le point 2π est omis car redondant avec le point $x=0$ étant donné que $f(0)=f(2\pi)$.

La fonction d'interpolation trigonométrique $\tilde{f}$ peut s'écrire comme

$$\tilde{f}(x)=a_0+\sum_{k=1}^{\mathrm{K}} a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx)$$

dont les inconnues sont le coefficient complexes a_0 et les 2K coefficients a_k et b_k. On peut remarquer que $\tilde{f}$ s'apparente à une série de FOURIER tronquée, *i.e.* au lieu de sommer jusqu'à l'infini on tronque la somme à l'entier K.

Rappels :

$$\begin{cases}\cos(kx)=\frac{e^{ikx}+e^{-ikx}}{2},\\ \sin(kx)=\frac{e^{ikx}-e^{-ikx}}{2i}=-i\frac{e^{ikx}-e^{-ikx}}{2},\end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases}e^{ikx}=\cos(kx)+i\sin(kx),\\ e^{-ikx}=\cos(kx)-i\sin(kx).\end{cases}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\tilde{f}(x)&=a_0+\sum_{k=1}^{\mathrm{K}} a_k\frac{e^{ikx}+e^{-ikx}}{2}-ib_k\frac{e^{ikx}-e^{-ikx}}{2}\\ &=a_0+\sum_{k=1}^{\mathrm{K}}\underbrace{\frac{a_k-ib_k}{2}}_{c_k}e^{ikx}+\underbrace{\frac{a_k+ib_k}{2}}_{c_{-k}}e^{i(-k)x}=\sum_{k=-\mathrm{K}}^{\mathrm{K}} c_ke^{ikx}\end{aligned}$$

les inconnues sont maintenant les $2\mathrm{K}+1$ coefficients $c_k\in\mathbb{C}$ et l'on a les relations

$$\begin{cases}c_0=a_0,\\ c_k=\frac{a_k-ib_k}{2}, & k=1,\dots,\mathrm{K}\\ c_{-k}=\overline{c_k}=\frac{a_k+ib_k}{2}, & k=1,\dots,\mathrm{K}\end{cases} \iff \begin{cases}a_0=c_0,\\ a_k=c_k+c_{-k}, & k=1,\dots,\mathrm{K}\\ b_k=i(c_k-c_{-k}), & k=1,\dots,\mathrm{K}.\end{cases}$$

Une autre écriture souvent utilisée se base sur l'écriture exponentielle des coefficients c_k : pour tout k, $c_k \in \mathbb{C}$ peut s'écrire comme $c_k = \frac{1}{2} r_k e^{i\varphi_k}$ ainsi $c_{-k} = \overline{c_k} = \frac{1}{2} r_k e^{-i\varphi_k}$ et on trouve

$$a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) = c_k e^{ikx} + \overline{c_k} e^{-ikx} = \frac{1}{2} r_k e^{i\varphi_k} e^{ikx} + \frac{1}{2} r_k e^{-i\varphi_k} e^{-ikx} = \frac{1}{2} r_k \left(e^{i(\varphi_k + kx)} + e^{-i(\varphi_k + kx)} \right) = r_k \cos(kx + \varphi_k).$$

Ainsi les inconnues sont maintenant le coefficient a_0 et les 2K couples "amplitude, phase" $(r_k, \varphi_k) \in \mathbb{R}$:

$$\tilde{f}(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\mathrm{K}} r_k \cos(kx + \varphi_k)$$

En écrivant les $n+1$ conditions d'interpolation aux nœuds x_j on trouve

$$f(x_j) = \tilde{f}(x_j) = \sum_{k=-\mathrm{K}}^{\mathrm{K}} c_k e^{ikx_j}.$$

Quand n est pair, on pose $\mathrm{K} = n/2$ ainsi nous avons $n+1$ conditions d'interpolation et $2\mathrm{K}+1 = n+1$ inconnues ; quand n est impair, on pose $\mathrm{K} = (n+1)/2$ ainsi nous avons $n+1$ conditions d'interpolation et $2\mathrm{K}+1 = n+2$ inconnues, pour fermer le système on ajoute alors la condition $c_{\mathrm{K}} = 0$. Pour uniformiser la notation dans ces deux cas, nous pouvons écrire $\mathrm{M} = n/2$ et

$$\tilde{f}(x) = \sum_{k=-(\mathrm{M}+\mu)}^{\mathrm{M}} c_k e^{ikx}, \qquad \mu = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair,} \\ 1 & \text{si } n \text{ est impair,} \end{cases}$$

et les $n+1$ conditions d'interpolation aux nœuds $x_j = jh$ donnent les $n+1$ conditions

$$f(x_j) = \tilde{f}(x_j) = \sum_{k=-(\mathrm{M}+\mu)}^{\mathrm{M}} c_k e^{ikjh}.$$

Pour calculer les $n+1$ inconnues $\{c_k\}_{k=-\mathrm{M}-\mu}^{\mathrm{M}}$, on multiplie cette équation par e^{-imjh} où $m = -\mathrm{M}-\mu, \dots \mathrm{M}$ et on somme sur j :

$$\sum_{j=0}^{n} \left(f(x_j) e^{-imjh} \right) = \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{k=-(\mathrm{M}+\mu)}^{\mathrm{M}} c_k e^{i(k-m)jh} \right).$$

En échangeant l'ordre de sommation on obtient

$$\sum_{j=0}^{n} \left(f(x_j) e^{-imjh} \right) = \sum_{k=-(\mathrm{M}+\mu)}^{\mathrm{M}} \left(c_k \left(\sum_{j=0}^{n} e^{i(k-m)jh} \right) \right).$$

On se rappelle que $\sum_{j=0}^{n} q^j = (n+1)$ si $q = 1$ et $\sum_{j=0}^{n} q^j = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ si $q \neq 1$, ainsi en prenant $q = e^{i(k-m)h}$ on a

$$\sum_{j=0}^{n} (e^{i(k-m)h})^j = (n+1)\delta_{km}$$

car $\sum_{j=0}^{n} (e^{i(k-m)h})^j = n+1$ si $k = m$ et si $k \neq m$ alors

$$\sum_{j=0}^{n} (e^{i(k-m)h})^j = \frac{1-(e^{i(k-m)h})^{n+1}}{1-(e^{i(k-m)h})} = \frac{1-e^{i(k-m)(n+1)h}}{1-(e^{i(k-m)h})} = \frac{1-e^{i(k-m)2\pi}}{1-(e^{i(k-m)h})} = \frac{1-\cos((k-m)2\pi) - i\sin((k-m)2\pi)}{1-(e^{i(k-m)h})} = 0.$$

Donc

$$\sum_{j=0}^{n} \left(f(x_j) e^{-imjh} \right) = (n+1) \sum_{k=-(\mathrm{M}+\mu)}^{\mathrm{M}} \delta_{km} c_k$$

i.e. seul le terme $k = m$ est à prendre en considération

$$\sum_{j=0}^{n} \left(f(x_j) e^{-imjh} \right) = (n+1) c_m \qquad m = -\mathrm{M}-\mu, \dots \mathrm{M}.$$

© 2024-2027 G. Faccanoni

Soit $\{(x_j = jh, f(x_j))\}_{j=0}^{n}$ un ensemble de $n+1$ points avec $h = 2\pi/(n+1)$ et $f : [0;2\pi] \to \mathbb{C}$ une fonction périodique. Le polynôme trigonométrique d'interpolation $\tilde{f}$ est donné par

$$\tilde{f}(x) = \sum_{k=-(M+\mu)}^{M} c_k e^{-ikx}, \qquad (M,\mu) = \begin{cases} (n/2,0) & \text{si } n \text{ est pair,} \\ ((n-1)/2,1) & \text{si } n \text{ est impair,} \end{cases}$$

et, pour $k = -(M+\mu)\dots M$,

$$c_k = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} f(x_j) e^{ikx_j}.$$

De manière équivalente on peut écrire

$$\tilde{f}(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{M+\mu} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx), \qquad (M,\mu) = \begin{cases} (n/2,0) & \text{si } n \text{ est pair,} \\ ((n-1)/2,1) & \text{si } n \text{ est impair,} \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} f(x_j) & \\ a_k = \frac{2}{n+1} \sum_{j=0}^{n} f(x_j) \cos(kx_j), & k = 1,\dots M+\mu, \\ b_k = \frac{2}{n+1} \sum_{j=0}^{n} f(x_j) \sin(kx_j), & k = 1,\dots M+\mu, \\ a_{M+\mu} = i b_{M+\mu} & \text{si } \mu = 1. \end{cases}$$

Il est intéressant de noter que l'expression de c_k est une approximation de l'intégrale $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}\,dx$ par la méthode des rectangles à gauche composite. De la même manière, les coefficients a_k et b_k sont des approximations des intégrales $\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)\,dx$ et $\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)\,dx$ respectivement. Vu que ces intégrales définissent précisément les coefficients de Fourier, on déduit que nos sommes sont des approximations des coefficients de Fourier et on parle alors d'une transformation de Fourier discrète. Le calcul des coefficients c_k peut ainsi être effectué en utilisant la transformation de Fourier rapide (FFT).

Notons que si f est une fonction à valeurs réelles, alors $c_{-k} = \overline{c_k}$ et donc $\tilde{f}$ aussi est une fonction à valeurs réelles.

Exemple

Considérons la fonction $f : [0;2\pi] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x(x-2\pi)e^{-x}$. On a bien $f(0) = f(2\pi)$.

- On se propose de calculer $\tilde{f}(x)$ lorsque $n = 1$. On a $x_j = jh$ avec $j = 0,1$ et $h = \pi$. On interpole alors les deux points $\{(0, f(0)), (\pi, f(\pi))\} = \{(0,0), (\pi, -\pi^2 e^{-\pi})\}$.

  Méthode directe On cherche a_0 et a_1 tels que $\tilde{f}(x) = a_0 + a_1\cos(x)$ vérifie $\tilde{f}(0) = 0$ et $\tilde{f}(\pi) = -\pi^2 e^{-\pi}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & \cos(0) \\ 1 & \cos(\pi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\pi^2 e^{-\pi} \end{pmatrix} \quad \textit{i.e.} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\pi^2 e^{-\pi} \end{pmatrix}$$

  ainsi $a_0 = -\frac{\pi^2 e^{-\pi}}{2} = -a_1$ et

$$\tilde{f}(x) = \frac{\pi^2 e^{-\pi}}{2}(-1 + \cos(x)).$$

  Méthode "Fourier" n étant impair, $M = (n-1)/2 = 0$ et $\mu = 1$ et

$$\tilde{f}(x) = \sum_{k=-1}^{0} c_k e^{ikx6} = c_{-1}e^{-ix} + c_0$$

  On doit alors calculer les deux coefficients de Fourier c_{-1} et c_0 :

$$c_{-1} = \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{1} f(x_j)e^{-ix_j} = \frac{1}{2}\left(f(x_0)e^{-ix_0} + f(x_1)e^{-ix_1}\right) = \frac{1}{2}\left(-\pi^2 e^{-\pi}e^{-i\pi}\right) = \frac{\pi^2 e^{-\pi}}{2}$$

$$c_0 = \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{1} f(x_j) = \frac{1}{2}\left(f(x_0) + f(x_1)\right) = \frac{1}{2}\left(-\pi^2 e^{-\pi}\right) = -\frac{\pi^2 e^{-\pi}}{2}$$

  ainsi

$$\tilde{f}(x) = \frac{\pi^2 e^{-\pi}}{2}(e^{-ix} - 1).$$

Lien entre les deux solutions $b_1 = 0$ (il n'y a pas de $\sin(x)$ dans la base choisie) donc $c_0 = a_0$, $c_1 = \frac{a_1 - ib_1}{2} = \frac{a_1}{2}$, $c_{-1} = \frac{a_1 - ib_1}{2} = \frac{a_1}{2}$ et $\cos(x) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ ainsi on a bien

$$\tilde{f}(x) = \frac{\pi^2 e^{-\pi}}{2}(-1+\cos(x)) = \frac{\pi^2 e^{-\pi}}{2}(e^{-ix}-1).$$

- On se propose de calculer $\tilde{f}(x)$ lorsque $n = 2$. On a $x_j = jh$ avec $j = 0,1,2$ et $h = \frac{2\pi}{3}$. On interpole alors les trois points $\left\{(0, f(0)), (\frac{2\pi}{3}, f(\frac{2\pi}{3})), (\frac{4\pi}{3}, f(\frac{4\pi}{3}))\right\} = \left\{(0,0), (\frac{2\pi}{3}, -\frac{8\pi^2}{9}e^{-\frac{2\pi}{3}}), (\frac{4\pi}{3}, -\frac{8\pi^2}{9}e^{-\frac{4\pi}{3}})\right\}$.
  n étant pair, $\mathrm{M} = n/2 = 1$ et $\mu = 0$ et

$$\tilde{f}(x) = \sum_{k=-1}^{1} c_k e^{ikx} = c_{-1}e^{-ix} + c_0 + c_1 e^{ix}$$

On doit alors calculer les trois coefficients de FOURIER c_{-1}, c_0 et c_1 :

$$\begin{aligned}
c_{-1} &= \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{2} f(x_j)e^{-ix_j} = \frac{1}{3}\left(f(x_0)e^{-ix_0} + f(x_1)e^{-ix_1} + f(x_2)e^{-ix_2}\right) = \frac{1}{3}\left(-\frac{8\pi^2}{9}e^{-(i+1)\frac{2\pi}{3}} - \frac{8\pi^2}{9}e^{-(i+1)\frac{4\pi}{3}}\right) \\
&= -\frac{8\pi^2}{27}\left(e^{-(i+1)\frac{2\pi}{3}} + e^{-(i+1)\frac{4\pi}{3}}\right) = -\frac{8\pi^2}{27}e^{-(i+1)\frac{2\pi}{3}}\left(1 + e^{-(i+1)\frac{2\pi}{3}}\right) \\
c_0 &= \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{2} f(x_j) = \frac{1}{3}\left(f(x_0) + f(x_1) + f(x_2)\right) = \frac{1}{3}\left(-\frac{8\pi^2}{9}e^{-\frac{2\pi}{3}} - \frac{8\pi^2}{9}e^{-\frac{4\pi}{3}}\right) = -\frac{8\pi^2}{27}e^{-\frac{2\pi}{3}}\left(1 + e^{-\frac{2\pi}{3}}\right) \\
c_1 &= \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{2} f(x_j)e^{ix_j} = \frac{1}{3}\left(f(x_0)e^{ix_0} + f(x_1)e^{ix_1} + f(x_2)e^{ix_2}\right) = \frac{1}{3}\left(-\frac{8\pi^2}{9}e^{(i-1)\frac{2\pi}{3}} - \frac{8\pi^2}{9}e^{(i-1)\frac{4\pi}{3}}\right) \\
&= -\frac{8\pi^2}{27}\left(e^{(i-1)\frac{2\pi}{3}} + e^{(i-1)\frac{4\pi}{3}}\right) = -\frac{8\pi^2}{27}e^{(i-1)\frac{2\pi}{3}}\left(1 + e^{(i-1)\frac{2\pi}{3}}\right)
\end{aligned}$$

ainsi

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(x) &= -\frac{8\pi^2}{27}e^{-(i+1)\frac{2\pi}{3}}\left(1 + e^{-(i+1)\frac{2\pi}{3}}\right)e^{-ix} - \frac{8\pi^2}{27}e^{-\frac{2\pi}{3}}\left(1 + e^{-\frac{2\pi}{3}}\right) - \frac{8\pi^2}{27}e^{(i-1)\frac{2\pi}{3}}\left(1 + e^{(i-1)\frac{2\pi}{3}}\right)e^{ix} \\
&= -\frac{8\pi^2}{27}e^{-\frac{2\pi}{3}}\left[e^{-i\frac{2\pi}{3}}\left(1 + e^{-(i+1)\frac{2\pi}{3}}\right)e^{-ix} + \left(1 + e^{-\frac{2\pi}{3}}\right) + e^{i\frac{2\pi}{3}}\left(1 + e^{(i-1)\frac{2\pi}{3}}\right)e^{ix}\right] \\
&= -\frac{8\pi^2}{27}e^{-\frac{2\pi}{3}}\left[e^{-i(\frac{2\pi}{3}+x)}\left(1 + e^{-(i+1)\frac{2\pi}{3}}\right) + \left(1 + e^{-\frac{2\pi}{3}}\right) + e^{i(\frac{2\pi}{3}+x)}\left(1 + e^{(i-1)\frac{2\pi}{3}}\right)\right].
\end{aligned}$$

TO DO : Passer à une fonction périodique sur un autre intervalle. Expliquer la transformation de Fourier, la transformation de Fourier discrète (= série ?) et l'algorithme de transformation de Fourier rapide (FFT) et les liens avec l'interpolation. Passer à une fonction non périodique et/ou non continue. Illustrer la convergence uniforme en opposition à celle non uniforme de l'interpolation polynomiale.

© 2024-2027 G. FACCANONI

3.3. Exercices

3.3.1. Révisions : espaces vectoriels et bases dans $\mathbb{R}_n[x]$

Exercice 3.1
Démontrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_2[x]$:

1. $\mathrm{F} = \{ a+bx+cx^2 \in \mathbb{R}_2[x] \mid a+b+2c=0 \}$,
2. $\mathrm{F} = \{ p \in \mathbb{R}_2[x] \mid p(1)=0 \}$,
3. $\mathrm{F} = \{ p \in \mathbb{R}_2[x] \mid p'(1)=0 \}$.

Correction
On montre que $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}\{\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_p\}$ où $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_p$ sont des éléments de $\mathbb{R}_2[x]$.

1. $\mathrm{F} = \{ a+bx+cx^2 \in \mathbb{R}_2[x] \mid a+b+2c=0 \}$:

$$\begin{aligned}\mathrm{F} &= \{ a+bx+cx^2 \in \mathbb{R}_2[x] \mid a+b+2c=0 \} \\ &= \{ a+(-2c-a)x+cx^2 \mid a,c \in \mathbb{R} \} \\ &= \{ a(1-x)+c(-2x+x^2) \mid a,c \in \mathbb{R} \} \\ &= \mathrm{Vect}\{1-x,-2x+x^2\}.\end{aligned}$$

   (On peut également en déduire que $\{1-x,-2x+x^2\}$ est une famille génératrice de F.)
2. $\mathrm{F} = \{ p \in \mathbb{R}_2[x] \mid p(1)=0 \}$

$$\begin{aligned}\mathrm{F} &= \{ a+bx+cx^2 \in \mathbb{R}_2[x] \mid a+b+c=0 \} \\ &= \{ a+bx+(-a-b)x^2 \mid a,c \in \mathbb{R} \} \\ &= \{ a(1-x^2)+b(x-x^2) \mid a,b \in \mathbb{R} \} \\ &= \mathrm{Vect}\{1-x^2,x-x^2\}.\end{aligned}$$

   (On peut également en déduire que $\{1-x^2,x-x^2\}$ est une famille génératrice de F.)
3. $\mathrm{F} = \{ p \in \mathbb{R}_2[x] \mid p'(1)=0 \}$

$$\begin{aligned}\mathrm{F} &= \{ a+bx+cx^2 \in \mathbb{R}_2[x] \mid b+2c=0 \} \\ &= \{ a-2cx+cx^2 \mid a,c \in \mathbb{R} \} \\ &= \{ a+c(-2x+x^2) \mid a,c \in \mathbb{R} \} \\ &= \mathrm{Vect}\{1,-2x+x^2\}.\end{aligned}$$

   (On peut également en déduire que $\{1,-2x+x^2\}$ est une famille génératrice de F.)

Exercice 3.2
Prouver que les familles suivantes sont libres :

1. $\mathscr{C} = \{1,t,t^2\} \subset \mathbb{R}_2[t]$
2. $\mathscr{D} = \{1,t,t(t-1),t(t-1)(t-2)\} \subset \mathbb{R}_3[t]$

Correction

1. C'est la base canonique de $\mathbb{R}_3[t]$ donc la famille est libre.
2. $\alpha+\beta t+\gamma t(t-1)+\delta t(t-1)(t-2)=0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ ssi $\alpha+(\beta-\gamma+2\delta)t+(\gamma-3\delta)t^2+\delta t^3=0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ ssi $\alpha=\beta=\gamma=\delta=0$ donc la famille est libre.

Exercice 3.3
Soient $p_0(x)=x+1$, $p_1(x)=x^2+x$ et $p_2(x)=2x^2+1$ trois polynômes de $\mathbb{R}_2[x]$. Démontrer que $\mathrm{Vect}\{p_0,p_1,p_2\} = \mathbb{R}_2[x]$.

Correction

Méthode 1 : pour prouver l'égalité de deux ensembles A et B, on peut démontrer que $A \subset B$ et que $B \subset A$. Pour démontrer que $A \subset B$, on considère un élément quelconque de A et on démontre qu'il appartient à B.

- Comme $p_0, p_1, p_2 \in \mathbb{R}_2[x]$ qui est un espace vectoriel, toute combinaison linéaire de ces trois polynômes est encore un élément de $\mathbb{R}_2[x]$, par conséquent $\text{Vect}\{p_0, p_1, p_2\} \subset \mathbb{R}_2[x]$.
- $\mathbb{R}_2[x] \subset \text{Vect}\{p_0, p_1, p_2\}$ ssi pour tout $q \in \mathbb{R}_2[x]$ il existe des réels $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ tels que $q = \lambda_0 \cdot p_0 + \lambda_1 \cdot p_1 + \lambda_2 \cdot p_2$:

$$\begin{aligned} q(x) = a + bx + cx^2 \in \text{Vect}\{p_0, p_1, p_2\} &\iff \exists\, (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } q = \lambda_0 \cdot p_0 + \lambda_1 \cdot p_1 + \lambda_2 \cdot p_2 \\ &\iff \exists\, (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } a + bx + cx^2 = \lambda_0(x+1) + \lambda_1(x^2+x) + \lambda_2(2x^2+1) \\ &\iff \exists\, (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } a + bx + cx^2 = (\lambda_0+\lambda_2) + (\lambda_0+\lambda_1)x + (\lambda_1+2\lambda_2)x^2 \\ &\iff \exists\, (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } \begin{cases} \lambda_0 + \lambda_2 = a, \\ \lambda_0 + \lambda_1 = b, \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = c. \end{cases} \end{aligned}$$

Comme $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$, le système est de Cramer et on peut conclure que $\mathbb{R}_2[x] \subset \text{Vect}\{p_0, p_1, p_2\}$. Après résolution du système linéaire on trouve $q = bp_0 + (-a+b+c)p_1 + (a-b)p_2$.

Méthode 2 : comme $\text{card}(\{p_0, p_1, p_2\}) = 3 = \dim(\mathbb{R}_2[x])$, il suffit de prouver que la famille $\{p_0, p_1, p_2\}$ est libre, *i.e.* "$\lambda_0 \cdot p_0 + \lambda_1 \cdot p_1 + \lambda_2 \cdot p_2 = 0 \implies \lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = 0$":

$$\begin{aligned} &\lambda_0 \cdot p_0 + \lambda_1 \cdot p_1 + \lambda_2 \cdot p_2 = 0 \\ &\iff \lambda_0(x+1) + \lambda_1(x^2+x) + \lambda_2(2x^2+1) = 0 \\ &\iff (\lambda_0+\lambda_2) + (\lambda_0+\lambda_1)x + (\lambda_1+2\lambda_2)x^2 = 0 \\ &\iff \begin{cases} \lambda_0 + \lambda_2 = 0, \\ \lambda_0 + \lambda_1 = 0, \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Comme $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$, le système admet l'unique solution nulle et on peut conclure que $\text{Vect}\{p_0, p_1, p_2\} = \mathbb{R}_2[x]$.

Exercice 3.4

Étudier si la famille

$$\mathscr{F} = \{p_0(x) = x^3 + x^2, p_1(x) = x^2 + x, p_2(x) = x + 1, p_3(x) = x^3 + 1\}$$

de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[x]$ est libre. Si la famille est liée, trouver une relation entre les vecteurs de cette famille.

Correction

On dit qu'une famille $\mathscr{F} = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p\}$ est libre lorsque

$$\sum_{i=1}^{p} a_i \cdot \mathbf{u}_i = \mathbf{0}_E \qquad \implies \qquad a_i = 0 \ \forall\ i.$$

Ici

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot \mathbf{u}_i = \mathbf{0}_E \iff a_0 p_0 + a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3 = 0 \iff (a_2+a_3) + (a_1+a_2)x + (a_0+a_1)x^2 + (a_0+a_3)x^3 = 0$$

$$\iff \begin{cases} a_2 + a_3 = 0, \\ a_1 + a_2 = 0, \\ a_0 + a_1 = 0, \\ a_0 + a_3 = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} a_0 = \kappa, \\ a_1 = -\kappa, \\ a_2 = \kappa, \\ a_3 = -\kappa, \end{cases} \quad \text{pour tout } \kappa \in \mathbb{R}$$

donc la famille est liée. De plus, en prenant par exemple $\kappa = 1$ on a $p_3 = p_0 - p_1 + p_2$.

© 2024-2027 G. Faccanoni

Exercice 3.5
Considérons l'ensemble

$$\mathrm{F} = \left\{ a + ax^2 + bx^4 \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[x]$.
2. Donner une base de F et sa dimension.

Correction

1. F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[x]$ car

$$\mathrm{F} = \left\{ a + ax^2 + bx^4 \;\middle|\; (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \left\{ a(1+x^2) + bx^4 \;\middle|\; (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \mathrm{Vect}\left\{ 1 + x^2, x^4 \right\}.$$

2. Les deux polynômes $p(x) = 1 + x^2$ et $q(x) = x^4$ constituent une famille génératrice de F. On vérifie aisément que cette famille est libre donc elle est une base de F. Comme $\mathrm{card}(\{p, q\}) = 2$, alors $\dim(\mathrm{F}) = 2$.

Exercice 3.6
Considérons l'ensemble

$$\mathrm{F} = \left\{ p \in \mathbb{R}_3[x] \;\middle|\; p(0) = p(1) = 0 \right\}.$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[x]$.
2. Donner une base de F et sa dimension.

Correction

1. F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[x]$ car

$$\mathrm{F} = \{ x(x-1)(ax+b) \mid a, b \in \mathbb{R} \} = \left\{ a\Big(x^2(x-1)\Big) + b\Big(x(x-1)\Big) \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left\{ x^2(x-1), x(x-1) \right\}.$$

Si on n'a pas remarqué que 0 et 1 sont racines des polynômes de F, il suffit de remarquer que

$$\begin{aligned}
\mathrm{F} &= \left\{ p \in \mathbb{R}_3[x] \;\middle|\; p(0) = p(1) = 0 \right\} \\
&= \left\{ a + bx + cx^2 + dx^3 \in \mathbb{R}_3[x] \;\middle|\; a = 0 \text{ et } a + b + c + d = 0 \right\} \\
&= \left\{ bx + cx^2 + (-b-c)x^3 \;\middle|\; b, c \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ b(x - x^3) + c(x^2 - x^3) \;\middle|\; b, c \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \mathrm{Vect}\left\{ x - x^3, x^2 - x^3 \right\}.
\end{aligned}$$

Par conséquent F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[x]$.

2. Les deux polynômes $p(x) = x - x^3$ et $q(x) = x^2 - x^3$ constituent une famille génératrice de F. On montre que la famille $\mathscr{F} = \left\{ x - x^3, x^2 - x^3 \right\}$ est une base de l'espace vectoriel F ; en effet

$$\alpha(x - x^3) + \beta(x^2 - x^3) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha x + \beta x^2 + (-\alpha - \beta)x^3 = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha = \beta = 0.$$

Comme $\mathrm{card}(\mathscr{F}) = 2$, alors $\dim(\mathrm{F}) = 2$.

Exercice 3.7
Soit $\mathbb{R}_3[t]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus 3. Soit $\mathrm{U} = \left\{ p \in \mathbb{R}_3[t] \;\middle|\; p(-1) = 0 \right\}$. Montrer que U est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[t]$ et en donner une base.

Correction
On montre que $\mathrm{U} = \mathrm{Vect}\left\{ \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p \right\}$ où $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p$ sont des éléments de $\mathbb{R}_3[x]$. En effet

$$\begin{aligned}
\mathrm{U} &= \left\{ a + bx + cx^2 + dx^3 \in \mathbb{R}_3[x] \;\middle|\; a - b + c - d = 0 \right\} \\
&= \left\{ a + bx + cx^2 + (a - b + c)x^3 \;\middle|\; a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ a(1 + x^3) + b(x - x^3) + c(x^2 + x^3) \;\middle|\; a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \mathrm{Vect}\left\{ 1 + x^3, x - x^3, x^2 + x^3 \right\}.
\end{aligned}$$

Par conséquent U est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[x]$.
(On peut également en déduire que $\left\{ 1 + x^3, x - x^3, x^2 + x^3 \right\}$ est une famille génératrice de U)

Exercice 3.8
Démontrer que l'ensemble

$$\mathrm{F} = \left\{ p \in \mathbb{R}_3[x] \;\middle|\; p(0) = p'(1) = 0 \right\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[x]$ et en donner une base.

Correction
On montre que $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p\}$ où $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p$ sont des éléments de $\mathbb{R}_3[x]$. En effet

$$\begin{aligned}
\mathrm{F} &= \left\{ p \in \mathbb{R}_3[x] \;\middle|\; p(0) = p'(1) = 0 \right\} \\
&= \left\{ a + bx + cx^2 + dx^3 \in \mathbb{R}_3[x] \;\middle|\; a = 0 \text{ et } b + 2c + 3d = 0 \right\} \\
&= \left\{ bx + cx^2 + \frac{-b-2c}{3} x^3 \;\middle|\; b, c \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ b(x - x^3/3) + c(x^2 - 2x^3/3) \;\middle|\; b, c \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \mathrm{Vect}\left\{ x - \frac{1}{3}x^3, x^2 - \frac{2}{3}x^3 \right\}.
\end{aligned}$$

Par conséquent F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[x]$.

On montre que la famille $\mathscr{F} = \left\{ x - \frac{1}{3}x^3, x^2 - \frac{2}{3}x^3 \right\}$ est une base de l'espace vectoriel F ; en effet

$$\alpha(x - x^3/3) + \beta(x^2 - 2x^3/3) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha x + \beta x^2 + (-\alpha - 2\beta)x^3/3 = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha = \beta = 0.$$

Exercice 3.9
Trouver une base de l'espace engendré par les polynômes dans les deux familles suivantes

1. $\mathrm{W} = \left\{ 1 + 2x + 3x^2, x + 2x^2, 1 + 2x + 4x^2, 1 + x \right\}$
2. $\mathrm{W} = \left\{ 2 + 2x^2, 2 + x - x^2, 3 + x + x^2, 3 + x + 3x^2 \right\}$

Correction

1. Notons

$$w_1(x) = 1 + 2x + 3x^2, \qquad w_2(x) = x + 2x^2, \qquad w_3(x) = 1 + 2x + 4x^2, \qquad w_4(x) = 1 + x.$$

W est une famille non libre si et seulement si

$$\begin{aligned}
&\exists (a,b,c,d) \neq (0,0,0,0) \mid a w_1(x) + b w_2(x) + c w_3(x) + d w_4(x) = 0 \iff \\
&\exists (a,b,c,d) \neq (0,0,0,0) \mid (a + c + d) + (2a + b + 2c + d)x + (3a + 2b + 4c)x^2 = 0 \iff \\
&\begin{cases} a \quad\quad +c+d=0, \\ 2a \;+b+2c+d=0, \\ 3a+2b+4c \quad =0 \end{cases} \iff \begin{cases} a \quad +c \;+d=0, \\ b \quad\quad -d=0, \\ 2b+c-3d=0 \end{cases} \iff \begin{cases} a \;+c+d=0, \\ b \quad -d=0, \\ c-d=0 \end{cases} \iff \\
&(a,b,c,d) = (-2\kappa, \kappa, \kappa, \kappa), \; \kappa \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Autrement dit $w_4 = 2w_1 - w_2 - w_3$. On a alors

$$\mathrm{Vect}\{w_1, w_2, w_3, w_4\} = \mathrm{Vect}\{w_1, w_2, w_3\}.$$

Vérifions si la famille $\{w_1, w_2, w_3\}$ est libre : on dit qu'une famille $\mathscr{F} = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p\}$ est libre lorsque

$$\sum_{i=1}^{p} a_i \cdot \mathbf{u}_i = \mathbf{0}_{\mathrm{E}} \qquad \Longrightarrow \qquad a_i = 0 \;\forall\, i.$$

Ici

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot \mathbf{u}_i = \mathbf{0}_{\mathrm{E}} &\iff a w_1 + b w_2 + c w_3 = 0 \\
&\iff (a + c) + (2a + b + 2c)x + (3a + 2b + 4c)x^2 = 0 \\
&\iff \begin{cases} a \quad\quad +c=0, \\ 2a \;+b+2c=0, \\ 3a+2b+4c=0 \end{cases} \iff a = b = c = 0
\end{aligned}$$

donc la famille est libre. Par conséquent $\{w_1, w_2, w_3\}$ est une base de l'espace Vect(W).

© 2024-2027 G. Faccanoni

2. Notons

$$w_1(x) = 2+2x^2, \qquad w_2(x) = 2+x-x^2, \qquad w_3(x) = 3+x+x^2, \qquad w_4(x) = 3+x+3x^2.$$

W est une famille non libre si et seulement si

$$\exists (a,b,c,d) \neq (0,0,0,0) \mid a w_1(x) + b w_2(x) + c w_3(x) + d w_4(x) = 0 \iff$$
$$\exists (a,b,c,d) \neq (0,0,0,0) \mid (2a+2b+3c+3d) + (b+c+d)x + (2a-b+c+3d)x^2 = 0 \iff$$
$$\begin{cases} 2a+2b+3c+3d=0, \\ \quad b+c+d=0, \\ 2a-b+c+3d=0, \end{cases} \iff \begin{cases} 2a+2b+3c+3d=0, \\ \quad b+c+d=0, \\ \quad b+4c+6d=0, \end{cases} \iff \begin{cases} 2a+2b+3c+3d=0, \\ \quad b+c+d=0, \\ \quad 3c+5d=0, \end{cases} \iff$$
$$(a,b,c,d) = (\kappa, 2\kappa, -5\kappa, 3\kappa), \ \kappa \in \mathbb{R}.$$

Autrement dit $3w_4 = -w_1 - 2w_2 + 5w_3$. On a alors

$$\operatorname{Vect}\{w_1, w_2, w_3, w_4\} = \operatorname{Vect}\{w_1, w_2, w_3\}.$$

Vérifions si la famille $\{w_1, w_2, w_3\}$ est libre : on dit qu'une famille $\mathscr{F} = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p\}$ est libre lorsque

$$\sum_{i=1}^{p} a_i \cdot \mathbf{u}_i = \mathbf{0}_{\mathrm{E}} \qquad \Longrightarrow \qquad a_i = 0 \ \forall \ i.$$

Ici

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot \mathbf{u}_i = \mathbf{0}_{\mathrm{E}} &\iff a w_1 + b w_2 + c w_3 = 0 \\ &\iff (2a+2b+3c) + (b+c)x + (2a-b+c)x^2 = 0 \\ &\iff \begin{cases} 2a+2b+3c=0, \\ \quad b+c=0, \\ \quad b+4c=0, \end{cases} \iff a=b=c=0 \end{aligned}$$

donc la famille est libre. Par conséquent $\{w_1, w_2, w_3\}$ est une base de l'espace Vect(W).

Exercice 3.10
Soit

$$\begin{aligned} q_0(x) &= 1+x+x^2+x^3, \\ q_1(x) &= x+x^2+x^3, \\ q_2(x) &= x^2+x^3, \\ q_3(x) &= x^3, \end{aligned}$$

quatre polynômes de $\mathbb{R}_3[x]$.

1. Démontrer que l'ensemble $\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$ est une base de $\mathbb{R}_3[x]$ qu'on notera $\mathscr{B}$.
2. Notons $\mathscr{C} = \{c_0, c_1, c_2, c_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[x]$. Calculer coord$(c_i, \mathscr{B})$ et coord$(q_i, \mathscr{C})$.
3. Exprimer le polynôme $a+bx+cx^2+dx^3$ dans la base $\mathscr{B}$.

Correction

1. Pour montrer que l'ensemble $\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$ est une base de $\mathbb{R}_3[x]$ il faut montrer qu'il s'agit d'une famille libre et génératrice de $\mathbb{R}_3[x]$. On dit qu'une famille $\mathscr{F} = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p\}$ est libre lorsque

$$\sum_{i=1}^{p} a_i \cdot \mathbf{u}_i = \mathbf{0}_{\mathrm{E}} \qquad \Longrightarrow \qquad a_i = 0 \ \forall \ i = 1, \dots, p.$$

Ici

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot \mathbf{u}_i = \mathbf{0}_{\mathrm{E}} \iff a_0 q_0 + a_1 q_1 + a_2 q_2 + a_3 q_3 = 0$$

$$\iff a_0 + (a_0 + a_1)x + (a_0 + a_1 + a_2)x^2 + (a_0 + a_1 + a_2 + a_3)x^3 = 0 \iff \begin{cases} a_0 = 0, \\ a_1 = 0, \\ a_2 = 0, \\ a_3 = 0, \end{cases}$$

donc la famille est libre. Comme $\mathrm{card}(\mathrm{Vect}\{q_0, q_1, q_2, q_3\}) = 4$ et $\dim(\mathbb{R}_4[x]) = 4$, alors $\mathscr{B} = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$ est une base de $\mathbb{R}_3[x]$.

2. Soit $\mathscr{C} = \{c_0(x) = 1, c_1(x) = x, c_2(x) = x^2, x_3(x) = x^3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[x]$. Calculons les coordonnées de q_j dans la base $\mathscr{C}$:

$$\begin{aligned} q_0(x) &= 1 \cdot c_0(x) + 1 \cdot c_1(x) + 1 \cdot c_2(x) + 1 \cdot c_3(x) && \Longrightarrow \mathrm{coord}(q_0, \mathscr{C}) = (1,1,1,1) \\ q_1(x) &= 0 \cdot c_0(x) + 1 \cdot c_1(x) + 1 \cdot c_2(x) + 1 \cdot c_3(x) && \Longrightarrow \mathrm{coord}(q_1, \mathscr{C}) = (0,1,1,1) \\ q_2(x) &= 0 \cdot c_0(x) + 0 \cdot c_1(x) + 1 \cdot c_2(x) + 1 \cdot c_3(x) && \Longrightarrow \mathrm{coord}(q_2, \mathscr{C}) = (0,0,1,1) \\ q_3(x) &= 0 \cdot c_0(x) + 0 \cdot c_1(x) + 0 \cdot c_2(x) + 1 \cdot c_3(x) && \Longrightarrow \mathrm{coord}(q_3, \mathscr{C}) = (0,0,0,1) \end{aligned}$$

En résolvant le système linéaire (ici c'est très facile car il s'agit d'un système triangulaire), on obtient

$$\begin{cases} q_0 &= c_0 + c_1 + c_2 + c_3, \\ q_1 &= c_1 + c_2 + c_3, \\ q_2 &= c_2 + c_3, \\ q_3 &= c_3, \end{cases} \iff \begin{cases} c_0 &= q_0 - q_1, \\ c_1 &= q_1 - q_2, \\ c_2 &= q_2 - q_3, \\ c_3 &= q_3, \end{cases}$$

Cela signifie que

$$\begin{aligned} c_0(x) &= 1 \cdot q_0(x) - 1 \cdot q_1(x) + 0 \cdot q_2(x) + 0 \cdot q_3(x) && \textit{i.e.} \quad \mathrm{coord}(c_0, \mathscr{B}) = (1,-1,0,0), \\ c_1(x) &= 0 \cdot q_0(x) + 1 \cdot q_1(x) - 1 \cdot q_2(x) + 0 \cdot q_3(x) && \textit{i.e.} \quad \mathrm{coord}(c_1, \mathscr{B}) = (0,1,-1,0), \\ c_2(x) &= 0 \cdot q_0(x) + 0 \cdot q_1(x) + 1 \cdot q_2(x) - 1 \cdot q_3(x) && \textit{i.e.} \quad \mathrm{coord}(c_2, \mathscr{B}) = (0,0,1,-1), \\ c_3(x) &= 0 \cdot q_0(x) + 0 \cdot q_1(x) + 0 \cdot q_2(x) + 1 \cdot q_3(x) && \textit{i.e.} \quad \mathrm{coord}(c_3, \mathscr{B}) = (0,0,0,1). \end{aligned}$$

3. Soit le polynôme $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$; dans la base $\mathscr{C}$ il a coordonnées (a,b,c,d), donc

$$p(x) = ac_0 + bc_1 + cc_2 + dc_3 = a(q_0 - q_1) + b(q_1 - q_2) + c(q_2 - q_3) + d(q_3) = aq_0 + (b-a)q_1 + (c-b)q_2 + (d-c)q_3.$$

Par conséquent, dans la base $\mathscr{B}$ le polynôme $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$ a coordonnées

$$\mathrm{coord}(p, \mathscr{B}) = (a, b-a, c-b, d-c).$$

Exercice 3.11
Soit $\mathbb{R}_3[t]$ l'espace des polynômes de degré au plus 3 et considérons l'ensemble

$$\mathrm{V} = \{p \in \mathbb{R}_3[t] \mid p(0) + p(2) = 0,\ p(1) = 3p(-1)\}.$$

1. Montrer que V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[t]$.
2. Déterminer une base et la dimension de V.
3. Montrer que le polynôme $p(t) = 2 + 2t - t^3$ est dans V et trouver les composantes de p dans la base de V calculée auparavant.

© 2024-2027 G. Faccanoni

Correction

1. On montre que $\mathrm{V} = \mathrm{Vect}\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$ où $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p$ sont des éléments de $\mathbb{R}_3[t]$. En effet

$$\begin{aligned}
\mathrm{V} &= \{ p \in \mathbb{R}_3[t] \mid p(0) + p(2) = 0,\ p(1) = 3p(-1) \} \\
&= \{ a + bt + ct^2 + dt^3 \in \mathbb{R}_3[t] \mid 2a + 2b + 4c + 8d = 0 \text{ et } a + b + c + d = 3a - 3b + 3c - 3d \} \\
&= \left\{ \left(-\frac{5}{3}c - 2d \right) + \left(-\frac{1}{3}c - 2d \right) t + ct^2 + dt^3 \;\middle|\; c, d \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ \left(-\frac{5}{3} - \frac{1}{3}t + t^2 \right) c + \left(-2 - 2t + t^3 \right) d \;\middle|\; c, d \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \mathrm{Vect} \left\{ q_1(t) = -\frac{5}{3} - \frac{1}{3}t + t^2 ; q_2(t) = -2 - 2t + t^3 \right\}.
\end{aligned}$$

   Par conséquent V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[t]$.

2. La famille $\mathcal{V} = \{ q_1, q_2 \}$ est génératrice de l'espace vectoriel V. De plus,

$$\alpha q_1 + \beta q_2 = 0_{\mathbb{R}_3[t]} \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha q_1(t) + \beta q_2(t) = 0 \ \forall t \in \mathbb{R} \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha = \beta = 0$$

   donc elle est aussi libre donc elle est une base de V et $\dim(\mathrm{V}) = 2$.

3. Si $p(t) = 2 + 2t - t^3$ on a $p(0) + p(2) = (2) + (2 + 4 - 8) = 0$ et $p(1) - 3p(-1) = (2 + 2 - 1) - 3(2 - 2 + 1) = 0$ donc $p \in \mathrm{V}$ et $\mathrm{coord}(p, \mathcal{V}) = (0, -1)$.

3.3.2. Interpolation polynomiale

Exercice 3.12 (Interpolation avec Numpy (calcul approché))
Les fonctions `polyfit` et `polyval` du module `numpy` permettent de calculer les coefficients du polynôme d'interpolation d'un ensemble de points et de l'évaluer sur un (autre) ensemble de points.

Les utiliser pour interpoler l'ensemble de points $\{(-2,4),(0,0),(1,1)\}$. Évaluer le polynome ainsi obtenu en -1, en 0 et en 2.

Correction
Le seul polynôme de degré au plus 2 qui interpole l'ensemble de points $\{(-2,4),(0,0),(1,1)\}$ est la parabole d'équation $p(x) = x^2$ et lorsqu'on évalue p en -1, en 0 et en 2 on trouve respectivement 1, 0 et 4. Voici comment faire avec numpy:

```python
from numpy import polyfit, polyval

# Calcul des coefficients du polynôme d'interpolation
xx = [-2, 0, 1]
yy = [4, 0, 1]
alpha = polyfit(x=xx, y=yy, deg=len(xx)-1)

# Évaluation du polynôme d'interpolation
x_vals = [-1, 0, 2]
y_vals = polyval(alpha, x_vals)
print(y_vals)
```

```
[1.00000000e+00 6.29173796e-16 4.00000000e+00]
```

Exercice 3.13 (Interpolation avec SymPy (calcul formel))
La fonction `interpolate` du module `sympy` permet de calculer le polynôme d'interpolation d'un ensemble de points et de l'évaluer sur un (autre) ensemble de points.

Utilisez-la pour interpoler l'ensemble de points $\{(-2,4),(0,0),(1,1)\}$. Évaluez le polynôme ainsi obtenu en -1,

en 0 et en 2.

Correction
Le seul polynôme de degré au plus 2 qui interpole l'ensemble de points $\{(-2,4),(0,0),(1,1)\}$ est la parabole d'équation $p(x) = x^2$. Lorsqu'on évalue p en -1, en 0 et en 2, on trouve respectivement 1, 0 et 4. Voici comment faire avec SymPy:

```
from sympy import symbols, interpolate
x = symbols('x')

# Polynôme d'interpolation
points = [(-2, 4), (0, 0), (1, 1)]
polynome = interpolate(points, x)
print(polynome)

# Évaluation du polynôme aux points souhaités
x_vals = [-1, 0, 2]
y_vals = [polynome.subs({x:val}) for val in x_vals]
print(y_vals)
```

```
x**2
[1, 0, 4]
```

Exercice 3.14
Construire le polynôme P qui interpole les points (0,2), (1,1), (2,2) et (3,3).

Correction
On cherche un polynôme de degré au plus 3 tel que $P(0) = 2$, $P(1) = 1$, $P(2) = 2$ et $P(3) = 3$. Construire P signifie trouver ses coordonnées dans une base de $\mathbb{R}_3[x]$. On considère des méthodes qui sont basées sur des choix différents de bases de $\mathbb{R}_3[x]$:

- **Avec sympy**

```
import sympy as sp
x = sp.symbols('x')

points = [(0, 2), (1, 1), (2, 2), (3, 3)]
xx_p, yy_p = zip(*points)
n = len(points)-1

# Base canonique
polynomial = sp.interpolate(points, x)
print("Polynome dans la base canonique : $", sp.latex(polynomial),
 ↪  r"$\\")

# Base de Lagrange
p = sp.polys.specialpolys.interpolating_poly(n+1, x, X=xx_p, Y=yy_p)
print("Polynome dans la base de Lagrange : $", sp.latex(p), r"$\\")

# Base de Newton
def divided_diff(xx, yy):
    n = len(yy)
    if n == 1:
```


© 2024-2027 G. Faccanoni

```
        return yy[0]
    else:
        return (divided_diff(xx[1:], yy[1:]) - divided_diff(xx[:-1],
        ↪  yy[:-1])) / sp.S(xx[-1] - xx[0])

def newton_interpolation(x, xx, yy):
    n = len(xx)
    p = 0
    for i in range(n):
        p += divided_diff(xx[:i+1], yy[:i+1]) * sp.prod([x - xx[j] for j
        ↪  in range(i)])
    return p

p = newton_interpolation(x, xx_p, yy_p)
print("Polynôme de Newton : $", sp.latex(p), "$")
```

Polynome dans la base canonique : $-\frac{x^3}{3}+2x^2-\frac{8x}{3}+2$
Polynome dans la base de Lagrange : $\frac{x(x-3)(x-2)}{2}-x(x-3)(x-1)+\frac{x(x-2)(x-1)}{2}-\frac{(x-3)(x-2)(x-1)}{3}$
Polynôme de Newton : $-\frac{x(x-2)(x-1)}{3}+x(x-1)-x+2$

- **Avec numpy**

```
from numpy import polyfit

# Définir les points
points = [(0, 2), (1, 1), (2, 2), (3, 3)]
xx, yy = zip(*points)  # Séparer les x et y

# Calculer les coefficients du polynôme d'interpolation
coeffs = polyfit(xx, yy, deg=len(points)-1)
print(coeffs)
```

```
[-0.33333333  2.         -2.66666667  2.        ]
```

- **Méthode astucieuse**

  On remarque due les points $(1,1)$, $(2,2)$ et $(3,3)$ sont alignés, ainsi le polynôme $Q(x)=x$ de $\mathbb{R}_2[x]$ interpole ces points.

  Introduisons le polynôme $D(x)=P(x)-Q(x)$ de $\mathbb{R}_3[x]$. Par construction, ce polynôme s'annule en $x=1$, $x=2$ et $x=3$, donc $D(x)=\lambda(x-1)(x-2)(x-3)$. De plus, $D(0)=P(0)-Q(0)=2$ mais aussi $D(0)=-6\lambda$ donc $\lambda=-1/3$ et on conclut que

$$P(x)=D(x)+Q(x)=-\frac{1}{3}(x-1)(x-2)(x-3)+x.$$

- **Méthode directe (naïve)**

  On considère $\mathscr{C}=\{1,x,x^2,x^3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[x]$ et on cherche $(a_0,a_1,a_2,a_3)=\text{coord}(P,\mathscr{C})$, *i.e.* a_0,a_1,a_2,a_3 tels que $P(x)=\sum_{i=0}^{3}a_i x^i$.

  Il s'agit de trouver les 4 coefficients a_0, a_1, a_2 et a_3 solution du système linéaire

$$\begin{cases} P(0)=2\\ P(1)=1\\ P(2)=2\\ P(3)=3 \end{cases} \iff \begin{cases} a_0+a_1\cdot 0+a_2\cdot 0^2+a_3\cdot 0^3=2\\ a_0+a_1\cdot 1+a_2\cdot 1^2+a_3\cdot 1^3=1\\ a_0+a_1\cdot 2+a_2\cdot 2^2+a_3\cdot 2^3=2\\ a_0+a_1\cdot 3+a_2\cdot 3^2+a_3\cdot 3^3=3 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 1&1&1&1\\ 1&2&4&8\\ 1&3&9&27 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0\\ a_1\\ a_2\\ a_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\\ 1\\ 2\\ 3 \end{pmatrix}$$

  On peut utiliser la méthode de Gauss-Jordan :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1&0&0&0&2\\ 1&1&1&1&1\\ 1&2&4&8&2\\ 1&3&9&27&3 \end{array}\right) \xrightarrow[L_4\leftarrow L_4-L_1]{L_2\leftarrow L_2-L_1 \\ L_3\leftarrow L_3-L_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1&0&0&0&2\\ 0&1&1&1&-1\\ 0&2&4&8&0\\ 0&3&9&27&1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_4\leftarrow L_4-3L_2]{L_1\leftarrow L_1-0L_2 \\ L_3\leftarrow L_3-2L_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1&0&0&0&2\\ 0&1&1&1&-1\\ 0&0&2&6&2\\ 0&0&6&24&4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[L_4\leftarrow L_4-3L_3]{L_1\leftarrow L_1-0L_3 \\ L_2\leftarrow L_2-L_3/2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1&0&0&0&2\\ 0&1&0&-2&-2\\ 0&0&2&6&2\\ 0&0&0&6&-2 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3\leftarrow L_3-L_4]{L_1\leftarrow L_1-0L_4 \\ L_2\leftarrow L_2+L_4/3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1&0&0&0&2\\ 0&1&0&0&-8/3\\ 0&0&2&0&4\\ 0&0&0&6&-2 \end{array}\right)$$

donc $a_3=-\frac{1}{3}$, $a_2=2$, $a_1=-\frac{8}{3}$ et $a_0=2$ et on trouve $\mathrm{P}(x)=2-\frac{8}{3}x+2x^2-\frac{1}{3}x^3$.
Remarque: dans ce cas particulier, le système s'écrit

$$\begin{cases} a_0=2\\ a_0+a_1\cdot 1+a_2\cdot 1^2+a_3\cdot 1^3=1\\ a_0+a_1\cdot 2+a_2\cdot 2^2+a_3\cdot 2^3=2\\ a_0+a_1\cdot 3+a_2\cdot 3^2+a_3\cdot 3^3=3 \end{cases}$$

ainsi on peut déjà poser $a_0=2$ et résoudre le système linéaire réduit suivant:

$$\begin{cases} a_1\cdot 1+a_2\cdot 1^2+a_3\cdot 1^3=-1\\ a_1\cdot 2+a_2\cdot 2^2+a_3\cdot 2^3=0\\ a_1\cdot 3+a_2\cdot 3^2+a_3\cdot 3^3=1 \end{cases}$$

On peut utiliser la méthode de GAUSS-JORDAN:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&1&-1\\ 2&4&8&0\\ 3&9&27&1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2\leftarrow L_2-2L_1 \\ L_3\leftarrow L_3-3L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&1&-1\\ 0&2&6&2\\ 0&6&24&4 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2\leftarrow L_2/2]{L_1\leftarrow L_1-L_2 \\ L_3\leftarrow L_3-6L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1&0&-2&-2\\ 0&1&3&1\\ 0&0&6&-2 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3\leftarrow L_3/6]{L_1\leftarrow L_1+2L_3 \\ L_2\leftarrow L_2-3L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1&0&0&-8/3\\ 0&1&0&2\\ 0&0&1&-1/3 \end{array}\right)$$

donc $a_3=-\frac{1}{3}$, $a_2=2$, $a_1=-\frac{8}{3}$ et $a_0=2$ et on trouve $\mathrm{P}(x)=2-\frac{8}{3}x+2x^2-\frac{1}{3}x^3$.

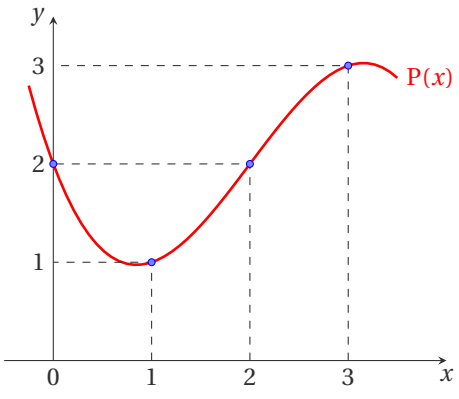
- **Méthode de Lagrange**

On considère $\mathscr{L}=\{\mathrm{L}_0,\mathrm{L}_1,\mathrm{L}_2,\mathrm{L}_3\}$ une base de $\mathbb{R}_3[x]$ telle que $\mathrm{coord}(\mathrm{P},\mathscr{L})=(y_0,y_1,y_2,y_3)$, *i.e.* $\mathrm{P}(x)=\sum_{i=0}^3 y_i\mathrm{L}_i(x)$.
On a

$$\mathrm{L}_i(x)=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}$$

donc

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(x)&=y_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}+y_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}\\ &\quad+y_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}+y_3\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}=\\ &=2\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)}+\frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(1-0)(1-2)(1-3)}\\ &\quad+2\frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{(2-0)(2-1)(2-3)}+3\frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(3-0)(3-1)(3-2)}=\\ &=\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{-3}+\frac{x(x-2)(x-3)}{2}\\ &\quad-x(x-1)(x-3)+\frac{x(x-1)(x-2)}{2}=-\frac{1}{3}x^3+2x^2-\frac{8}{3}x+2.\end{aligned}$$



- **Méthode de Newton**

On considère $\mathscr{N}=\{\omega_0,\omega_1,\omega_2,\omega_3\}$ une base de $\mathbb{R}_3[x]$ telle que $\mathrm{coord}(\mathrm{P},\mathscr{N})=(y_0,f[x_0,x_1],f[x_0,x_1,x_2],f[x_0,x_1,x_2,x_3])$, *i.e.* $\mathrm{P}(x)=\sum_{i=0}^3 f[x_0,\ldots,x_i]\omega_i(x)$.

© 2024-2027 G. FACCANONI

La base de Newton est définie récursivement comme suit :

$$\omega_0(x) = 1; \qquad \text{pour } k = 1, \dots, n \quad \omega_k(x) = \omega_{k-1}(x)(x - x_{k-1}).$$

Les coordonnées sont les valeurs encadrées dans le tableau des différences divisées ci-dessous :

i	x_i	y_i	$f[x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-3}, x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$
0	0	$\boxed{2}$			
1	1	1	$\boxed{-1}$		
2	2	2	1	$\boxed{1}$	
3	3	3	1	0	$\boxed{-\frac{1}{3}}$

On a alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}_3(x) &= \sum_{i=1}^{3} f[x_0, \dots, x_i]\omega_i(x) \\
&= y_0\omega_0(x) + f[x_0, x_1]\omega_1(x) + f[x_0, x_1, x_2]\omega_2(x) + f[x_0, x_1, x_2, x_3]\omega_3(x) \\
&= 2\omega_0(x) - \omega_1(x) + \omega_2(x) - \frac{1}{3}\omega_3(x) \\
&= 2 - x + x(x-1) - \frac{1}{3}x(x-1)(x-2) \\
&= -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - \frac{8}{3}x + 2.
\end{aligned}$$

Remarque : on réordonne les points comme suit : $(1,1)$, $(2,2)$, $(3,3)$ et $(0,2)$.

i	x_i	y_i	$f[x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-3}, x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$
0	1	$\boxed{1}$			
1	2	2	$\boxed{1}$		
2	3	3	1	$\boxed{0}$	
3	0	2	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\boxed{-\frac{1}{3}}$

On a alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}_3(x) &= \sum_{i=1}^{3} f[x_0, \dots, x_i]\omega_i(x) \\
&= y_0\omega_0(x) + f[x_0, x_1]\omega_1(x) + f[x_0, x_1, x_2]\omega_2(x) + f[x_0, x_1, x_2, x_3]\omega_3(x) \\
&= \omega_0(x) + \omega_1(x) - \frac{1}{3}\omega_3(x) \\
&= 1 + (x-1) - \frac{1}{3}(x-1)(x-2)(x-3) \\
&= x - \frac{1}{3}(x-1)(x-2)(x-3).
\end{aligned}$$

On remarque que les points $(1,1)$, $(2,2)$ et $(3,3)$ sont alignés, ainsi le polynôme $\mathrm{Q}(x) = x$ de $\mathbb{R}_2[x]$ interpole ces points.

Partage d'un message secret : *comment envoyer un message secret avec plusieurs espions sans pour autant que ceux-ci ne connaissent le contenu du message envoyé ?*

Imaginons que l'on désire envoyer un message secret. Par codage, on peut remplacer ce message par un nombre, appelons-le n.

Considérons un polynôme $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = a_k\mathrm{X}^k + \cdots + a_1\mathrm{X} + n$ de degré k dont le terme indépendant vaut exactement n, autrement dit $\mathrm{P}(0) = n$. Un corollaire du théorème fondamental de l'algèbre stipule que le polynôme P est complètement caractérisé par les valeurs qu'il prend en $k+1$ points, par exemple en $\mathrm{X} = 1, 2, \dots, k+1$.

On engage alors au moins $k+1$ espions (mieux en engager un peu plus au cas où certains seraient capturés par les «ennemis»). On donne au i-ème espion le nombre $\mathrm{P}(i)$. Les espions se dispersent (par exemple, pour passer les lignes ennemies). Une fois qu'au moins $k+1$ espions sont arrivés à destination, il est aisé de reconstituer le polynôme et ainsi

retrouver la valeur secrète n (on a *un système d'au moins $k+1$ équations linéaires* pour retrouver les $k+1$ coefficients de P).

Si un espion est capturé et qu'il parle, les ennemis auront à leur disposition un des $P(i)$ mais cela ne leur permet nullement de retrouver n.

De même, si un espion étaient en fait un agent double, connaître $P(i)$ seul ne sert à rien.

Source: `http://michelrigo.wordpress.com/2010/01/30/partage-de-secrets-et-tfa/`

Exercice 3.15
Calculer le message secret n si $k=2$ et on envoie 4 espions avec les messages suivants :

Espion	1	2	3	4
Message	45	50	57	66

Correction
On doit interpoler l'ensemble $\{(1,45),(2,50),(3,57),(4,66)\}$ constitué de 4 points. Cependant on nous dit de chercher un polynôme de degré au plus 2 (et non pas 3 comme on pourrait s'y attendre). Cela signifie qu'ils ont envoyé un espion de plus en cas de "perte". Donc, pour nos calculs, on utilisera seulement 3 points parmi les 4 données et on vérifiera à posteriori que le polynôme obtenu interpole aussi le point négligé.

On choisit par exemple d'interpoler l'ensemble $\{(1,45),(2,50),(3,57)\}$: on cherche un polynôme de degré au plus 2 tel que $P(1)=45$, $P(2)=50$, $P(3)=57$ et $P(4)=66$. Construire P signifie trouver ses coordonnées dans une base de $\mathbb{R}_2[x]$. On considère trois méthodes qui sont basées sur trois choix différents de bases de $\mathbb{R}_2[x]$:

- **Méthode directe (naïve)**
  On considère $\mathscr{C}=\{1,x,x^2\}$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$ et on cherche $(a,b,c)=\text{coord}(P,\mathscr{C})$, *i.e.* a,b,c tels que $P(x)=a+bx+cx^2$. (le message secret est $P(0)=a$).
  Il s'agit de trouver les 3 coefficients a, b, c solution du système linéaire

$$\begin{cases} P(1)=45, \\ P(2)=50, \\ P(3)=57, \\ P(4)=66 \end{cases} \quad \textit{i.e.} \quad \begin{cases} a+b+c=45 \\ a+2b+2^2c=50 \\ a+3b+3^2c=57 \\ a+4b+4^2c=66 \end{cases}$$

  Puisqu'on a envoyé un espion de trop, on a 4 équations et 3 inconnues : le système est sur-déterminé.
  Négligeons pour le moment la dernière équation et résolvons avec Gauss

$$\begin{cases} a+b+c=45 \\ a+2b+4c=50 \\ a+3b+9c=57 \end{cases} \xrightarrow[\text{Étape } j=1]{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1 \\ L_3\leftarrow L_3-L_1}} \begin{cases} a+b+c=45 \\ b+3c=5 \\ 2b+8c=12 \end{cases} \xrightarrow[\text{Étape } j=2]{L_3\leftarrow L_3-2L_2} \begin{cases} a+b+c=45 \\ b+3c=5 \\ 2c=2 \end{cases} \implies \begin{array}{c} c=1 \\ b=5-3c=2 \\ a=45-b-c=42 \end{array}$$

  Vérifions si la dernière équation est bien satisfaite :

$$42+2\times 4+1\times 4^2=66.$$

  Le polynôme recherché est ainsi $P(x)=42+2x+x^2$ et le message secret est donc $P(0)=a=42$.
- **Méthode de Lagrange** Puisqu'on a envoyé un espion de trop, négligeons pour l'instant le point $(4,66)$. On construit la base de Lagrange de $\mathbb{R}_2[x]$ telle que $(45,50,57)=\text{coord}(P,\mathscr{L})$, *i.e.* $45,50,57$ tels que $P(x)=45L_0(x)+50L_1(x)+57L_2(x)$. On a

$$\begin{aligned} P(x) &= y_0L_0(x)+y_1L_1(x)+y_2L_2(x) \\ &= 45\frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)}+50\frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)}+57\frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)} \\ &= \frac{45}{2}(x-2)(x-3)-50(x-1)(x-3)+\frac{57}{2}(x-1)(x-2). \end{aligned}$$

  Bien sur $P(4)=66$ (un espion était redondant) et le message secret est donc

$$P(0)=\frac{45}{2}\times 6-50\times 3+\frac{57}{2}\times 2=135-150+57=42.$$

© 2024-2027 G. Faccanoni

Méthode de Newton. Puisqu'on a envoyé un espion de trop, négligeons pour l'instant le point $(4,66)$.

On commence par construire le tableau des différences divisées :

i	x_i	y_i	$f[x_{i-1},x_i]$	$f[x_{i-2},x_{i-1},x_i]$
0	1	$\boxed{45}$		
1	2	50	$\boxed{5}$	
2	3	57	7	$\boxed{1}$

On a alors

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(x) &= \sum_{i=1}^{2} \omega_i(x) f[x_0,\dots,x_i] \\ &= \omega_0(x) f[x_0] + \omega_1(x) f[x_0,x_1] + \omega_2(x) f[x_0,x_1,x_2] \\ &= 45\omega_0(x) + 5\omega_1(x) + \omega_2(x) \\ &= 45 + 5(x-1) + (x-1)(x-2). \end{aligned}$$

Bien sur $\mathrm{P}(4) = 45 + 5\times 3 + 3\times 2 = 66$ (un espion était redondant) et le message secret est donc

$$\mathrm{P}(0) = 45 - 5 + 2 = 42.$$

Exercice 3.16

1. Calculer le polynôme d'interpolation de la fonction $f(x) = \cos(x)$ en les 3 points $x_i = \frac{\pi}{2} i$ avec $i = 0,\dots,2$.
2. Calculer ensuite le polynôme d'interpolation de la même fonction en les 4 points $x_i = \frac{\pi}{2} i$ avec $i = 0,\dots,3$, *i.e.* en ajoutant le point $x_3 = 3\pi/2$.

Correction

1. On cherche $p_2 \in \mathbb{R}_2[x]$ tel que $p_2(x_i) = \cos(x_i)$ pour $i = 0,\dots,2$. On peut choisir l'une des quatre méthodes ci-dessous (on préférera la méthode de Newton car elle permet de réutiliser les calculs de cette question pour répondre à la question suivante).

   Méthode directe (naïve). Si on écrit $p_2(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$, on cherche $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ tels que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{\pi}{2} & \frac{\pi^2}{4} \\ 1 & \pi & \pi^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

   En résolvant ce système linéaire on trouve $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = -\frac{2}{\pi}$ et $\alpha_2 = 0$:

```python
import sympy as sp

x = sp.Symbol('x', real=True)
alpha_0 = sp.Symbol(r'\alpha_0',real=True)
alpha_1 = sp.Symbol(r'\alpha_1',real=True)
alpha_2 = sp.Symbol(r'\alpha_2',real=True)

p = sp.Poly(alpha_0 + alpha_1*x + alpha_2*x**2, x)

xx = [0, sp.pi/2, sp.pi]
yy = [sp.cos(x) for x in xx]
Eqs = [ sp.Eq(p.subs(x,xx[i]),yy[i]) for i in range(3)]

sol = sp.solve(Eqs, [alpha_0, alpha_1, alpha_2])
print(sol)
```

```
{\alpha_0: 1, \alpha_1: -2/pi, \alpha_2: 0}
```

Méthode astucieuse. Le polynôme p_2 s'annule en $\frac{\pi}{2}$, ceci signifie qu'il existe un polynôme $\mathrm{R}(x)$ tel que

$$p_2(x) = \mathrm{R}(x)\left(x - \frac{\pi}{2}\right).$$

Puisque $p_2(x)$ a degré 2, le polynôme $\mathrm{R}(x)$ qu'on a mis en facteur a degré 1, autrement dit R est de la forme $ax+b$. On cherche alors a et b tels que

$$\begin{cases} \mathrm{R}(0) = \frac{p_2(0)}{\left(0-\frac{\pi}{2}\right)}, \\ \mathrm{R}(\pi) = \frac{p_2(\pi)}{\left(\pi-\frac{\pi}{2}\right)}. \end{cases} \iff \begin{cases} b = \frac{1}{\left(0-\frac{\pi}{2}\right)}, \\ a\pi + b = \frac{-1}{\left(\pi-\frac{\pi}{2}\right)}. \end{cases} \iff \begin{cases} b = -\frac{2}{\pi}, \\ a = 0. \end{cases}$$

Ainsi

$$p_2(x) = \mathrm{R}(x)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{2}{\pi}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{2}{\pi}x + 1.$$

Méthode de Lagrange. On a

$$p_2(x) = y_0\mathrm{L}_0(x) + y_1\mathrm{L}_1(x) + y_2\mathrm{L}_2(x) = 1\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)(x-\pi)}{\left(0-\frac{\pi}{2}\right)(0-\pi)} - 1\frac{(x-0)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{(\pi-0)\left(\pi-\frac{\pi}{2}\right)} = 1 - \frac{2}{\pi}x.$$

Méthode de Newton. On commence par construire le tableau des différences divisées :

i	x_i	y_i	$f[x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$
0	0	$\boxed{1}$		
1	$\frac{\pi}{2}$	0	$\boxed{-\frac{2}{\pi}}$	
2	π	-1	$-\frac{2}{\pi}$	$\boxed{0}$

On a alors

$$\begin{aligned} p_2(x) &= \sum_{i=1}^{2} \omega_i(x) f[x_0, \ldots, x_i] \\ &= \omega_0(x) f[x_0] + \omega_1(x) f[x_0, x_1] + \omega_2(x) f[x_0, x_1, x_2] \\ &= \omega_0(x) - \frac{2}{\pi}\omega_1(x) \\ &= 1 - \frac{2}{\pi}x. \end{aligned}$$

2. On cherche donc $p_3 \in \mathbb{R}_3[x]$ tel que $p_3(x_i) = \sin(x_i)$ pour $i = 0, \ldots, 3$. On peut choisir l'une des quatre méthodes ci-dessous (on préférera la méthode de Newton car elle permet d'utiliser les calculs précédents).
Méthode directe. Si on écrit $p_3(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3$, on cherche $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tels que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{\pi}{2} & \frac{\pi^2}{4} & \frac{\pi^3}{8} \\ 1 & \pi & \pi^2 & \pi^3 \\ 1 & \frac{3\pi}{2} & \frac{9\pi^2}{4} & \frac{27\pi^3}{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En résolvant ce système linéaire on trouve $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = -\frac{2}{3\pi}$, $\alpha_2 = -\frac{4}{\pi^2}$ et $\alpha_3 = \frac{8}{3\pi^3}$:

```
import sympy as sp

x = sp.Symbol('x', real=True)
alpha_0 = sp.Symbol(r'\alpha_0',real=True)
alpha_1 = sp.Symbol(r'\alpha_1',real=True)
alpha_2 = sp.Symbol(r'\alpha_2',real=True)
alpha_3 = sp.Symbol(r'\alpha_3',real=True)

p = sp.Poly(alpha_0 + alpha_1*x + alpha_2*x**2 + alpha_3*x**3, x)

xx = [0, sp.pi/2, sp.pi, 3*sp.pi/2]
yy = [sp.cos(x) for x in xx]
Eqs = [ sp.Eq(p.subs(x,xx[i]),yy[i]) for i in range(4)]
```


© 2024-2027 G. Faccanoni

```
sol = sp.solve(Eqs, [alpha_0, alpha_1, alpha_2, alpha_3])
print(sol)
```

```
{\alpha_0: 1, \alpha_1: -2/(3*pi), \alpha_2: -4/pi**2, \alpha_3: 8/(3*pi**3)}
```

Méthode astucieuse. Le polynôme p_3 s'annule en $\frac{\pi}{2}$ et en $\frac{3\pi}{2}$, ceci signifie qu'il existe un polynôme $\mathrm{R}(x)$ tel que

$$p_3(x) = \mathrm{R}(x)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\left(x-\frac{3\pi}{2}\right).$$

Puisque $p_3(x)$ a degré 3, le polynôme $\mathrm{R}(x)$ qu'on a mis en facteur a degré 1, autrement dit R est de la forme $ax+b$. On cherche alors a et b tels que

$$\begin{cases} \mathrm{R}(0) = \frac{p_3(0)}{(0-\frac{\pi}{2})(0-\frac{3\pi}{2})}, \\ \mathrm{R}(\pi) = \frac{p_3(\pi)}{(\pi-\frac{\pi}{2})(\pi-\frac{3\pi}{2})}. \end{cases} \iff \begin{cases} b = \frac{1}{(0-\frac{\pi}{2})(0-\frac{3\pi}{2})}, \\ a\pi+b = \frac{-1}{(\pi-\frac{\pi}{2})(\pi-\frac{3\pi}{2})}. \end{cases} \iff \begin{cases} b = \frac{4}{3\pi^2}, \\ a = \frac{8}{3\pi^3}. \end{cases}$$

Ainsi

$$p_3(x) = \mathrm{R}(x)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\left(x-\frac{3\pi}{2}\right) = \left(\frac{8}{3\pi^3}x+\frac{4}{3\pi^2}\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\left(x-\frac{3\pi}{2}\right) = 1-\frac{2}{3\pi}x-\frac{4}{\pi^2}x^2+\frac{8}{3\pi^3}x^3.$$

Méthode de Lagrange. On a

$$\begin{aligned} p_3(x) &= y_0\mathrm{L}_0(x)+y_1\mathrm{L}_1(x)+y_2\mathrm{L}_2(x)+y_3\mathrm{L}_3(x) = 1\frac{(x-\frac{\pi}{2})(x-\pi)(x-\frac{3\pi}{2})}{(0-\frac{\pi}{2})(0-\pi)(0-\frac{3\pi}{2})} - 1\frac{(x-0)(x-\frac{\pi}{2})(x-\frac{3\pi}{2})}{(\pi-0)(\pi-\frac{\pi}{2})(\pi-\frac{3\pi}{2})} \\ &= \frac{4}{3\pi^3}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)(-x+\pi+3x) = 1-\frac{2}{3\pi}x-\frac{4}{\pi^2}x^2+\frac{8}{3\pi^3}x^3. \end{aligned}$$

Méthode de Newton. Il suffit de calculer une différence divisée en plus, *i.e.* ajouter une ligne au tableau précédant :

i	x_i	y_i	$f[x_{i-1},x_i]$	$f[x_{i-2},x_{i-1},x_i]$	$f[x_{i-3},x_{i-2},x_{i-1},x_i]$
0	0	$\boxed{1}$			
1	$\frac{\pi}{2}$	0	$\boxed{-\frac{2}{\pi}}$		
2	π	-1	$-\frac{2}{\pi}$	$\boxed{0}$	
3	$\frac{3\pi}{2}$	0	$\frac{2}{\pi}$	$\frac{4}{\pi^2}$	$\boxed{\frac{8}{3\pi^3}}$

On a alors

$$\begin{aligned} p_3(x) &= \sum_{i=1}^{3}\omega_i(x)f[x_0,\dots,x_i] \\ &= p_2(x)+\omega_3(x)f[x_0,x_1,x_2,x_3] \\ &= 1-\frac{2}{\pi}x+\frac{8}{3\pi^3}\omega_3(x) \\ &= 1-\frac{2}{\pi}x+\frac{8}{3\pi^3}x\left(x-\frac{\pi}{2}\right)(x-\pi) \\ &= 1-\frac{2}{3\pi}x-\frac{4}{\pi^2}x^2+\frac{8}{3\pi^3}x^3. \end{aligned}$$

Exercice 3.17

1. Construire le polynôme P qui interpole les points $(-1,2)$, $(0,1)$, $(1,2)$ et $(2,3)$.
2. Soit Q le polynôme qui interpole les points $(-1,2)$, $(0,1)$, $(1,2)$. Montrer qu'il existe un réel λ tel que :

$$\mathrm{Q}(x)-\mathrm{P}(x) = \lambda(x+1)x(x-1).$$

Correction

1. Dans la base de LAGRANGE le polynôme d'interpolation de degré $n = 3$ s'écrit

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(x) &= y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} \\
&+ y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + y_3 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \\
&= \frac{x(x-1)(x-2)}{-3} + \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{2} - (x+1)x(x-2) + \frac{(x+1)x(x-1)}{2} = \\
&= -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + \frac{1}{3}x + 1.
\end{aligned}$$

2. Par construction

$$\begin{aligned}
\mathrm{Q}(-1) &= \mathrm{P}(-1), \\
\mathrm{Q}(0) &= \mathrm{P}(0), \\
\mathrm{Q}(1) &= \mathrm{P}(1),
\end{aligned}$$

donc le polynôme $\mathrm{Q}(x) - \mathrm{P}(x)$ s'annule en -1, en 0 et en 1, ceci signifie qu'il existe un polynôme $\mathrm{R}(x)$ tel que

$$\mathrm{Q}(x) - \mathrm{P}(x) = \mathrm{R}(x)(x+1)x(x-1).$$

Puisque $\mathrm{P}(x)$ a degré 3 et $\mathrm{Q}(x)$ a degré 2, le polynôme $\mathrm{Q}(x) - \mathrm{P}(x)$ a degré 3, donc le polynôme $\mathrm{R}(x)$ qu'on a mis en facteur a degré 0 (*i.e.* $\mathrm{R}(x)$ est une constante).
Si on n'a pas remarqué ça, on peut tout de même faire tous les calculs : dans ce cas $n = 2$ donc on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{Q}(x) &= y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \\
&= x(x-1) - (x+1)(x-1) + (x+1)x \\
&= x^2 + 1.
\end{aligned}$$

Ainsi

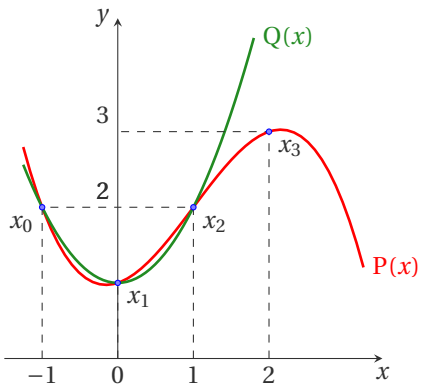
$$\begin{aligned}
\mathrm{Q}(x) - \mathrm{P}(x) &= y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \left[1 - \frac{x-x_3}{x_0-x_3}\right] + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} \left[1 - \frac{x-x_3}{x_1-x_3}\right] \\
&+ y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \left[1 - \frac{x-x_3}{x_2-x_3}\right] - y_3 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \\
&= -y_0 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} - y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} \\
&- y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} - y_3 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \\
&= -\left[\frac{y_0}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} + \frac{y_1}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}\right. \\
&\left. + \frac{y_2}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + \frac{y_3}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}\right](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \\
&= \frac{(x+1)x(x-1)}{3}
\end{aligned}$$

et $\lambda = \frac{1}{3}$. Sinon directement

$$\mathrm{Q}(x) - \mathrm{P}(x) = x^2 + 1 + \frac{1}{3}x^3 - x^2 + \frac{1}{3}x - 1 = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}x = \frac{(x+1)x(x-1)}{3} = \lambda x(x+1)(x-1)$$

avec $\lambda = \frac{1}{3}$.

© 2024-2027 G. FACCANONI



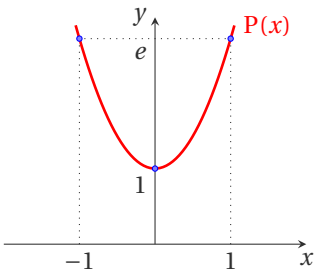
Exercice 3.18

1. Construire le polynôme P qui interpole les trois points $(-1,e)$, $(0,1)$ et $(1,e)$.
2. Sans faire de calculs, donner l'expression du polynôme Q qui interpole les trois points $(-1,-1)$, $(0,0)$ et $(1,-1)$.
3. Trouver le polynôme de l'espace vectoriel $\mathrm{Vec}\{1,x,x^2\}$ qui interpole les trois points $(-1,-1)$, $(0,0)$ et $(1,-1)$.

Correction

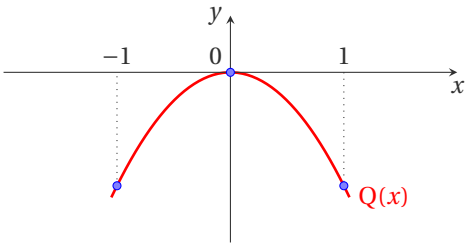
1. Dans la base de LAGRANGE le polynôme d'interpolation de degré $n=2$ s'écrit

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(x) &= y_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \\ &= e\frac{x(x-1)}{2} - (x+1)(x-1) + e\frac{(x+1)x}{2} = \\ &= (e-1)x^2+1.\end{aligned}$$



2. Il suffit de changer les coefficients y_i dans l'expression précédente :

$$\mathrm{Q}(x) = -\frac{x(x-1)}{2} - \frac{(x+1)x}{2} = -x^2.$$



3. Il s'agit de trouver un polynôme $p(x)$ qui soit combinaison linéaire des deux polynômes assignés (i.e. $p(x)=\alpha+\beta x+\gamma x^2$) et qui interpole les trois points $(-1,-1)$, $(0,0)$ et $(1,-1)$:

$$\begin{cases} p(-1)=1, \\ p(0)=0, \\ p(1)=-1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha-\beta+\gamma=-1, \\ \alpha=0, \\ \alpha+\beta+\gamma=-1, \end{cases}$$

d'où $\alpha=0, \beta=0$ et $\gamma=-1$. Le polynôme cherché est donc le polynôme $p(x)=-x^2$. En fait, il suffisait de remarquer que le polynôme $\mathrm{Q}\in\mathrm{Vec}\{1,x,x^2\}$ pour conclure que le polynôme p cherché est Q lui même.

Exercice 3.19

1. Construire le polynôme P qui interpole les points $(-1,1)$, $(0,1)$, $(1,2)$ et $(2,3)$.

2. Soit Q le polynôme qui interpole les points $(-1,1)$, $(0,1)$, $(1,2)$. Montrer qu'il existe un réel λ tel que :

$$Q(x) - P(x) = \lambda(x+1)x(x-1).$$

Correction

1. Dans la base de LAGRANGE le polynôme d'interpolation de degré $n = 3$ s'écrit

$$\begin{aligned}
P(x) &= y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} \\
&\quad + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + y_3 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \\
&= \frac{x(x-1)(x-2)}{-6} + \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{2} - (x+1)x(x-2) + \frac{(x+1)x(x-1)}{2} = \\
&= -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x + 1.
\end{aligned}$$

2. Par construction

$$\begin{aligned}
Q(-1) &= P(-1), \\
Q(0) &= P(0), \\
Q(1) &= P(1),
\end{aligned}$$

donc le polynôme $Q(x) - P(x)$ s'annule en -1, en 0 et en 1, ceci signifie qu'il existe un polynôme $R(x)$ tel que

$$Q(x) - P(x) = R(x)(x+1)x(x-1).$$

Puisque $P(x)$ a degré 3 et $Q(x)$ a degré 2, le polynôme $Q(x) - P(x)$ a degré 3, donc le polynôme $R(x)$ qu'on a mis en facteur a degré 0 (*i.e.* $R(x)$ est une constante).
Si on n'a pas remarqué ça, on peut tout de même faire tous les calculs : dans ce cas $n = 2$ donc on a

$$\begin{aligned}
Q(x) &= y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \\
&= \frac{x(x-1)}{2} - (x+1)(x-1) + (x+1)x \\
&= \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1.
\end{aligned}$$

Ainsi

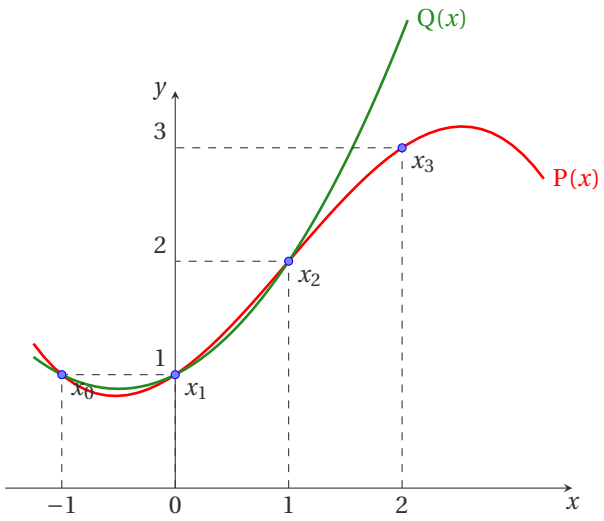
$$\begin{aligned}
Q(x) - P(x) &= y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \left[1 - \frac{x-x_3}{x_0-x_3}\right] + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} \left[1 - \frac{x-x_3}{x_1-x_3}\right] \\
&\quad + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \left[1 - \frac{x-x_3}{x_2-x_3}\right] - y_3 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \\
&= -y_0 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} - y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} \\
&\quad - y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} - y_3 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \\
&= -\left[\frac{y_0}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} + \frac{y_1}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}\right. \\
&\quad \left. + \frac{y_2}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + \frac{y_3}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}\right](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) = \frac{(x+1)x(x-1)}{6}
\end{aligned}$$

et $\lambda = \frac{1}{6}$. Sinon directement

$$Q(x) - P(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x - 1 = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{6}x = \frac{1}{6}x(x^2-1) = \lambda x(x+1)(x-1)$$

avec $\lambda = \frac{1}{6}$.

© 2024-2027 G. FACCANONI



Exercice 3.20

1. Construire le polynôme P qui interpole les trois points $(-1,\alpha)$, $(0,\beta)$ et $(1,\alpha)$ où α et β sont des réels.
2. Si $\alpha=\beta$, donner le degré de P.
3. Montrer que P est pair. Peut-on avoir P de degré 1 ?

Correction

1. Dans la base de LAGRANGE le polynôme d'interpolation de degré $n=2$ s'écrit

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(x) &= y_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} + \\
&= \alpha\frac{x(x-1)}{2} + \beta\frac{(x+1)(x-1)}{-1} + \alpha\frac{(x+1)x}{2} = \\
&= \frac{\alpha}{2}x(x-1) - \beta(x+1)(x-1) + \frac{\alpha}{2}x(x+1) \\
&= (\alpha-\beta)x^2 + \beta.
\end{aligned}$$

   Sinon, dans la base de NEWTON, on commence par construire le tableau des différences divisées :

i	x_i	y_i	$f[x_{i-1},x_i]$	$f[x_{i-2},x_{i-1},x_i]$
0	-1	$\boxed{\alpha}$		
1	0	β	$\boxed{(\beta-\alpha)}$	
2	1	α	$(\alpha-\beta)$	$\boxed{(\alpha-\beta)}$

   On a alors

$$\begin{aligned}
p_2(x) &= \sum_{i=0}^{2}\omega_i(x)f[x_0,\dots,x_i] \\
&= \omega_0(x)f[x_0] + \omega_1(x)f[x_0,x_1] + \omega_2(x)f[x_0,x_1,x_2] \\
&= \alpha\omega_0(x) + (\beta-\alpha)\omega_1(x) + (\alpha-\beta)\omega_2(x) \\
&= \alpha + (\beta-\alpha)(x+1) + (\alpha-\beta)x(x+1) = (\alpha-\beta)x^2 + \beta.
\end{aligned}$$

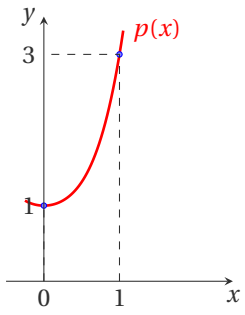
2. Si $\alpha=\beta$, $\mathrm{P}(x)=\alpha$ qui est un polynôme de degré 0.
3. $\mathrm{P}(-x)=\mathrm{P}(x)$ donc P est pair. Donc P ne peut pas être de degré 1 car un polynôme de degré 1 est de la forme a_0+a_1x qui ne peut pas être pair.

Exercice 3.21
Trouver le polynôme de l'espace vectoriel $\mathrm{Vec}\{1+x^2, x^4\}$ qui interpole les points $(0,1)$ et $(1,3)$.

Correction
Il s'agit de trouver un polynôme $p(x)$ qui soit combinaison linéaire des deux polynômes assignés (i.e. $p(x) = \alpha(1+x^2)+\beta(x^4)$) et qui interpole les deux points $(0,1)$ et $(1,3)$:

$$\begin{cases} p(0)=1, \\ p(1)=3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha(1+0^2)+\beta(0^4)=1, \\ \alpha(1+1^2)+\beta(1^4)=3, \end{cases}$$

d'où $\alpha = 1$ et $\beta = 1$. Le polynôme cherché est donc le polynôme $p(x) = 1+x^2+x^4$.



Exercice 3.22
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = 1+x^3$.

1. Calculer le polynôme $p_0 \in \mathbb{R}_0[x]$ qui interpole f au point d'abscisse $x_0 = 0$.
2. Calculer le polynôme $p_1 \in \mathbb{R}_1[x]$ qui interpole f aux points d'abscisse $\{x_0 = 0, x_1 = 1\}$.
3. Calculer le polynôme $p_2 \in \mathbb{R}_2[x]$ qui interpole f aux points d'abscisse $\{x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2\}$.
4. Calculer le polynôme $p_3 \in \mathbb{R}_3[x]$ qui interpole f aux points d'abscisse $\{x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3\}$.
5. Pour $n > 3$, calculer les polynômes $p_n \in \mathbb{R}_n[x]$ qui interpolent f aux points d'abscisse $\{x_0 = 0, x_1 = 1, \ldots, x_n = n\}$.

Correction

1. On interpole l'ensemble $\{(0,1)\}$ donc $p_0(x) = 1$.
2. On interpole l'ensemble $\{(0,1),(1,2)\}$ donc $p_1(x) = 1+x$.
3. On interpole l'ensemble $\{(0,1),(1,2),(2,9)\}$ donc $p_2(x) = 1-2x+3x^2$.
4. $f \in \mathbb{R}_3[x]$ et comme il existe un seul polynôme de degré au plus 3 qui interpole quatre points ce polynôme coïncide forcement avec f donc $p_3 \equiv f$.
5. $f \in \mathbb{R}_n[x]$ pour tout $n \geq 3$ et comme il existe un seul polynôme de degré au plus 3 qui interpole quatre points ce polynôme coïncide forcement avec f donc $p_n \equiv f$ pour $n \geq 3$.

Exercice 3.23
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = 1+x^2$.

1. Calculer le polynôme de $\mathbb{R}_0[x]$ qui interpole f au point 0.
2. Calculer le polynôme de $\mathbb{R}_1[x]$ qui interpole f aux points $\{0,2\}$.
3. Calculer le polynôme de $\mathbb{R}_9[x]$ qui interpole f aux points $\{0,2,\ldots,2i,\ldots,18\}_{0\leq i\leq 9}$.

Correction

1. On interpole l'ensemble de points $\{(0,1)\}$ donc $p_0(x) = 1$.
2. On interpole l'ensemble de points $\{(0,1),(2,5)\}$ donc $p_1(x) = 1+2x$.
3. $f \in \mathbb{R}_n[x]$ pour tout $n \geq 2$ et comme il existe un seul polynôme de degré au plus 2 qui interpole trois points ce polynôme coïncide forcement avec f donc $p_n \equiv f$ pour $n \geq 2$.

Exercice 3.24

1. Calculer le polynôme qui interpole les points $(0,3)$, $(1,2)$, $(2,4)$, $(3,-2)$.
2. Calculer le polynôme qui interpole les points $(0,2)$, $(1,3)$, $(2,4)$, $(3,5)$, $(4,6)$, $(5,7)$, $(6,8)$, $(7,9)$ (pas de calculs inutiles!).
3. Calculer le polynôme qui interpole les points $(0,2)$, $(1,1)$, $(2,2)$, $(3,3)$, $(4,4)$ en le cherchant sous la forme $p(x) = x+q(x)$ (pas de calculs inutiles!).

© 2024-2027 G. Faccanoni

4. Donner l'expression du polynôme $p \in \mathbb{R}_3[x]$ dont la dérivée k-ème vérifie $p^{(k)}(1) = 3$ pour $k = 0,1,2,3$. Est-il unique dans $p \in \mathbb{R}_3[x]$? Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ telle que $f^{(k)}(1) = 3$. Quelle estimation de $f(x) - p(x)$ a-t-on ?

Correction

1. Dans la base de LAGRANGE le polynôme d'interpolation de degré $n = 3$ s'écrit

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(x) &= y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} \\
&\quad + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + y_3 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \\
&= 3\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)} + 2\frac{x(x-2)(x-3)}{(1-0)(1-2)(1-3)} \\
&\quad + 4\frac{x(x-1)(x-3)}{(2-0)(2-1)(2-3)} - 2\frac{x(x-1)(x-2)}{(3-0)(3-1)(3-2)} \\
&= 3 - \frac{37}{6}x + 7x^2 - \frac{11}{6}x^3.
\end{aligned}$$

2. $p(x) = x+2$: en effet, on voit que les points sont alignés le long de la droite d'équation $y = x+2$.
3. $p \in \mathbb{R}_4[x]$ et interpole les points $(0,2)$, $(1,1)$, $(2,2)$, $(3,3)$, $(4,4)$ donc $p(0) = 2$, $p(1) = 1$, $p(2) = 2$, $p(3) = 3$ et $p(4) = 4$.
   - Première méthode. On cherche le polynôme $q \in \mathbb{R}_4[x]$ tel que $q(x) = p(x) - x$, autrement dit le polynôme $q \in \mathbb{R}_4[x]$ qui interpole les points $(0,2-0)$, $(1,1-1)$, $(2,2-2)$, $(3,3-3)$, $(4,4-4)$. Donc le polynôme q s'annule en $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ et $x = 4$, ceci signifie qu'il existe un polynôme R tel que
   $$q(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)\mathrm{R}(x).$$
   Comme $q \in \mathbb{R}_4[x]$ alors R est une constante qu'on peut calculer en imposant $q(0) = 2$ et l'on obtient
   $$q(x) = \frac{1}{12}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4).$$
   - Deuxième méthode. Notons $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$, $x_4 = 0$. On considère $\mathscr{N} = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1}\}$ une base de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$ telle que $\mathrm{coord}(p, \mathscr{N}) = (y_0, f[x_0,x_1], f[x_0,x_1,x_2], \ldots, f[x_0,x_1,x_2,\ldots,x_{n-1}])$, *i.e.* $p(x) = \sum_{i=0}^{n-1} f[x_0,\ldots,x_i]\omega_i(x)$. La base de NEWTON est définie récursivement comme suit :
   $$\omega_0(x) = 0; \qquad \omega_1(x) = x - x_0; \qquad \text{pour } k = 2,\ldots,n \quad \omega_k(x) = \omega_{k-1}(x)(x - x_{k-1}).$$
   Le polynôme d'interpolation de degré n sur l'ensemble des $n+1$ points $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n$ dans la base de NEWTON s'écrit
   $$\begin{aligned}
   p_n(x) &= \sum_{i=0}^{n} \omega_i(x) f[x_0, \ldots, x_i] \\
   &= \sum_{i=1}^{n-1} \omega_i(x) f[x_0, \ldots, x_i] + \omega_4(x) f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4] \\
   &= p_{n-1}(x) + \omega_4(x) f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4]
   \end{aligned}$$
   où p_{n-1} est le polynôme d'interpolation de degré $n-1$ sur l'ensemble des n points $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^{n-1}$.
   Dans notre cas, on voit que les points $\{x_0, x_1, x_2, x_3\}$ sont alignés le long de la droite d'équation $y = x$ donc $p_{n-1}(x) = x$ et $q(x) = \omega_4(x) f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4]$ avec $\omega_4(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$. On doit donc calculer le coefficient $f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4]$ sachant que $q(0) = 2$, ce qui donne $f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4] = 1/12$.

   On conclut que
   $$p(x) = x + \frac{1}{12}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{5}{6}x^3 + \frac{35}{12}x^2 - \frac{19}{6}x + 2.$$
4. Soit $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ un polynôme de $\mathbb{R}_3[x]$. On cherche les quatre coefficients a_i tels que $p^{(k)}(1) = 3$ pour $k = 0,1,2,3$:
$$\begin{cases} p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3, \\ p'(x) = a_1x + 2a_2x + 3a_3x^2, \\ p''(x) = 2a_2 + 6a_3x, \\ p'''(x) = 6a_3, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3 = p(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3, \\ 3 = p'(1) = a_1 + 2a_2 + 3a_3, \\ 3 = p''(1) = 2a_2 + 6a_3, \\ 3 = p'''(1) = 6a_3, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a_3 = 1/2, \\ a_2 = 0, \\ a_1 = 3/2, \\ a_0 = 1. \end{cases}$$

et ce polynôme est unique.
Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ telle que $f^{(k)}(1) = 3$. Alors la fonction $g(x) \equiv f(x) - p(x)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et $g^{(k)}(1) = 0$ pour $k = 0, 1, 2, 3$ (*i.e.* $x = 1$ est un zéro de multiplicité 4 pour g). Écrivons le développement de TAYLOR avec le reste de LAGRANGE de g en $x = 1$ à l'ordre 3 :

$$g(x) = \sum_{k=0}^{3} \frac{g^{(k)}(1)}{k!}(x-1)^k + \frac{g^{(4)}(\xi)}{4!}(x-1)^4 = \frac{g^{(4)}(\xi)}{4!}(x-1)^4$$

où ξ est entre x et 1. Le polynôme p étant de degré 3, on obtient

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-1)^4.$$

Exercice 3.25
Pour calculer le zéro d'une fonction $y = f(x)$ inversible sur un intervalle $[a; b]$ on peut utiliser l'interpolation : après avoir évalué f sur une discrétisation x_i de $[a; b]$, on interpole l'ensemble $\{(y_i, x_i)\}_{i=0}^n$ et on obtient un polynôme $x = p(y)$ tel que

$$f(x) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = p(0).$$

Utiliser cette méthode pour évaluer l'unique racine α de la fonction $f(x) = e^x - 2$ dans l'intervalle $[0; 1]$ avec trois points d'interpolation.

Correction
Calculons d'abord les valeurs à interpoler

i	x_i	y_i
0	0	-1
1	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{e}-2$
2	1	$e-2$

Le polynôme d'interpolation de LAGRANGE de degré n sur l'ensemble des $n+1$ points $\{(y_i, x_i)\}_{i=0}^n$ s'écrit

$$p_n(y) = \sum_{i=0}^{n} \left(x_i \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{y - y_j}{y_i - y_j} \right).$$

Ici $n = 2$ donc on a

$$\begin{aligned} p(y) &= x_0 \frac{(y-y_1)(y-y_2)}{(y_0-y_1)(y_0-y_2)} + x_1 \frac{(y-y_0)(y-y_2)}{(y_1-y_0)(y_1-y_2)} + x_2 \frac{(y-y_0)(y-y_1)}{(y_2-y_0)(y_2-y_1)} \\ &= \frac{1}{2} \frac{(y+1)(y-e+2)}{(\sqrt{e}-2+1)(\sqrt{e}-2-e+2)} + \frac{(y+1)(y-\sqrt{e}+2)}{(e-2+1)(e-2-\sqrt{e}+2)}. \end{aligned}$$

Par conséquent une approximation de la racine de f est $p(0) = \frac{1}{2}\frac{-e+2}{(\sqrt{e}-2+1)(\sqrt{e}-2-e+2)} + \frac{-\sqrt{e}+2}{(e-2+1)(e-2-\sqrt{e}+2)} \approx 0.7087486785$.

Remarque : comme il n'y a que trois points d'interpolation, on pourrait calculer directement le polynôme interpolateur de f plutôt que de sa fonction réciproque et chercher les zéros de ce polynôme directement car il s'agit d'un polynôme de degré 2. Cependant cette idée ne peut pas être généralisée au cas de plus de trois points d'interpolation car on ne connait pas de formule générale pour le calcul des zéros d'un polynôme de degré $n \geq 3$.

Exercice 3.26 (Les limites de l'interpolation linéaire)
Cet exercice vise à montrer les limites de l'interpolation linéaire directe pour des fonctions qui varient rapidement, et à introduire une approche améliorée en utilisant le logarithme de la fonction.

La fonction Gamma, notée $\Gamma(x)$, est une généralisation de la fonction factorielle aux nombres réels et complexes. Pour $x > 0$, elle est définie par l'intégrale

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, \mathrm{d}t.$$

Pour les entiers positifs n, la fonction Gamma est reliée à la factorielle par la relation suivante

$$\Gamma(n) = (n-1)!.$$

 © 2024-2027 G. FACCANONI

On cherche à approcher la valeur de $\Gamma(10.3)$ en utilisant $\Gamma(10) = 9!$ et $\Gamma(11) = 10!$.

1. **Interpolation linéaire directe :** calculez l'approximation de $\Gamma(10.3)$ en utilisant l'interpolation linéaire sachant que $9! = 362880$ et $10! = 3628800$. Comparez cette approximation avec la valeur exacte $\Gamma(10.3) \approx 716430.69$. Quelle est l'erreur relative dans ce cas ?
2. **Interpolation via le logarithme de la fonction Gamma :** appliquez l'interpolation linéaire au logarithme de la fonction Gamma. Sachant que $\log(9!) \approx 12.8018$ et $\log(10!) \approx 15.1044$, effectuez l'interpolation linéaire de $\{(x_i, \ln(\Gamma(x_i)))\}_i$. Comparez cette approximation avec la valeur exacte. Quelle est l'erreur relative dans ce cas ?
3. **Propriétés convexes de la fonction Gamma :** la fonction $\log(\Gamma(x))$ est convexe (d'après le théorème de Bohr-Mollerup). Expliquez pourquoi l'interpolation linéaire appliquée à $\log(\Gamma(x))$ donne une approximation supérieure ou égale à la vraie valeur de $\Gamma(x)$.

Source : https://www.johndcook.com/blog/2024/08/08/interpolating-gamma/

Correction

1. **Interpolation linéaire directe :**

$$\Gamma(10.3) \approx 0.7 \times 9! + 0.3 \times 10! = 0.7 \times 362880 + 0.3 \times 3628800 = 1342656.0.$$

Comme $\Gamma(10.3) \approx 716430.69$, le pourcentage d'erreur de cette approximation est 87.41%

2. **Interpolation via le logarithme de la fonction Gamma :**

$$\log(\Gamma(10.3)) \approx 0.7 \times \ln(9!) + 0.3 \times \ln(10!) = 0.7 \times \ln(362880) + 0.3 \times \ln(3628800) = 13.492603007979682$$

d'où

$$\Gamma(10.3) \approx 724040.7888559059$$

Comme $\Gamma(10.3) \approx 716430.69$, le pourcentage d'erreur de cette approximation est 1.06%

3. **Propriétés convexes de la fonction Gamma :** le théorème de Bohr-Mollerup affirme que la fonction $\ln(\Gamma(x))$ est convexe pour $x > 0$. Cela signifie que la courbe de $\ln(\Gamma(x))$ est toujours au-dessus de toute droite joignant deux points de la courbe. Lorsque l'on applique l'interpolation linéaire à $\ln(\Gamma(x))$, on obtient une droite reliant $\ln(\Gamma(10))$ et $\ln(\Gamma(11))$. En raison de la convexité de $\ln(\Gamma(x))$, cette droite se trouve toujours au-dessus de la vraie courbe de $\ln(\Gamma(x))$, sauf aux points d'interpolation eux-mêmes (10 et 11). Cela garantit que l'interpolation linéaire de $\ln(\Gamma(x))$ fournit une approximation qui est une borne supérieure de la vraie valeur. En prenant l'exponentielle de l'approximation obtenue par interpolation de $\ln(\Gamma(x))$, on obtient une approximation de $\Gamma(x)$ qui est également supérieure à la valeur exacte de $\Gamma(x)$. Ainsi, l'interpolation linéaire de $\ln(\Gamma(x))$ donne non seulement une approximation plus précise que l'interpolation directe de $\Gamma(x)$, mais fournit également une borne supérieure à $\Gamma(10.3)$.

3.3.3. Interpolation trigonométrique

Exercice 3.27
Considérons la fonction $f : [0; 2\pi] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x(x - 2\pi)e^{-x}$. Calculer $\tilde{f}(x)$ lorsque $n = 9$ et comparer graphiquement les fonctions f et $\tilde{f}$.

Correction
On commence par définir la fonction f et calculer les valeurs de f aux nœuds $x_j = j\pi/5$, $j = 0, \ldots, 9$ à l'aide des instructions suivantes

```
import numpy as np

f = lambda x : x * (x - 2 * np.pi) * np.exp(-x)

# Points d'interpolation
n = 9  # n+1 points
Px = 2 * np.pi / (n + 1) * np.arange(n + 1)
```

```
Py = f(Px)
```

On calcule alors le vecteur des coefficients de FOURIER :

```
if n % 2 == 0:
    M = n // 2
    mu = 0
else:
    M = (n - 1) // 2
    mu = 1

c = np.zeros(2 * M + mu + 1, dtype=complex)  # Initialiser le tableau des
↪  coefficients

# Calcul des coefficients de Fourier
for k in range(-M - mu, M + 1):
    index = k + M + mu  # Shift index to avoid negative or zero indices
    c[index] = 1 / (n + 1) * np.sum(f(Px) * np.exp(-1j * k * Px))
```

On peut comparer notre calcul avec celui effectué par Numpy grâce à la FFT et vérifier que la norme de l'erreur est nulle :

```
# Calcul des coefficients de Fourier avec fft
C = np.fft.fftshift(np.fft.fft(f(Px))) / (n + 1)

# Calcul de la norme de la différence entre les deux jeux de coefficients
norm_diff = np.linalg.norm(c - C)

print("Coefficients de Fourier calculés manuellement :", c)
print("Coefficients de Fourier calculés avec fft :", C)
print("Norme de la différence :", norm_diff)
```

```
Coefficients de Fourier calculés manuellement : [ 0.08700969-3.94939161e-18j
↪  0.09258466-2.13981536e-02j
  0.10984941-6.00797260e-02j  0.12680548-1.62109852e-01j
 -0.04672819-4.20011892e-01j -0.65203241+0.00000000e+00j
 -0.04672819+4.20011892e-01j  0.12680548+1.62109852e-01j
  0.10984941+6.00797260e-02j  0.09258466+2.13981536e-02j]
Coefficients de Fourier calculés avec fft : [ 0.08700969+0.j          0.09258466-0.02139815j
↪  0.10984941-0.06007973j
  0.12680548-0.16210985j -0.04672819-0.42001189j -0.65203241+0.j
 -0.04672819+0.42001189j  0.12680548+0.16210985j  0.10984941+0.06007973j
  0.09258466+0.02139815j]
Norme de la différence : 1.75242991822e-16
```

Pour comparer graphiquement f et son interpolée, on doit calculer f et $\tilde{f}$ sur $[0;2\pi]$ en S points :

```
import matplotlib.pyplot as plt

# Nombre de points pour l'évaluation
S = 100
x = 2 * np.pi / S * np.arange(S)

# Valeur exacte de la fonction
fx = f(x)
```


© 2024-2027 G. FACCANONI

```
# ????????????????
# tilde_f calculée par interpft (équivalent en Python)
z = np.fft.fftshift(np.fft.ifft(np.fft.fftshift(Py), S)).real

# tilde_f calculée par notre formule
ftildex = np.zeros(S, dtype=complex)
for s in range(S):
    ftildex[s] = np.sum(c * np.exp(1j * np.arange(-M - mu, M + 1) * x[s]))

# Afficher les résultats
plt.plot(x, fx, 'r-', linewidth=2, label='Exact $f(x)$')
plt.plot(x, ftildex.real, 'b:', linewidth=2, label='$\\tilde{f}(x)$ par notre
 ↪  formule')
plt.plot(x, z, 'm.', linewidth=2, label='$\\tilde{f}(x)$ par interpft')
plt.plot(Px, Py, 'o', label='Points d\'interpolation')
plt.xlabel('$x$')
plt.ylabel('$y$')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```

TO DO : il est intéressant de vérifier numériquement qu'en augmentant n l'approximation $\tilde{f}$ converge vers f tandis qu'avec l'interpolation polynomiale ceci n'est pas vrai.

CHAPITRE 4

Approximation au sens des moindres carrés

Nous avons déjà observé que, lorsque n est grand, le polynôme d'interpolation de $\mathbb{R}_n[x]$ ne fournit pas toujours une bonne approximation d'une fonction donnée. De plus, si les données sont entachées d'erreurs de mesure, l'interpolation peut devenir instable. Une première solution consiste à recourir à l'interpolation composite (par morceaux linéaires, ou encore à l'aide de splines). Toutefois, ces méthodes ne sont pas adaptées à l'extrapolation, c'est-à-dire à la prédiction de nouvelles valeurs en dehors de l'intervalle contenant les nœuds d'interpolation.

Pour répondre à cette difficulté, nous introduisons la méthode des moindres carrés.

On associe à chaque donnée (x_i, y_i) un point du plan, de sorte qu'un échantillon de $n+1$ données corresponde à un nuage de $n+1$ points. Si par exemple ce nuage présente une forme globalement allongée, il est naturel d'essayer de tracer une droite «passant au milieu» des points. Cette droite, appelée *droite de régression linéaire*, fournit une représentation simple de la dépendance linéaire entre les deux variables.

La méthode des moindres carrés permet de déterminer rigoureusement la «meilleure» droite ajustant ce nuage de points, au sens d'une minimisation d'erreur. Cette idée s'étend naturellement au cas d'une approximation par des polynômes, et plus généralement par des fonctions appartenant à un espace vectoriel adapté.

Dans l'ensemble de ce chapitre, nous considérerons un nuage de $n+1$ points $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^{n}$.

Dans ce chapitre

4.1 *Fitting* par une relation affine 165
4.1.1 *Fitting* linéaire après transformations 169
4.2 *Fitting* polynomiale 171
4.3 *Fitting* dans un espace vectoriel quelconque 174
4.4 Résumé 177
4.5 Exercices 183

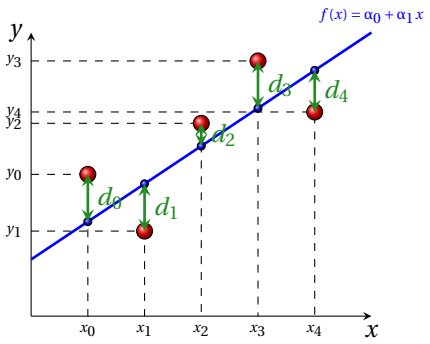
4.1. *Fitting* par une relation affine

Supposons que deux grandeurs x et y sont approximativement liées par une relation affine, c'est-à-dire $y \approx \alpha_0 + \alpha_1 x$. Autrement dit, lorsque les données sont représentées dans un plan cartésien, les points ne sont pas exactement alignés mais semblent se répartir autour d'une droite, avec des écarts dus à des erreurs de mesure ou à des fluctuations expérimentales.

Nous cherchons alors à déterminer les coefficients α_0 et α_1 de sorte que la droite d'équation $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x$ s'ajuste *au mieux* aux points observés. Par « ajuster au mieux », on entend minimiser la somme des carrés des écarts verticaux entre les points (x_i, y_i) et la droite $f(x)$. Pour formaliser cela, introduisons

$$d_i(\alpha_0, \alpha_1) \stackrel{\text{def}}{=} y_i - \big(\alpha_0 + \alpha_1 x_i\big),$$

c'est-à-dire l'écart vertical du point (x_i, y_i) à la droite d'équation $f(x)$.



La méthode des moindres carrés consiste donc à choisir α_0 et α_1 de façon à rendre minimale la somme des carrés de ces écarts. On définit ainsi la **fonction d'erreur quadratique** :

$$\mathscr{E}(\alpha_0,\alpha_1) = \sum_{i=0}^{n} d_i^2(\alpha_0,\alpha_1) = \sum_{i=0}^{n} \Big(y_i - (\alpha_0 + \alpha_1 x_i)\Big)^2.$$

On remarque que $\mathscr{E}(\alpha_0,\alpha_1) \geq 0$ pour tout $(\alpha_0,\alpha_1) \in \mathbb{R}^2$.

- Si tous les points sont parfaitement alignés, il existe (α_0,α_1) tel que $\mathscr{E}(\alpha_0,\alpha_1) = 0$ (cas d'une interpolation).
- Dans le cas général, on cherche les paramètres qui rendent $\mathscr{E}$ aussi petit que possible.

Le problème se ramène donc à la minimisation d'une fonction de deux variables. Pour identifier le minimum, on calcule le gradient de $\mathscr{E}$ et on cherche les points stationnaires, c'est-à-dire les couples (α_0,α_1) vérifiant

$$\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \alpha_0} = 0, \qquad \frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \alpha_1} = 0.$$

EXEMPLE

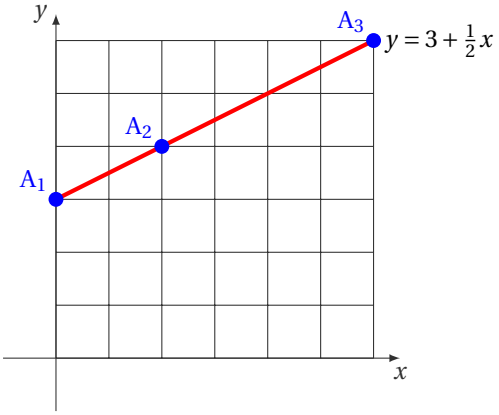
Considérons d'abord les trois points $A_1 = (0,3)$, $A_2 = (2,4)$ et $A_3 = (6,6)$. La fonction $\mathscr{E}(\alpha_0,\alpha_1)$ s'écrit

$$\begin{aligned}\mathscr{E}(\alpha_0,\alpha_1) &= (3-\alpha_0)^2 + (4-(\alpha_0+2\alpha_1))^2 + (6-(\alpha_0+6\alpha_1))^2 \\ &= 40\alpha_1^2 + 16\alpha_1\alpha_0 - 88\alpha_1 + 3\alpha_0^2 - 26\alpha_0 + 61.\end{aligned}$$

On en déduit

$$\nabla\mathscr{E}(\alpha_0,\alpha_1) = \begin{pmatrix} 16\alpha_1 + 6\alpha_0 - 26 \\ 80\alpha_1 + 16\alpha_0 - 88 \end{pmatrix}.$$

La condition $\nabla\mathscr{E}(\alpha_0,\alpha_1) = \mathbf{0}$ donne $\alpha_1 = \frac{1}{2}$ et $\alpha_0 = 3$. De plus, $\mathscr{E}(3,\frac{1}{2}) = 0$, ce qui signifie que les trois points sont parfaitement alignés : on a retrouvé la droite d'interpolation.



EXEMPLE

Considérons maintenant les 5 points

$$A_1 = (4,1), \quad A_2 = (7,3), \quad A_3 = (8,3), \quad A_4 = (10,6), \quad A_5 = (12,7).$$

Ces points sont approximativement alignés. On cherche la droite de meilleure approximation $y = \alpha_0 + \alpha_1 x$. Quelle ordonnée peut-on extrapoler pour le point d'abscisse $x = 6$?

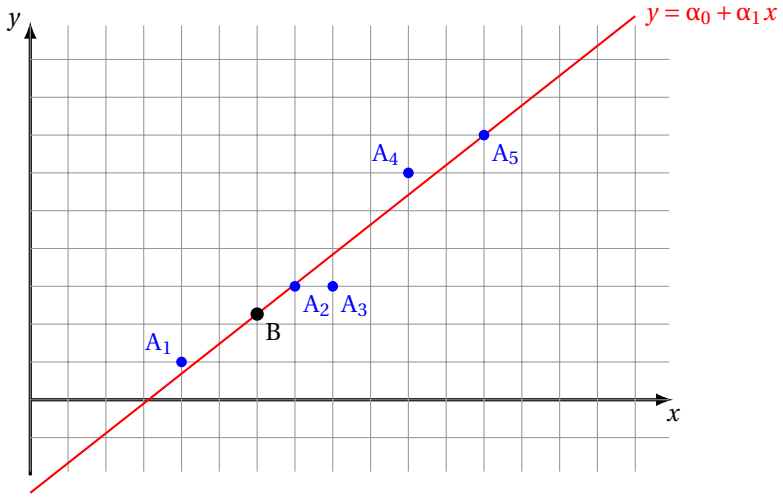
En minimisant $\mathscr{E}$, on obtient

$$\nabla\mathscr{E}(\alpha_0,\alpha_1) = \begin{pmatrix} 82\alpha_1 + 10\alpha_0 - 40 \\ 746\alpha_1 + 82\alpha_0 - 386 \end{pmatrix}.$$

La condition $\nabla\mathscr{E} = \mathbf{0}$ donne $\alpha_1 = \frac{145}{184} \approx 0.788$ et $\alpha_0 = -\frac{453}{184} \approx -2.462$.

Comme $\mathscr{E}(-\frac{453}{184}, \frac{145}{184}) = \frac{211}{184} > 0$, les points ne sont pas parfaitement alignés. Pour extrapoler à $x = 6$ (le point B de la figure ci-dessus), on obtient

$$y = \alpha_0 + 6\alpha_1 = \frac{417}{184} \approx 2.27.$$



© 2024-2027 G. FACCANONI

De façon générale, on cherche à déterminer la droite $y = \alpha_0 + \alpha_1 x$ minimisant l'erreur quadratique $\mathscr{E} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ définie par

$$\mathscr{E}(\alpha_0, \alpha_1) = \sum_{i=0}^{n} \big(y_i - (\alpha_0 + \alpha_1 x_i)\big)^2$$

Un calcul direct donne

$$\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \alpha_0}(\alpha_0, \alpha_1) = -2\left(\sum_{i=0}^{n} (y_i - \alpha_0 - \alpha_1 x_i)\right), \qquad \frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \alpha_1}(\alpha_0, \alpha_1) = -2\left(\sum_{i=0}^{n} x_i (y_i - \alpha_0 - \alpha_1 x_i)\right).$$

Les conditions du minimum s'écrivent alors

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \alpha_0}(\alpha_0, \alpha_1) = 0, \\ \frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \alpha_1}(\alpha_0, \alpha_1) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \sum_{i=0}^{n} (y_i - \alpha_0 - \alpha_1 x_i) = 0, \\ \sum_{i=0}^{n} x_i (y_i - \alpha_0 - \alpha_1 x_i) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \sum_{i=0}^{n} y_i - \alpha_0 \sum_{i=0}^{n} 1 - \alpha_1 \sum_{i=0}^{n} x_i = 0, \\ \sum_{i=0}^{n} x_i y_i - \alpha_0 \sum_{i=0}^{n} x_i - \alpha_1 \sum_{i=0}^{n} x_i^2 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (n+1)\alpha_0 + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right)\alpha_1 = \sum_{i=0}^{n} y_i, \\ \left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right)\alpha_0 + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^2\right)\alpha_1 = \sum_{i=0}^{n} y_i x_i \end{cases} \iff \underbrace{\begin{bmatrix} (n+1) & \sum_{i=0}^{n} x_i \\ \sum_{i=0}^{n} x_i & \sum_{i=0}^{n} x_i^2 \end{bmatrix}}_{\mathbb{F}} \underbrace{\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{n} y_i \\ \sum_{i=0}^{n} x_i y_i \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

C'est le **système des moindres carrés**, qui admet une unique solution. Comme $\mathscr{E}$ est convexe, cette solution correspond bien à un minimum. La droite $y = \alpha_0 + \alpha_1 x$ obtenue est appelée *droite de régression de y par rapport à x*.

EXEMPLE

Pour les 5 points $\{(1,1),(2,2),(3,1),(4,2),(5,3)\}$, le système est

$$\begin{pmatrix} (n+1) & \sum_{i=0}^{n} x_i \\ \sum_{i=0}^{n} x_i & \sum_{i=0}^{n} x_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{n} y_i \\ \sum_{i=0}^{n} x_i y_i \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} 4+1 & 1+2+3+4+5 \\ 1+2+3+4+5 & 1^2+2^2+3^2+4^2+5^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2+1+2+3 \\ 1\times 1 + 2\times 2 + 3\times 1 + 4\times 2 + 5\times 3 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} 5 & 15 \\ 15 & 55 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 31 \end{pmatrix}$$

On en déduit $\alpha_0 = \frac{3}{5} = 0.6$ et $\alpha_1 = \frac{2}{5} = 0.4$.

```python
import sympy as sp

# Données
xp = [1, 2, 3, 4, 5]
yp = [1, 2, 1, 2, 3]
n = len(xp)

# Système
A = sp.Matrix([[n, sum(xp)], [sum(xp), sum([x ** 2 for x in xp])]])
b = sp.Matrix([sum(yp), sum([x * y for x, y in zip(xp, yp)])])
alpha0, alpha1 = A.inv() * b

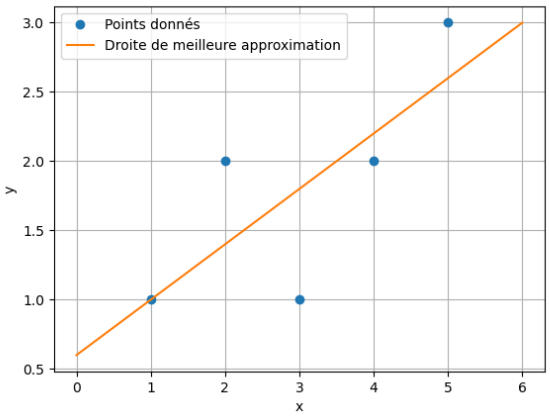
f = lambda t: alpha0 + alpha1 * t
erreur = sum([(y - f(x)) ** 2 for x, y in zip(xp, yp)])

# Affichage
print(f"alpha_0 = {alpha0}")
print(f"alpha_1 = {alpha1}")
print(f"Erreur = {erreur}")

# Graphes
import numpy as np
```

```
import matplotlib.pyplot as plt
xx = np.linspace(0, 6, 100)
yy = [f(t) for t in xx]
plt.figure()
plt.plot(xp, yp, 'o', label='Points donnés')
plt.plot(xx, yy, label='Droite de meilleure approximation')
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.savefig('approximation_lineaire.png')
# plt.show()
```

```
alpha_0 = 3/5
alpha_1 = 2/5
Erreur = 6/5
```



Remarque
Notons que l'élément $(\mathbb{F})_{kj} = \sum_{i=0}^{n} x_i^{k+j}$ est le produit scalaire du vecteur $\mathbf{x} = (x_0^k, \dots, x_n^k)$ avec le vecteur $\mathbf{x}^j = (x_0^j, \dots, x_n^j)$ et que l'élément $b_k = \sum_{i=0}^{n} x_i^k y_i$ est le produit scalaire du vecteur $\mathbf{x}^k = (x_0^k, \dots, x_n^k)$ avec le vecteur colonne $\mathbf{y} = (y_0, \dots, y_n)$; on peut alors écrire $\mathbb{F} = \mathbb{A}^{\mathrm{T}}\mathbb{A}$ et $\mathbf{b} = \mathbb{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{y}$ avec $(\mathbb{A})_{ik} = x_i^k$ avec $i = 0, \dots, n$ et $k = 0, 1$:

$$\mathbb{A} \overset{\text{def}}{=} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix}}_{(n+1)\times(m+1)}.$$

En effet,

$$\mathbb{A}^{\mathrm{T}}\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_0 & x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n+1 & \sum_{i=0}^{n} x_i \\ \sum_{i=0}^{n} x_i & \sum_{i=0}^{n} x_i^2 \end{pmatrix} \qquad \mathbb{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_0 & x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{n} y_i \\ \sum_{i=0}^{n} x_i y_i \end{pmatrix}$$

Remarque
Si l'on divise chaque équation du système par $n+1$, on obtient

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} x_i \\ \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} x_i & \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} y_i \\ \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} x_i y_i \end{bmatrix}.$$

En introduisant les notations classiques de statistique descriptive

- $\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} x_i$ (moyenne de $\mathbf{x} = (x_0, \dots, x_n)$),

© 2024-2027 G. Faccanoni

- $\bar{\mathbf{y}} = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} y_i$ (moyenne de $\mathbf{y} = (y_0, \dots, y_n)$),
- $\mathrm{V}(\mathbf{x}) = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}(x_i - \bar{x})^2$ (variance de $\mathbf{x}$),
- $\mathrm{C}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}(x_i - \bar{\mathbf{x}})(y_i - \bar{\mathbf{y}})$ (covariance de $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$),

le système devient

$$\begin{bmatrix} 1 & \bar{\mathbf{x}} \\ \bar{\mathbf{x}} & \mathrm{V}(\mathbf{x}) + (\bar{\mathbf{x}})^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{y}} \\ \mathrm{C}(\mathbf{x},\mathbf{y}) + \bar{\mathbf{x}}\bar{\mathbf{y}} \end{bmatrix}.$$

La résolution conduit aux formules explicites :

$$\alpha_1 = \frac{\mathrm{C}(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\mathrm{V}(\mathbf{x})}, \qquad \text{coefficient directeur (pente)},$$
$$\alpha_0 = \bar{\mathbf{y}} - \gamma_1 \bar{\mathbf{x}}, \qquad \text{ordonnée à l'origine.}$$

Ainsi, la droite de régression s'écrit

$$y = \alpha_1 (x - \bar{x}) + \bar{y},$$

et elle passe toujours par le *point moyen* $(\bar{x}, \bar{y})$.

Remarque
L'expression $\alpha_1 = \frac{\mathrm{C}(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\mathrm{V}(\mathbf{x})}$ peut être sujette à des erreurs d'arrondi (*roundoff*) lorsque $\mathrm{C}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ et $\mathrm{V}(\mathbf{x})$ sont très petits. On préfère alors la formule numériquement plus stable :

$$\alpha_1 = \frac{\sum_{i=0}^{n}(x_i - \bar{\mathbf{x}})(y_i - \bar{\mathbf{y}})}{\sum_{i=0}^{n}(x_i - \bar{\mathbf{x}})^2}.$$

4.1.1. *Fitting* linéaire après transformations

Même si la relation entre deux quantités n'est pas linéaire, il est parfois possible d'appliquer une transformation pour trouver une relation linéaire.

***Fitting* linéaire après transformation d'un exponentiel** Soit $a > 0$ et considérons la fonction $f(x) = ae^{kx}$: elle est non-linéaire mais si on prend son logarithme on obtient $\ln(f(x)) = \ln(a) + kx$ qui est linéaire et a la forme $\alpha_0 + \alpha_1 x$ avec $\alpha_1 = k$ et $\alpha_0 = \ln(a)$. On peut alors calculer l'équation de la droite de régression sur l'ensemble $\{(x_i, \ln(y_i))\}_{i=0}^{n}$ et obtenir ainsi k et $\ln(a)$. [1]

***Fitting* linéaire après transformation d'une puissance** Soit $a > 0$ et considérons la fonction $f(x) = ax^k$: elle est non-linéaire mais si on prend son logarithme on obtient $\ln(f(x)) = \ln(a) + k\ln(x)$ qui est linéaire et a la forme $\alpha_0 + \alpha_1 x$ avec $\alpha_1 = k$ et $\alpha_0 = \ln(a)$. On peut alors calculer l'équation de la droite de régression sur l'ensemble $\{(\ln(x_i), \ln(y_i))\}_{i=0}^{n}$ et obtenir ainsi k et $\ln(a)$. [2] On verra dans la prochaine section comment travailler directement avec la fonction polynomiale f.

EXEMPLE (FITTING LINÉAIRE APRÈS TRANSFORMATION)
On mesure plusieurs fois la pression P et le volume V d'un gaz de masse donnée. On obtient ainsi $n+1$ mesures $\{\mathrm{P}_i, \mathrm{V}_i\}_{i=0}^{n}$. Selon la thermodynamique, ces quantités sont liées par une relation du type $\mathrm{PV}^\gamma = \mathrm{C}$ où γ et C sont deux constantes à calculer. On a $\ln(\mathrm{PV}^\gamma) = \ln(\mathrm{C})$ ainsi $\ln(\mathrm{P}) + \gamma\ln(\mathrm{V}) = \ln(\mathrm{C})$. Si on pose $x = \ln(\mathrm{V})$ et $y = \ln(\mathrm{P})$, on a une relation de la forme $y = \alpha_1 x + \alpha_0$ avec $\alpha_1 = -\gamma$ et $\alpha_0 = \ln(\mathrm{C})$. On peut alors calculer l'équation de la droite de régression sur l'ensemble $\{(\ln(\mathrm{V}_i), \ln(\mathrm{P}_i))\}_{i=0}^{n}$ et obtenir ainsi $\gamma = -\alpha_1$ et $\mathrm{C} = e^{\alpha_0}$.

EXEMPLE
Soit les 5 points $\{(1,1),(2,2),(3,1),(4,2),(5,3)\}$ (donc $n = 4$). On cherche la fonction de meilleure approximation de la forme $y = \mathrm{A}e^{\mathrm{B}x}$. Si on calcule le logarithme de cette fonction on trouve $\ln(y) = \ln(\mathrm{A}) + \mathrm{B}x$. On peut alors calculer la droite de meilleur approximation sur l'ensemble $\{(1,\ln(1)),(2,\ln(2)),(3,\ln(1)),(4,\ln(2)),(5,\ln(3))\}$ et obtenir ainsi B et $\ln(\mathrm{A})$. Notons $\alpha_0 = \ln(\mathrm{A})$ et $\alpha_1 = \mathrm{B}$, il s'agit de chercher α_0 et α_1 solution du système linéaire

1. Ceci n'est pas équivalent à faire un fitting sur l'ensemble initial $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^{n}$. En effet, si on note $d_i = y_i - ae^{kx_i}$ et $\mathrm{D}_i = \ln(y_i) - (kx_i + \ln(a))$, lorsqu'on calcule la droite de régression sur l'ensemble $\{(x_i, \ln(y_i))\}_{i=0}^{n}$ on minimise D_i et non d_i.
2. À nouveau, ceci n'est pas équivalent à faire un fitting sur l'ensemble initial $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^{n}$. En effet, si on note $d_i = y_i - ax_i^k$ et $\mathrm{D}_i = \ln(y_i) - (k\ln(x_i) + \ln(a))$, lorsqu'on calcule la droite de régression sur l'ensemble $\{(\ln(x_i), \ln(y_i))\}_{i=0}^{n}$ on minimise D_i et non d_i.

$$\begin{pmatrix}(n+1) & \sum_{i=0}^{n} x_i \\ \sum_{i=0}^{n} x_i & \sum_{i=0}^{n} x_i^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_0 \\ \alpha_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sum_{i=0}^{n} \ln(y_i) \\ \sum_{i=0}^{n} x_i \ln(y_i)\end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{pmatrix}4+1 & 1+2+3+4+5 \\ 1+2+3+4+5 & 1^2+2^2+3^2+4^2+5^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_0 \\ \alpha_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\ln(1)+\ln(2)+\ln(1)+\ln(2)+\ln(3) \\ 1\times\ln(1)+2\times\ln(2)+3\times\ln(1)+4\times\ln(2)+5\times\ln(3)\end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{pmatrix}5 & 15 \\ 15 & 55\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_0 \\ \alpha_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\ln(2)+\ln(3) \\ 6\ln(2)+5\ln(3)\end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{pmatrix}5 & 15 \\ 0 & 10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_0 \\ \alpha_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\ln(2)+\ln(3) \\ 2\ln(3)\end{pmatrix}$$

Donc $\alpha_1 = \frac{\ln(3)}{5}$ et $\alpha_1 = \frac{\ln(4)-\ln(9)}{5}$ et enfin $B = \alpha_1$ et $A = e^{\alpha_0}$.

```python
import sympy as sp

# Données
xp = [1, 2, 3, 4, 5]
yp = [1, 2, 1, 2, 3]
log_yp = [sp.log(y) for y in yp]
n = len(xp)

# Système
A = sp.Matrix([[n, sum(xp)], [sum(xp), sum([x ** 2 for x in xp])]])
b = sp.Matrix([sum(log_yp), sum([x * y for x, y in zip(xp, log_yp)])])
alpha0, alpha1 = A.inv() * b
A_val = sp.exp(alpha0)
B_val = alpha1

# Affichage des résultats
print(f"{A = }, {b = }")
print(f"alpha_0 = {alpha0} ainsi A = {A_val}")
print(f"alpha_1 = {alpha1} ainsi B = {B_val}")

# Graphes
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

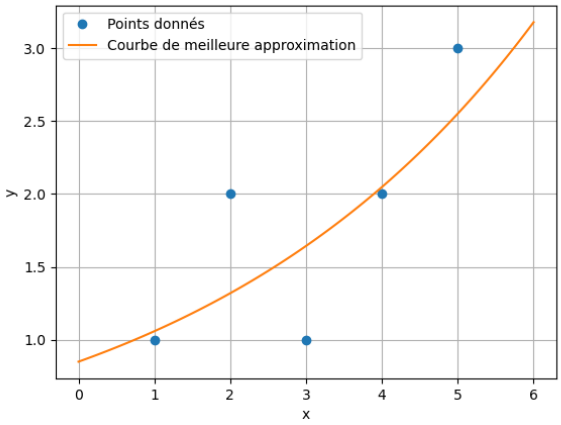
xx = np.linspace(0, 6, 100)
f = lambda t: float(A_val) * np.exp(float(B_val) * t)
yy = f(xx)

plt.figure()
plt.plot(xp, yp, 'o', label='Points donnés')
plt.plot(xx, yy, label='Courbe de meilleure approximation')
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.savefig('approximation_exp.png')
# plt.show()
```

```
A = Matrix([
[ 5, 15],
[15, 55]]), b = Matrix([
[  log(3) + 2*log(2)],
[6*log(2) + 5*log(3)]])
alpha_0 = -2*log(3)/5 + 2*log(2)/5 ainsi A = 2**(2/5)*3**(3/5)/3
```


© 2024-2027 G. Faccanoni

`alpha_1 = log(3)/5 ainsi B = log(3)/5`



4.2. *Fitting* polynomiale

On considère un ensemble de $(n+1)$ points expérimentaux $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^{n}$ et on suppose que les deux grandeurs x et y sont liées, au moins approximativement, par une relation polynomiale, c'est-à-dire de la forme

$$y \approx \sum_{j=0}^{m} a_j x^j,$$

pour certaines constantes a_j.

L'objectif est de déterminer les $m+1$ coefficients a_j de manière à ce que le polynôme

$$f(x) = \sum_{j=0}^{m} a_j x^j$$

s'ajuste le mieux possible aux points observés.

Pour chaque i, on définit l'écart vertical entre le point (x_i, y_i) et le polynôme :

$$d_i(a_0, \dots, a_m) = y_i - \sum_{j=0}^{m} a_j x_i^j.$$

La méthode des moindres carrés consiste à choisir les coefficients a_j qui minimisent la somme des carrés de ces écarts, c'est-à-dire la fonction $\mathscr{E} : \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}_+$ définie par

$$\mathscr{E}(a_0, \dots, a_m) = \sum_{i=0}^{n} \big(y_i - f(x_i)\big)^2 = \sum_{i=0}^{n} \left(y_i - \sum_{j=0}^{m} a_j x_i^j\right)^2 = \sum_{i=0}^{n} \big(y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2 - \cdots - a_m x_i^m\big)^2.$$

Pour minimiser $\mathscr{E}$, on calcule ses points stationnaires, c'est-à-dire les solutions de

$$\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial a_j}(a_0, \dots, a_m) = 0, \qquad j = 0, \dots, m.$$

Un calcul direct donne

$$\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial a_j}(a_0, \dots, a_m) = -2 \sum_{i=0}^{n} x_i^j \left(y_i - \sum_{k=0}^{m} a_k x_i^k\right) = -2 \sum_{i=0}^{n} x_i^j \big(y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2 \cdots - a_m x_i^m\big), \qquad j = 0, \dots, m.$$

Ainsi, les coefficients a_j vérifient le système linéaire $\mathbb{F}\mathbf{a} = \mathbf{b}$ de $(m+1)$ équations en les $(m+1)$ inconnues $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m$ suivant

$$\mathbb{F} = \begin{bmatrix} n+1 & \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 & \cdots & \sum_{i=0}^n x_i^m \\ \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 & \sum_{i=0}^n x_i^3 & \cdots & \sum_{i=0}^n x_i^{m+1} \\ \sum_{i=0}^n x_i^2 & \sum_{i=0}^n x_i^3 & \sum_{i=0}^n x_i^4 & \cdots & \sum_{i=0}^n x_i^{m+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{i=0}^n x_i^m & \sum_{i=0}^n x_i^{m+1} & \sum_{i=0}^n x_i^{m+2} & \cdots & \sum_{i=0}^n x_i^{2m} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^n y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i^2 y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^n x_i^m y_i \end{bmatrix}.$$

ATTENTION

Lorsque $m \geq n$, le polynôme de meilleure approximation coïncide avec le polynôme d'interpolation de $\mathbb{R}_n[x]$.

EXEMPLE

Considérons les 5 points $\{(1,1),(2,2),(3,1),(4,2),(5,3)\}$ (donc $n=4$). On cherche la parabole de meilleure approximation $y = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$. Les coefficients $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)^{\mathrm{T}}$ sont solution du système

$$\mathbb{F}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{b},$$

avec

$$\mathbb{F} = \begin{pmatrix} (n+1) & \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 \\ \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 & \sum_{i=0}^n x_i^3 \\ \sum_{i=0}^n x_i^2 & \sum_{i=0}^n x_i^3 & \sum_{i=0}^n x_i^4 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i^2 y_i \end{pmatrix}.$$

En explicitant les sommes, on obtient

$$\begin{pmatrix} 4+1 & 1+2+3+4+5 & 1^2+2^2+3^2+4^2+5^2 \\ 1+2+3+4+5 & 1^2+2^2+3^2+4^2+5^2 & 1^3+2^3+3^3+4^3+5^3 \\ 1^2+2^2+3^2+4^2+5^2 & 1^3+2^3+3^3+4^3+5^3 & 1^4+2^4+3^4+4^4+5^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2+1+2+3 \\ 1\times 1+2\times 2+3\times 1+4\times 2+5\times 3 \\ 1^2\times 1+2^2\times 2+3^2\times 1+4^2\times 2+5^2\times 3 \end{pmatrix}$$

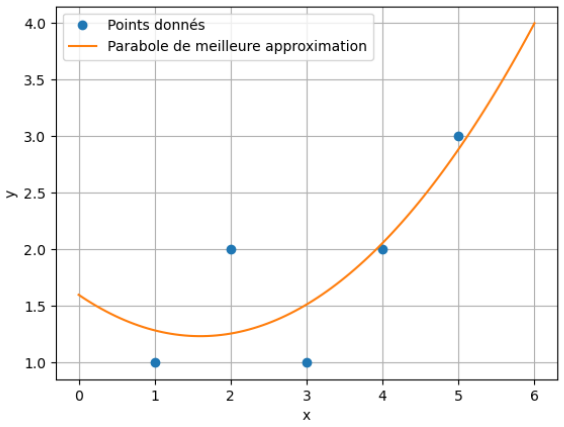
$$\rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} 5 & 15 & 55 \\ 15 & 55 & 225 \\ 55 & 225 & 979 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 31 \\ 125 \end{pmatrix}$$

La résolution donne

$$\alpha_0 = \tfrac{8}{5} = 1.6, \quad \alpha_1 = -\tfrac{16}{35} \approx -0.457, \quad \alpha_2 = \tfrac{1}{7} \approx 0.143.$$

Ainsi, la parabole de meilleure approximation est

$$y \approx 1.6 - 0.457x + 0.143x^2.$$




```
import sympy as sp

# Données
xp = [1, 2, 3, 4, 5]
yp = [1, 2, 1, 2, 3]
n = len(xp)

# Système
```


© 2024-2027 G. FACCANONI

```python
g = lambda xp, q : sum([x ** q for x in xp])
A = sp.Matrix([[g(xp,0), g(xp,1), g(xp,2)], [g(xp,1), g(xp,2), g(xp,3)],
 ↪  [g(xp,2), g(xp,3), g(xp,4)]])
h = lambda xp, yp, q : sum([x ** q * y for x,y in zip(xp,yp)])
b = sp.Matrix([h(xp,yp,0), h(xp,yp,1), h(xp,yp,2)])
alpha0, alpha1, alpha2 = A.inv() * b

# Affichage des résultats
print(f"alpha_0 = {alpha0}")
print(f"alpha_1 = {alpha1}")
print(f"alpha_2 = {alpha2}")

# Graphes
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

xx = np.linspace(0, 6, 100)
f = lambda t: alpha0+alpha1*t+alpha2*t**2
yy = f(xx)

plt.figure()
plt.plot(xp, yp, 'o', label='Points donnés')
plt.plot(xx, yy, label='Parabole de meilleure approximation')
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.savefig('approximation_parabole.png')
# plt.show()
```

```
alpha_0 = 8/5
alpha_1 = -16/35
alpha_2 = 1/7
```

Remarque
On observe que

- les coefficients de $\mathbb{F}$ sont des produits scalaires de vecteurs de la forme $(x_0^k, \dots, x_n^k)$,
- les composantes de $\mathbf{b}$ sont des produits scalaires de ces vecteurs avec $\mathbf{y} = (y_0, \dots, y_n)$.

On peut alors écrire

$$\mathbb{F} = \mathbb{A}^{\mathrm{T}}\mathbb{A}, \qquad \mathbf{b} = \mathbb{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{y}, \qquad \text{où} \quad \mathbb{A} \overset{\text{def}}{=} (x_i^k)_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^m \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^m \end{pmatrix}.$$

La matrice $\mathbb{A}$ est une *matrice de Vandermonde tronquée*. Pour $m = n$, on retrouve la matrice de Vandermonde complète et le système est celui de l'interpolation polynomiale.

ATTENTION
Le système des moindres carrés est en général *mal conditionné* : plus le degré m augmente, plus la matrice $\mathbb{F}$ devient sensible aux erreurs numériques. C'est pourquoi, en pratique, on limite l'approximation polynomiale à des degrés modestes (par exemple $m \leq 5$) et l'on préfère recourir à des *polynômes orthogonaux* (Legendre, Chebyshev) qui conduisent à des systèmes mieux conditionnés.

Remarque (Lien avec les moments statistiques)
On remarque que les coefficients de la matrice $\mathbb{F}$ et du vecteur $\mathbf{b}$ sont des *moments empiriques* de la variable x (et du couple (x,y)). Par exemple :

$$\mathrm{M}_k(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} x_i^k, \qquad \mathrm{M}_{k,1}(x,y) = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} x_i^k y_i.$$

Ainsi, la matrice $\mathbb{F}$ est essentiellement une matrice de *moments* $(\mathrm{M}_{j+k}(x))_{0\le j,k\le m}$ et $\mathbf{b}$ contient les moments mixtes $(\mathrm{M}_{j,1}(x,y))_{0\le j\le m}$.

La variance et la covariance utilisées dans le cas affine ($m=1$) apparaissent alors comme des cas particuliers de ces moments d'ordre 2 et des moments croisés entre x et y.

4.3. *Fitting* dans un espace vectoriel quelconque

La méthode des moindres carrés ne se limite pas aux polynômes. On peut considérer un espace vectoriel $\mathcal{V}$ engendré par une famille de $m+1$ fonctions indépendantes

$$\{\phi_j,\ j=0,\dots,m\}.$$

Par exemple, on peut choisir des fonctions trigonométriques $\phi_j(x)=\cos(jx)$, des fonctions exponentielles $\phi_j(x)=e^{jx}$, etc. Le choix de la famille $\{\phi_j\}$ est généralement guidé par la nature supposée de la relation entre x et y.

Considérons un ensemble de données $\{(x_i,y_i)\}_{i=0}^n$. Nous supposons que y peut être approché par une combinaison linéaire des éléments de cette famille :

$$y(x) \approx \sum_{j=0}^{m} a_j\phi_j(x),$$

où les coefficients a_j sont à déterminer. Pour chaque i, l'erreur d'approximation est

$$d_i(a_0,\dots,a_m) = y_i - \sum_{j=0}^{m} a_j\phi_j(x_i).$$

La méthode des moindres carrés consiste à minimiser la fonction $\mathscr{E}\colon \mathbb{R}^{m+1}\to\mathbb{R}_+$ définie par

$$\mathscr{E}(a_0,\dots,a_m) = \sum_{i=0}^{n} d_i(a_0,\dots,a_m)^2 = \sum_{i=0}^{n}\left(y_i - \sum_{j=0}^{m} a_j\phi_j(x_i)\right)^2 = \sum_{i=0}^{n}\left(y_i - a_0\phi_0(x_i) - a_1\phi_1(x_i) - a_2\phi_2(x_i)\cdots - a_m\phi_m(x_i)\right)^2.$$

Un point stationnaire de $\mathscr{E}$ satisfait

$$\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial a_k} = 0, \quad k=0,\dots,m.$$

Puisque

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial a_0}(a_0,a_1,\dots,a_m) &= -2\sum_{i=0}^{n}\left(\phi_0(x_i)\left(y_i - \sum_{j=0}^{m} a_j\phi_j(x_i)\right)\right) = -2\sum_{i=0}^{n}\left(\phi_0(x_i)\left(y_i - a_0\phi_0(x_i) - a_1\phi_1(x_i) - a_2\phi_2(x_i)\cdots - a_m\phi_m(x_i)\right)\right),\\
\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial a_1}(a_0,a_1,\dots,a_m) &= -2\sum_{i=0}^{n}\left(\phi_1(x_i)\left(y_i - \sum_{j=0}^{m} a_j\phi_j(x_i)\right)\right) = -2\sum_{i=0}^{n}\left(\phi_1(x_i)\left(y_i - a_0\phi_0(x_i) - a_1\phi_1(x_i) - a_2\phi_2(x_i)\cdots - a_m\phi_m(x_i)\right)\right),\\
&\vdots\\
\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial a_m}(a_0,a_1,\dots,a_m) &= -2\sum_{i=0}^{n}\left(\phi_m(x_i)\left(y_i - \sum_{j=0}^{m} a_j\phi_j(x_i)\right)\right) - 2\sum_{i=0}^{n}\left(\phi_m(x_i)\left(y_i - a_0\phi_0(x_i) - a_1\phi_1(x_i) - a_2\phi_2(x_i)\cdots - a_m\phi_m(x_i)\right)\right),
\end{aligned}$$

on obtient alors le système linéaire de $(m+1)$ équations en les $(m+1)$ inconnues $a_0,a_1,\dots,a_m$ suivant

$$\sum_{j=0}^{m} a_j \underbrace{\left(\sum_{i=0}^{n}\phi_k(x_i)\phi_j(x_i)\right)}_{\Phi_{kj}} = \sum_{i=0}^{n}\phi_k(x_i)y_i, \qquad k=0,\dots,m.$$

© 2024-2027 G. Faccanoni

Autrement dit

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \Phi_{00} & \Phi_{01} & \dots & \Phi_{0m} \\ \Phi_{01} & \Phi_{11} & \dots & \Phi_{1m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Phi_{0m} & \Phi_{1m} & \dots & \Phi_{mm} \end{pmatrix}}_{\mathbb{F}} \underbrace{\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}}_{\mathbf{a}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n \phi_0(x_i) y_i \\ \sum_{i=0}^n \phi_1(x_i) y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^n \phi_m(x_i) y_i \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}}.$$

On retrouve le cas polynômial pour $\phi_j(x) = x^j$, puisque alors $\Phi_{kj} = \sum_{i=0}^n x_i^{k+j}$.

Remarque
La matrice $\mathbb{F}$ est en fait une *matrice de Gram* associée au produit scalaire discret

$$\langle f, g \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^n f(x_i) g(x_i).$$

Ainsi $\Phi_{kj} = \langle \phi_k, \phi_j \rangle$ et $\mathbf{b}_j = \langle y, \phi_j \rangle$.

En particulier, si la famille $(\phi_j)_{j=0}^m$ est *orthogonale* pour ce produit scalaire, alors le système $\mathbb{F}\mathbf{a} = \mathbf{b}$ est diagonal et les coefficients se calculent indépendamment :

$$a_j = \frac{\langle y, \phi_j \rangle}{\langle \phi_j, \phi_j \rangle}, \qquad j = 0, \dots, m.$$

C'est notamment le cas pour les fonctions trigonométriques

$$\phi_0(x) = 1, \qquad \phi_{2k-1}(x) = \cos(kx), \qquad \phi_{2k}(x) = \sin(kx),$$

qui conduisent au développement en série de Fourier discrète.

EXEMPLE
Considérons les 5 points

$$\left\{ (0,1),\ (\tfrac{\pi}{2},2),\ (\pi,1),\ (\tfrac{3\pi}{2},2),\ (2\pi,3) \right\}.$$

On cherche la meilleure approximation dans l'espace engendré par

$$\left\{ \phi_0(x) = 1,\ \phi_1(x) = \cos(x) \right\},$$

c'est-à-dire de la forme

$$y(x) = \alpha_0 + \alpha_1 \cos(x).$$

Le système s'écrit

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n \phi_0(x_i)\phi_0(x_i) & \sum_{i=0}^n \phi_0(x_i)\phi_1(x_i) \\ \sum_{i=0}^n \phi_1(x_i)\phi_0(x_i) & \sum_{i=0}^n \phi_1(x_i)\phi_1(x_i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n \phi_0(x_i) y_i \\ \sum_{i=0}^n \phi_1(x_i) y_i \end{pmatrix}.$$

En remplaçant $\phi_0(x) = 1$ et $\phi_1(x) = \cos(x)$:

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n 1 & \sum_{i=0}^n \cos(x_i) \\ \sum_{i=0}^n \cos(x_i) & \sum_{i=0}^n \cos^2(x_i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n y_i \\ \sum_{i=0}^n \cos(x_i) y_i \end{pmatrix}.$$

Or, pour les $x_i = \{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\}$ on a

$$\cos(x_i) = \{1, 0, -1, 0, 1\}, \quad \cos^2(x_i) = \{1, 0, 1, 0, 1\},$$

ainsi

$$\sum_{i=0}^n 1 = 5, \quad \sum_{i=0}^n \cos(x_i) = 1, \quad \sum_{i=0}^n \cos^2(x_i) = 3,$$

et

$$\sum_{i=0}^n y_i = 9, \quad \sum_{i=0}^n \cos(x_i) y_i = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 3.$$

On obtient donc

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

La résolution donne

$$\alpha_0 = \tfrac{12}{7}, \qquad \alpha_1 = \tfrac{3}{7}.$$

```python
import sympy as sp

# Données
xp = [0, sp.pi/2, sp.pi, sp.pi*3/2, 2*sp.pi]
yp = [1,       2,     1,          2,       3]
n = len(xp)

# Base
Phi = [lambda x : 1, lambda x : sp.cos(x)]

# Système
g = lambda xp, i,j: sum([Phi[i](x) * Phi[j](x) for x in xp])
A = sp.Matrix([[g(xp,0,0), g(xp,0,1)], [g(xp,1,0), g(xp,1,1)]])
h = lambda xp, yp, i : sum([Phi[i](x) * y for x, y in zip(xp, yp)])
b = sp.Matrix([h(xp, yp, 0), h(xp, yp, 1)])
alpha0, alpha1 = A.inv() * b

# Affichage des résultats
print(f"alpha_0 = {alpha0}")
print(f"alpha_1 = {alpha1}")

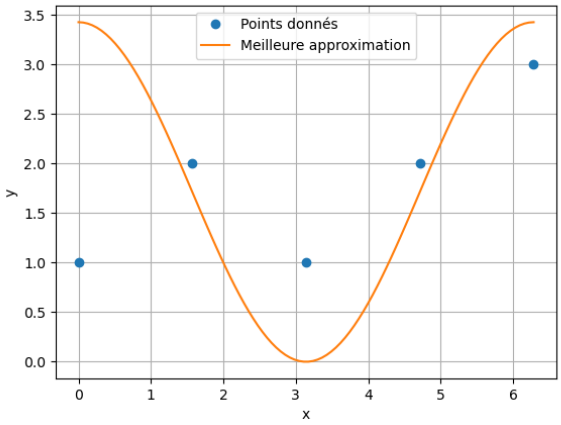
# Graphes
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

xx = np.linspace(0, 2*np.pi, 100)
# Base
Phi = [lambda x : 1, lambda x : np.cos(x)]
f = lambda t: alpha0*Phi[0](t)+alpha0*Phi[1](t)
yy = f(xx)

plt.figure()
plt.plot(xp, yp, 'o', label='Points donnés')
plt.plot(xx, yy, label='Meilleure approximation')
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.savefig('approximation_cos.png')
# plt.show()
```

```
alpha_0 = 12/7
alpha_1 = 3/7
```


© 2024-2027 G. Faccanoni



Remarque
Notons que l'élément Φ_{kj} n'est rien d'autre que le produit scalaire discret du vecteur

$$(\phi_k(x_0), \phi_k(x_1), \ldots, \phi_k(x_n))$$

avec le vecteur

$$(\phi_j(x_0), \phi_j(x_1), \ldots, \phi_j(x_n)).$$

De même, l'élément $b_k = \sum_{i=0}^{n} \phi_k(x_i) y_i$ est le produit scalaire du vecteur

$$(\phi_k(x_0), \phi_k(x_1), \ldots, \phi_k(x_n))$$

avec le vecteur colonne $\mathbf{y} = (y_0, y_1, \ldots, y_n)^{\mathrm{T}}$.

On peut alors écrire de manière compacte

$$\mathbb{F} = \mathbb{A}^{\mathrm{T}}\mathbb{A}, \qquad \mathbf{b} = \mathbb{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{y},$$

où la matrice rectangulaire $(n+1) \times (m+1)$ est définie par

$$\mathbb{A} \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \phi_0(x_0) & \phi_1(x_0) & \ldots & \phi_m(x_0) \\ \phi_0(x_1) & \phi_1(x_1) & \ldots & \phi_m(x_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi_0(x_n) & \phi_1(x_n) & \ldots & \phi_m(x_n) \end{pmatrix}.$$

Ainsi, le problème des moindres carrés s'écrit sous forme matricielle comme

$$\min_{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{m+1}} \|\mathbb{A}\mathbf{a} - \mathbf{y}\|_2^2,$$

dont les équations sont

$$\mathbb{A}^{\mathrm{T}}\mathbb{A}\mathbf{a} = \mathbb{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{y}.$$

Dans la pratique, il est déconseillé de résoudre directement ces équations (problèmes de conditionnement). On préfère utiliser une factorisation $\mathbb{A} = \mathbb{Q}\mathbb{R}$ (décomposition QR) ou une décomposition en valeurs singulières (SVD), qui sont plus stables numériquement.

Enfin, si $n = m$ et que $\mathbb{A}$ est inversible, le problème se réduit à l'interpolation directe : on résout alors exactement le système carré $\mathbb{A}\mathbf{a} = \mathbf{y}$.

4.4. Résumé

Lorsqu'un chercheur met au point une expérience (parce qu'il soupçonne un lien entre deux grandeurs x et y), il obtient des données sous la forme de points $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^{n}$, généralement affectées par des erreurs de mesure. En représentant ces données, l'objectif est de trouver une fonction f qui s'ajuste le mieux possible aux points observés.

On note

$$d_i \stackrel{\text{def}}{=} y_i - f(x_i)$$

l'écart vertical du point (x_i, y_i) par rapport à la fonction f. La **méthode des moindres carrés** consiste à chercher f dans un espace vectoriel $\mathcal{V}$ choisi, de sorte que la *somme des carrés des écarts* soit minimale :

$$\min_{f\in\mathcal{V}} \mathscr{E}_f, \qquad \mathscr{E}_f = \sum_{i=0}^{n} \big(y_i - f(x_i)\big)^2.$$

On suppose que $\mathcal{V}$ est de dimension $m+1$, engendré par les fonctions de base $(\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_m)$. Alors toute fonction $f \in \mathcal{V}$ s'écrit

$$f(x) = \sum_{j=0}^{m} a_j \phi_j(x),$$

et l'erreur devient

$$\mathscr{E}(a_0, \dots, a_m) = \sum_{i=0}^{n} \left(y_i - \sum_{j=0}^{m} a_j \phi_j(x_i) \right)^2.$$

Le gradient de $\mathscr{E}$ s'annule en un vecteur $a = (a_0, \dots, a_m)^{\mathrm{T}}$ qui satisfait le **système** :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n \phi_0(x_i)\phi_0(x_i) & \cdots & \sum_{i=0}^n \phi_0(x_i)\phi_m(x_i) \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{i=0}^n \phi_m(x_i)\phi_0(x_i) & \cdots & \sum_{i=0}^n \phi_m(x_i)\phi_m(x_i) \end{pmatrix}}_{\mathbb{F}} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n \phi_0(x_i) y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^n \phi_m(x_i) y_i \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}}.$$

Notons que, si $n = m$, il s'agit d'une interpolation.
Cas particuliers :

- Si $\phi_j(x) = x^j$, on obtient la **régression polynomiale**.
  - $m = 1$: droite de regression $f = a_0 + a_1 x$. a_0 et a_1 sont alors solution du système linéaire

    $$\begin{bmatrix} (n+1) & \sum_{i=0}^n x_i \\ \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^n y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i y_i \end{bmatrix}$$

    et la droite passe par le point moyen $(\bar{x}, \bar{y})$.
  - $m > 1$: régression polynomiale de degré m, avec matrice $\mathbb{F}_{jk} = \sum_{i=0}^n x_i^{j+k}$.
- Si $\phi_j(x) = e^{jx}$, $\phi_j(x) = \cos(jx)$, ou d'autres choix (ex. $\phi_j(x) = x^{-j}$), on obtient des régressions adaptées à la situation.

EXEMPLE
Considérons l'ensemble de 3 points ($n = 2$)

$$\{(-2,4), (0,0), (1,1)\}.$$

On cherche la fonction de meilleure approximation f dans différents espaces vectoriels.

1. **Régression linéaire polynomiale** ($m = 1$) $f(x) = a_0 + a_1 x$, avec $\phi_j(x) = x^j$ ($j = 0, 1$). Le système est

   $$\begin{pmatrix} (n+1) & \sum_{i=0}^n x_i \\ \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n y_i \\ \sum_{i=0}^n y_i x_i \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \end{pmatrix},$$

   d'où

   $$a_0 = \frac{9}{7}, \quad a_1 = -\frac{8}{7}, \quad f(x) = \frac{9}{7} - \tfrac{8}{7} x.$$

2. **Régression quadratique polynomiale** ($m = 2$) $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, avec $\phi_j(x) = x^j$ ($j = 0, 1, 2$). Le système est

   $$\begin{pmatrix} (n+1) & \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 \\ \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 & \sum_{i=0}^n x_i^3 \\ \sum_{i=0}^n x_i^2 & \sum_{i=0}^n x_i^3 & \sum_{i=0}^n x_i^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n y_i \\ \sum_{i=0}^n y_i x_i \\ \sum_{i=0}^n y_i x_i^2 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ -1 & 5 & -7 \\ 5 & -7 & 17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 17 \end{pmatrix}.$$

   On trouve $a_0 = a_1 = 0$, $a_2 = 1$, donc $f(x) = x^2$. Ici, l'erreur est nulle car $m = n$, on retrouve exactement le polynôme d'interpolation.

 © 2024-2027 G. FACCANONI

3. **Régression exponentielle** ($m=1$) $f(x)=a_0+a_1e^x$, avec $\phi_j(x)=e^{jx}$ ($j=0,1$). On obtient

$$\begin{pmatrix}\sum_{i=0}^n \phi_0(x_i)\phi_0(x_i) & \sum_{i=0}^n \phi_0(x_i)\phi_1(x_i)\\ \sum_{i=0}^n \phi_0(x_i)\phi_1(x_i) & \sum_{i=0}^n \phi_1(x_i)\phi_1(x_i)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\a_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum_{i=0}^n \phi_0(x_i)y_i\\ \sum_{i=0}^n \phi_1(x_i)y_i\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}3 & e^{-2}+1+e\\ e^{-2}+1+e & e^{-4}+1+e^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\a_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\4e^{-2}+e\end{pmatrix}.$$

Numériquement : $a_0\approx 2.842$, $a_1\approx -0.915$.

4. **Régression exponentielle quadratique** ($m=2$) $f(x)=a_0+a_1e^x+a_2e^{2x}$. Le système conduit à

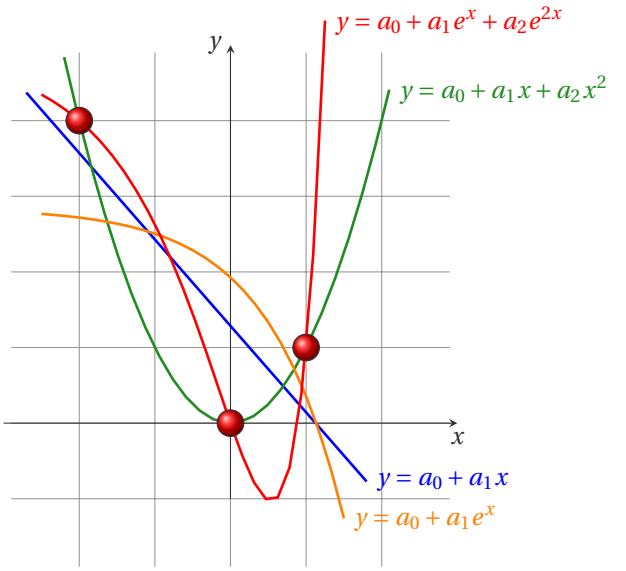
$$\begin{pmatrix}\sum_{i=0}^n \phi_0(x_i)\phi_0(x_i) & \sum_{i=0}^n \phi_0(x_i)\phi_1(x_i) & \sum_{i=0}^n \phi_0(x_i)\phi_2(x_i\\ \sum_{i=0}^n \phi_1(x_i)\phi_0(x_i) & \sum_{i=0}^n \phi_1(x_i)\phi_1(x_i) & \sum_{i=0}^n \phi_1(x_i)\phi_2(x_i)\\ \sum_{i=0}^n \phi_2(x_i)\phi_0(x_i) & \sum_{i=0}^n \phi_2(x_i)\phi_1(x_i) & \sum_{i=0}^n \phi_2(x_i)\phi_2(x_i)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\a_1\\a_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum_{i=0}^n \phi_0(x_i)y_i\\ \sum_{i=0}^n \phi_1(x_i)y_i\\ \sum_{i=0}^n \phi_2(x_i)y_i\end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix}3 & e^{-2}+1+e & e^{-4}+1+e^2\\ e^{-2}+1+e & e^{-4}+1+e^2 & e^{-6}+1+e^3\\ e^{-4}+1+e^2 & e^{-6}+1+e^3 & e^{-8}+1+e^4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\a_1\\a_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\4e^{-2}+e\\4e^{-4}+e^2\end{pmatrix},$$

soit numériquement

$$a_0\approx 4.899,\quad a_1\approx -6.915,\quad a_2\approx 2.016.$$

Ici, l'erreur est nulle car $m=n$, on retrouve exactement la fonction d'interpolation.




```python
import sympy as sp

def exemple(x_data,y_data,m,phi):
    n = len(x_data) # attention ici n = nb de points

    # La fonction dont on cherche les coordonnées dans la base choisie
    # ================================================================

    coeffs = sp.symbols(f'a_0:{m+1}')
    x = sp.symbols('x')
    f = lambda coeffs: sum( coeffs[j] * phi(x,j) for j in range(m+1) )

    # Fonction d'erreur (somme des carrés des écarts)
    # ===============================================
    error = lambda coeffs: sum((y_data[i] - f(coeffs).subs(x, x_data[i]))**2
     ↪  for i in range(n))

    # Calcul des dérivées partielles (pour minimiser l'erreur)
    # ========================================================
    gradient = [sp.diff(error(coeffs), c) for c in coeffs]
```

```
    # Résolution du système linéaire
    # ================================================================
    solution = sp.solve(gradient, coeffs)

    # Affichage des résultats en LaTeX
    latex_output = f"Les coefficients estimés sont : \n"
    latex_output += "\["
    for c in coeffs:
        latex_output += f"{c} = {sp.latex(solution[c])} \\approx
        ↪ {solution[c].evalf():.3f}\\qquad "
    latex_output += "\]"
    print(latex_output)


# Définition des données
x_data = [-2, 0, 1]
y_data = [4, 0, 1]

# (m, phi(x,j))
TESTS = [ (1, lambda x,j : x**j),
          (2, lambda x,j : x**j),
          (1, lambda x,j : sp.exp(j*x)),
          (2, lambda x,j : sp.exp(j*x))]

for i,test in enumerate(TESTS):
    print("Test", i+1)
    exemple(x_data,y_data,test[0],test[1])
```

Test 1 Les coefficients estimés sont :

$$a_0 = \frac{9}{7} \approx 1.286 \qquad a_1 = -\frac{8}{7} \approx -1.143$$

Test 2 Les coefficients estimés sont :

$$a_0 = 0 \approx 0.000 \qquad a_1 = 0 \approx 0.000 \qquad a_2 = 1 \approx 1.000$$

Test 3 Les coefficients estimés sont :

$$a_0 = \frac{-e-1+3e^2+8e^3+3e^4+4e^5}{-2e-2+2e^3+2e^5} \approx 2.842 \qquad a_1 = \frac{-7e^3-2e^4-7e^2}{-2e-2+2e^3+2e^5} \approx -0.915$$

Test 4 Les coefficients estimés sont :

$$a_0 = \frac{1+e+4e^5}{-e^3-e^2+1+e^5} \approx 4.899 \qquad a_1 = \frac{-4e^4-e^2-1}{-e^3-e+1+e^4} \approx -6.915 \qquad a_2 = \frac{e^2+e^3+4e^4}{-e^3-e^2+1+e^5} \approx 2.016$$

EXEMPLE

Considérons l'ensemble de 3 points

$$\{(1,2),(2,0),(3,-1)\}, \qquad n = 2.$$

On se propose de calculer les fonctions de meilleure approximation avec $f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x}$ et $f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2}$.

1. $f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x}$: cela correspond à $m = 1$ avec $\phi_0(x) = 1$, $\phi_1(x) = \frac{1}{x}$.
   On cherche a_0, a_1 qui minimisent

$$\mathscr{E}(a_0,a_1) = \sum_{i=0}^{2} \left(y_i - a_0 - a_1 \frac{1}{x_i}\right)^2.$$

   Les équations donnent

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n \phi_0(x_i)\phi_0(x_i) & \sum_{i=0}^n \phi_0(x_i)\phi_1(x_i) \\ \sum_{i=0}^n \phi_0(x_i)\phi_1(x_i) & \sum_{i=0}^n \phi_1(x_i)\phi_1(x_i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n \phi_0(x_i) y_i \\ \sum_{i=0}^n \phi_1(x_i) y_i \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} \sum 1 & \sum \frac{1}{x_i} \\ \sum \frac{1}{x_i} & \sum \frac{1}{x_i^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum \frac{1}{x_i} y_i \end{pmatrix}.$$

© 2024-2027 G. FACCANONI

En remplaçant par les données :

$$\begin{pmatrix} 3 & \frac{11}{6} \\ \frac{11}{6} & \frac{49}{36} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix}.$$

La solution est

$$a_0 \approx -4.231, \qquad a_1 \approx 6.923 \qquad \rightsquigarrow \qquad f(x) \approx -4.23 + \frac{6.92}{x}.$$

2. $f(x) = a_0 + \dfrac{a_1}{x} + \dfrac{a_2}{x^2}$: cela correspond à $m = 2$ avec $\phi_0(x) = 1$, $\phi_1(x) = \frac{1}{x}$ et $\phi_2(x) = \frac{1}{x^2}$.
On cherche a_0, a_1 et a_2 qui minimisent l'erreur quadratique

$$\mathscr{E}(a_0, a_1, a_2) = \sum_{i=0}^{2} \left(y_i - a_0 - a_1 \tfrac{1}{x_i} - a_2 \tfrac{1}{x_i^2} \right)^2.$$

Cela impose la résolution du système linéaire

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n \phi_0(x_i)\phi_0(x_i) & \sum_{i=0}^n \phi_0(x_i)\phi_1(x_i) & \sum_{i=0}^n \phi_0(x_i)\phi_2(x_i \\ \sum_{i=0}^n \phi_1(x_i)\phi_0(x_i) & \sum_{i=0}^n \phi_1(x_i)\phi_1(x_i) & \sum_{i=0}^n \phi_1(x_i)\phi_2(x_i) \\ \sum_{i=0}^n \phi_2(x_i)\phi_0(x_i) & \sum_{i=0}^n \phi_2(x_i)\phi_1(x_i) & \sum_{i=0}^n \phi_2(x_i)\phi_2(x_i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n \phi_0(x_i) y_i \\ \sum_{i=0}^n \phi_1(x_i) y_i \\ \sum_{i=0}^n \phi_2(x_i) y_i \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n 1 & \sum_{i=0}^n \frac{1}{x_i} & \sum_{i=0}^n \frac{1}{x_i^2} \\ \sum_{i=0}^n \frac{1}{x_i} & \sum_{i=0}^n \frac{1}{x_i^2} & \sum_{i=0}^n \frac{1}{x_i^3} \\ \sum_{i=0}^n \frac{1}{x_i^2} & \sum_{i=0}^n \frac{1}{x_i^3} & \sum_{i=0}^n \frac{1}{x_i^4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n y_i \\ \sum_{i=0}^n \frac{1}{x_i} y_i \\ \sum_{i=0}^n \frac{1}{x_i^2} y_i \end{pmatrix}$$

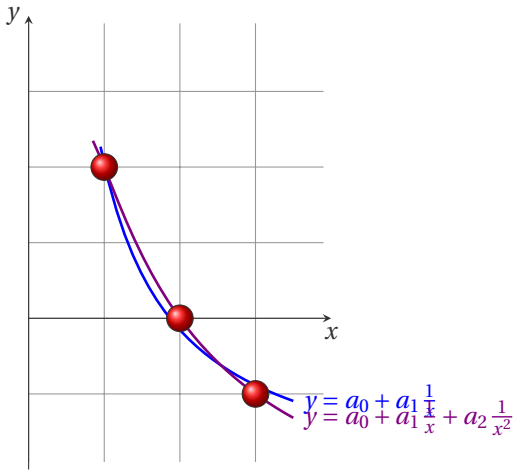
En remplaçant par les données :

$$\begin{pmatrix} 3 & \frac{11}{6} & \frac{49}{36} \\ \frac{11}{6} & \frac{49}{36} & \frac{251}{216} \\ \frac{49}{36} & \frac{251}{216} & \frac{1393}{1296} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{5}{3} \\ \frac{17}{9} \end{pmatrix}.$$

Donc

$$a_0 = -\frac{7}{2}, \qquad a_1 = \frac{17}{2}, \qquad a_2 = -3,$$

i.e. $f(x) = -\frac{7}{2} + \frac{17}{2x} - \frac{3}{x^2}$.
Ici l'erreur est nulle car $m = n$, on retrouve exactement la fonction d'interpolation.




```python
import sympy as sp

def exemple(x_data,y_data,m,phi):
    n = len(x_data) # attention ici n = nb de points

    # La fonction dont on cherche les coordonnées dans la base choisie
    # ================================================================

    coeffs = sp.symbols(f'a_0:{m+1}')
```

```
    x = sp.symbols('x')
    f = lambda coeffs: sum( coeffs[j] * phi(x,j) for j in range(m+1) )

    # Fonction d'erreur (somme des carrés des écarts)
    # ================================================
    error = lambda coeffs: sum((y_data[i] - f(coeffs).subs(x, x_data[i]))**2
     ↪  for i in range(n))

    # Calcul des dérivées partielles (pour minimiser l'erreur)
    # ========================================================
    gradient = [sp.diff(error(coeffs), c) for c in coeffs]

    # Résolution du système linéaire
    # ==============================================================
    solution = sp.solve(gradient, coeffs)

    # Affichage des résultats en LaTeX
    latex_output = f"Les coefficients estimés sont : \n"
    latex_output += "\["
    for c in coeffs:
        latex_output += f"{c} = {sp.latex(solution[c])} \\approx
         ↪ {solution[c].evalf():.3f}\\qquad "
    latex_output += "\]"
    print(latex_output)


# Définition des données
x_data = [1, 2, 3]
y_data = [2, 0,-1]


# (m, phi(x,j))
TESTS = [ (1, lambda x,j : x**(-j)),
          (2, lambda x,j : x**(-j))]

for i,test in enumerate(TESTS):
    print("Test", i+1)
    exemple(x_data,y_data,test[0],test[1])
```

Test 1 Les coefficients estimés sont :

$$a_0 = -\frac{61}{26} \approx -2.346 \qquad a_1 = \frac{57}{13} \approx 4.385$$

Test 2 Les coefficients estimés sont :

$$a_0 = -\frac{7}{2} \approx -3.500 \qquad a_1 = \frac{17}{2} \approx 8.500 \qquad a_2 = -3 \approx -3.000$$

© 2024-2027 G. Faccanoni

4.5. Exercices

Exercice 4.1 (Fitting trigonométrique)
On considère un ensemble de points expérimentaux $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^n$ et on suppose que les deux grandeurs x et y sont liées, au moins approximativement, par une relation de la forme $y = a\sin(\frac{\pi}{2}x) + b\cos(\frac{\pi}{2}x)$. On souhaite alors trouver les constantes a et b pour que la courbe d'équation $y = a\sin(\frac{\pi}{2}x) + b\cos(\frac{\pi}{2}x)$ s'ajuste le mieux possible aux points observés (on parle de *courbe de meilleure approximation*).

Soit $d_i = y_i - (a\sin(\frac{\pi}{2}x_i) + b\cos(\frac{\pi}{2}x_i))$ l'écart vertical du point (x_i, y_i) par rapport à la courbe. La méthode de régression (ou des moindres carrés) est celle qui choisit a et b de sorte que la somme des carrés de ces déviations soit minimale. Pour cela, on doit minimiser la fonction $\mathscr{E}$ définie par

$$\begin{aligned}\mathscr{E} &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+ \\ (a,b) &\mapsto \mathscr{E}(a,b) = \sum_{i=0}^n d_i^2.\end{aligned}$$

Écrire et résoudre le système linéaire qui permet de calculer a et b.

Correction
Pour minimiser $\mathscr{E}$ on cherche ses points stationnaires. Puisque

$$\mathscr{E}(a,b) = \sum_{i=0}^n \left(y_i - \left(a\sin(\frac{\pi}{2}x_i) + b\cos(\frac{\pi}{2}x_i)\right)\right)^2$$

calculons tout d'abord les deux dérivées partielles

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial a}(a,b) &= -2\left(\sum_{i=0}^n \left(y_i - \left(a\sin\left(\tfrac{\pi}{2}x_i\right) + b\cos\left(\tfrac{\pi}{2}x_i\right)\right)\right)\sin\left(\tfrac{\pi}{2}x_i\right)\right), \\ \frac{\partial\mathscr{E}}{\partial b}(a,b) &= -2\left(\sum_{i=0}^n \left(y_i - \left(a\sin\left(\tfrac{\pi}{2}x_i\right) + b\cos\left(\tfrac{\pi}{2}x_i\right)\right)\right)\cos\left(\tfrac{\pi}{2}x_i\right)\right),\end{aligned}$$

et cherchons quand elles s'annulent en même temps. On obtient

$$\begin{aligned}\begin{cases}\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial a}(a,b) = 0 \\ \frac{\partial\mathscr{E}}{\partial b}(a,b) = 0\end{cases} &\iff \begin{cases}\sum_{i=0}^n \left(y_i - \left(a\sin\left(\frac{\pi}{2}x_i\right) + b\cos\left(\frac{\pi}{2}x_i\right)\right)\right)\sin(\frac{\pi}{2}x_i) = 0 \\ \sum_{i=0}^n \left(y_i - \left(a\sin\left(\frac{\pi}{2}x_i\right) + b\cos\left(\frac{\pi}{2}x_i\right)\right)\right)\cos(\frac{\pi}{2}x_i) = 0\end{cases} \\ &\iff \begin{cases}\sum_{i=0}^n \left(\left(a\sin\left(\frac{\pi}{2}x_i\right) + b\cos\left(\frac{\pi}{2}x_i\right)\right)\right)\sin(\frac{\pi}{2}x_i) = \sum_{i=0}^n y_i\sin(\frac{\pi}{2}x_i) \\ \sum_{i=0}^n \left(\left(a\sin\left(\frac{\pi}{2}x_i\right) + b\cos\left(\frac{\pi}{2}x_i\right)\right)\right)\cos(\frac{\pi}{2}x_i) = \sum_{i=0}^n y_i\cos(\frac{\pi}{2}x_i)\end{cases} \\ &\iff \begin{bmatrix}\sum_{i=0}^n \sin^2\left(\frac{\pi}{2}x_i\right) & \sum_{i=0}^n \sin\left(\frac{\pi}{2}x_i\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}x_i\right) \\ \sum_{i=0}^n \sin\left(\frac{\pi}{2}x_i\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}x_i\right) & \sum_{i=0}^n \cos^2\left(\frac{\pi}{2}x_i\right)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\sum_{i=0}^n y_i\sin\left(\frac{\pi}{2}x_i\right) \\ \sum_{i=0}^n y_i\cos\left(\frac{\pi}{2}x_i\right)\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Si on note

$$\mathrm{U} \equiv \sum_{i=0}^n \sin^2\left(\tfrac{\pi}{2}x_i\right), \quad \mathrm{V} \equiv \sum_{i=0}^n \sin\left(\tfrac{\pi}{2}x_i\right)\cos\left(\tfrac{\pi}{2}x_i\right), \quad \mathrm{W} \equiv \sum_{i=0}^n \cos^2\left(\tfrac{\pi}{2}x_i\right), \quad \mathrm{P} \equiv \sum_{i=0}^n y_i\sin\left(\tfrac{\pi}{2}x_i\right), \quad \mathrm{Q} \equiv \sum_{i=0}^n y_i\cos\left(\tfrac{\pi}{2}x_i\right),$$

on doit résoudre le système linéaire

$$\begin{pmatrix}\mathrm{U} & \mathrm{V} \\ \mathrm{V} & \mathrm{W}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathrm{P}\\\mathrm{Q}\end{pmatrix}$$

dont la solution est

$$a = \frac{\mathrm{WP} - \mathrm{VQ}}{\mathrm{UW} - \mathrm{V}^2}, \qquad b = \frac{\mathrm{UQ} - \mathrm{VP}}{\mathrm{UW} - \mathrm{V}^2}.$$

Exercice 4.2 (Fitting linéaire avec deux variables)
La méthode de régression s'étend facilement à des données qui dépendent de deux ou plusieurs variables. On considère un ensemble de points expérimentaux $\{(x_i, y_i, z_i)\}_{i=0}^n$ et on suppose que les trois grandeurs x, y et z sont liées, au moins approximativement, par une relation affine de la forme $z = a + bx + cy$. On souhaite alors trouver les constantes a, b et c pour que le plan d'équation $z = a + bx + cy$ s'ajuste le mieux possible aux points observés (on parle de *plan de meilleure approximation*).

Soit $d_i = z_i - (a + bx_i + cy_i)$ l'écart vertical du point (x_i, y_i, z_i) par rapport au plan. La méthode de régression (ou des moindres carrés) est celle qui choisit a, b et c de sorte que la somme des carrés de ces déviations soit minimale. Pour cela, on doit minimiser la fonction $\mathscr{E}$ définie par

$$\mathscr{E}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_+$$
$$(a,b,c) \mapsto \mathscr{E}(a,b,c) = \sum_{i=0}^{n} d_i^2.$$

1. Écrire le système linéaire qui permet de calculer a, b et c
2. Calculer l'équation du plan de meilleure approximation pour l'ensemble $\{(x_i, y_i, z_i)\}_{i=0}^{5}$ où

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0	0	1	2	2	2
y_i	0	1	0	0	1	2
z_i	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1

On utilisera la méthode du pivot de GAUSS pour la résolution du système linéaire.

Correction

1. Pour minimiser $\mathscr{E}$ on cherche ses points stationnaires. Puisque

$$\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial a}(a,b,c) = -2\left(\sum_{i=0}^{n}(z_i - (a+bx_i+cy_i))\right),$$
$$\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial b}(a,b,c) = -2\left(\sum_{i=0}^{n}(z_i - (a+bx_i+cy_i))x_i\right),$$
$$\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial c}(a,b,c) = -2\left(\sum_{i=0}^{n}(z_i - (a+bx_i+cy_i))y_i\right),$$

on obtient

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathscr{E}}{\partial a}(a,b,c) = 0 \\ \frac{\partial \mathscr{E}}{\partial b}(a,b,c) = 0 \\ \frac{\partial \mathscr{E}}{\partial c}(a,b,c) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \sum_{i=0}^{n}(z_i - (a+bx_i+cy_i)) = 0 \\ \sum_{i=0}^{n}(z_i - (a+bx_i+cy_i))x_i = 0 \\ \sum_{i=0}^{n}(z_i - (a+bx_i+cy_i))y_i = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \sum_{i=0}^{n}(a+bx_i+cy_i) = \sum_{i=0}^{n} z_i \\ \sum_{i=0}^{n}(ax_i + bx_i^2 + cy_ix_i) = \sum_{i=0}^{n} z_ix_i \\ \sum_{i=0}^{n}(ay_i + bx_iy_i + cy_i^2) = \sum_{i=0}^{n} z_iy_i \end{cases}$$
$$\iff \begin{pmatrix} (n+1) & \sum_{i=0}^{n} x_i & \sum_{i=0}^{n} y_i \\ \sum_{i=0}^{n} x_i & \sum_{i=0}^{n} x_i^2 & \sum_{i=0}^{n} x_iy_i \\ \sum_{i=0}^{n} y_i & \sum_{i=0}^{n} x_iy_i & \sum_{i=0}^{n} y_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{n} z_i \\ \sum_{i=0}^{n} z_ix_i \\ \sum_{i=0}^{n} z_iy_i \end{pmatrix}.$$

2. Dans notre cas,

$$\sum_{i=0}^{n} x_i = 7 \qquad \sum_{i=0}^{n} y_i = 4 \qquad \sum_{i=0}^{n} z_i = \frac{11}{2}$$
$$\sum_{i=0}^{n} x_iy_i = 6 \qquad \sum_{i=0}^{n} x_iz_i = \frac{7}{2} \qquad \sum_{i=0}^{n} y_iz_i = \frac{9}{2}$$
$$n+1 = 6 \qquad \sum_{i=0}^{n} x_i^2 = 13 \qquad \sum_{i=0}^{n} y_i^2 = 6$$

donc on a le système linéaire

$$\begin{pmatrix} 6 & 7 & 4 \\ 7 & 13 & 6 \\ 4 & 6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{2} \\ \frac{7}{2} \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix}$$

qu'on peut résoudre par la méthode de GAUSS

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 7 & 4 & \frac{11}{2} \\ 7 & 13 & 6 & \frac{7}{2} \\ 4 & 6 & 6 & \frac{9}{2} \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - \frac{2}{3}L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{7}{6}L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 7 & 4 & \frac{11}{2} \\ 0 & \frac{29}{6} & \frac{4}{3} & -\frac{35}{12} \\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{10}{3} & \frac{5}{6} \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{8}{29}L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 7 & 4 & \frac{11}{2} \\ 0 & \frac{29}{6} & \frac{4}{3} & -\frac{35}{12} \\ 0 & 0 & \frac{86}{29} & \frac{95}{58} \end{array}\right)$$

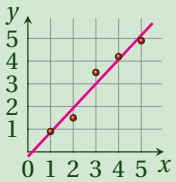
© 2024-2027 G. FACCANONI

dont la solution est

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{123}{86} \\ -\frac{65}{86} \\ \frac{95}{172} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1.430232557 \\ -0.7558139503 \\ 0.5523255766 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4.3 (Fitting linéaire)
Calculer la droite de meilleur approximation de l'ensemble de points suivant :

x	1	2	3	4	5
y	0.9	1.5	3.5	4.2	4.9



Correction
Nous avons 5 points, ainsi $n = 4$.

Il s'agit de chercher a_0 et a_1 qui minimisent l'erreur $\mathscr{E}(a_0, a_1) = \sum_{i=0}^{n} (y_i - (a_0 + a_1 x_i))^2$. Cela impose la résolution du système linéaire

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n x_i^0 & \sum_{i=0}^n x_i \\ \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n y_i \\ \sum_{i=0}^n y_i x_i \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{bmatrix} 5 & 15 \\ 15 & 55 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15.0 \\ 55.7 \end{bmatrix}$$

Donc $a_0 \approx -0.21$ et $a_1 \approx 1.07$.

Exercice 4.4 (Fitting parabolique)
À partir des données

x	1.0	2.5	3.5	4.0	1.1	1.8	2.2	3.7
y	6.008	15.722	27.130	33.772	5.257	9.549	11.098	28.828

on veut calculer la droite et la parabole de régression et comparer les erreurs des chaque régression.

Correction
Nous avons 8 points donc $n = 7$.

1. La droite de régression a équation $y = a_0 + a_1 x$ avec a_0, a_1 solution du système linéaire

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=0}^7 x_i^0 & \sum_{i=0}^7 x_i \\ \sum_{i=0}^7 x_i & \sum_{i=0}^7 x_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^7 y_i \\ \sum_{i=0}^7 y_i x_i \end{pmatrix} \quad \textit{i.e.} \quad \begin{bmatrix} 8.0 & 19.8 \\ 19.8 & 58.48 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 137.364 \\ 429.4061 \end{bmatrix}$$

et on obtient

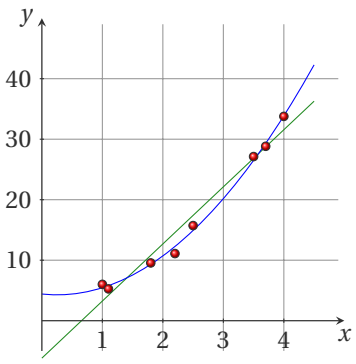
$$\begin{cases} a_0 \approx -6.1899, \\ a_1 \approx 9.43854. \end{cases}$$

2. La parabole de régression a équation $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ avec a_0, a_1, a_2 solution du système linéaire

$$\begin{pmatrix} 8 & \sum_{i=0}^7 x_i & \sum_{i=0}^7 x_i^2 \\ \sum_{i=0}^7 x_i & \sum_{i=0}^7 x_i^2 & \sum_{i=0}^7 x_i^3 \\ \sum_{i=0}^7 x_i^2 & \sum_{i=0}^7 x_i^3 & \sum_{i=0}^7 x_i^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^7 y_i \\ \sum_{i=0}^7 y_i x_i \\ \sum_{i=0}^7 y_i x_i^2 \end{pmatrix} \quad \textit{i.e.} \quad \begin{bmatrix} 8.0 & 19.8 & 58.48 \\ 19.8 & 58.48 & 191.964 \\ 58.48 & 191.964 & 668.9284 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 137.364 \\ 429.4061 \\ 1462.63437 \end{bmatrix}$$

et on obtient

$$\begin{cases} a_0 \approx 4.40567, \\ a_1 \approx -1.0689, \\ a_2 \approx 2.10812. \end{cases}$$




```python
# Définition des données
x_data = [1.0, 2.5, 3.5, 4.0, 1.1, 1.8, 2.2, 3.7]
y_data = [6.008, 15.722, 27.130, 33.772, 5.257, 9.549, 11.098, 28.828]

# Variables pour les coefficients de la droite
alpha_0, alpha_1, alpha_2 = sp.symbols(r'\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2')

# Fonction d'erreur (somme des carrés des écarts)
error = sum((y - (alpha_0 + alpha_1 * x))**2 for x, y in zip(x_data, y_data))

# Calcul des dérivées partielles et égalisation à zéro
grad_alpha_0 = sp.diff(error, alpha_0)
grad_alpha_1 = sp.diff(error, alpha_1)

# Résolution du système d'équations
solution = sp.solve((grad_alpha_0, grad_alpha_1), (alpha_0, alpha_1))

latex_output = f"Les coefficients de la droite d'ajustement sont : \n"
latex_output += f"$\\alpha_0 = {sp.latex(solution[alpha_0])}, \\quad
↪  \\alpha_1 = {sp.latex(solution[alpha_1])}$"+"\n\n"
print(latex_output)

# Fonction d'erreur (somme des carrés des écarts)
error = sum((y - (alpha_0 + alpha_1 * x + alpha_2 * x**2))**2 for x, y in
↪  zip(x_data, y_data))

# Calcul des dérivées partielles et égalisation à zéro
grad_alpha_0 = sp.diff(error, alpha_0)
grad_alpha_1 = sp.diff(error, alpha_1)
grad_alpha_2 = sp.diff(error, alpha_2)

# Résolution du système d'équations
solution = sp.solve((grad_alpha_0, grad_alpha_1, grad_alpha_2), (alpha_0,
↪  alpha_1, alpha_2))

latex_output = f"Les coefficients de la parabole d'ajustement sont : \n"
latex_output += f"$\\alpha_0 = {sp.latex(solution[alpha_0])}, \\quad
↪  \\alpha_1 = {sp.latex(solution[alpha_1])}, \\quad \\alpha_2 =
↪  {sp.latex(solution[alpha_2])}$"
print(latex_output)
```

Les coefficients de la droite d'ajustement sont : $\alpha_0 = -6.18989525065963, \quad \alpha_1 = 9.43854353562005$
Les coefficients de la parabole d'ajustement sont : $\alpha_0 = 4.40567376946054, \quad \alpha_1 = -1.06889613092542, \quad \alpha_2 = 2.1081182154008$

© 2024-2027 G. Faccanoni

Exercice 4.5 (Fitting parabolique)
Le tableau ci-dessous donne la conductivité thermique k du sodium pour différentes valeurs de la température. On veut calculer la parabole de meilleur approximation.

T (°C)	79	190	357	524	690
k	1.00	0.932	0.839	0.759	0.693

Correction
La parabole de régression a équation $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ avec a_0, a_1, a_2 solution du système linéaire

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=0}^4 x_i & \sum_{i=0}^4 x_i^2 \\ \sum_{i=0}^4 x_i & \sum_{i=0}^4 x_i^2 & \sum_{i=0}^4 x_i^3 \\ \sum_{i=0}^4 x_i^2 & \sum_{i=0}^4 x_i^3 & \sum_{i=0}^4 x_i^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^4 y_i \\ \sum_{i=0}^4 y_i x_i \\ \sum_{i=0}^4 y_i x_i^2 \end{pmatrix} \quad i.e. \quad \begin{bmatrix} 5 & 1840 & 920466 \\ 1840 & 920466 & 525238156 \\ 920466 & 525238156 & 319648597458 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.223 \\ 1431.489 \\ 685156.395 \end{bmatrix}$$

et on obtient

$$\begin{cases} a_0 = 1.05258944046584, \\ a_1 = -0.000680740001043015, \\ a_2 = 2.30985609017547 \cdot 10^{-7}. \end{cases}$$

```python
# Définition des données
x_data = [79 , 190 , 357 , 524 , 690]
y_data = [1.00 , 0.932 , 0.839 , 0.759 , 0.693]

# Variables pour les coefficients de la droite
alpha_0, alpha_1, alpha_2 = sp.symbols(r'\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2')

# Fonction d'erreur (somme des carrés des écarts)
error = sum((y - (alpha_0 + alpha_1 * x + alpha_2 * x**2))**2 for x, y in
 ↪  zip(x_data, y_data))

# Calcul des dérivées partielles et égalisation à zéro
grad_alpha_0 = sp.diff(error, alpha_0)
grad_alpha_1 = sp.diff(error, alpha_1)
grad_alpha_2 = sp.diff(error, alpha_2)

# Résolution du système d'équations
solution = sp.solve((grad_alpha_0, grad_alpha_1, grad_alpha_2), (alpha_0,
 ↪  alpha_1, alpha_2))

# Affichage des résultats en LaTeX
latex_output = f"Les coefficients de la parabole d'ajustement sont : \n"
latex_output += f"$\\alpha_0 = {sp.latex(solution[alpha_0])}, \\quad
 ↪  \\alpha_1 = {sp.latex(solution[alpha_1])}, \\quad \\alpha_2 =
 ↪  {sp.latex(solution[alpha_2])}$"
print(latex_output)
```

Les coefficients de la parabole d'ajustement sont: $\alpha_0 = 1.05258944046584$, $\alpha_1 = -0.000680740001043022$, $\alpha_2 = 2.30985609017557 \cdot 10^{-7}$

Exercice 4.6 (Fitting polynomial)
La viscosité cinématique μ de l'eau varie en fonction de la température comme dans le tableau suivant:

T (°C)	0	21.1	37.8	54.4	71.1	87.8	100
μ (10^{-3} m^2 s^{-1})	1.79	1.13	0.696	0.519	0.338	0.321	0.296

On veut évaluer les valeurs $\mu(10°)$, $\mu(30°)$, $\mu(60°)$, $\mu(90°)$ par le polynôme de meilleur approximation de degré 3.

Correction
On a la famille de points $\{(T_i, \mu_i)\}_{i=0}^{6}$. Le polynôme de meilleur approximation de degré 3 s'écrit

$$r(T) = a_0 + a_1 T + a_2 T^2 + a_3 T^3$$

où a_0, a_1, a_2, a_3 sont solution du système linéaire

$$\begin{pmatrix} 6 & \sum_{i=0}^6 T_i & \sum_{i=0}^6 T_i^2 & \sum_{i=0}^6 T_i^3 \\ \sum_{i=0}^6 T_i & \sum_{i=0}^6 T_i^2 & \sum_{i=0}^6 T_i^3 & \sum_{i=0}^6 T_i^4 \\ \sum_{i=0}^6 T_i^2 & \sum_{i=0}^6 T_i^3 & \sum_{i=0}^6 T_i^4 & \sum_{i=0}^6 T_i^5 \\ \sum_{i=0}^6 T_i^3 & \sum_{i=0}^6 T_i^4 & \sum_{i=0}^6 T_i^5 & \sum_{i=0}^6 T_i^6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^6 \mu_i \\ \sum_{i=0}^6 \mu_i T_i \\ \sum_{i=0}^6 \mu_i T_i^2 \\ \sum_{i=0}^6 \mu_i T_i^3 \end{pmatrix}$$

i.e.

$$\begin{bmatrix} 7.0 & 372.2 & 27597.46 & 2260654.85 \\ 372.2 & 27597.46 & 2260654.85 & 195978969.589 \\ 27597.46 & 2260654.85 & 195978969.589 & 17592371724.1956 \\ 2260654.85 & 195978969.589 & 17592371724.1956 & 1616216676927.38 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.09 \\ 160.201 \\ 10176.6664 \\ 766509.794788 \end{bmatrix}$$

et on obtient

$$\begin{cases} a_0 = 1.7957089455664152, \\ a_1 = -0.039321279744794845, \\ a_2 = 0.0003285691641953032, \\ a_3 = -8.458861661547231e-07. \end{cases}$$

On a alors

$r(10°) = 1.4345071783718424$ $r(30°) = 0.8889438745121652$ $r(60°) = 0.4365697400923958$ $r(90°) = 0.301552983390042$

Exercice 4.7
Considérons $n = 10$ points $P_i = (x_i, y_i)$ avec $x_i = (i-1)/(n-1)$, $i = 1, \ldots, n$ et $y_i = 2x_i + 1 + \epsilon_i$ avec $\epsilon_i \in]0; 0.01[$ généré aléatoirement avec une distribution normale. Comparer l'interpolation et le fitting linéaire sur ce jeu de points.

Correction

to do

Exercice 4.8 (Fitting non polynomial)
Considérons l'ensemble de points $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^{n}$ ainsi construit : $x_i \in [-1; 1]$ tous distincts et $y_i = (x_i - 1)x_i(x_i + 1) + r_i$ où $r_i \in [-0.6; 0.6]$ peut être considéré comme un bruit aléatoire associé au signal $(x_i - 1)x_i(x_i + 1)$. On cherche une fonction d'équation $y = \sum_{j=0}^{m} a_j \phi_j(x_i)$ qui approche au mieux cet ensemble de points. Pour cela, on doit minimiser la fonction $\mathscr{E} : \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}_+$ définie par

$$\mathscr{E}(a_0, a_1, \ldots, a_m) = \sum_{i=0}^{n} \left(y_i - \sum_{j=0}^{m} a_j \phi_j(x_i) \right)^2.$$

Il faut alors fixer m et résoudre le système linéaire $\mathbb{A}^T \mathbb{A}\mathbf{a} = \mathbb{A}^T \mathbf{y}$ de $(m+1)$ équations en les $(m+1)$ inconnues $a_0, a_1, \ldots, a_m$ avec $\mathbf{y} = (y_0, y_1, \ldots, y_n)$ et

$$\mathbb{A} \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{\begin{pmatrix} \phi_0(x_0) & \phi_1(x_0) & \ldots & \phi_m(x_0) \\ \phi_0(x_1) & \phi_1(x_1) & \ldots & \phi_m(x_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi_0(x_n) & \phi_1(x_n) & \ldots & \phi_m(x_n) \end{pmatrix}}_{n \times m}.$$

© 2024-2027 G. Faccanoni

Choisissons les fonctions ϕ_j de la forme $\phi_j(x) = \sin(j\pi x)$, $j = 0, \ldots, m$. Soit $n = 20$ et $m = 2$. Comparer sur un graphe la fonction $y = (x-1)x(x+1)$ (le signal souhaité), les points (le signal bruité) et la fonction de meilleure approximation (le signal lissé). Estimer l'erreur entre le signal souhaité et le signal lissé. Répéter le même exercice pour $n = 20$ et $m = 8$, puis $n = 200$ et $n = 8$.

Correction

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Définir la fonction de base (le signal sans bruit)
def signal(x):
    return (x - 1) * x * (x + 1)

# Générer les données bruitées
def generate_noisy_data(n):
    x_data = np.linspace(-1, 1, n)
    noise = np.random.uniform(-0.6, 0.6, n)
    y_data = signal(x_data) + noise
    return x_data, y_data

# Les fonctions phi_j(x) = sin(j * pi * x)
phi_j = lambda x, j : np.sin(j * np.pi * x)

# Construire la matrice A de taille (n, m+1)
def construct_A(x_data, m):
    A = np.zeros((len(x_data), m + 1))
    for i, x in enumerate(x_data):
        for j in range(m + 1):
            A[i, j] = phi_j(x, j)
    return A

# Résoudre le système linéaire pour obtenir les coefficients a_0, a_1, ...,
↪ a_m
def fit_least_squares(x_data, y_data, m):
    A = construct_A(x_data, m)
    ATA = A.T @ A
    ATy = A.T @ y_data
    try:
        a = np.linalg.solve(ATA, ATy)  # Résoudre le système linéaire
    except np.linalg.LinAlgError:
        a = np.linalg.pinv(ATA) @ ATy  # Utiliser le pseudo-inverse si la
        ↪ matrice est singulière
    return a

# Construire la fonction de meilleure approximation
def approximate_function(x, a):
    m = len(a) - 1
    return sum(a[j] * phi_j(x, j) for j in range(m + 1))

# Calculer l'erreur
def calculate_error(y_true, y_approx):
    return np.sqrt(np.mean((y_true - y_approx) ** 2))

# Fonction pour tracer les résultats
def plot_results(x_data, y_data, x_exact, y_exact, y_approx, title):
    plt.figure(figsize=(10, 6))
```

```
    plt.plot(x_exact, y_exact, label='Signal exact', color='green',
    ↪ linewidth=2)
    plt.scatter(x_data, y_data, label='Points bruités', color='red', s=30)
    plt.plot(x_exact, y_approx, label='Signal lissé (approximation)',
    ↪ color='blue', linestyle='--', linewidth=2)
    plt.title(title)
    plt.xlabel('x')
    plt.ylabel('y')
    plt.legend()
    plt.grid(True)
    plt.show()

# Paramètres
m_values = [2, 8]  # Degré du polynôme à tester
n_values = [20, 200]  # Nombre de points à tester

# Résolution pour chaque combinaison de m et n
for m in m_values:
    for n in n_values:
        # Génération des données
        x_data, y_data = generate_noisy_data(n)

        # Résolution du problème d'ajustement
        a = fit_least_squares(x_data, y_data, m)

        # Calcul de la fonction approximée sur un ensemble de points denses
        x_exact = np.linspace(-1, 1, 1000)
        y_exact = signal(x_exact)
        y_approx = [approximate_function(x, a) for x in x_exact]

        # Estimation de l'erreur
        error = calculate_error(y_exact, y_approx)

        # Affichage des résultats
        title = f"n = {n}, m = {m}, Erreur = {error:.4f}"
        plot_results(x_data, y_data, x_exact, y_exact, y_approx, title)
```

Exercice 4.9
L'espérance de vie dans un pays a évoluée dans le temps selon le tableau suivant :

Année	1975	1980	1985	1990
Espérance	72,8	74,2	75,2	76,4

Utiliser l'interpolation polynomiale pour estimer l'espérance de vie en 1977, 1983 et 1988. La comparer avec une interpolation linéaire par morceaux et avec un fitting polynomiale avec $m = 1,2$ (avec $m = 3$ on retrouve le polynôme d'interpolation).

Correction
Si on choisit de poser $x_0 = 0$ pour l'année 1975, $x_1 = 5$ pour l'année 1980 etc., on construit

- $p_1 \in \mathbb{R}_1[x]$ la droite de meilleure approximation (fitting $m = 1$)
- $p_2 \in \mathbb{R}_2[x]$ la parabole de meilleure approximation (fitting $m = 2$)
- $p_3 \in \mathbb{R}_3[x]$ le polynôme d'interpolation ($n = 3$)
- s_1 la spline linéaire

et on évalue ces fonctions en $x = 2$, 8 et 13 (notons que seuls p_3 et s_1 interpolent les données) :

to do

© 2024-2027 G. Faccanoni

On obtient les estimations suivantes :

Année	1977	1983	1988
Espérance p_1	73.352	74.768	75.948
Espérance p_2	73.354	74.830	75.950
Espérance p_3	73.446	74.810	75.858
Espérance s_1	73.360	74.800	75.920

Exercice 4.10 (Fitting linéaire après transformation)
L'évolution de la concentration c d'un médicament dans le sang en fonction du temps t est décrite par la fonction $f(t) = \mathrm{A}te^{\mathrm{B}t}$. En utilisant les mesures suivantes et une transformation adéquate de f estimer A et B par régression linéaire :

t	1	2	3	4	5	6	7	8
c	8.0	12.3	15.5	16.8	17.1	15.8	15.2	14.0

Correction
On a $\ln(f(t)) = \ln(\mathrm{A}) + \ln(t) + \mathrm{B}t$ ainsi $\ln(f(t)) - \ln(t) = \ln(\mathrm{A}) + \mathrm{B}t$ qui a la forme $\alpha_0 + \alpha_1 t$ avec $\alpha_1 = \mathrm{B}$ et $\alpha_0 = \ln(\mathrm{A})$. On peut alors calculer l'équation de la droite de régression sur l'ensemble $\left\{(t_i, y_i = \ln(c_i) - \ln(t_i))\right\}_{i=0}^{n}$ et obtenir ainsi B et $\ln(\mathrm{A})$.

$$\begin{pmatrix} 8 & \sum_{i=0}^{7} t_i \\ \sum_{i=0}^{7} t_i & \sum_{i=0}^{7} t_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{7} \ln(c_i) - \ln(t_i) \\ \sum_{i=0}^{7} t_i \left(\ln(c_i) - \ln(t_i)\right) \end{pmatrix}$$

Donc $\alpha_0 \simeq 2.281$ et $\alpha_1 \simeq -0.215$ et enfin $\mathrm{B} = \alpha_1$ et $\mathrm{A} = e^{\alpha_0}$.

```python
import sympy as sp
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def exemple(x_data,y_data,m,phi):
    n = len(x_data)
    coeffs = sp.symbols(f'a_0:{m+1}')
    x = sp.symbols('x')
    f_expr = sum(coeffs[j] * phi(x,j) for j in range(m+1))
    error = sum((y_data[i] - f_expr.subs(x, x_data[i]))**2 for i in range(n))
    gradient = [sp.diff(error, c) for c in coeffs]
    solution = sp.solve(gradient, coeffs)

    # Affichage des résultats en LaTeX
    latex_output = "Les coefficients estimés sont : \n"
    latex_output += "\\["
    for c in coeffs:
        latex_output += f"{sp.latex(c)} \\approx
        ↪ {solution[c].evalf():.3f}\\qquad "
    latex_output += "\\]"
    print(latex_output)

    return f_expr.subs(solution)  # retourne f(x) ajusté


# Données
x_data = list(range(1,9))
y_data = [8, 123/sp.S(10), 155/sp.S(10), 168/sp.S(10),
          171/sp.S(10), 158/sp.S(10), 152/sp.S(10), 14]

# Transformation : z = ln(y) - ln(x)
x_data_modif = x_data
y_data_modif = [sp.ln(yi)-sp.ln(xi) for xi,yi in zip(x_data,y_data)]
```

```
# Ajustement
m = 1
phi = lambda x,j : x**j
f_expr = exemple(x_data_modif,y_data_modif,m,phi)

# Sympy -> Numpy
x = sp.symbols('x')
z_num = sp.lambdify(x, f_expr, "numpy")               # fonction ajustée en
↪  z(x)
y_num = lambda xx: xx * np.exp(z_num(xx))             # transformation inverse
↪  -> y(x)

# --- Plot 1 : espace transformé (x, ln(y)-ln(x)) ---
x_data_arr = np.array(x_data_modif, dtype=float)
y_data_arr = np.array([float(val) for val in y_data_modif])

plt.figure(figsize=(12,5))

plt.subplot(1,2,1)
plt.scatter(x_data_arr, y_data_arr, color='red', label='Données
↪  transformées')
x_fit = np.linspace(min(x_data_arr), max(x_data_arr), 200)
plt.plot(x_fit, z_num(x_fit), color='blue', label='Fitting (z(x))')
plt.xlabel("x")
plt.ylabel("ln(y) - ln(x)")
plt.legend()
plt.grid(True, alpha=0.3)
plt.title("Régression en espace transformé")

# --- Plot 2 : espace original (x, y) ---
plt.subplot(1,2,2)
plt.scatter(x_data, [float(val) for val in y_data], color='red',
↪  label='Données originales')
x_fit = np.linspace(min(x_data_arr), max(x_data_arr), 200)
plt.plot(x_fit, y_num(x_fit), color='green', label='Fitting reconstruit
↪  (y(x))')
plt.xlabel("x")
plt.ylabel("y")
plt.legend()
plt.grid(True, alpha=0.3)
plt.title("Courbe ajustée en coordonnées originales")

plt.tight_layout()
#plt.show()
```

Les coefficients estimés sont :

$$a_0 \approx 2.281 \qquad a_1 \approx -0.215$$

© 2024-2027 G. Faccanoni

CHAPITRE 5

Initiation aux réseaux de neurones

Dans ce chapitre

5.1 Le perceptron: un neurone artificiel . . . 195
5.1.1 Définitions, vocabulaire et schéma . . . 195
5.1.2 Les deux visages du perceptron . . . 196
5.1.3 $F_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})$ avec Heaviside: séparation linéaire et opérations logiques . . . 197
5.1.4 $F\mathbf{a}(\mathbf{x})$ avec sigmoïde: sortie graduée, même frontière, degré de confiance . . . 201
5.1.5 $F_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})$ avec ReLU: activation partielle, régions nulles vs actives . . . 202
5.1.6 Fonctions d'activation usuelles . . . 204
5.2 Apprentissage sur un perceptron . . . 206
5.2.1 Fonction de perte . . . 206
5.2.2 Cas linéaire ($\phi = \mathrm{id}$): lien avec la régression . . . 207
5.2.3 Cas non linéaire: pourquoi $\nabla E = 0$ ne se résout plus . . . 208
5.2.4 Descente de gradient . . . 209
5.2.5 Calcul du gradient et rétropropagation sur un perceptron . . . 210
5.2.6 Ensemble d'entraînement et ensemble de test . . . 213
5.2.7 Normalisation des données . . . 213
5.2.8 Résumé de la démarche d'apprentissage et exemple complet . . . 214
5.3 Réseau de neurones . . . 225
5.3.1 Limites du perceptron: le cas du OU exclusif . . . 225
5.3.2 Architecture d'un réseau de neurones . . . 226
5.3.3 $F_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})$: frontières de décision et approximation universelle . . . 228
5.3.4 Rétropropagation sur un réseau de neurones . . . 230
5.3.5 Autres fonctions de perte . . . 234
5.4 Annexe: PINN (apprentissage non supervisé) . . . 236
5.4.1 EDO, problème de Cauchy, solutions exacte / approchée / PINN . . . 236
5.4.2 Un schéma classique: le schéma d'Euler explicite . . . 237
5.4.3 Approximation par réseau de neurones, fonction coût PINN . . . 238
5.4.4 Comparaison Euler vs PINN sur un exemple . . . 239
5.5 Exercices . . . 242
5.5.1 Perceptron à poids fixés $F_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})$ . . . 242
5.5.2 Perceptron à entrées fixées $\tilde{F}^{(i)}(\mathbf{a})$ . . . 243
5.5.3 Fonctions d'activation . . . 244
5.5.4 Fonctions d'erreur . . . 245
5.5.5 Réseau de neurones à poids fixés $F_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})$ . . . 245
5.5.6 Réseau de neurones à entrées fixées $\tilde{F}^{(i)}(\mathbf{a})$ . . . 251
5.5.7 Retropropagation, apprentissage, tests . . . 254

Dans le chapitre précédent, nous avons présenté le principe de l'approximation par les moindres carrés dans un espace vectoriel de dimension finie. L'idée consiste à construire une fonction f, appartenant à cet espace vectoriel, qui approche au mieux un ensemble de points $\mathscr{A} = \left\{(x^{(i)}, y^{(i)})\right\}$ appelé ensemble d'entraînement.

Dans ce chapitre, nous généralisons cette idée : la fonction f ne sera plus une simple combinaison linéaire d'éléments d'une base, mais une fonction obtenue par **composition** de combinaisons affines et de fonctions non linéaires. Cette généralisation ouvre des perspectives considérables, au prix de difficultés nouvelles : la minimisation de l'erreur ne conduit plus à un système linéaire et l'existence même d'un minimum global n'est plus garantie.

Les idées clés sont les suivantes.

De la séparation linéaire à la frontière arbitraire. Un perceptron seul sépare l'espace des entrées par un unique hyperplan : il ne peut traiter que des problèmes *linéairement séparables*. En composant plusieurs perceptrons en couches successives, on obtient des frontières de décision de formes arbitrairement complexes. C'est le théorème d'approximation universelle.

De la solution analytique à l'algorithme numérique. Quand la fonction d'activation est l'identité, la fonction de perte est convexe et son minimum se calcule exactement en résolvant un système linéaire (c'est la régression vue au chapitre précédent). Dès que la fonction d'activation est non linéaire, cette propriété disparaît et on doit recourir à la **descente de gradient**, calculée par la règle de la chaîne.

Du perceptron au réseau par composition. Tout ce qui sera établi pour un perceptron s'applique *sans modification de principe* aux réseaux de neurones. Seul le calcul du gradient devient plus complexe, car la fonction est une composition de plusieurs couches plutôt que d'une seule.

Pour comprendre l'architecture des réseaux complexes, il convient de commencer par l'unité de calcul élémentaire : le perceptron, puis de voir comment l'assemblage de plusieurs perceptrons donne naissance à un réseau de neurones.

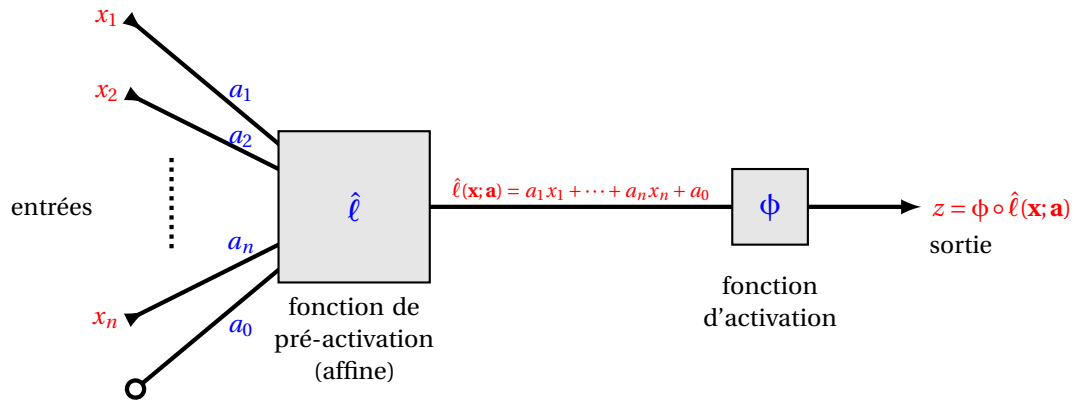
© 2024-2027 G. Faccanoni

5.1. Le perceptron : un neurone artificiel

Un perceptron [1] est l'unité de calcul élémentaire des réseaux de neurones.

5.1.1. Définitions, vocabulaire et schéma

Un perceptron prend un vecteur d'entrée, lui applique successivement une fonction affine puis une fonction d'activation ϕ, et renvoie une valeur en sortie.



Pourquoi composer une fonction affine avec une fonction non linéaire ? Parce qu'une simple combinaison linéaire des entrées ne ferait que projeter les données sur une droite (ou un hyperplan), sans possibilité de créer des séparations courbes. La non-linéarité introduite par ϕ est ce qui donne au perceptron leur expressivité. Détaillons maintenant chaque partie.

- **Données en entrée** $\mathbf{x} \stackrel{\text{def}}{=} (x_1, \dots, x_n)$.
- **Poids** Le perceptron est caractérisé par $n+1$ poids $\mathbf{a} \stackrel{\text{def}}{=} (a_0, a_1, \dots, a_n)$: les coefficients $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ et le *biais* $a_0 \in \mathbb{R}$.
- **Pre-activation** On introduit la fonction de pré-activation définie comme suit :

$$\begin{aligned} \hat{\ell} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n+1} &\to \mathbb{R} \\ (\mathbf{x};\mathbf{a}) &\mapsto \hat{\ell}(\mathbf{x};\mathbf{a}) = a_0 + \sum_{j=1}^{n} a_j x_j. \end{aligned}$$

  Le point-virgule sépare l'entrée $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ (à gauche) du vecteur de paramètres $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{n+1}$ (à droite). Cette asymétrie de rôles est au cœur de toute la suite :
  - si on fixe $\mathbf{a}$, la fonction $\hat{\ell}(\cdot;\mathbf{a})$ est une fonction de $\mathbf{x}$ seul et est **affine** (linéaire lorsque $a_0 = 0$) ;
  - si on fixe $\mathbf{x}$, la fonction $\hat{\ell}(\mathbf{x};\cdot)$ est une fonction de $\mathbf{a}$ seul et est **affine**.
- **Fonction d'activation.** La fonction $\hat{\ell}$ est ensuite composée avec une fonction d'activation :

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ y &\mapsto \phi(y), \end{aligned}$$

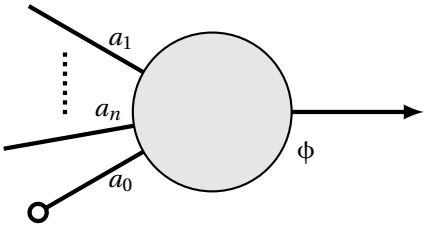
  qui est en général non linéaire. Son rôle est fondamental : sans elle, une composition de fonctions affines resterait affine, ce qui limiterait drastiquement la richesse des fonctions représentables.
- **Fonction mère du perceptron.** La sortie du perceptron est la composée :

$$\begin{aligned} \hat{\mathrm{F}} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n+1} &\to \mathbb{R} \\ (\mathbf{x};\mathbf{a}) &\mapsto \hat{\mathrm{F}}(\mathbf{x};\mathbf{a}) = \phi\big(\hat{\ell}(\mathbf{x};\mathbf{a})\big). \end{aligned}$$

  Le point-virgule sépare l'entrée $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ (à gauche) du vecteur de paramètres $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{n+1}$ (à droite). $\hat{\mathrm{F}}$ représente l'**architecture immuable du modèle** : elle prend un vecteur de données et une configuration de poids pour retourner la prédiction.

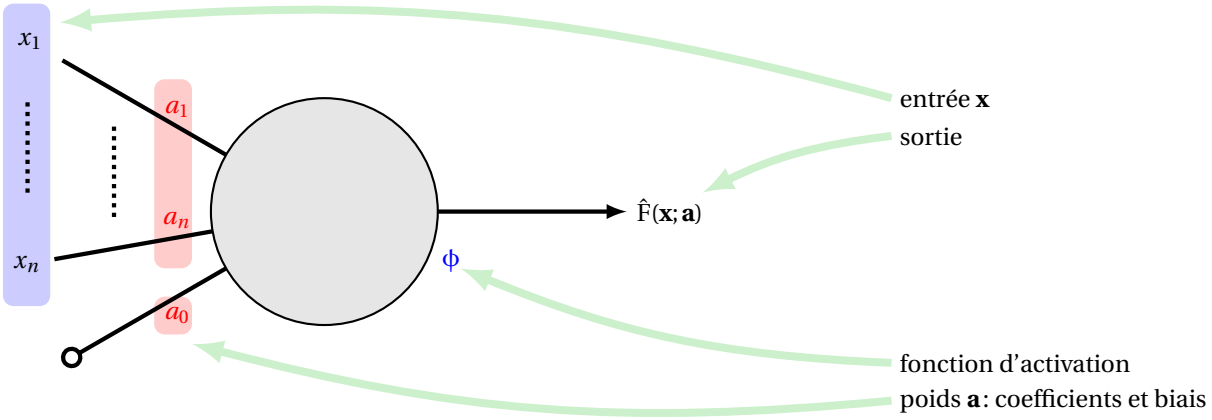
1. Le perceptron, premier modèle de neurone artificiel, a été introduit en 1957 par le psychologue Frank Rosenblatt (1928-1971). En 1969, Marvin Minsky fait paraître avec le mathématicien et informaticien Seymour Papert (1928–2016), un ouvrage intitulé Perceptrons, pour mettre en évidence les limitations des procédures d'apprentissage en général et du perceptron en particulier. Ils démontrent que les réseaux monocouches ne réalisent que des fonctions très élémentaires dites linéairement séparables.

Un perceptron est généralement représenté de manière plus condensée sous la forme d'un **neurone**, avec des poids associés aux arêtes d'entrée. L'arête terminée par un rond indique qu'elle correspond au biais (cela ne correspond pas à une entrée). On précise en indice la fonction d'activation ϕ.



Résumons le vocabulaire utilisé ainsi que les termes anglais correspondants :

- le perceptron est dit **linéaire** si le biais vaut 0 ; sinon il est dit **affine** ;
- les **poids** (*weights*) ou **paramètres** sont les **coefficients** $a_1, \dots, a_n$, auxquels s'ajoute le **biais** (*bias*) a_0 ;
- un perceptron est défini par ses poids et sa fonction d'activation ;
- chaque perceptron définit une fonction $\hat{\mathrm{F}}$ qui est la composée d'une **fonction affine** $\hat{\ell}$ et d'une **fonction d'activation** ϕ ;
- un perceptron est utilisé pour une **évaluation** : pour une **entrée** (*input*) $\mathbf{x} \overset{\text{def}}{=} (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et un jeu de poids fixé $\mathbf{a} \overset{\text{def}}{=} (a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, on calcule la **sortie** (*output*) $\hat{\mathrm{F}}(\mathbf{x}; \mathbf{a}) \in \mathbb{R}$.



5.1.2. Les deux visages du perceptron

Pour lever toute ambiguïté lors de la manipulation mathématique des réseaux de neurones ou des perceptrons, il est important de bien distinguer ce qui relève des **variables d'entrée** (les données du problème) et ce qui relève des **paramètres** (les poids que l'on cherchera à fixer). Nous formalisons cette double dépendance à l'aide d'une fonction générique à deux arguments, notée $\hat{\mathrm{F}}$:

$$\begin{aligned} \hat{\mathrm{F}} \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n+1} &\to \mathbb{R} \\ (\mathbf{x}; \mathbf{a}) &\mapsto \boxed{z = \hat{\mathrm{F}}(\mathbf{x}; \mathbf{a})} \end{aligned}$$

où le *point-virgule* sépare l'entrée $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ (à gauche) du vecteur de paramètres $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{n+1}$ (à droite). $\hat{\mathrm{F}}$ représente l'**architecture immuable du modèle** : elle prend un vecteur de données *et* une configuration de poids pour retourner la prédiction.

De cette fonction mère découlent deux restrictions fondamentales, $\mathrm{F}_{\mathbf{a}}$ et $\tilde{\mathrm{F}}^{(i)}$, qui sont au cœur de toute la suite du chapitre.

- **Perceptron comme fonction de l'entrée (poids fixés) : $\mathrm{F}_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})$.**
  Pour un vecteur de poids $\mathbf{a}$ donné et fixé, on définit la restriction de $\hat{\mathrm{F}}$ par rapport à l'entrée :

$$\begin{aligned} \mathrm{F}_{\mathbf{a}} \colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ \mathbf{x} &\mapsto \mathrm{F}_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) \overset{\text{def}}{=} \hat{\mathrm{F}}(\mathbf{x}; \mathbf{a}). \end{aligned}$$

© 2024-2027 G. Faccanoni

Les poids $\mathbf{a}$ jouent le rôle de paramètres fixes : la seule variable est $\mathbf{x}$. C'est la perspective de la *prédiction* : pour des poids donnés, que calcule le perceptron en fonction de l'entrée ? De même, on note :

$$\begin{aligned} \ell_{\mathbf{a}} \colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ \mathbf{x} &\mapsto \ell_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) \overset{\text{def}}{=} \hat{\ell}(\mathbf{x};\mathbf{a}), \end{aligned}$$

de sorte que $\mathrm{F}_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = \phi(\ell_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}))$.

- **Perceptron comme fonction des poids (entrée fixée) : $\tilde{\mathrm{F}}^{(i)}(\mathbf{a})$.**

  On considère maintenant un ensemble de couple constituant les données d'apprentissage $\left\{(\mathbf{X}^{(i)}, y^{(i)})\right\}_{i=1}^{\mathrm{N}}$. Ici, $\mathbf{X}^{(i)}$ est l'entrée et $y^{(i)}$ la valeur attendue.
  Pour chaque donnée $\mathbf{X}^{(i)}$, le perceptron fournit une prédiction qui dépend des poids :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathrm{F}}^{(i)} \colon \mathbb{R}^{n+1} &\to \mathbb{R} \\ \mathbf{a} &\mapsto \tilde{\mathrm{F}}^{(i)}(\mathbf{a}) \overset{\text{def}}{=} \hat{\mathrm{F}}(\mathbf{X}^{(i)};\mathbf{a}) \end{aligned}$$

  La donnée $\mathbf{X}^{(i)}$ joue le rôle de paramètre fixe, tandis que $\mathbf{a}$ est la variable. C'est la perspective de l'*apprentissage* : pour une donnée fixée, comment la prédiction varie-t-elle en fonction des poids ? De même :

$$\begin{aligned} \tilde{\ell}^{(i)} \colon \mathbb{R}^{n+1} &\to \mathbb{R} \\ \mathbf{a} &\mapsto \tilde{\ell}^{(i)}(\mathbf{a}) \overset{\text{def}}{=} \hat{\ell}(\mathbf{X}^{(i)};\mathbf{a}), \end{aligned}$$

  de sorte que $\tilde{\mathrm{F}}^{(i)}(\mathbf{a}) = \phi(\tilde{\ell}^{(i)}(\mathbf{a}))$.

Remarque
Les six objets $\hat{\mathrm{F}}$, $\mathrm{F}_{\mathbf{a}}$, $\tilde{\mathrm{F}}^{(i)}$ et $\hat{\ell}$, $\ell_{\mathbf{a}}$, $\tilde{\ell}^{(i)}$ suivent exactement le même schéma : une fonction mère à deux arguments, dont on fixe tour à tour l'un ou l'autre. Cette symétrie est au cœur de toute la suite du chapitre.

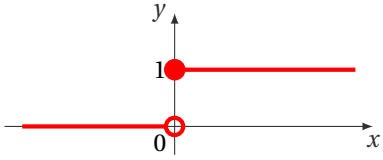
5.1.3. $\mathrm{F}_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})$ avec Heaviside : séparation linéaire et opérations logiques

Commençons par considérer le perceptron comme une fonction de l'entrée uniquement, les poids $\mathbf{a}$ étant fixés : $\mathrm{F}_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})$. Cette perspective correspond à la phase de prédiction : pour des poids donnés, que sépare géométriquement le perceptron dans l'espace des entrées ? Nous étudions trois fonctions d'activation : la fonction de Heaviside, qui produit une frontière de décision franche (séparation binaire), puis la fonction sigmoïde, qui fournit une réponse graduée interprétable comme un degré de confiance, enfin la fonction ReLU.

⋆ Frontière de décision : l'hyperplan $\ell_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = 0$

Considérons un perceptron à n variables, de poids $\mathbf{a}$, muni comme fonction d'activation de la fonction marche de Heaviside définie par :

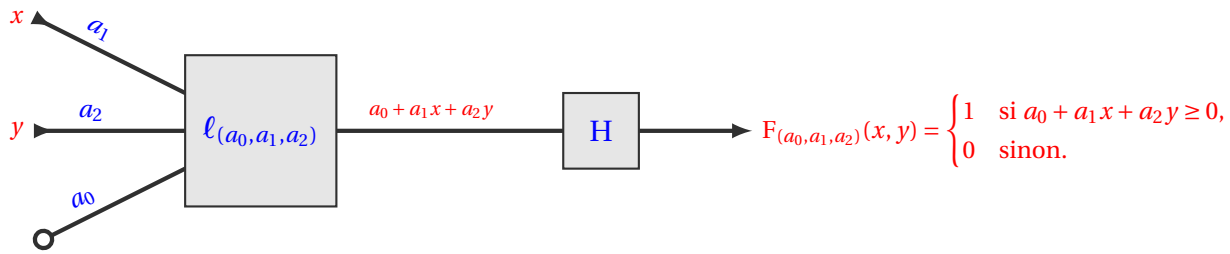
$$\mathrm{H}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$



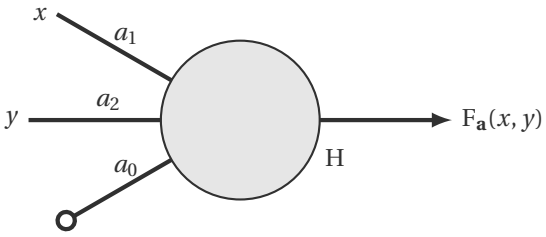
Il s'agit de la donnée de $n+1$ coefficients réels $\mathbf{a} \overset{\text{def}}{=} (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ auxquels est associée la fonction $\mathrm{F}_{\mathbf{a}} \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $\mathrm{F}_{\mathbf{a}} \overset{\text{def}}{=} \mathrm{H} \circ \ell_{\mathbf{a}}$, c'est-à-dire

$$\mathrm{F}_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = \mathrm{H}(\ell_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})) = \begin{cases} 1 & \text{si } a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

EXEMPLE (PERCEPTRON À DEUX ENTRÉES)
Dans le cas de deux entrées, les poids sont trois réels a_1, a_2 (les coefficients) et a_0 (le biais). Notons x et y les deux réels en entrée. La fonction $\ell_{\mathbf{a}}$ est donc $\ell_{(a_0,a_1,a_2)}(x,y) = a_0 + a_1 x + a_2 y$ et la valeur en sortie est la suivante :



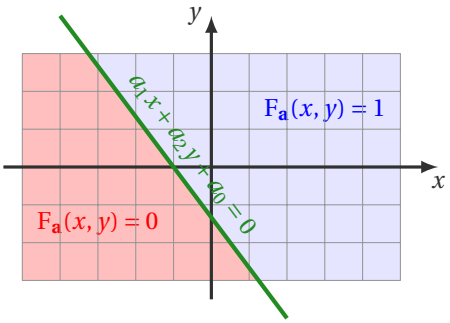
On représente ce neurone ainsi :



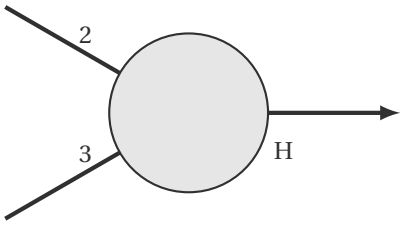
La fonction $\ell_{\mathbf{a}}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est la fonction affine $\ell_{\mathbf{a}}(x,y) = a_1x + a_2y + a_0$. Si la fonction d'activation est la fonction marche de Heaviside, alors le perceptron affine définit une fonction $F_{\mathbf{a}}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par la formule

$$F_{\mathbf{a}}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } a_1x + a_2y + a_0 \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

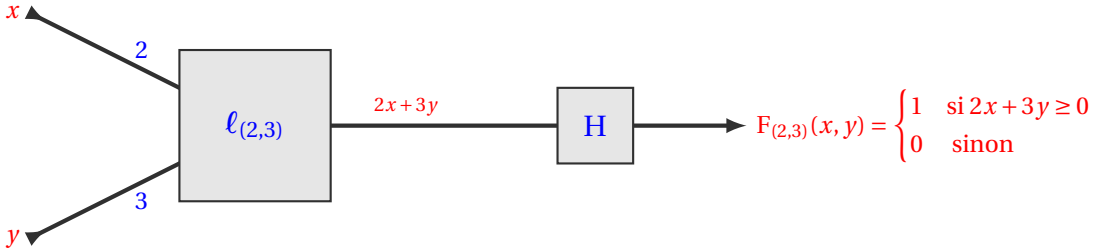
Un perceptron affine à deux entrées sépare donc le plan en deux parties, la frontière étant la droite d'équation $a_1x + a_2y + a_0 = 0$. D'un côté de cette droite la fonction $F_{\mathbf{a}}$ vaut 1, de l'autre elle vaut 0.



EXEMPLE (CAS LINÉAIRE SANS BIAIS)
Considérons un perceptron linéaire (donc $a_0 = 0$) à deux entrées, ayant les poids $a_1 = 2$ et $a_2 = 3$ et de fonction d'activation la fonction marche de Heaviside :



Notons x et y les deux réels en entrée. La fonction linéaire $\ell_{\mathbf{a}}$ est donc $\ell_{(2,3)}(x,y) = 2x + 3y$ et la valeur en sortie est la suivante :

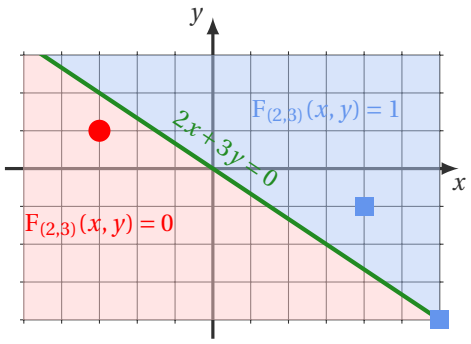


© 2024-2027 G. FACCANONI

- **Évaluation en quelques points.**

Point (x,y)	$\ell_{\mathbf{a}}(x,y) = 2x+3y$	$\mathrm{F}_{(2,3)}(x,y)$
$(4,-1)$	$5 \geq 0$	1
$(-3,1)$	$-3 < 0$	0
$(6,-4)$	$0 \geq 0$	1

- **Interprétation.** La fonction $\mathrm{F}_{(2,3)}$ prend seulement deux valeurs : 0 ou 1. La frontière correspond aux points (x,y) tels que $\ell_{\mathbf{a}}(x,y) = 0$, c'est-à-dire à la droite $2x+3y=0$. Pour les points au-dessus de la droite (ou sur la droite) la fonction $\mathrm{F}_{(2,3)}$ prend la valeur 1 ; pour les points en-dessous de la droite, la fonction $\mathrm{F}_{(2,3)}$ vaut 0. Comme le biais est nul, la droite passe par l'origine.



Remarque (Équation d'une droite par deux points)
Soient $\mathrm{P} = (\mathrm{P}_x, \mathrm{P}_y)$ et $\mathrm{Q} = (\mathrm{Q}_x, \mathrm{Q}_y)$. Si $\mathrm{Q}_x \neq \mathrm{P}_x$, la droite a pour équation $y = \frac{\mathrm{Q}_y - \mathrm{P}_y}{\mathrm{Q}_x - \mathrm{P}_x}(x - \mathrm{P}_x) + \mathrm{P}_y$; si $\mathrm{Q}_x = \mathrm{P}_x$, elle est verticale et a pour équation $x = \mathrm{P}_x$. Une forme unifiée (valable dans tous les cas) est :

$$(\mathrm{Q}_x - \mathrm{P}_x)(y - \mathrm{P}_y) = (\mathrm{Q}_y - \mathrm{P}_y)(x - \mathrm{P}_x) \quad \rightsquigarrow \quad \underbrace{(\mathrm{P}_y - \mathrm{Q}_y)}_{a_1} x + \underbrace{(\mathrm{Q}_x - \mathrm{P}_x)}_{a_2} y + \underbrace{(\mathrm{Q}_y \mathrm{P}_x - \mathrm{Q}_x \mathrm{P}_y)}_{a_0} = 0. \tag{5.1}$$

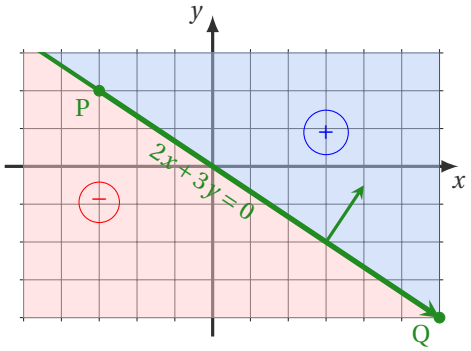
Cette équation est définie à un facteur près. En particulier, remplacer (a_1, a_2, a_0) par $(-a_1, -a_2, -a_0)$ décrit la même droite.

Puisqu'on va composer avec la fonction de Heaviside, il faut décider de quel coté la fonction vaudra 1. Si on considère le segment (orienté) qui va de P à Q et la formule (5.1), la partie positive se trouve à gauche. Si on préfère un calcul analytique, on fixe un point (x_0, y_0) qui n'appartient pas à la droite et on calcule $\mathrm{S}(x_0, y_0) = a_1 x_0 + a_2 y_0 + a_0$. Si $\mathrm{S}(x_0, y_0)$ n'a pas le signe souhaité, on remplace (a_1, a_2, a_0) par $(-a_1, -a_2, -a_0)$.

Si on considère l'exemple précédent, on prend par exemple $\mathrm{P} = (-3, 2)$ et $\mathrm{Q} = (6, -4)$. La forme (5.1) donne

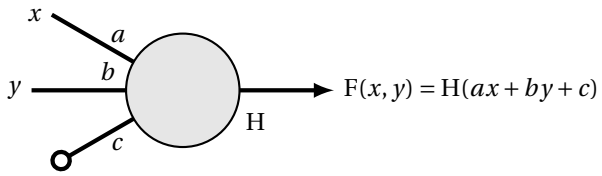
$$\underbrace{(2-(-4))}_{a_1} x + \underbrace{(6-(-3))}_{a_2} y + \underbrace{((-4)\times(-3) - 6\times 2)}_{a_0} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad 6x + 9y = 0.$$

Soit encore $2x+3y=0$. Nous voulons que le point $(4,-1)$ soit bleu, c'est-à-dire que $\mathrm{S}(4,-1) \geq 0$. On a $2\times 4 + 3\times(-1) = 8 - 3 = 5 \geq 0$ donc on peut garder $a_1 = 2$, $a_2 = 3$ et $a_0 = 0$.



⋆ Exemples : OU et ET comme perceptrons Heaviside (séparation linéaire)

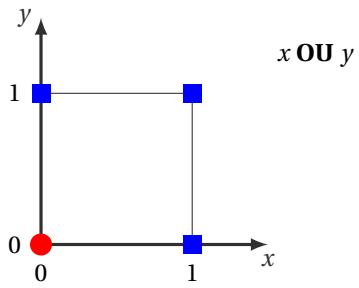
Un booléen est une variable qui peut prendre soit la valeur « vrai », soit la valeur « faux ». Dans la pratique, on associe 1 à « vrai » et 0 à « faux ». Les opérations logiques booléennes constituent un banc d'essai idéal pour tester les capacités d'un perceptron : leurs entrées et sorties sont binaires (0 ou 1), ce qui permet de vérifier exactement si un perceptron peut les réaliser. Nous allons nous intéresser aux opérations OU et ET. Ces opérations sont-elles réalisables par un perceptron à deux entrées ? Autrement-dit, existent-ils trois poids a, b, c tels que la fonction $\mathrm{F}(x,y) = \mathrm{H}(ax+by+c)$ soit égale à l'une de ces fonctions logiques lorsqu'on l'applique pour $x, y \in \{0,1\}$?

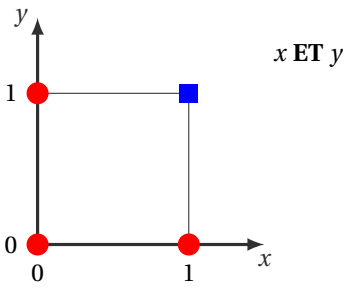


À partir de deux booléens x et y, on peut associer un nouveau booléen « x OU/ET y » comme suit :

x	y	x OU y	x ET y
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	1

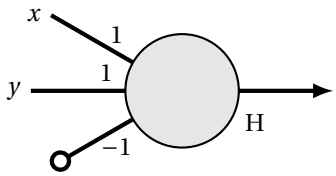
Graphiquement, on représente toutes les configurations associées à « x OU/ET y » par un diagramme. Un rond rouge en position (x, y) signifie que « x OU/ET y » est faux (le résultat vaut 0), un carré bleu que « x OU y » est vrai (le résultat vaut 1).

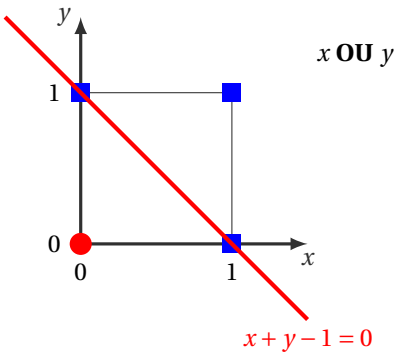




Trouver un perceptron qui relaise cette opération revient à séparer les ronds rouges des carrés bleus.

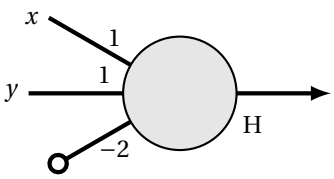
- **Opération OU (*OR*).** Cette séparation est possible avec le perceptron de poids $a = 1$, $b = 1$, $c = -1$. En effet, cela définie la fonction linéaire $\ell_{\mathbf{a}}(x,y) = x + y - 1$ et on vérifie que, pour $x, y \in \{0,1\}$, $\ell_{\mathbf{a}}(x,y) < 0$ si et seulement si $x = y = 0$. Composée avec la fonction marche de Heaviside, la fonction $\mathrm{F}_{\mathbf{a}}(x,y)$ définie par le perceptron renvoie 0 ssi $x = y = 0$ et 1 sinon, ce qui correspond exactement à l'opération « x OU y ».

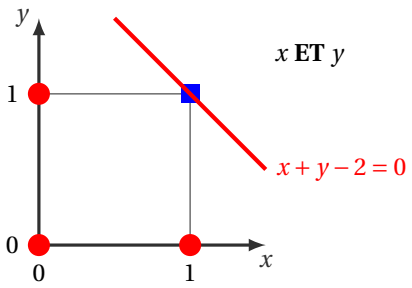




- **Opération ET.** De la même manière, on peut également réaliser l'opération « x ET y » en choisissant les poids $a = 1$, $b = 1$, $c = -2$. L'opération « x ET y » renvoie « vrai » uniquement si x et y sont vrais tous les deux :

© 2024-2027 G. Faccanoni



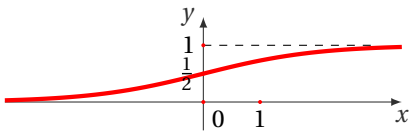


Remarque (Robustesse numérique du perceptron ET et biais : pourquoi le biais améliore la séparation)
D'un point de vue numérique, si on considère des valeurs réelles pour x et y, notre perceptron « ET » n'est pas très robuste près de la frontière. Par exemple avec $x = 0.9$ et $y = 0.9$, on calcule $x + y - 2 = -0.2$ et la sortie est 0, alors que x et y étant proches de 1, on attendrait plutôt 1. Il suffit de décaler le biais : avec $c = -1.5$, on obtient $x + y - 1.5 = 0.3 > 0$ et la sortie devient 1. Plus généralement, l'utilisation de la fonction sigmoïde à la place de H atténue ce problème en fournissant une sortie continue.

5.1.4. Fa(x) avec sigmoïde : sortie graduée, même frontière, degré de confiance

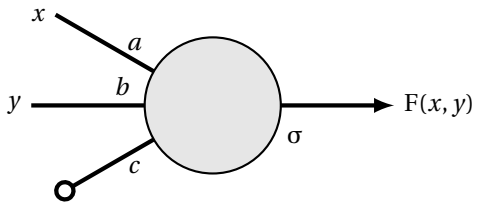
Il n'est pas toujours possible de répondre à une question seulement par « oui » ou « non ». Pour y remédier, on peut changer de fonction d'activation en utilisant par exemple la fonction sigmoïde σ définie par

$$\sigma(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}.$$

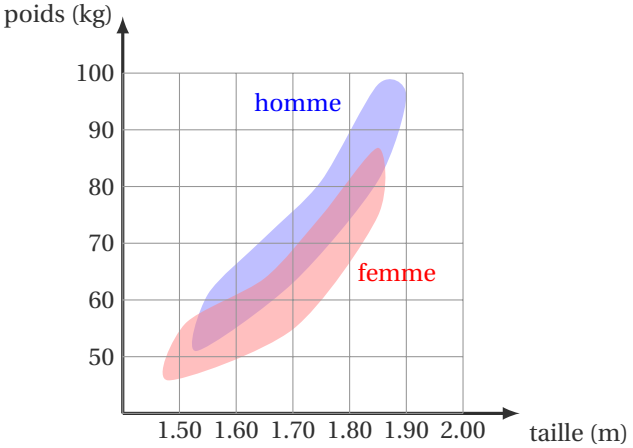


Dans ce cas, à chaque point du plan, on associe, non plus 0 ou 1, mais une valeur entre 0 et 1. Ce nombre peut correspondre à un degré de certitude. Par exemple avec une question « Est-ce que cette photo est un chat ? », si la sortie vaut 0.8, cela signifie « c'est bien un chat avec 80% de certitude ». Si la sortie vaut 0.1 alors ce n'est probablement pas un chat.

Voici un neurone à deux entrées muni de la fonction d'activation sigmoïde :



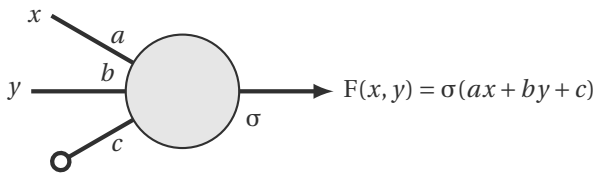
EXEMPLE
Ci dessous on représente les données (fictives) de la répartition des hommes et des femmes selon leur taille et leur poids. Problème : la taille et le poids d'une personne étant donnés, trouver un perceptron qui réponde à la question « Cette personne est-elle un homme ou une femme ? ».

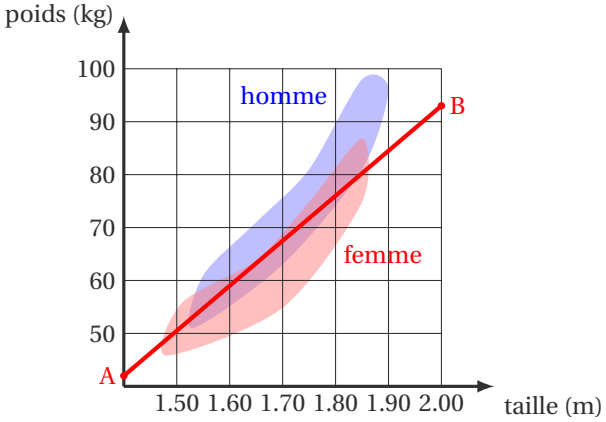


Au vu de la superposition des zones, il n'est pas possible de répondre avec certitude. On construit donc un perceptron selon les idées suivantes :

- on trace une droite qui sépare au mieux les hommes des femmes, par exemple ici la droite qui passe par les points A(1.40, 42) et B(2.00, 93) d'équation approchée $y = 85x - 77$ où x, y représentent respectivement la taille et le poids ;
- on choisit la fonction d'activation sigmoïde.

Ce qui nous permet de définir le perceptron suivant avec $a = 85$, $b = -1$ et $c = -77$.





Maintenant pour un couple donné (x, y), le perceptron associe une valeur $F(x, y) \in [0, 1]$. Si $F(x, y)$ est proche de 0 alors la personne est probablement un homme, si $F(x, y)$ est proche de 1 c'est probablement une femme.

Exemples :

Point (x = taille, y = poids)	$\ell_{(85,-1,-77)}(x, y) = 85x - y - 77$	$F_{(85,-1,-77)}(x, y)$	Cette personne est
(1.77, 75)	-1.55	$0.175 < 0.5$	probablement un homme
(1.67, 64)	$1.94 < 0$	$0.72 > 0.5$	probablement une femme

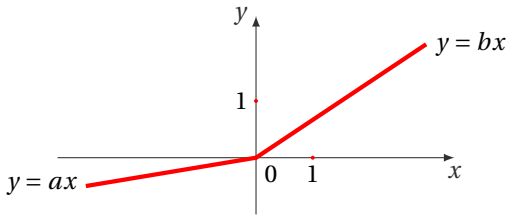
Malgré les données fictives, cet exemple met en évidence le problème de la superposition et de l'utilité d'avoir une sortie plus riche que « oui » ou « non ». On peut aussi discuter de la pertinence de la frontière, car la séparation par une droite ne semble pas la mieux adaptée. En fait, le poids varie en fonction du carré de la taille (les zones ont une forme de parabole).

5.1.5. $F_a(x)$ avec ReLU : activation partielle, régions nulles vs actives

Nous avons vu que la fonction de Heaviside tranche la réponse en deux valeurs exactes, 0 ou 1, et que la sigmoïde la nuance en une valeur continue dans $(0, 1)$. La fonction ReLU (pour *Rectified Linear Unit*) adopte une logique différente : elle éteint complètement le neurone lorsque la pré-activation est négative, et le laisse répondre proportionnellement à son entrée lorsqu'elle est positive.

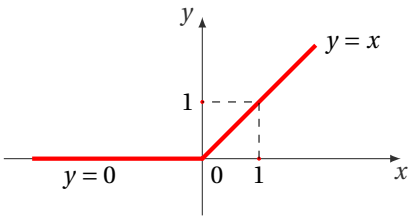
Considérons une fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} ax & \text{si } x < 0 \\ bx & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$



C'est un exemple de fonction linéaire par morceaux (elle est linéaire à gauche et linéaire à droite). La plus utilisée est la fonction ReLU : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (pour *Rectified Linear Unit*), définie par

$$\text{ReLU}(x) = \max(0, x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$



© 2024-2027 G. Faccanoni

- Attention ces fonctions ne sont pas dérivables en 0 (sauf dans le cas $a = b$).
- La fonction ReLU conjugue les bénéfices d'une fonction continue, avec une activation (ici la sortie est non nulle pour une entrée strictement positive) et d'une sortie proportionnelle à l'entrée (pour les entrées positives).

Contrairement à Heaviside, dont la sortie est toujours 0 ou 1, la sortie de ReLU est soit nulle (neurone *inactif*), soit égale à la pré-activation elle-même (neurone *actif*). C'est cette propriété qui lui vaut son nom : le neurone « rectifie » son entrée en supprimant la partie négative.

Perceptron à deux entrées muni de ReLU. Considérons un perceptron affine à deux entrées x, y, de poids $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ et de biais $a_0 \in \mathbb{R}$, muni de la fonction d'activation ReLU. Sa sortie est

$$\mathrm{F}_{\mathring{a}}(x,y) = \mathrm{ReLU}(a_1 x + a_2 y + a_0) = \begin{cases} 0 & \text{si } a_1 x + a_2 y + a_0 < 0, \\ a_1 x + a_2 y + a_0 & \text{si } a_1 x + a_2 y + a_0 \geq 0. \end{cases}$$

Le plan se divise naturellement en deux régions séparées par la droite $\ell_{\mathring{a}}(x,y) = a_1 x + a_2 y + a_0 = 0$:

- la **région inactive** $\{\ell_{\mathring{a}}(x,y) < 0\}$, où $\mathrm{F}_{\mathring{a}} = 0$ identiquement ;
- la **région active** $\{\ell_{\mathring{a}}(x,y) \geq 0\}$, où $\mathrm{F}_{\mathring{a}}$ prend des valeurs strictement positives, proportionnelles à la distance à la frontière.

La frontière entre ces deux régions est donc, comme pour Heaviside et la sigmoïde, l'hyperplan d'équation $\ell_{\mathring{a}}(x,y) = 0$. Ce qui change, c'est le comportement *au-delà* de cette frontière : au lieu d'un seuil binaire ou d'une saturation vers 1, la sortie croît sans borne.

Remarque
ReLU n'est pas dérivable en 0. En pratique, on convient que sa dérivée vaut 0 en ce point (ou parfois $\frac{1}{2}$), ce qui suffit pour les algorithmes d'apprentissage.

Exemple (Perceptron ReLU à deux entrées)
Considérons le perceptron de poids $a_1 = 2$, $a_2 = -1$, $a_0 = -1$, muni de ReLU. La pré-activation vaut $\ell_{\mathring{a}}(x,y) = 2x - y - 1$ et la sortie est

$$\mathrm{F}_{\mathring{a}}(x,y) = \mathrm{ReLU}(2x - y - 1).$$

La frontière est la droite $2x - y - 1 = 0$, soit $y = 2x - 1$.

Évaluation en trois points.

Point (x,y)	$\ell_{\mathbf{a}}(x,y) = 2x - y - 1$	$\mathrm{F}_{(2,3)}(x,y)$	Région
$(2,1)$	$2 \geq 0$	2	active
$(0,3)$	$-4 < 0$	0	inactive
$(1,1)$	$0 \geq 0$	0	active

Interprétation. Les points $(2,1)$ et $(1,1)$ sont dans la région active, mais leur sortie diffère (2 contre 0) : plus un point est éloigné de la frontière du côté actif, plus la réponse est grande. C'est fondamentalement différent de Heaviside, qui aurait renvoyé 1 dans les deux cas, et de la sigmoïde, dont la sortie aurait été proche de 1 pour $(2,1)$ mais exactement $\frac{1}{2}$ pour $(1,1)$.

Pourquoi ReLU est-elle si utilisée ? Trois raisons principales expliquent son succès en pratique.

1. **Calcul rapide.** Évaluer $\max(0,x)$ est une opération élémentaire, bien plus rapide que calculer e^{-x} (sigmoïde ou tanh).
2. **Gradient non saturant côté actif.** Pour la sigmoïde, la dérivée $\sigma'(x) = \sigma(x)(1-\sigma(x))$ tend vers 0 lorsque $|x|$ est grand (phénomène de *saturation*). Pour ReLU, la dérivée vaut 1 sur toute la région active : le gradient n'est jamais écrasé côté actif, ce qui facilite l'apprentissage dans les réseaux profonds.
3. **Parcimonie des activations.** Dans un réseau, une fraction des neurones sera inactive (ReLU = 0) pour chaque entrée donnée. Cette *sparsité* est une forme de régularisation implicite qui peut améliorer la généralisation.

Remarque (Comparaison des trois activations sur la même entrée)
Pour fixer les idées, reprenons le point $(x,y) = (2,1)$ avec les poids $a_1 = 2$, $a_2 = -1$, $a_0 = -1$, soit $\ell_{\mathring{a}}(2,1) = 2$.

$$\begin{aligned} &\text{Heaviside :} && \mathrm{H}(2) = 1. \\ &\text{Sigmoïde :} && \sigma(2) = \frac{1}{1+e^{-2}} \approx 0.88. \\ &\text{ReLU :} && \mathrm{ReLU}(2) = 2. \end{aligned}$$

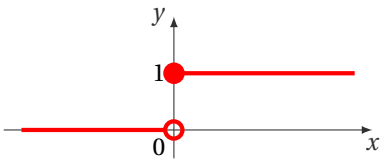
Les trois activations s'accordent sur le signe (le point est dans la zone « positive »), mais leur sortie est de nature très différente : binaire pour Heaviside, bornée dans $(0,1)$ pour la sigmoïde, non bornée et proportionnelle à l'entrée pour ReLU.

5.1.6. Fonctions d'activation usuelles

Les fonctions d'activation sont des fonctions $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ appliquées à la sortie de la partie affine du perceptron. Leur rôle est fondamental : sans elles, une composition de fonctions affines resterait affine, ce qui limiterait drastiquement la richesse des fonctions qu'un réseau peut représenter. On choisit généralement ϕ dérivable (ou presque partout dérivable) afin de pouvoir calculer le gradient de l'erreur lors de la phase d'apprentissage. Les principales fonctions utilisées en pratique sont les suivantes.

Fonction marche de Heaviside : classification franche. C'est la fonction "marche d'escalier" définie par la formule suivante :

$$\mathrm{H}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

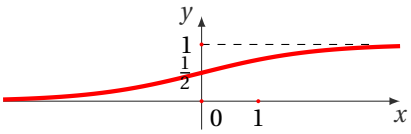


La sortie est binaire : le perceptron tranche entre deux classes sans nuance. La frontière $\ell_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = 0$ sépare le plan en deux demi-plans où $\mathrm{F}_{\mathbf{a}}$ vaut respectivement 0 et 1.

Limites : H n'est pas dérivable en 0, ce qui posera problème lors du calcul du gradient. Par ailleurs, sa sortie est binaire : elle ne permet pas d'exprimer un degré de confiance.

La fonction sigmoïde : sortie graduée. La fonction sigmoïde est définie par

$$\sigma(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}.$$



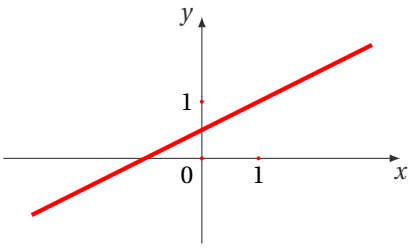
σ est dérivable partout et $\sigma'(x) = \sigma(x)(1-\sigma(x))$. Cependant, pour $|x|$ grand, $\sigma'(x) \approx 0$: la fonction sature.

À la différence de Heaviside, σ prend ses valeurs dans $]0;1[$ et effectue une transition autour de 0. La frontière de décision de l'hyperplan $\ell_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = 0$, là où $\sigma(\ell_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})) = \frac{1}{2}$ exactement, mais la sortie varie maintenant continûment : elle est proche de 1 loin d'un côté , proche de 0 de l'autre, avec une transition progressive.

Cette sortie s'interprète comme un degrée de confiance : $\mathrm{F}_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = 0.8$ signifie « appartient à la classe 1 avec 80% de certitude ».

Fonction affine. Une fonction affine est définie par

$$f(x) = ax + b$$

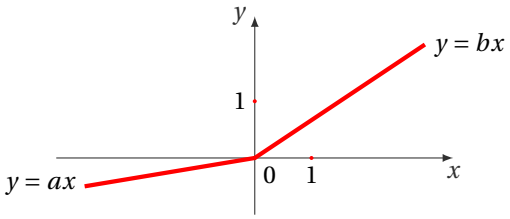


- Les fonctions affines seront à la base des réseaux de neurones. Elles sont simples.
- Si $a = 1$ et $b = 0$ alors $f(x) = x$, c'est la fonction identité : la sortie est égale à l'entrée. Nous l'utiliserons plus tard dans certains cas.
- Si $b = 0$ la sortie est proportionnelle à l'entrée.
- Le principal inconvénient est le suivant : si $f(x) = ax + b$ et $g(x) = cx + d$ sont deux fonctions affines alors la composition $h = g \circ f$ est encore une fonction affine. Ainsi, avec des fonctions d'activation qui sont affines, par composition on n'obtiendra que des fonctions affines, ce qui n'est pas assez riche pour les problèmes de classification.

© 2024-2027 G. Faccanoni

ReLU et fonctions linéaires par morceaux. Une fonction définie par

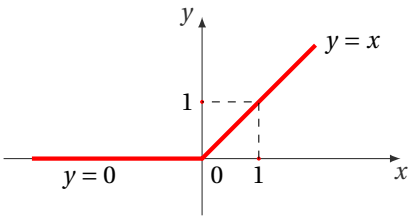
$$f(x) = \begin{cases} ax & \text{si } x < 0 \\ bx & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$



est un exemple de fonction linéaire par morceaux (elle est linéaire à gauche et linéaire à droite).

La plus utilisée est la fonction ReLU (pour *Rectified Linear Unit*), définie par

$$\mathrm{ReLU}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

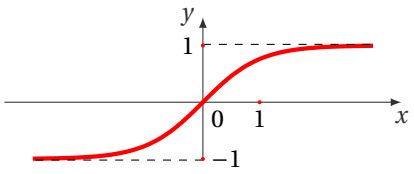


ReLU adopte une logique différente : elle éteint complètement le neurone quand la pré-activation est négative (région inactive), et laisse passer la valeur telle quelle quand elle est positive (région active). La sortie n'est plus bornée : elle croît sans limite du côté actif.

- Attention ces fonctions ne sont pas dérivables en 0 (sauf dans le cas $a = b$).
- La fonction ReLU conjugue les bénéfices d'une fonction continue, avec une activation (ici la sortie est non nulle pour une entrée strictement positive) et d'une sortie proportionnelle à l'entrée (pour les entrées positives).

La fonction tangente hyperbolique. La tangente hyperbolique est définie par

$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$



Elle a des propriétés similaires à la fonction sigmoïde mais varie de -1 à $+1$. C'est une fonction impaire : son graphe est symétrique par rapport à l'origine. On pourrait refaire une étude complète de cette fonction mais celle-ci est liée à celle de la fonction σ par la relation $\tanh(x) = 2\sigma(2x) - 1$.

D'autres fonctions d'activation sont couramment utilisées en pratique, notamment :

- **Softplus** : $\mathrm{softplus}(x) = \ln(1 + e^x)$, version lisse de ReLU ;
- **GELU** : utilisée dans les transformers ;
- **Softmax** : $\mathrm{softmax}(\mathbf{x})_i = e^{x_i} / \sum_j e^{x_j}$, pour les sorties multi-classes (donne une distribution de probabilité).

Le choix de la fonction d'activation influence fortement l'entraînement et les performances du réseau.

5.2. Apprentissage sur un perceptron

Dans la section précédente, nous avons vu qu'un perceptron dont les poids sont fixés réalise une séparation géométrique de l'espace des entrées. Un tel modèle est appelé **classifieur linéaire** : il sépare les données en deux classes à l'aide d'une droite en dimension 2, ou plus généralement d'un hyperplan en dimension supérieure.

Dans les exemples étudiés jusqu'à présent, les poids étaient connus à l'avance ou déterminés graphiquement. Une question essentielle se pose alors : comment choisir ces poids pour résoudre un problème donné ? Existe-t-il un unique jeu de poids adapté ? L'apprentissage consiste précisément à **déterminer les poids d'un réseau de neurones de manière à minimiser une erreur définie sur les données**.

Pour cela, on dispose d'un ensemble d'exemples constitué de couples *(entrée, sortie attendue)*. Cet ensemble sert à entraîner le réseau durant la phase d'apprentissage. Le processus débute généralement par une initialisation aléatoire des poids. Le réseau produit alors des prédictions qui sont comparées aux sorties attendues à l'aide d'une *fonction de perte*, qui mesure l'erreur commise. L'objectif est ensuite de modifier progressivement les poids afin de réduire cette erreur. Pour cela, on calcule le gradient de la fonction de perte par rapport aux poids et on applique un algorithme d'optimisation, le plus souvent la *descente de gradient*. Cette procédure est répétée jusqu'à l'obtention de poids satisfaisants. Dans le cas des réseaux multicouches, ce mécanisme est connu sous le nom de **rétropropagation du gradient** (*backpropagation*). [2]

L'apprentissage ne s'effectue pas sur un seul exemple, mais sur un ensemble de données généralement divisé en deux parties : un **ensemble d'entraînement**, utilisé pour ajuster les poids du réseau, et un **ensemble de test**, utilisé pour évaluer sa capacité de généralisation, c'est-à-dire sa faculté à prédire correctement des données jamais vues auparavant.

L'algorithme d'apprentissage suit alors les étapes suivantes :

1. initialiser les poids du réseau ;
2. calculer la fonction de perte sur l'ensemble d'entraînement ;
3. modifier les poids afin de minimiser cette fonction de perte, lorsque cela est possible de manière analytique, ou plus généralement à l'aide de la descente de gradient ;
4. répéter ce processus jusqu'à obtenir une erreur suffisamment faible ;
5. une fois les poids fixés, évaluer les performances du modèle sur l'ensemble de test.

5.2.1. Fonction de perte

Dans la section précédente, nous avons étudié le perceptron comme une fonction de l'entrée $\mathrm{F}_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})$: pour des poids fixés, il sépare géométriquement l'espace des entrées. Mais comment choisir ces poids ? C'est l'objet de cette partie : nous allons quantifier l'écart entre les prédictions du perceptron et les valeurs attendues, puis chercher les poids qui minimisent cet écart.

Données d'apprentissage. On dispose d'un ensemble de N couples

$$\mathscr{A} = \{(\mathbf{X}^{(i)}, z^{(i)})\}_{i=1}^{\mathrm{N}},$$

où $\mathbf{X}^{(i)} \in \mathbb{R}^n$ est le i-ème vecteur d'entrée et $z^{(i)} \in \mathbb{R}$ la sortie attendue associée. Pour chaque donnée $\mathbf{X}^{(i)}$, le perceptron produit la prédiction

$$\tilde{\mathrm{F}}^{(i)}(\mathbf{a}) \overset{\text{def}}{=} \hat{\mathrm{F}}(\mathbf{X}^{(i)}; \mathbf{a}) = \phi(\tilde{\ell}^{(i)}(\mathbf{a})).$$

Rappelons que $\tilde{\mathrm{F}}^{(i)}$ est ici une fonction des poids $\mathbf{a}$ uniquement : la donnée $\mathbf{X}^{(i)}$ est fixée et joue le rôle de paramètre.

Fonction de perte locale. Pour mesurer l'écart entre la prédiction $\tilde{\mathrm{F}}^{(i)}(\mathbf{a})$ et la valeur attendue $z^{(i)}$, on définit la *perte locale* sur l'exemple i :

$$\mathrm{E}^{(i)}(\mathbf{a}) = \big(\tilde{\mathrm{F}}^{(i)}(\mathring{\mathrm{a}}) - z^{(i)}\big)^2.$$

Cette quantité est toujours positive et vaut 0 si et seulement si le perceptron prédit exactement $z^{(i)}$ pour l'entrée $\mathbf{X}^{(i)}$.

2. D. E. Rumelhart, G. E. Hinton et R. J. Williams, "Learning representations by back-propagating errors", *Nature*, vol. 323, n° 6088, p. 533–536, 1986.

© 2024-2027 G. Faccanoni

Fonction de perte globale (MSE). On agrège les pertes locales en une *erreur quadratique moyenne* (en anglais *mean squared error*, MSE) :

$$\mathrm{E}(\mathbf{a}) = \frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{E}^{(i)}(\mathbf{a}) = \frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \big(\tilde{\mathrm{F}}^{(i)}(\mathbf{a}) - z^{(i)}\big)^2.$$

La fonction de perte E vérifie :

1. $\mathrm{E}(\mathbf{a}) \geq 0$ pour tout $\mathbf{a}$;
2. $\mathrm{E}(\mathbf{a}) = 0$ si et seulement si $\tilde{\mathrm{F}}^{(i)}(\mathbf{a}) = z^{(i)}$ pour tout $i = 1, \dots, \mathrm{N}$ (le perceptron interpole exactement toutes les données).

Remarque
On trouvera dans la littérature deux conventions : certains auteurs divisent par N, d'autres non. Ce choix n'affecte pas les poids optimaux (le minimum est atteint au même point), mais il change l'échelle du gradient et donc le réglage du pas d'apprentissage η. Nous retenons ici la convention avec $\frac{1}{\mathrm{N}}$, qui rend $\mathrm{E}(\mathbf{a})$ indépendant de la taille du jeu de données.

Objectif de l'apprentissage. La phase d'apprentissage consiste à trouver le vecteur de poids $\mathbf{a}^*$ qui minimise E :

$$\mathbf{a}^* = \arg\min_{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{n+1}} \mathrm{E}(\mathbf{a}).$$

Autrement dit, on cherche les poids pour lesquels les prédictions du perceptron sont, en moyenne, aussi proches que possible des valeurs attendues. Les deux sections suivantes examinent comment résoudre ce problème : d'abord dans le cas où ϕ est l'identité (le problème se ramène à un système linéaire), puis dans le cas général où ϕ est non linéaire (on doit recourir à la descente de gradient).

5.2.2. Cas linéaire ($\phi = \mathrm{id}$) : lien avec la régression

Commençons par le cas le plus simple : la fonction d'activation est l'identité, $\phi = \mathrm{id}$. La sortie du perceptron est alors une fonction affine de l'entrée :

$$\hat{\mathrm{F}}(\mathbf{x}; \mathbf{a}) = \hat{\ell}(\mathbf{x}; \mathbf{a}) = a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n.$$

Ce cas est important pour deux raisons. D'une part, il correspond exactement à la régression affine vue au chapitre précédent, ce qui nous permettra de retrouver des résultats connus. D'autre part, la fonction de perte $\mathrm{E}(\mathbf{a})$ est alors convexe en $\mathbf{a}$, ce qui garantit l'existence d'un minimum global et permet de le calculer analytiquement.

Convexité et calcul analytique du minimum. Puisque $\tilde{\mathrm{F}}^{(i)}(\mathbf{a})$ est affine en $\mathbf{a}$, la perte locale $\mathrm{E}^{(i)}(\mathbf{a}) = (\tilde{\mathrm{F}}^{(i)}(\mathbf{a}) - z^{(i)})^2$ est quadratique en $\mathbf{a}$, donc convexe. La perte globale $\mathrm{E}(\mathbf{a})$, moyenne de fonctions convexes, est elle aussi convexe. Son minimum est donc atteint en l'unique point vérifiant $\nabla_{\mathbf{a}} \mathrm{E}(\mathbf{a}) = 0$.

EXEMPLE (PERCEPTRON À UNE ENTRÉE)
Pour un perceptron à une entrée x et deux poids (a, b), *i.e.* $\hat{\mathrm{F}}(x; a, b) = ax + b$, la condition $\nabla_{(a,b)} \mathrm{E} = 0$ donne

$$\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial a}(a,b) = \frac{2}{\mathrm{N}} \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \big(a\mathrm{X}^{(i)} + b - z^{(i)}\big)\mathrm{X}^{(i)} = 0, \qquad \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial b}(a,b) = \frac{2}{\mathrm{N}} \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \big(a\mathrm{X}^{(i)} + b - z^{(i)}\big) = 0.$$

Ce système est linéaire en (a, b) et s'écrit sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} (\mathrm{X}^{(i)})^2 & \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{X}^{(i)} \\ \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{X}^{(i)} & \mathrm{N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{X}^{(i)} z^{(i)} \\ \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} z^{(i)} \end{pmatrix}.$$

On reconnaît la formule classique de la régression linéaire du chapitre précédent.

EXEMPLE (TROIS POINTS ALIGNÉS)
Prenons $\mathrm{N} = 3$ données : $(\mathrm{X}^{(1)}, z^{(1)}) = (0, 3)$, $(\mathrm{X}^{(2)}, z^{(2)}) = (2, 4)$ et $(\mathrm{X}^{(3)}, z^{(3)}) = (6, 6)$.

Forward pass. Pour des poids (a,b) quelconques, les prédictions sont :

i	$X^{(i)}$	$z^{(i)}$	$\tilde{F}^{(i)}(a,b) = aX^{(i)} + b$
1	0	3	b
2	2	4	$2a+b$
3	6	6	$6a+b$

Fonction de perte.

$$E(a,b) = \frac{1}{3}\Big[(b-3)^2 + (2a+b-4)^2 + (6a+b-6)^2\Big].$$

Calcul du minimum. On résout $\nabla_{(a,b)}E = 0$:

$$\frac{\partial E}{\partial a}(a,b) = 0 \rightsquigarrow 40a + 8b = 28, \qquad \frac{\partial E}{\partial b}(a,b) = 0 \rightsquigarrow 8a + 3b = 13.$$

La solution est $a = \frac{1}{2}$ et $b = 3$. La droite optimale est donc $\hat{F}_{(1/2,3)}(x) = \frac{1}{2}x + 3$, qui passe exactement par les trois points (ils sont alignés), avec une erreur résiduelle $E(1/2, 3) = 0$.

EXEMPLE (CINQ POINTS NON ALIGNÉS)
Prenons $N = 5$ données : $(4,1)$, $(7,3)$, $(8,3)$, $(10,6)$, $(12,7)$. Ces points sont approximativement alignés mais pas exactement, si bien que $E(\mathbf{a}^*) > 0$.

Forward pass. Pour des poids (a,b) quelconques, les prédictions sont :

i	$X^{(i)}$	$z^{(i)}$	$\tilde{F}^{(i)}(a,b) = aX^{(i)} + b$
1	4	1	$4a+b$
2	7	3	$7a+b$
3	8	3	$8a+b$
4	10	6	$10a+b$
5	12	7	$12a+b$

Fonction de perte.

$$E(a,b) = \frac{1}{5}\Big[(4a+b-1)^2 + (7a+b-3)^2 + (8a+b-3)^2 + (10a+b-6)^2 + (12a+b-7)^2\Big].$$

Calcul du minimum. La résolution du système $\nabla_{(a,b)}E = 0$ donne :

$$a^* = \frac{145}{184} \approx 0.788, \qquad b^* = -\frac{453}{184} \approx -2.462.$$

La droite optimale est donc

$$\hat{F}_{(a^*,b^*)}(x) = \frac{145}{184}x - \frac{453}{184}.$$

Elle approche au mieux les cinq points au sens des moindres carrés, mais ne les interpole pas exactement.

Remarque
Dès que ϕ n'est plus l'identité, $\tilde{F}^{(i)}(\mathbf{a})$ n'est plus affine en $\mathbf{a}$, $E(\mathbf{a})$ n'est plus convexe, et $\nabla_{\mathbf{a}}E = 0$ n'admet plus de solution analytique. C'est précisément ce cas que nous traitons dans la section suivante.

5.2.3. Cas non linéaire : pourquoi $\nabla E = 0$ ne se résout plus

Dès que la fonction d'activation ϕ est non linéaire, la situation change radicalement. La perte locale vaut

$$E^{(i)}(\mathbf{a}) = \big(\phi(a_0 + a_1 X^{(i)} + \dots) - z^{(i)}\big)^2.$$

Puisque ϕ est non linéaire, $\tilde{F}^{(i)}(\mathbf{a}) = \phi(a_0 + a_1 X^{(i)} + \dots)$ n'est plus affine en $\mathbf{a}$: la perte $E(\mathbf{a})$ n'est plus quadratique, ni même convexe en général et trois propriétés du cas linéaire disparaissent simultanément.

1. *Pas de solution analytique.* La condition $\nabla_{\mathbf{a}}E = 0$ donne un système d'équations non linéaires en $\mathbf{a}$, qui ne se résout pas par des formules explicites.

© 2024-2027 G. FACCANONI

2. *Pas de garantie d'unicité.* E peut admettre plusieurs minima locaux : deux jeux de poids distincts peuvent donner la même valeur de E, voire des valeurs proches du minimum global.
3. *Pas de garantie d'existence d'un minimum global accessible.* La descente vers un minimum dépend du point de départ : selon l'initialisation des poids, on peut converger vers des minima locaux différents.

EXEMPLE (PERCEPTRON SIGMOÏDE À UNE ENTRÉE)
Reprenons le perceptron à une entrée $\hat{F}(x;a,b) = \phi(ax+b)$. La perte locale vaut

$$E^{(i)}(a,b) = \big(\phi(aX^{(i)}+b) - z^{(i)}\big)^2.$$

Considérons $\phi = \sigma$ et les trois données $(X^{(1)},z^{(1)}) = (0,\frac{1}{4})$, $(X^{(2)},z^{(2)}) = (1,\frac{1}{2})$, $(X^{(3)},z^{(3)}) = (2,1)$. La fonction de perte est :

$$E(a,b) = \frac{1}{3}\Big[\big(\sigma(b)-\tfrac{1}{4}\big)^2 + \big(\sigma(a+b)-\tfrac{1}{2}\big)^2 + \big(\sigma(2a+b)-1\big)^2\Big].$$

La condition $\nabla_{(a,b)}E = 0$ donne, en utilisant $\sigma'(u) = \sigma(u)(1-\sigma(u))$:

$$\frac{\partial E}{\partial a}(a,b) = \frac{2}{3}\sum_{i=1}^{3}\big(\sigma(aX^{(i)}+b) - z^{(i)}\big)\,\sigma(aX^{(i)}+b)\,\big(1-\sigma(aX^{(i)}+b)\big)X^{(i)} = 0.$$

Ce système est non linéaire en (a,b) : il n'admet pas de solution analytique fermée. On trouve numériquement $a \approx 1.81$ et $b \approx -1.49$, mais rien ne garantit que ce soit le seul minimum.

Remarque
Malgré ces limitations, la richesse des fonctions représentables par un perceptron non linéaire justifie largement le recours à des méthodes numériques. C'est précisément l'objet de la section suivante : la descente de gradient.

5.2.4. Descente de gradient

Puisque $\nabla_{\mathbf{a}}E = 0$ ne se résout plus analytiquement dans le cas non linéaire, on cherche le minimum de E par une méthode itérative : la *descente de gradient*. L'idée est simple : le vecteur opposé au gradient $-\nabla_{\mathbf{a}}E(\mathbf{a})$ indique la direction dans laquelle E décroît le plus rapidement. On suit cette direction d'un petit pas η, puis on recommence.

Algorithme. On construit une suite de poids $(\mathbf{a}_k)_{k\geq 0}$ par la récurrence :

$$\begin{cases} \mathbf{a}_0 \in \mathbb{R}^{n+1} \text{ choisi aléatoirement,} \\ \mathbf{a}_{k+1} = \mathbf{a}_k - \eta\,\nabla_{\mathbf{a}}E(\mathbf{a}_k), \end{cases}$$

où $\eta > 0$ est le *pas d'apprentissage* (en anglais *learning rate*). On s'arrête lorsque $\|\nabla_{\mathbf{a}}E(\mathbf{a}_k)\| \leq \varepsilon$ ou lorsqu'un nombre maximal d'itérations est atteint.

Le choix du pas d'apprentissage η est très important :

- si η est trop grand, les mises à jour sont trop importantes et la suite $(\mathbf{a}_k)$ peut osciller autour du minimum sans converger ;
- si η est trop petit, la convergence est très lente et nécessite un grand nombre d'itérations.

En pratique, η est soit fixé à l'avance (valeur typique : 10^{-2} à 10^{-4}), soit adapté automatiquement au cours de l'entraînement.

Convergence. Lorsque E est convexe (cas linéaire), la descente de gradient converge vers le minimum global quel que soit le point de départ $\mathbf{a}_0$. Dans le cas non linéaire, E est en général non convexe : la suite $(\mathbf{a}_k)$ converge vers un minimum local, qui dépend de l'initialisation $\mathbf{a}_0$. C'est pourquoi il est courant de relancer l'algorithme depuis plusieurs points de départ différents.

EXEMPLE (DESCENTE DE GRADIENT SUR TROIS POINTS ALIGNÉS)
Reprenons les données $(0,3)$, $(2,4)$, $(6,6)$ et $\phi = \mathrm{id}$. On sait que le minimum exact est $(a^*,b^*) = (\frac{1}{2},3)$. Partons de $(a_0,b_0) = (0,1)$ avec $\eta = 0.02$. Le gradient vaut :

$$\frac{\partial E}{\partial a}(a,b) = \frac{2}{3}\big[(2a+b-4)\cdot 2 + (6a+b-6)\cdot 6\big], \quad \frac{\partial E}{\partial b}(a,b) = \frac{2}{3}\big[(b-3) + (2a+b-4) + (6a+b-6)\big].$$

Les premières itérations donnent :

k	a_k	b_k	$\|\nabla \mathrm{E}(a_k, b_k)\|$	$\mathrm{E}(a_k, b_k)$
0	0.000	1.000	74.73	38.00
10	0.701	1.950	3.15	1.54
50	0.524	2.885	0.31	0.018
100	0.502	2.993	0.020	0.0001

La suite converge bien vers $(a^*, b^*) = (\frac{1}{2}, 3)$. On observe que $\mathrm{E}(\mathbf{a}_k)$ décroît à chaque itération, et que le gradient tend vers 0.

Remarque
Dans cet exemple, E est convexe (car $\phi = \mathrm{id}$) : la descente converge vers le minimum global indépendamment du point de départ. Avec une activation non linéaire, rien ne garantit que $(a_0, b_0) = (0, 1)$ conduise au meilleur minimum. Le choix de l'initialisation devient alors un enjeu pratique important, que nous aborderons dans la section sur la normalisation.

5.2.5. Calcul du gradient et rétropropagation sur un perceptron

Nous savons que la descente de gradient nécessite le calcul de $\nabla_{\mathbf{a}} \mathrm{E}(\mathbf{a})$ à chaque itération. Dans cette section, nous détaillons ce calcul pour un perceptron : nous appliquons d'abord la règle de la chaîne terme par terme, puis nous introduisons le *signal d'erreur* δ comme notation compacte, et enfin nous déroulons un exemple numérique complet.

⋆ Règle de la chaîne : décomposition explicite

Considérons un perceptron à n entrées de poids $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ et de fonction d'activation ϕ. Pour une donnée $(\mathbf{X}^{(i)}, z^{(i)})$, on décompose le calcul de la prédiction en deux fonctions successives.

Prédiction et perte locale. La prédiction du perceptron pour la donnée i s'écrit :

$$\tilde{\mathrm{F}}^{(i)}(\mathbf{a}) = \phi\big(\tilde{\ell}^{(i)}(\mathbf{a})\big),$$

et la perte locale vaut

$$\mathrm{E}^{(i)}(\mathbf{a}) = \big(\tilde{\mathrm{F}}^{(i)}(\mathbf{a}) - z^{(i)}\big)^2 = \big(\phi(\tilde{\ell}^{(i)}(\mathbf{a})) - z^{(i)}\big)^2.$$

Application de la règle de la chaîne. On décompose $\mathrm{E}^{(i)}(\mathbf{a}) = f(\phi(\tilde{\ell}^{(i)}(\mathbf{a})))$ en trois fonctions :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\ell}^{(i)} : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R} & \qquad \phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} & \qquad f^{(i)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \mathbf{a} \mapsto \tilde{\ell}^{(i)}(\mathbf{a}) & \qquad y \mapsto \phi(y) & \qquad t \mapsto (t - z^{(i)})^2 \end{array}$$

La règle de la chaîne donne :

$$\frac{\partial \mathrm{E}^{(i)}}{\partial a_j}(\mathbf{a}) = \underbrace{\frac{f'\big(\phi(\tilde{\ell}^{(i)}(\mathbf{a}))\big)}{2\big(\tilde{\mathrm{F}}^{(i)}(\mathbf{a}) - z^{(i)}\big)}}_{} \cdot \underbrace{\frac{\phi'\big(\tilde{\ell}^{(i)}(\mathbf{a})\big)}{\phi'(\tilde{\ell}^{(i)}(\mathbf{a}))}}_{} \cdot \underbrace{\frac{\partial \tilde{\ell}^{(i)}}{\partial a_j}(\mathbf{a})}_{\mathrm{X}_j^{(i)}}.$$

Détaillons chaque terme :

- $\left.\frac{\mathrm{d}f^{(i)}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=\tilde{\mathrm{F}}^{(i)}(\mathbf{a})} = 2\big(\tilde{\mathrm{F}}^{(i)}(\mathbf{a}) - z^{(i)}\big)$: dérivée de $t \mapsto (t - z^{(i)})^2$ évaluée en $t = \tilde{\mathrm{F}}^{(i)}(\mathbf{a})$.
- $\left.\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}y}\right|_{y=\tilde{\ell}^{(i)}(\mathbf{a})} = \phi'(\tilde{\ell}^{(i)}(\mathbf{a}))$: dérivée de ϕ évaluée au point $y = \tilde{\ell}^{(i)}(\mathbf{a})$.
- $\frac{\partial \tilde{\ell}^{(i)}}{\partial a_j}(\mathbf{a}) = \mathrm{X}_j^{(i)}$: dérivée de la pré-activation par rapport au poids a_j, la donnée $\mathbf{X}^{(i)}$ étant fixée. Pour le biais, $\frac{\partial \tilde{\ell}^{(i)}}{\partial a_0}(\mathbf{a}) = 1$ pour tout i.

Le gradient de la perte globale est donc :

$$\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial a_j}(\mathbf{a}) = \frac{2}{\mathrm{N}} \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \big(\tilde{\mathrm{F}}^{(i)}(\mathbf{a}) - z^{(i)}\big)\, \phi'(\tilde{\ell}^{(i)}(\mathbf{a}))\, \mathrm{X}_j^{(i)}.$$

© 2024-2027 G. Faccanoni

⋆ Signal d'erreur $\delta^{(i)}$

Notons $u^{(i)} \overset{\text{def}}{=} \tilde{\ell}^{(i)}(\mathbf{a})$. On remarque que le produit $\big(\phi(u^{(i)}) - z^{(i)}\big)\phi'(u^{(i)})$ apparaît dans le calcul de $\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial a_j}$ pour tout j. Il est donc naturel de le factoriser en introduisant le *signal d'erreur local* :

$$\delta^{(i)}(\mathbf{a}) \overset{\text{def}}{=} \big(\phi(u^{(i)}) - z^{(i)}\big)\phi'(u^{(i)}).$$

Le gradient se réécrit alors de façon compacte :

$$\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial a_j}(\mathbf{a}) = \frac{2}{\mathrm{N}} \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \delta^{(i)}(\mathbf{a})\, \mathrm{X}_j^{(i)}, \qquad \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial a_0}(\mathbf{a}) = \frac{2}{\mathrm{N}} \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \delta^{(i)}(\mathbf{a}).$$

Remarque (Gradient évanescent)
Le signal d'erreur $\delta^{(i)}(a) = \big(\phi(u^{(i)}) - z^{(i)}\big)\phi'(u^{(i)})$ combine deux informations : l'écart entre la prédiction et la cible $(\phi(u^{(i)}) - z^{(i)})$, et la sensibilité de l'activation en ce point $(\phi'(u^{(i)}))$.

Quand $\phi = \sigma$ et que $|u^{(i)}|$ est grand, $\sigma'(u^{(i)}) = \sigma(u^{(i)})(1 - \sigma(u^{(i)})) \approx 0$: la sigmoïde est saturée. Le signal $\delta^{(i)}$ est alors écrasé vers zéro, même si l'erreur $(\sigma(u^{(i)}) - z^{(i)})$ est grande. Les poids reçoivent un gradient quasi-nul et n'apprennent plus. Ce phénomène, appelé *gradient évanescent*, est particulièrement destructeur dans les réseaux profonds : lors de la rétropropagation, chaque couche multiplie le signal par un facteur ϕ'. Si $\phi' \approx 0$ dans plusieurs couches successives, le gradient de la première couche devient indétectable et les poids proches de l'entrée cessent d'être mis à jour.

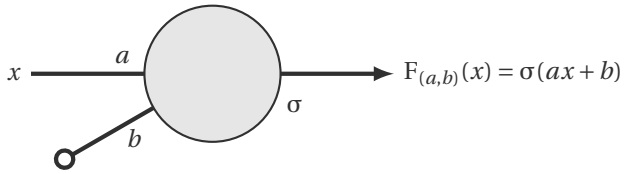
C'est l'une des raisons majeures pour lesquelles ReLU a remplacé σ comme fonction d'activation par défaut dans les réseaux profonds : $\mathrm{ReLU}'(x) = 1$ sur toute la région active, le gradient n'est jamais écrasé du côté actif.

Remarque
Il est important de ne pas confondre $\delta^{(i)}$ avec la perte locale $\mathrm{E}^{(i)}$. La perte locale $\mathrm{E}^{(i)}(\mathbf{a}) = \big(\phi(u^{(i)}) - z^{(i)}\big)^2$ mesure l'écart au carré entre la prédiction et la cible : c'est une quantité toujours positive. Le signal d'erreur $\delta^{(i)}$ est quant à lui la dérivée de $\mathrm{E}^{(i)}$ par rapport à la pré-activation $u^{(i)}$:

$$\delta^{(i)}(\mathbf{a}) = \frac{\partial \mathrm{E}^{(i)}}{\partial u^{(i)}}(\mathbf{a}) = \big(\phi(u^{(i)}) - z^{(i)}\big)\phi'(u^{(i)}).$$

On peut le voir comme $\mathrm{E}^{(i)}$ « à moitié dérivé » : il contient l'écart $(\phi(u^{(i)}) - z^{(i)})$ présent dans $\mathrm{E}^{(i)}$, mais multiplié par $\phi'(u^{(i)})$ issu de la règle de la chaîne. En particulier, $\delta^{(i)}$ peut être négatif, contrairement à $\mathrm{E}^{(i)}$.

EXEMPLE (CALCUL DU GRADIENT POUR UN PERCEPTRON SIGMOÏDE À UNE ENTRÉE)
Considérons un perceptron à une entrée x et deux poids (a, b), avec $\phi = \sigma$.



Pour une donnée $(\mathrm{X}^{(i)}, z^{(i)})$, la pré-activation vaut

$$u^{(i)} = a\mathrm{X}^{(i)} + b,$$

la prédiction est

$$\tilde{\mathrm{F}}^{(i)} = \sigma(u^{(i)}),$$

et le signal d'erreur est

$$\delta^{(i)}(a, b) = \big(\sigma(u^{(i)}) - z^{(i)}\big)\,\sigma(u^{(i)})\big(1 - \sigma(u^{(i)})\big).$$

Le gradient de la perte globale est alors

$$\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial a}(a, b) = \frac{2}{\mathrm{N}} \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \delta^{(i)}(a, b)\, \mathrm{X}^{(i)}, \qquad \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial b}(a, b) = \frac{2}{\mathrm{N}} \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \delta^{(i)}(a, b).$$

Considérons deux points d'entraînement : $(\mathrm{X}^{(1)}, z^{(1)}) = (0, 0)$ et $(\mathrm{X}^{(2)}, z^{(2)}) = (1, 1)$. La fonction de perte est

$$\mathrm{E}(a, b) = \frac{1}{2}\Big[\big(\sigma(b) - 0\big)^2 + \big(\sigma(a + b) - 1\big)^2\Big].$$

Les pré-activations sont $u^{(1)} = b$ et $u^{(2)} = a + b$. Les signaux d'erreur valent :

$$\delta^{(i)}(a,b) = \big(\sigma(u^{(i)}) - z^{(i)}\big)\,\sigma(u^{(i)})\,\big(1-\sigma(u^{(i)})\big),$$

en utilisant $\sigma'(u) = \sigma(u)(1-\sigma(u))$. Le gradient est :

$$\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial a}(a,b) = \delta^{(1)}(a,b)\cdot \mathrm{X}^{(1)} + \delta^{(2)}(a,b)\cdot \mathrm{X}^{(2)} = \delta^{(2)}(a,b), \qquad \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial b}(a,b) = \delta^{(1)}(a,b) + \delta^{(2)}(a,b).$$

Notons que $\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial a}$ ne fait intervenir que $\delta^{(2)}$ car $\mathrm{X}^{(1)} = 0$.

Déroulement de la descente avec $\eta = 0.5$ et $(a_0, b_0) = (0,0)$.

- *Pas $k = 0$ — évaluation en $(a_0, b_0) = (0,0)$.*

i	$\mathrm{X}^{(i)}$	$z^{(i)}$	$u^{(i)} = a\mathrm{X}^{(i)} + b$	$\tilde{\mathrm{F}}^{(i)} = \sigma(u^{(i)})$	$\delta^{(i)} = \big(\sigma(u^{(i)}) - z^{(i)}\big)\sigma(u^{(i)})\big(1-\sigma(u^{(i)})\big)$
1	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$
2	1	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$

  Le gradient vaut :

$$\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial a}(0,0) = \delta^{(2)}(0,0) = -\tfrac{1}{8}, \qquad \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial b}(0,0) = \delta^{(1)}(0,0) + \delta^{(2)}(0,0) = \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{8} = 0.$$

  Mise à jour :

$$a_1 = a_0 - \eta\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial a}(a_0,b_0) = 0 - 0.5\big(-\tfrac{1}{8}\big) = \tfrac{1}{16} \approx 0.063, \qquad b_1 = b_0 - \eta\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial b}(a_0,b_0) = 0.$$

- *Pas $k = 1$ — évaluation en $(a_1, b_1) \approx (0.063, 0)$.*

i	$\mathrm{X}^{(i)}$	$z^{(i)}$	$u^{(i)} = a\mathrm{X}^{(i)} + b$	$\tilde{\mathrm{F}}^{(i)} = \sigma(u^{(i)})$	$\delta^{(i)}$
1	0	0	0	0.500	0.125
2	1	1	0.063	0.516	−0.121

  Le gradient vaut :

$$\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial a}(a_1,b_1) = \delta^{(2)}(a_1,b_1) \approx -0.121, \qquad \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial b}(a_1,b_1) = \delta^{(1)}(a_1,b_1) + \delta^{(2)}(a_1,b_1) \approx 0.004.$$

  Mise à jour :

$$a_2 \approx 0.063 - 0.5(-0.121) = 0.123, \qquad b_2 \approx 0 - 0.5(0.004) = -0.002.$$

- *Pas $k = 2$ — évaluation en $(a_2, b_2) \approx (0.123, -0.002)$.*

i	$\mathrm{X}^{(i)}$	$z^{(i)}$	$u^{(i)} = a\mathrm{X}^{(i)} + b$	$\tilde{\mathrm{F}}^{(i)} = \sigma(u^{(i)})$	$\delta^{(i)}$
1	0	0	−0.002	0.500	0.125
2	1	1	0.121	0.530	−0.117

  Le gradient vaut :

$$\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial a}(a_2,b_2) \approx -0.117, \qquad \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial b}(a_2,b_2) \approx 0.008.$$

  Mise à jour :

$$a_3 \approx 0.123 - 0.5(-0.117) = 0.182, \qquad b_3 \approx -0.002 - 0.5(0.008) = -0.006.$$

- *Pas $k = 3$ — évaluation en $(a_3, b_3) \approx (0.182, -0.006)$.*

i	$\mathrm{X}^{(i)}$	$z^{(i)}$	$u^{(i)} = a\mathrm{X}^{(i)} + b$	$\tilde{\mathrm{F}}^{(i)} = \sigma(u^{(i)})$	$\delta^{(i)}$
1	0	0	−0.006	0.499	0.125
2	1	1	0.176	0.544	−0.110

  Le gradient vaut :

$$\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial a}(a_3,b_3) \approx -0.110, \qquad \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial b}(a_3,b_3) \approx 0.015.$$

  Mise à jour :

$$a_4 \approx 0.182 - 0.5(-0.110) = 0.237, \qquad b_4 \approx -0.006 - 0.5(0.015) = -0.014.$$

© 2024-2027 G. Faccanoni

On résume les trois premiers pas :

k	a_k	b_k	$\mathrm{E}(a_k, b_k)$
0	0.000	0.000	0.250
1	0.063	0.000	0.242
2	0.123	−0.002	0.235
3	0.182	−0.006	0.228

L'erreur $\mathrm{E}(a_k, b_k)$ décroît à chaque pas. On observe que a_k augmente régulièrement (le réseau apprend à séparer les deux points) tandis que b_k reste proche de zéro (les deux données étant symétriques par rapport à $x = \frac{1}{2}$, le biais n'est que faiblement sollicité).

5.2.6. Ensemble d'entraînement et ensemble de test

Jusqu'ici, nous avons cherché les poids $\mathbf{a}^*$ qui minimisent la fonction de perte $\mathrm{E}(\mathbf{a})$ sur l'ensemble des données disponibles. En pratique, l'objectif n'est pas seulement de bien prédire les données connues, mais aussi de bien prédire des données *nouvelles*, jamais vues pendant l'apprentissage. On parle de *capacité de généralisation*.

Pour évaluer cette capacité, on divise les données disponibles $\{(\mathbf{X}^{(i)}, z^{(i)})\}_{i=1}^{\mathrm{N+M}}$ en deux sous-ensembles disjoints :

- l'**ensemble d'entraînement** $\mathscr{A} \overset{\text{def}}{=} \{(\mathbf{X}^{(i)}, z^{(i)})\}_{i=1}^{\mathrm{N}}$ (typiquement 70 à 80% des données) : utilisé pour calculer les poids optimaux $\mathbf{a}^*$ en minimisant $\mathrm{E}(\mathbf{a})$;
- l'**ensemble de test** $\mathscr{B} \overset{\text{def}}{=} \{(\mathbf{X}^{(i)}, z^{(i)})\}_{i=\mathrm{N}+1}^{\mathrm{N+M}}$: mis de côté pendant l'entraînement, utilisé ensuite pour évaluer la qualité des prédictions sur des données nouvelles.

Erreur de test. Une fois les poids $\mathbf{a}^*$ déterminés sur $\mathscr{A}$, on calcule l'erreur sur $\mathscr{B}$:

$$\mathrm{E}_{\mathscr{B}}(\mathbf{a}^*) = \frac{1}{\mathrm{M}} \sum_{i=\mathrm{N}+1}^{\mathrm{N+M}} \left(\tilde{\mathrm{F}}^{(i)}(\mathbf{a}^*) - z^{(i)}\right)^2.$$

Si $\mathrm{E}_{\mathscr{B}}(\mathbf{a}^*)$ est proche de $\mathrm{E}(\mathbf{a}^*)$, le modèle généralise bien. Si en revanche $\mathrm{E}_{\mathscr{B}}(\mathbf{a}^*) \gg \mathrm{E}(\mathbf{a}^*)$, le modèle a *surappris* (en anglais *overfitting*) : il reproduit très bien les données d'entraînement mais échoue sur les données nouvelles.

Résumé de la démarche. L'algorithme d'apprentissage suit donc la logique suivante :

1. Diviser les données en $\mathscr{A}$ (entraînement) et $\mathscr{B}$ (test).
2. Choisir des poids initiaux $\mathbf{a}$ aléatoirement.
3. Minimiser $\mathrm{E}(\mathbf{a})$ sur $\mathscr{A}$: analytiquement si possible, sinon par descente de gradient.
4. Évaluer $\mathrm{E}_{\mathscr{B}}(\mathbf{a}^*)$ sur $\mathscr{B}$ pour mesurer la capacité de généralisation.

Remarque
En pratique, on introduit souvent un troisième ensemble, l'*ensemble de validation*, utilisé pendant l'entraînement pour régler les hyperparamètres (comme le pas d'apprentissage η ou l'architecture du réseau), sans toucher à l'ensemble de test. Ce dernier ne sert qu'à l'évaluation finale.

5.2.7. Normalisation des données

Nous avons vu sur l'exemple des cinq points non alignés que la descente de gradient peut converger très lentement. Une cause fréquente est la mauvaise *forme* de la fonction de perte : si les données $\mathbf{X}^{(i)}$ varient dans un intervalle très large et les cibles $z^{(i)}$ dans un intervalle étroit (ou vice versa), les lignes de niveau de $\mathrm{E}(a, b)$ sont des ellipses très allongées. Le gradient pointe alors presque perpendiculairement à la direction du minimum, ce qui provoque des oscillations et ralentit la convergence.

Centrage et normalisation. La solution est de transformer les données avant l'apprentissage pour les rendre *isotropes*, c'est-à-dire de même ordre de grandeur dans toutes les directions. On calcule la moyenne et l'écart-type empiriques :

$$\mu_{\mathbf{X}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \mathbf{X}^{(i)}, \qquad \sigma_{\mathbf{X}} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} (\mathbf{X}^{(i)} - \mu_{\mathbf{X}})^2},$$

et de même μ_z, σ_z pour les cibles. On définit les données normalisées :

$$\mathbf{X}^{(i)}_{\text{norm}} = \frac{\mathbf{X}^{(i)} - \mu_{\mathbf{X}}}{\sigma_{\mathbf{X}}}, \qquad z^{(i)}_{\text{norm}} = \frac{z^{(i)} - \mu_z}{\sigma_z}.$$

Les données normalisées sont centrées (de moyenne nulle) et réduites (de variance unitaire). La fonction de perte sur les données normalisées a des lignes de niveau proches de cercles, ce qui rend la descente de gradient beaucoup plus efficace.

Reconversion des coefficients. La régression affine sur les données normalisées donne des coefficients a_{norm} et b_{norm} tels que :

$$z_{\text{norm}} \approx a_{\text{norm}} \cdot \mathbf{X}_{\text{norm}} + b_{\text{norm}}.$$

Pour retrouver les coefficients a et b correspondant aux données originales, on substitue les définitions de $\mathbf{X}_{\text{norm}}$ et z_{norm} :

$$\frac{z - \mu_z}{\sigma_z} \approx a_{\text{norm}} \cdot \frac{\mathbf{X} - \mu_{\mathbf{X}}}{\sigma_{\mathbf{X}}} + b_{\text{norm}},$$

ce qui donne :

$$a = a_{\text{norm}} \cdot \frac{\sigma_z}{\sigma_{\mathbf{X}}}, \qquad b = b_{\text{norm}} \cdot \sigma_z + \mu_z - a \cdot \mu_{\mathbf{X}}.$$

Le coefficient a ajuste la pente pour tenir compte des échelles originales, et b recentre la régression autour des moyennes des données originales.

EXEMPLE (CINQ POINTS NON ALIGNÉS, DONNÉES NORMALISÉES)
Reprenons les données $(4,1)$, $(7,3)$, $(8,3)$, $(10,6)$, $(12,7)$. On calcule :

$$\mu_{\mathbf{X}} = 8.2, \quad \sigma_{\mathbf{X}} \approx 2.71, \quad \mu_z = 4, \quad \sigma_z \approx 2.19.$$

Après normalisation, on part de $(a_0, b_0) = (0,0)$ avec $\eta = 0.001$. Les données étant maintenant isotropes, la convergence est bien plus rapide :

k	a_k	b_k	$\|\nabla E(a_k, b_k)\|$	$E(a_k, b_k)$
0	0.000	0.000	9.758	5.000
200	0.845	0.000	1.307	0.324
800	0.976	0.000	0.003	0.239
1600	0.976	0.000	0.000	0.239

La reconversion donne $a \approx 0.788$ et $b \approx -2.462$, ce qui retrouve bien la solution exacte calculée en section 2.2.

Remarque
La normalisation est une étape de *prétraitement* des données : elle n'affecte pas le modèle ni la solution optimale, mais améliore significativement la vitesse de convergence de la descente de gradient. En pratique, elle est systématiquement appliquée avant tout entraînement, quelle que soit la complexité du modèle.

5.2.8. Résumé de la démarche d'apprentissage et exemple complet

Nous avons introduit tous les ingrédients nécessaires à l'apprentissage d'un perceptron. Résumons la démarche complète.

1. Définir le modèle. On choisit une architecture : le nombre d'entrées n, la fonction d'activation ϕ, et la fonction mère :

$$\hat{F}(\mathbf{x}; \mathbf{a}) = \phi\big(\hat{\ell}(\mathbf{x}; \mathbf{a})\big).$$

© 2024-2027 G. FACCANONI

2. Préparer les données. On dispose de $N+M$ couples $(\mathbf{X}^{(i)}, z^{(i)})$ que l'on divise en :

- un ensemble d'entraînement $\mathscr{A}$ (N données, 70 à 80%) ;
- un ensemble de test $\mathscr{B}$ (M données, 20 à 30%).

On normalise les données de $\mathscr{A}$ (centrage et réduction) avant l'apprentissage.

3. Définir la fonction de perte. On choisit une mesure de l'écart entre prédictions et cibles. Le choix standard est la MSE :

$$E(\mathbf{a}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\big(\tilde{F}^{(i)}(\mathbf{a}) - z^{(i)}\big)^2.$$

4. Minimiser la fonction de perte (phase d'entraînement). Deux cas se présentent :

- **Si $\phi = \mathrm{id}$** : E est convexe en $\mathbf{a}$, le minimum est atteint en résolvant le système linéaire $\nabla_{\mathbf{a}} E = 0$.
- **Si ϕ est non linéaire** : E n'est plus convexe, on minimise par descente de gradient :

$$\mathbf{a}_{k+1} = \mathbf{a}_k - \eta \nabla_{\mathbf{a}} E(\mathbf{a}_k),$$

où le gradient est calculé par la règle de la chaîne :

$$\frac{\partial E}{\partial a_j}(\mathbf{a}) = \frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N}\delta^{(i)}(\mathbf{a})X_j^{(i)}, \qquad \delta^{(i)}(\mathbf{a}) = \big(\tilde{F}^{(i)}(\mathbf{a}) - z^{(i)}\big)\phi'\big(\tilde{\ell}^{(i)}(\mathbf{a})\big).$$

5. Évaluer le modèle (phase de test). Une fois $\mathbf{a}^*$ déterminé, on calcule l'erreur sur $\mathscr{B}$:

$$E_{\mathscr{B}}(\mathbf{a}^*) = \frac{1}{M}\sum_{i=N+1}^{N+M}\big(\tilde{F}^{(i)}(\mathbf{a}^*) - z^{(i)}\big)^2.$$

Si $E_{\mathscr{B}}(\mathbf{a}^*) \approx E(\mathbf{a}^*)$, le modèle généralise bien. Sinon, il y a surapprentissage.

Remarque

Cette démarche en cinq étapes s'applique sans modification aux réseaux de neurones : seul le calcul du gradient devient plus complexe, car la fonction $\hat{F}(\mathbf{x};\mathbf{a})$ est une composition de plusieurs couches plutôt que d'une seule. C'est l'objet de la partie suivante.

EXEMPLE

Appliquons cette démarche au cas de la régression linéaire qu'on a déjà traité. Dans le jargon du *machine learning*, on dit que l'on va entraîner un modèle linéaire pour apprendre à prédire la cible en fonction de l'unique *feature*.

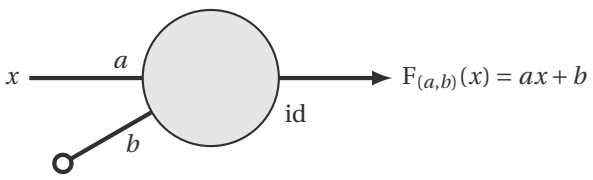
Soit $\{(X^{(i)}, Y^{(i)})\}_{i=1}^{N+M}$ un ensemble de $N+M$ points dans le plan. On le divise en deux sous-ensembles : $\mathscr{A} \overset{\text{def}}{=} \{(X^{(i)}, Y^{(i)})\}_{i=1}^{N}$ (entraînement) et $\mathscr{B} \overset{\text{def}}{=} \{(X^{(i)}, Y^{(i)})\}_{i=N+1}^{N+M}$ (test).

Pour chaque point de $\mathscr{A}$, le modèle fait une prédiction ; en comparant cette prédiction à la valeur attendue $Y^{(i)}$, on obtient un écart. On cherche les paramètres qui minimisent la moyenne des carrés de ces écarts (MSE).

Cet exemple de régression affine est utile pour comprendre la démarche, mais peu utilisé en pratique : lorsque le modèle est linéaire, la fonction d'erreur est convexe en les poids et l'on peut calculer le minimum exactement, sans recourir à la descente de gradient. La descente de gradient est en revanche indispensable pour les modèles non linéaires, pour lesquels il n'existe pas de formule explicite.

1. **Le problème.**
   - **Définition du modèle.** On cherche une fonction affine ajustée à $\mathscr{A}$. Comme établi dans la section précédente, on distingue :
     - la fonction de l'entrée à poids fixés $F_{(a,b)}(x) = ax + b$, utilisée lors du forward pass ;
     - la fonction des poids à donnée fixée $\tilde{F}^{(i)}(a,b) = aX^{(i)} + b$, utilisée lors du backward pass.

   Ce modèle correspond au perceptron suivant :



- **Fonction d'erreur et gradient.** La fonction d'erreur, en tant que fonction des poids (a,b), est

$$\mathrm{E}(a,b)=\frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{i=1}^{\mathrm{N}}\mathrm{E}^{(i)}(a,b),\qquad \mathrm{E}^{(i)}(a,b)=\big(\tilde{\mathrm{F}}^{(i)}(a,b)-\mathrm{Y}^{(i)}\big)^2=\big(a\mathrm{X}^{(i)}+b-\mathrm{Y}^{(i)}\big)^2.$$

On a $\mathrm{E}(a,b)\geq 0$ pour tout (a,b), avec $\mathrm{E}(a,b)=0$ si et seulement si tous les points sont alignés sur la droite $y=ax+b$. Le gradient de E par rapport aux poids est :

$$\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial a}(a,b)=\frac{2}{\mathrm{N}}\sum_{i=1}^{\mathrm{N}}\big(a\mathrm{X}^{(i)}+b-\mathrm{Y}^{(i)}\big)\cdot\mathrm{X}^{(i)},$$
$$\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial b}(a,b)=\frac{2}{\mathrm{N}}\sum_{i=1}^{\mathrm{N}}\big(a\mathrm{X}^{(i)}+b-\mathrm{Y}^{(i)}\big).$$

On insiste : ces dérivées sont par rapport aux poids a et b, avec les données $\mathrm{X}^{(i)}$ fixées.

2. **Phase d'entraînement.**
On calcule les poids (a,b) par minimisation de E sur $\mathscr{A}$. Deux approches sont possibles.

- **Calcul analytique.** Lorsque $\mathrm{F}_{(a,b)}$ est affine et E est l'erreur quadratique, E est convexe en (a,b) et le minimum est atteint en résolvant $\nabla_{(a,b)}\mathrm{E}=0$, ce qui donne le système linéaire :

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \mathrm{E}}{\partial a}(a,b)=0,\\[2mm] \dfrac{\partial \mathrm{E}}{\partial b}(a,b)=0\end{cases}\iff\begin{bmatrix}\sum_{i=1}^{\mathrm{N}}(\mathrm{X}^{(i)})^2 & \sum_{i=1}^{\mathrm{N}}\mathrm{X}^{(i)}\\ \sum_{i=1}^{\mathrm{N}}\mathrm{X}^{(i)} & \mathrm{N}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sum_{i=1}^{\mathrm{N}}\mathrm{X}^{(i)}\mathrm{Y}^{(i)}\\ \sum_{i=1}^{\mathrm{N}}\mathrm{Y}^{(i)}\end{bmatrix}.$$

C'est la méthode utilisée au chapitre précédent.

- **Descente de gradient.** Cette méthode s'applique même lorsque le minimum ne peut pas être calculé analytiquement. On part de poids initiaux (a_0,b_0) choisis aléatoirement et on itère :

$$\begin{cases}(a_0,b_0)\text{ donné},\\ (a_{k+1},b_{k+1})=(a_k,b_k)-\eta\nabla_{(a,b)}\mathrm{E}(a_k,b_k),\end{cases}$$

où $\eta>0$ est le pas d'apprentissage (*learning rate*).

3. **Phase de test.**
On évalue l'erreur sur les données de $\mathscr{B}$, non utilisées pendant l'entraînement :

$$\mathrm{E}_{\mathscr{B}}(a,b)=\frac{1}{\mathrm{M}}\sum_{i=\mathrm{N}+1}^{\mathrm{N}+\mathrm{M}}\big(\tilde{\mathrm{F}}^{(i)}(a,b)-\mathrm{Y}^{(i)}\big)^2=\frac{1}{\mathrm{M}}\sum_{i=\mathrm{N}+1}^{\mathrm{N}+\mathrm{M}}\big(a\mathrm{X}^{(i)}+b-\mathrm{Y}^{(i)}\big)^2.$$

EXEMPLE (RÉGRESSION AFFINE, POINTS ALIGNÉS)
Prenons d'abord l'exemple des trois points $\mathrm{A}_1=(0,3)$, $\mathrm{A}_2=(2,4)$ et $\mathrm{A}_3=(6,6)$ qui sont alignés.
La fonction E (sans diviser par $\mathrm{N}=3$) s'écrit $\mathrm{E}(a,b)=\sum_{i=1}^{3}(a\mathrm{X}_i+b-\mathrm{Y}_i)^2$.

- **Calcul exact de (a,b) par résolution du système linéaire :**

```
import sympy as sp
a, b = sp.symbols('a b')

A = [ (0,3), (2,4), (6,6) ]
E = sum([ (a*x+b-y)**2 for x,y in A ])
grad_E = [sp.diff(E, var) for var in (a, b)]

print(sp.solve(grad_E, [a,b]))
```

```
{a: 1/2, b: 3}
```

- **Calcul approché de (a,b) par descente de gradient :** partons arbitrairement de $(a_0,b_0)=(0,1)$ (qui correspond à la droite horizontale d'équation $y=1$). Au bout de 100 itérations, on obtient $a_{100}\simeq 0.501$ et $b_{100}\simeq 2.99$ (avec un gradient et une erreur presque nuls). C'est bien la droite $y=\frac{1}{2}x+3$ qui passe par les trois points.

© 2024-2027 G. FACCANONI

```python
from tabulate import tabulate
import sympy as sp
a, b = sp.symbols('a b')

A = [ (0,3), (2,4), (6,6) ]
E = sum([ (a*x+b-y)**2 for x,y in A ])
grad_E = [sp.diff(E, var) for var in (a, b)]

values = []

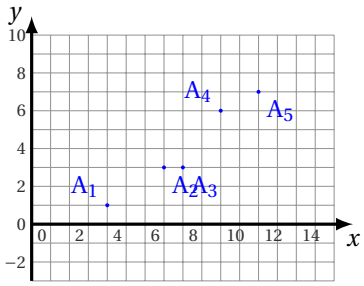
# Set initial values and learning rate (eta)
iterations = 100
eta = 0.02
a_k, b_k = 0, 1

# Update a_k and b_k using gradient descent
for k in range(iterations + 1):
    grad_val = (grad_E[0].subs({a:a_k, b:b_k}), grad_E[1].subs({a:a_k,
    ↪  b:b_k}))
    norm_grad = sp.sqrt(grad_val[0]**2 + grad_val[1]**2)
    E_val = E.subs({a: a_k, b: b_k})
    if k%10==0:
      values.append((k, a_k, b_k, norm_grad, E_val))
    a_k = a_k - eta * grad_val[0]
    b_k = b_k - eta * grad_val[1]

# Display the table
headers = ["Iter", "a_k", "b_k", "||∇(a_k, b_k)||","E(a_k, b_k)"]
table = tabulate(values, headers, floatfmt=".5f")
print(table)
```

```
  Iter      a_k      b_k    ||∇(a_k, b_k)||    E(a_k, b_k)
------  -------  -------  -----------------  -------------
     0  0.00000  1.00000           74.72617       38.00000
    10  0.70146  1.95049            3.14709        1.54491
    20  0.62434  2.39789            1.65322        0.50817
    30  0.57169  2.65359            0.95113        0.16823
    40  0.54125  2.80069            0.54725        0.05569
    50  0.52373  2.88532            0.31487        0.01844
    60  0.51366  2.93402            0.18117        0.00610
    70  0.50786  2.96204            0.10424        0.00202
    80  0.50452  2.97816            0.05998        0.00067
    90  0.50260  2.98743            0.03451        0.00022
   100  0.50150  2.99277            0.01986        0.00007
```

EXEMPLE (RÉGRESSION AFFINE, POINTS NON ALIGNÉS)
Prenons maintenant les 5 points suivants $A_1 = (4,1)$, $A_2 = (7,3)$, $A_3 = (8,3)$, $A_4 = (10,6)$, $A_5 = (12,7)$.



Ces 5 points sont à peu près alignés. La fonction E (sans diviser par N = 5) s'écrit $\mathrm{E}(a,b) = \sum_{i=1}^{5}(a\mathrm{X}_i + b - \mathrm{Y}_i)^2$.

- **Calcul exacte de (a,b) par résolution du système linéaire :**

```
import sympy as sp
a, b = sp.symbols('a b')

A = [ (4,1), (7,3), (8,3), (10,6), (12,7) ]
E = sum([ (a*x+b-y)**2 for x,y in A ])
grad_E = [sp.diff(E, var) for var in (a, b)]

sol = sp.solve(grad_E, [a,b])
print(f"a={sol[a]}≈{sol[a].evalf()}, b={sol[b]}≈{sol[b].evalf()}")
```

```
a=145/184≈0.788043478260870, b=-453/184≈-2.46195652173913
```

- **Calcul approché de (a,b) par descente de gradient :** on ne choisit pas le point initial (a_0,b_0) complètement au hasard, car plus on part d'un point proche de la solution, plus la suite convergera rapidement. On utilise par exemple les coefficients qui correspondent à la droite qui passe par le premier point A_1 et le dernier point A_5. Cette droite a pour équation $y = \frac{3}{4}x - 2$ et est déjà une droite qui approche assez bien les 5 points. Prenons cette droite comme point de départ, c'est-à-dire posons $(a_0,b_0) = (\frac{3}{4}, -2)$.
  Pour avoir convergence, on doit utiliser un pas très petit, on choisira $\eta = 0.001$. La descente de gradient conduit au bout de 2000 itérations à $a \simeq 0.78$ et $b \simeq -2.40$.

```
from tabulate import tabulate
import sympy as sp
a, b = sp.symbols('a b')

A = [ (4,1), (7,3), (8,3), (10,6), (12,7) ]
E = sum([ (a*x+b-y)**2 for x,y in A ])
grad_E = [sp.diff(E, var) for var in (a, b)]

values = []

# Set initial values and learning rate (eta)
iterations = 2000
eta = 0.001
a_k, b_k = 3/sp.S(4), -2

# Update a_k and b_k using gradient descent
for k in range(iterations + 1):
    grad_val = (grad_E[0].subs({a:a_k, b:b_k}), grad_E[1].subs({a:a_k,
    ↪  b:b_k}))
    norm_grad = sp.sqrt(grad_val[0]**2 + grad_val[1]**2)
    E_val = E.subs({a: a_k, b: b_k})
    if k%200==0:
      values.append((k, a_k, b_k, norm_grad, E_val))
```


© 2024-2027 G. Faccanoni

```
    a_k = a_k - eta * grad_val[0]
    b_k = b_k - eta * grad_val[1]

# Display the table
headers = ["Iter", "a_k", "b_k", "||∇(a_k, b_k)||","E(a_k, b_k)"]
table = tabulate(values, headers, floatfmt=".5f")
print(table)
```

```
  Iter      a_k       b_k    ||∇(a_k, b_k)||    E(a_k, b_k)
------  -------  --------  -----------------  -------------
     0  0.75000  -2.00000            9.61769        1.31250
   200  0.74634  -2.08301            0.37163        1.21758
   400  0.75373  -2.15016            0.30577        1.19470
   600  0.75981  -2.20542            0.25159        1.17921
   800  0.76481  -2.25088            0.20700        1.16872
  1000  0.76893  -2.28828            0.17032        1.16162
  1200  0.77232  -2.31906            0.14014        1.15681
  1400  0.77510  -2.34438            0.11530        1.15356
  1600  0.77740  -2.36522            0.09487        1.15136
  1800  0.77928  -2.38236            0.07806        1.14986
  2000  0.78084  -2.39647            0.06423        1.14885
```

Pourquoi est-ce ci-difficile de converger ? Lorsque l'on dessine les lignes de niveau, on s'aperçoit que le minimum se trouve dans une région plate allongée. Cela signifie que, bien que le minimum soit unique, il existe beaucoup de points (a, b) tels que $\mathrm{E}(a, b)$ soit proche de la valeur minimale $\mathrm{E}(a_{\text{opt}}, b_{\text{opt}})$. De plus, ces points peuvent être assez éloignés de la solution : cela signifie que beaucoup de droites avec des coefficients très différents approchent la solution optimale. On peut améliorer la convergence en changeant le point de départ, mais ça reste une fonction difficile à optimiser.

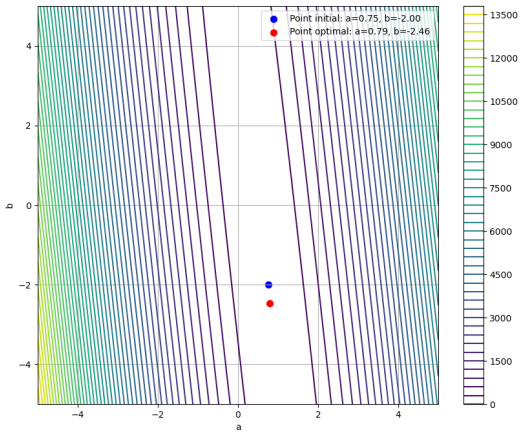
```
import sympy as sp
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
a, b = sp.symbols('a b')

A = [(4, 1), (7, 3), (8, 3), (10, 6), (12, 7)]
E = lambda a,b: sum((a * x + b - y) ** 2 for x, y in A)
grad_E = [sp.diff(E(a,b), var) for var in (a, b)]
a_eval = sol[a].evalf()
b_eval = sol[b].evalf()

a_vals = np.linspace(-5, 5, 200)
b_vals = np.linspace(-5, 5, 200)
A_mesh, B_mesh = np.meshgrid(a_vals, b_vals)
E_vals = np.array([E(a, b) for a,b in zip(A_mesh,B_mesh)])

plt.figure(figsize=(10, 8))
contour = plt.contour(A_mesh, B_mesh, E_vals, levels=50, cmap='viridis')
plt.colorbar(contour)
plt.scatter(3/4, -2, color='blue', label=f"Point initial: a={3/4:.2f},
 ↪  b={-2:.2f}", s=50)
plt.scatter(a_eval, b_eval, color='red', label=f"Point optimal:
 ↪  a={a_eval:.2f}, b={b_eval:.2f}", s=50)
plt.xlabel('a')
plt.ylabel('b')
plt.legend()
plt.grid(True)
```

```
plt.savefig('descente_non_alignes.png')
plt.show()
```



Centrer et normaliser les données avant d'appliquer la descente de gradient peut améliorer la convergence, car cela rend la fonction de coût plus isotrope, ce qui facilite la descente. Voici un code pour centrer et normaliser les données, effectuer la descente de gradient, et revenir aux coefficients initiaux.

```
import numpy as np
import sympy as sp
from tabulate import tabulate
a, b = sp.symbols('a b')

A = [ (4,1), (7,3), (8,3), (10,6), (12,7) ]
X,Y  = zip(*A)

# Centrage et normalisation des données
X_mean = np.mean(X)
Y_mean = np.mean(Y)
X_std = np.std(X)
Y_std = np.std(Y)

X_normalized = (X - X_mean) / X_std
Y_normalized = (Y - Y_mean) / Y_std

E = sum((a * X_normalized[i] + b - Y_normalized[i]) ** 2 for i in
 ↪  range(len(X)))
grad_E = [sp.diff(E, var) for var in (a, b)]

values = []

# Set initial values and learning rate (eta)
iterations = 2000
eta = 0.001
a_k, b_k = 0, 0  # On part de (0,0) pour les données normalisées

# Update a_k and b_k using gradient descent
for k in range(iterations + 1):
    grad_val = (grad_E[0].subs({a:a_k, b:b_k}), grad_E[1].subs({a:a_k,
     ↪  b:b_k}))
```


© 2024-2027 G. Faccanoni

```
    norm_grad = sp.sqrt(grad_val[0]**2 + grad_val[1]**2)
    E_val = E.subs({a: a_k, b: b_k})
    if k%200==0:
      values.append((k, a_k, b_k, norm_grad, E_val))
    a_k = a_k - eta * grad_val[0]
    b_k = b_k - eta * grad_val[1]

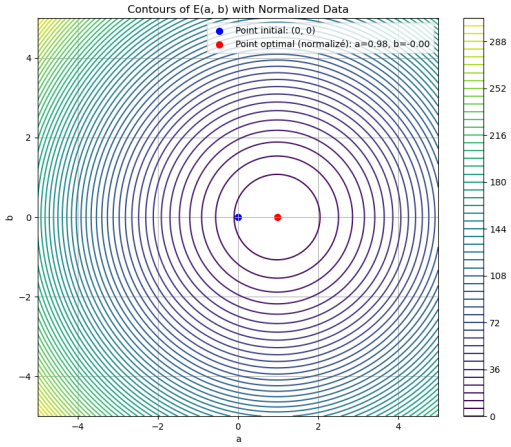
# Display the table
headers = ["Iter", "a_k", "b_k", "||∇(a_k, b_k)||","E(a_k, b_k)"]
table = tabulate(values, headers, floatfmt=".5f")
print(table)

# Récupération des coefficients a et b originaux
a_final = a_k * (Y_std / X_std)
b_final = b_k * Y_std + Y_mean - a_final * X_mean
print(f"Coefficients optimaux: a ≈ {a_final:.5f}, b ≈ {b_final:.5f}")


# Visualisation
import matplotlib.pyplot as plt
E = sp.lambdify((a, b), E, 'numpy')
a_vals = np.linspace(-5, 5, 200)
b_vals = np.linspace(-5, 5, 200)
A_mesh, B_mesh = np.meshgrid(a_vals, b_vals)
E_vals = E(A_mesh, B_mesh)

plt.figure(figsize=(10, 8))
contour = plt.contour(A_mesh, B_mesh, E_vals, levels=50, cmap='viridis')
plt.colorbar(contour)
plt.scatter(0, 0, color='blue', label="Point initial: (0, 0)", s=50)
plt.scatter(a_k, b_k, color='red', label=f"Point optimal (normalizé):
 ↪  a={a_k:.2f}, b={b_k:.2f}", s=50)
plt.xlabel('a')
plt.ylabel('b')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.title('Contours of E(a, b) with Normalized Data')
plt.savefig('descente_non_alignes_normal.png')
plt.show()
```

```
  Iter      a_k       b_k    ||∇(a_k, b_k)||    E(a_k, b_k)
------  -------  --------  -----------------  -------------
     0  0.00000   0.00000            9.75817        5.00000
   200  0.84508  -0.00000            1.30740        0.32437
   400  0.95830  -0.00000            0.17516        0.24044
   600  0.97347  -0.00000            0.02347        0.23893
   800  0.97550  -0.00000            0.00314        0.23890
  1000  0.97578  -0.00000            0.00042        0.23890
  1200  0.97581  -0.00000            0.00006        0.23890
  1400  0.97582  -0.00000            0.00001        0.23890
  1600  0.97582  -0.00000            0.00000        0.23890
  1800  0.97582  -0.00000            0.00000        0.23890
  2000  0.97582  -0.00000            0.00000        0.23890
Coefficients optimaux: a ≈ 0.78804, b ≈ -2.46196
```



Implémentation avec `sklearn`.
La bibliothèque `scikit-learn` permet d'obtenir directement les coefficients optimaux, soit par régression linéaire exacte, soit par un réseau de neurones (`MLPRegressor`) :

```
import numpy as np
from sklearn.linear_model import LinearRegression
from sklearn.neural_network import MLPRegressor
from sklearn.preprocessing import StandardScaler

# Données
A = [(4, 1), (7, 3), (8, 3), (10, 6), (12, 7)]
X, Y = zip(*A)
X = np.array(X).reshape(-1, 1)  # Reshape pour en faire une matrice colonne
Y = np.array(Y).reshape(-1, 1)  # Reshape pour en faire une matrice colonne

# ===================================
# Modèle de régression linéaire
# ===================================
model = LinearRegression()
model.fit(X, Y)
a_final = model.coef_[0][0]  # Pente
b_final = model.intercept_[0]  # Ordonnée à l'origine

print(f"Final coefficients (Linear Regression): a ≈ {a_final:.5f}, b ≈
 ↪ {b_final:.5f}")

# ===================================
# Modèle MLP pour la régression
# ===================================

# Standardisation des données
scaler_X = StandardScaler()
scaler_Y = StandardScaler()

X_scaled = scaler_X.fit_transform(X)
Y_scaled = scaler_Y.fit_transform(Y)

# MLP
mlp = MLPRegressor(hidden_layer_sizes=(1,),
                   activation='identity',
```

```
                    max_iter=10000,
                    solver='sgd', #'adam',
                    learning_rate='adaptive',
                    learning_rate_init=0.001,
                    random_state=0)
mlp.fit(X_scaled, Y_scaled.ravel())

# Récupération des coefficients
a_final_mlp = mlp.coefs_[0][0][0] * (scaler_Y.scale_[0] / scaler_X.scale_[0])
b_final_mlp = scaler_Y.mean_[0] + mlp.intercepts_[0] - a_final_mlp *
 ↪  scaler_X.mean_[0]

# Convertir les valeurs en scalaires
a_final_mlp = a_final_mlp.item()  # Convertir en scalaire
b_final_mlp = b_final_mlp.item()  # Convertir en scalaire

print(f"Final coefficients (MLP Regression): a ≈ {a_final_mlp:.5f}, b ≈
 ↪  {b_final_mlp:.5f}")
```

```
Final coefficients (Linear Regression): a ≈ 0.78804, b ≈ -2.46196
Final coefficients (MLP Regression): a ≈ 0.83675, b ≈ -2.39261
```

Implémentation avec `Keras`.
La bibliothèque `Keras` (incluse dans `TensorFlow`) permet de définir et entraîner un réseau de neurones en quelques lignes. Le réseau ci-dessous est un perceptron à activation linéaire, équivalent à la régression affine :

Remarque (Vocabulaire de l'entraînement)
En pratique, les données d'apprentissage sont traitées par **lots** (*mini-batches*) plutôt qu'en une seule fois. Une **époque** (*epoch*) correspond à un passage complet sur l'ensemble des données d'apprentissage. La descente de gradient stochastique (*SGD*) met à jour les poids après chaque lot, ce qui accélère la convergence mais introduit du bruit.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from tensorflow.keras.models import Sequential
from tensorflow.keras.layers import Dense
from tensorflow.keras.optimizers import SGD

# Définition des données
A = [(4, 1), (7, 3), (8, 3), (10, 6), (12, 7)]
X, Y = zip(*A)

# Conversion en tableau NumPy pour les traitements
X = np.array(X)
Y = np.array(Y)

# Fonction pour créer et entraîner le modèle Keras
def create_and_train_model(X_train, Y_train, epochs=2000):
    # Création d'un modèle séquentiel = réseau de neurones
    model = Sequential()

    # Ajoute une couche dense avec une seule entrée et une activation
     ↪  linéaire (=identité)
    model.add(Dense(1, input_dim=1, activation='linear'))

    # Stochastic Gradient Descent est un algorithme d'optimisation
```

```
    # Initialisation de l'optimiseur avec un taux d'apprentissage de 0.01
    optimizer = SGD(learning_rate=0.01)

    # Compilation du modèle avec l'optimiseur et la fonction de perte à
    ↪  minimiser (ici l'erreur quadratique moyenne)
    model.compile(optimizer=optimizer, loss='mean_squared_error')

    # Entraînement du modèle sur les données d'entraînement
    model.fit(X_train.reshape(-1, 1), Y_train, epochs=epochs, verbose=0)

    # Retourne le modèle entraîné
    return model



# Entraînement sur les données d'origine
model_original = create_and_train_model(X, Y)
a_original = model_original.layers[0].get_weights()[0][0][0]
b_original = model_original.layers[0].get_weights()[1][0]
print(f"Coefficients obtenus avec Keras sur données d'origine: a ≈
↪ {a_original:.5f}, b ≈ {b_original:.5f}")


# Entraînement sur les données normalisées
X_mean = np.mean(X)
Y_mean = np.mean(Y)
X_std = np.std(X)
Y_std = np.std(Y)
X_normalized = (X - X_mean) / X_std
Y_normalized = (Y - Y_mean) / Y_std
model_normalized = create_and_train_model(X_normalized, Y_normalized)
a_normalized = model_normalized.layers[0].get_weights()[0][0][0]
b_normalized = model_normalized.layers[0].get_weights()[1][0]
a_final_normalized = a_normalized * (Y_std / X_std)
b_final_normalized = b_normalized * Y_std + Y_mean - a_final_normalized *
↪  X_mean
print(f"Coefficients réajustés pour les données originales (normalisées): a ≈
↪ {a_final_normalized:.5f}, b ≈ {b_final_normalized:.5f}")
```


© 2024-2027 G. Faccanoni

5.3. Réseau de neurones

Nous avons vu qu'un perceptron seul sépare l'espace des entrées par un unique hyperplan : il ne peut traiter que des problèmes *linéairement séparables*. Cette limitation est trop contraingante : certains problèmes ne sont pas linéairement séparables et sont donc hors de portée d'un perceptron unique.

Pour dépasser cette limitation, on compose plusieurs perceptrons en couches successives : la sortie de chaque perceptron d'une couche devient l'entrée des perceptrons de la couche suivante.

Cette section est organisée en trois temps.

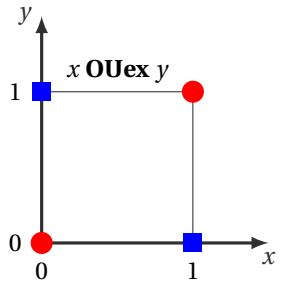
- Nous montrons d'abord, à travers les opérations logiques OU, ET et OU exclusif, pourquoi un seul perceptron est insuffisant et pourquoi la composition est nécessaire.
- Nous définissons ensuite l'architecture générale d'un réseau de neurones et son calcul couche par couche.
- Enfin, nous étudions le réseau successivement comme fonction de l'entrée $\mathrm{F}_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})$ (interprétation géométrique) puis comme fonction des poids $\tilde{\mathrm{F}}^{(i)}(\mathbf{a})$ (apprentissage), en parallèle avec ce qui a été fait pour le perceptron.

5.3.1. Limites du perceptron : le cas du OU exclusif

Nous avons vu que les opérations logiques OU et ET sont réalisables par un perceptron affine à fonction d'activation de Heaviside : il suffit de trouver une droite qui sépare les points de la table de vérité en deux classes. Cette séparation est possible car OU et ET sont des fonctions *linéairement séparables*.

Il n'en est pas de même pour toutes les opérations logiques. Considérons le *OU exclusif* (XOR), défini par la table de vérité suivante : x XOR y est vrai lorsque exactement l'un des deux booléens est vrai.

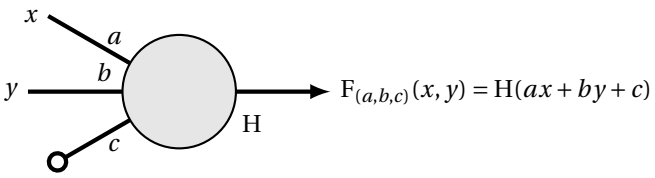
x	y	x XOR y
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	0



On voit bien que les points $(1,0)$ et $(0,1)$ (valeur 1) et les points $(0,0)$ et $(1,1)$ (valeur 0) ne peuvent pas être séparés par une droite : les deux classes sont disposées en damier. Nous allons montrer que cette observation géométrique est une impossibilité algébrique.

Proposition 5.1 (Opération OU exclusif (*XOR*).)
Il n'existe pas de perceptron affine à deux entrées et de fonction d'activation H qui réalise le « OU exclusif ».

PREUVE
Soit le perceptron



Supposons par l'absurde qu'il existe $a_1, a_2, a_0 \in \mathbb{R}$ tels que le perceptron de poids (a_0, a_1, a_2) et d'activation H réalise le XOR. Les quatre valeurs de la table de vérité imposent

$$\mathrm{F}(1,0) = 1 \implies a + c \geq 0, \tag{5.2}$$
$$\mathrm{F}(0,1) = 1 \implies b + c \geq 0, \tag{5.3}$$
$$\mathrm{F}(0,0) = 0 \implies c < 0, \tag{5.4}$$
$$\mathrm{F}(1,1) = 0 \implies a + b + c < 0. \tag{5.5}$$

En additionnant (5.2) et (5.3), on obtient $a + b + 2c \geq 0$. Comme (5.4) donne $-c > 0$, il vient $a + b + c = (a + b + 2c) - c > 0$, ce qui contredit (5.5). Cette contradiction montre qu'un tel perceptron n'existe pas.

Cette impossibilité n'est pas propre au XOR : elle reflète une limitation fondamentale du perceptron, qui ne peut réaliser que des fonctions *linéairement séparables*, c'est-à-dire des fonctions dont les classes peuvent être séparées par un hyperplan. Dès qu'un problème requiert une frontière de décision non linéaire, un seul perceptron est insuffisant.

Solution : composer plusieurs perceptrons. L'idée clé est de connecter plusieurs perceptrons en couches successives : la sortie de chaque perceptron d'une couche devient l'entrée des perceptrons de la couche suivante. La première couche produit plusieurs séparations linéaires intermédiaires, et les couches suivantes combinent ces séparations pour construire des frontières de décision arbitrairement complexes.

C'est le principe du *réseau de neurones*, que nous définissons dans la section suivante.

Remarque

On peut vérifier que le XOR admet la décomposition :

$$x \text{ XOR } y = (x \text{ ET non } y) \text{ OU } (\text{non } x \text{ ET } y),$$

ce qui suggère de construire un réseau dont la première couche réalise les deux séparations linéaires $x - y \geq 0$ et $y - x \geq 0$, et dont la seconde couche combine leurs sorties. Nous verrons en exercice comment déterminer explicitement les poids d'un tel réseau.

5.3.2. Architecture d'un réseau de neurones

Un réseau de neurones est une composition de perceptrons organisés en couches successives. La sortie de chaque perceptron d'une couche devient l'entrée de tous les perceptrons de la couche suivante.

Structure générale. Un réseau de neurones est constitué de trois types de couches :

- la **couche d'entrée** (*input layer*) : transmet les données $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ sans calcul ;
- les **couches cachées** (*hidden layers*) : chaque neurone reçoit toutes les sorties de la couche précédente, calcule une combinaison affine de ces entrées et lui applique sa fonction d'activation ;
- la **couche de sortie** (*output layer*) : produit le résultat final $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^p$, qui peut être un scalaire ($p = 1$) ou un vecteur ($p > 1$).

On appelle *profondeur* (*depth*) le nombre de couches et *largeur* (*width*) le nombre maximal de neurones dans une couche.

Remarque

Un neurone renvoie une unique valeur en sortie ; s'il est connecté à plusieurs neurones de la couche suivante, **il envoie la même valeur à tous**. Un réseau peut renvoyer un vecteur $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^p$ en plaçant p neurones dans la dernière couche.

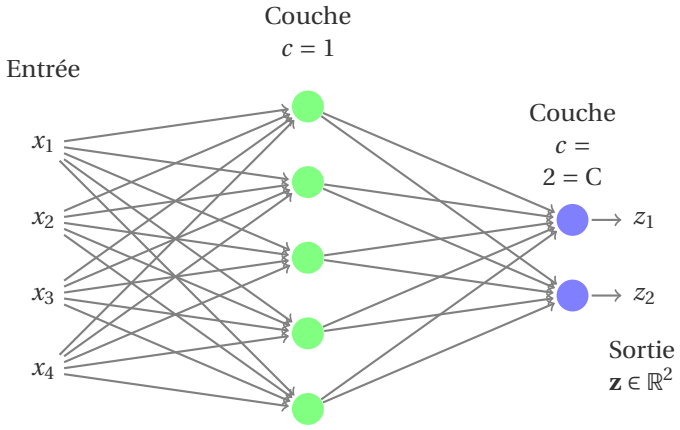
Notations. On note C le nombre de couches (couche d'entrée exclue). Pour la couche $c \in \{1, \ldots, \mathrm{C}\}$, on note :

- n_c le nombre de neurones de la couche c (et on notera $n_0 = n$, la dimension de l'entrée) ;
- $w_{jk}^{(c)}$ le poids de la connexion du neurone k de la couche $c-1$ vers le neurone j de la couche c ;
- $b_j^{(c)}$ le biais du neurone j de la couche c ;
- $\phi^{(c)}$ la fonction d'activation de la couche c.

L'ensemble de tous les poids et biais du réseau constitue le vecteur $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$, où $m = \sum_{c=1}^{\mathrm{C}} n_c(n_{c-1} + 1)$.

EXEMPLE

Exemple de réseau de neurones à une couche cachée et deux sorties.



 © 2024-2027 G. FACCANONI

Sur ce schéma, on identifie :

- $C = 2$: le nombre total de couches (couche d'entrée exclue), ici une couche cachée et une couche de sortie ;
- $n_0 = 4$: la dimension de l'entrée $\mathbf{x}$;
- $n_1 = 5$: le nombre de neurones de la couche cachée $c = 1$;
- $n_2 = p = 2$: le nombre de neurones de la couche de sortie, égal à la dimension de la sortie.

L'ensemble de tous les poids et biais du réseau constitue le vecteur $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$, où :

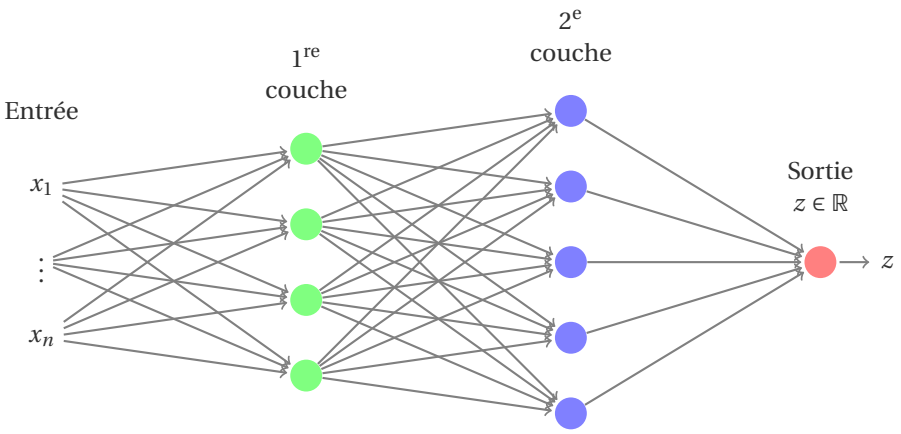
$$m = \sum_{c=1}^{C} n_c(n_{c-1} + 1).$$

Sur l'exemple du schéma ci-dessus ($C = 2$, $n_0 = 4$, $n_1 = 5$ neurones cachés, $n_2 = 2$ sorties), on obtient :

$$m = n_1(n_0 + 1) + n_2(n_1 + 1) = 5 \times 5 + 2 \times 6 = 25 + 12 = 37.$$

Le facteur $n_0 + 1 = 5$ correspond aux 4 poids d'entrée plus le biais de chaque neurone de la couche cachée, et le facteur $n_1 + 1 = 6$ aux 5 entrées (sorties de la couche cachée) plus le biais de chaque neurone de sortie.

EXEMPLE
Exemple de réseau de neurones à deux couches cachées et une sortie.



Sur l'exemple du schéma ci-dessus ($C = 3$, $n_0 = n$, $n_1 = 4$, $n_2 = 5$, $n_3 = 1$), on obtient :

$$m = n_1(n_0 + 1) + n_2(n_1 + 1) + n_3(n_2 + 1) = 4(n + 1) + 5 \times 5 + 1 \times 6 = 4n + 4 + 25 + 6 = 4n + 35.$$

Le facteur $n_0 + 1 = n + 1$ correspond aux n poids d'entrée plus le biais de chaque neurone de la première couche cachée, le facteur $n_1 + 1 = 5$ aux 4 entrées plus le biais de chaque neurone de la deuxième couche cachée, et le facteur $n_2 + 1 = 6$ aux 5 entrées plus le biais du neurone de sortie. Par exemple, pour $n = 3$ entrées, le réseau contient $m = 4 \times 3 + 35 = 47$ poids au total.

Calcul couche par couche. Pour une entrée $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ et des poids $\mathbf{a}$ fixés, la sortie se calcule en propageant $\mathbf{x}$ de couche en couche. On définit la pré-activation du neurone j de la couche c :

$$\hat{\ell}_j^{(c)} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$$
$$(\mathbf{x}; \mathbf{a}) \mapsto \hat{\ell}_j^{(c)}(\mathbf{x}; \mathbf{a}) = b_j^{(c)} + \sum_{k=1}^{n_{c-1}} w_{jk}^{(c)} s_k^{(c-1)},$$

où $s_k^{(0)} = x_k$ désigne la k-ème composante de l'entrée. La sortie du neurone j de la couche c est alors :

$$s_j^{(c)} = \phi^{(c)}\big(\hat{\ell}_j^{(c)}(\mathbf{x}; \mathbf{a})\big).$$

La sortie finale du réseau est le vecteur $\mathbf{z} = (s_1^{(C)}, \ldots, s_{n_C}^{(C)})$.

Fonction mère du réseau. Par analogie avec le perceptron, on associe au réseau une fonction mère :

$$\begin{aligned}\hat{\mathrm{F}} \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m &\to \mathbb{R}^p \\ (\mathbf{x};\mathbf{a}) &\mapsto \hat{\mathrm{F}}(\mathbf{x};\mathbf{a}),\end{aligned}$$

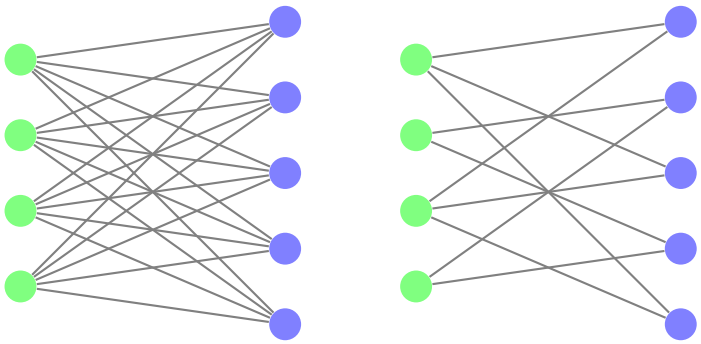
dont découlent les deux visages habituels :

$$\mathrm{F}_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) \overset{\text{def}}{=} \hat{\mathrm{F}}(\mathbf{x};\mathbf{a}), \qquad \tilde{\mathrm{F}}^{(i)}(\mathbf{a}) \overset{\text{def}}{=} \hat{\mathrm{F}}(\mathbf{X}^{(i)};\mathbf{a}).$$

Toute la démarche d'apprentissage expliquée pour un perceptron s'applique sans modification : on définit une fonction de perte $\mathrm{E}(\mathbf{a})$, et on la minimise par descente de gradient. Seul le calcul du gradient est plus complexe, car $\hat{\mathrm{F}}$ est une composition de C couches plutôt que d'une seule.

Remarque
On choisit en général la même fonction d'activation ϕ pour toutes les couches cachées, et éventuellement une autre pour la couche de sortie. Par exemple, pour un problème de classification binaire, on utilise souvent σ en couche cachée et σ également en sortie (pour produire une probabilité), tandis que pour la régression on utilise l'identité en sortie.

Remarque
Une couche est dite *dense* (ou *fully connected*) si chaque neurone est relié à tous les neurones de la couche précédente. C'est l'architecture que nous considérons ici. Il existe d'autres architectures (réseaux convolutifs, récurrents, etc.) où certaines connexions sont absentes, ce qui revient à imposer des poids nuls sur les arêtes correspondantes.

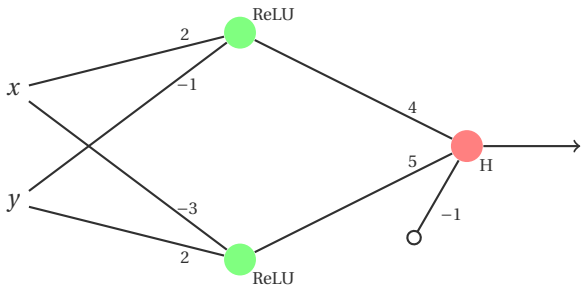


5.3.3. $\mathrm{F}_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})$: frontières de décision et approximation universelle

Pour des poids $\mathbf{a}$ fixés, le réseau définit une fonction de l'entrée $\mathrm{F}_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = \hat{\mathrm{F}}(\mathbf{x};\mathbf{a})$. Comme pour le perceptron, on s'interroge sur la géométrie de cette fonction : quelles frontières de décision peut-elle représenter ? La réponse est radicalement différente de celle du perceptron.

Frontières non linéaires. Un perceptron seul ne peut produire qu'une frontière de décision linéaire (un hyperplan). En composant plusieurs couches, le réseau peut produire des frontières de décision arbitrairement complexes. Chaque couche cachée introduit de nouvelles séparations linéaires, et la composition de ces séparations permet de délimiter des régions de formes quelconques.

EXEMPLE (RÉSEAU RELU À DEUX COUCHES)
Voici un réseau de neurones à deux couches : deux neurones ReLU en première couche, un neurone Heaviside en sortie :



 © 2024-2027 G. FACCANONI

- Le premier perceptron linéaire de la première couche renvoie $s_1 = \mathrm{ReLU}(2x-y) = \begin{cases} 0 & \text{si } 2x-y<0, \\ 2x-y & \text{si } 2x-y\geq 0. \end{cases}$

  Voici trois exemples :

(x,y)	$2x-y$	s_1
$(4,7)$	$2\cdot 4-7=1$	1
$(3,2)$	$2\cdot 3-2=4$	4
$\left(\frac{1}{10},\frac{1}{10}\right)$	$2\cdot\frac{1}{10}-\frac{1}{10}=\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

- Le deuxième perceptron linéaire de la première couche renvoie $s_2 = \mathrm{ReLU}(-3x+2y) = \begin{cases} 0 & \text{si } -3x+2y<0, \\ -3x+2y & \text{si } -3x+2y\geq 0. \end{cases}$

  Les mêmes exemples :

(x,y)	$-3x+2y$	s_2
$(4,7)$	$-3\cdot 4+2\cdot 7=2$	2
$(3,2)$	$-3\cdot 3+2\cdot 2=-5$	0
$\left(\frac{1}{10},\frac{1}{10}\right)$	$-3\cdot\frac{1}{10}+2\cdot\frac{1}{10}=-\frac{1}{10}$	0

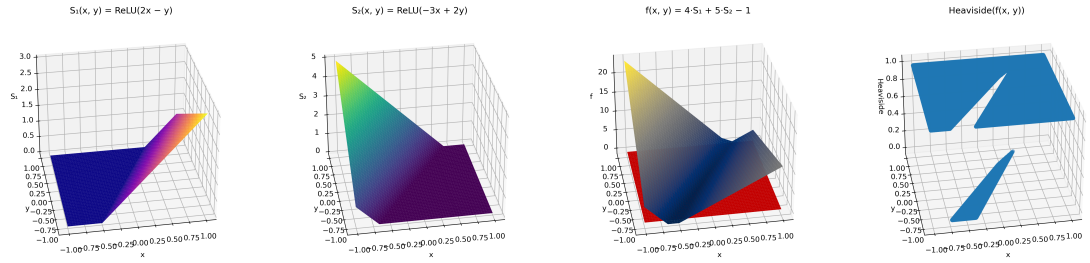
- L'unique perceptron affine de la deuxième couche renvoie $w = \mathrm{H}(4s_1+5s_2-1) = \begin{cases} 0 & \text{si } 4s_1+5s_2-1<0, \\ 1 & \text{si } 4s_1+5s_2-1\geq 0. \end{cases}$

  Les mêmes exemples :

(x,y)	$4s_1+5s_2-1$	$\mathrm{H}(4s_1+5s_2-1)$	
$(4,7)$	$4\cdot 1+5\cdot 2-1=13$	1	car $13\geq 0$
$(3,2)$	$4\cdot 4+5\cdot 0-1=15$	1	car $15\geq 0$
$\left(\frac{1}{10},\frac{1}{10}\right)$	$4\cdot\frac{1}{10}+5\cdot 0-1=-\frac{3}{5}$	0	car $-\frac{3}{5}<0$

La première couche produit deux séparations linéaires ($2x-y=0$ et $-3x+2y=0$), et la couche de sortie combine leurs activations pour produire une frontière de décision non linéaire que aucun perceptron seul ne pourrait représenter. En conclusion, ce réseau de neurones calcule :

$$\mathrm{H}\Big(4\,\mathrm{ReLU}(2x-y)+5\,\mathrm{ReLU}(-3x+2y)-1\Big)$$




```
import sympy as sp

# Variables
x, y = sp.symbols('x y')

# Fonction ReLU et Heaviside
ReLU = lambda u: sp.Max(0, u)
Heaviside = lambda u: sp.Piecewise((0, u < 0), (1, u >= 0))

# Neurones (S1, S2)
s1 = ReLU(2 * x - y)
s2 = ReLU(-3 * x + 2 * y)

# Combinaison linéaire puis Heaviside
f = 4 * s1 + 5 * s2 - 1
F = Heaviside(f)
```

```python
# Points à évaluer
k = sp.symbols('k')
points = [(4, 7), (3, 2), (1/sp.S(10), 1/sp.S(10))]

# Évaluation des points
for px, py in points:
    subs = {x: px, y: py}
    s1_val = s1.subs(subs)
    s2_val = s2.subs(subs)
    f_val = f.subs(subs)
    F_val = F.subs(subs)

    print(f"Avec (x, y)=({px}, {py}), on a s_1(x,y)={s1_val},
     ↪  s_2(x,y)={s2_val}, 4s_1(x,y)+5s_2(x,y)-1={f_val}, F(x,y)={F_val}")
```

```
Avec (x, y)=(4, 7), on a s_1(x,y)=1, s_2(x,y)=2, 4s_1(x,y)+5s_2(x,y)-1=13, F(x,y)=1
Avec (x, y)=(3, 2), on a s_1(x,y)=4, s_2(x,y)=0, 4s_1(x,y)+5s_2(x,y)-1=15, F(x,y)=1
Avec (x, y)=(1/10, 1/10), on a s_1(x,y)=1/10, s_2(x,y)=0, 4s_1(x,y)+5s_2(x,y)-1=-3/5,
 ↪  F(x,y)=0
```

Théorème d'approximation universelle. Un résultat fondamental, dû à Cybenko (1989) et raffiné par Hornik (1991), établit que les réseaux de neurones sont des approximateurs universels.

Théorème 5.2 (Approximation universelle)
Toute fonction continue $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ peut être approchée, avec une précision arbitraire, par un réseau de neurones à une seule couche cachée (à condition d'utiliser un nombre suffisant de neurones dans cette couche). Plus précisément, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réseau $\mathrm{F}_{\mathbf{a}}$ tel que :

$$\sup_{x \in [a,b]} |f(x) - \mathrm{F}_{\mathbf{a}}(x)| < \varepsilon.$$

Ce résultat est remarquable : il garantit qu'un réseau à une seule couche cachée peut approcher n'importe quelle fonction continue. Cependant, il faut le nuancer sur deux points.

- **Le nombre de neurones peut être colossal.** Le théorème est une garantie d'existence, pas une garantie d'efficacité : pour certaines fonctions, le nombre de neurones nécessaires dans la couche cachée est prohibitif en pratique.
- **L'apprentissage n'est pas garanti.** Le théorème dit qu'il *existe* des poids $\mathbf{a}$ qui approchent f, mais ne dit pas comment les trouver. La descente de gradient peut converger vers un minimum local loin de ces poids optimaux.

Du large au profond : le deep learning. La solution pratique à ces limitations est d'empiler plusieurs couches cachées plutôt que d'élargir une seule couche. On crée ainsi un *réseau de neurones profond* (*deep neural network*), dont chaque couche apprend une représentation intermédiaire des données de plus en plus abstraite. C'est le principe du *deep learning* : plutôt qu'un réseau large et peu profond, on préfère un réseau profond et plus étroit, dont l'entraînement est à la fois plus efficace et plus riche en termes de représentations apprises.

Remarque
On peut interpréter chaque couche intermédiaire d'un réseau profond comme une transformation des données vers un nouvel espace de représentation. Par exemple, dans un réseau de reconnaissance d'images, les premières couches détectent des contours simples, les couches suivantes des formes géométriques, et les dernières couches des objets complexes. Cette hiérarchie de représentations est l'une des raisons du succès pratique du deep learning.

5.3.4. Rétropropagation sur un réseau de neurones

Nous avons déjà calculé le gradient de E pour un perceptron : la règle de la chaîne donnait une composition de trois termes. Pour un réseau de neurones à C couches, la même règle s'applique, mais la chaîne de dérivées traverse toutes les couches. Deux difficultés nouvelles apparaissent.

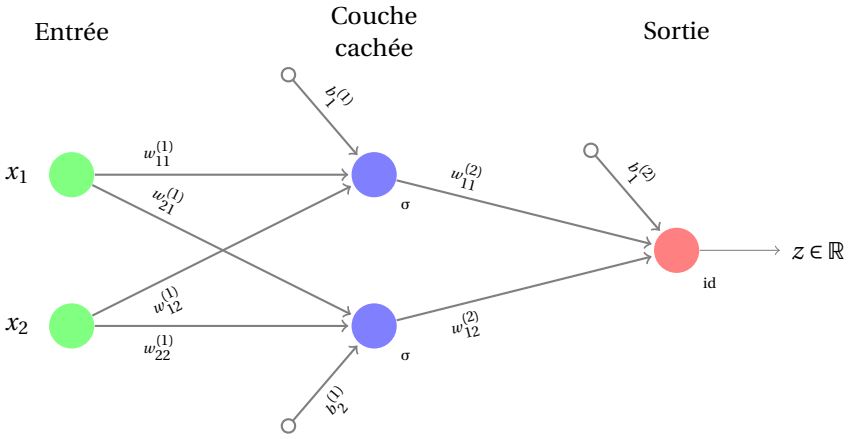
© 2024-2027 G. Faccanoni

- **Longueur de la chaîne.** Chaque couche ajoute un nouveau maillon à la composition. Pour un réseau profond, calculer naïvement la dérivée de E par rapport à un poids de la première couche nécessite de traverser toutes les couches intermédiaires.
- **Redondance des calculs.** Les mêmes quantités intermédiaires (pré-activations, sorties de chaque neurone) apparaissent dans le calcul de plusieurs dérivées partielles. Les recalculer à chaque fois serait extrêmement coûteux.

La *rétropropagation* (en anglais *backpropagation*) résout ces deux difficultés en organisant le calcul en deux passes successives : une passe avant (*forward pass*) qui calcule et *stocke* toutes les valeurs intermédiaires, puis une passe arrière (*backward pass*) qui remonte les couches de la sortie vers l'entrée en réutilisant ces valeurs.

⋆ Exemple : architecture $2 \to 2 \to 1$

Considérons un réseau à deux entrées, une couche cachée de deux neurones, et une sortie scalaire (architecture $2 \to 2 \to 1$). La fonction d'activation des neurones cachés est σ (sigmoïde) et celle du neurone de sortie est l'identité.



On note les poids de la façon suivante :

- couche cachée : $w_{jk}^{(1)}$ est le poids de l'entrée k vers le neurone caché j, et $b_j^{(1)}$ son biais ($j = 1,2$, $k = 1,2$) ;
- couche de sortie : $w_{1j}^{(2)}$ est le poids du neurone caché j vers la sortie, et $b_1^{(2)}$ son biais.

L'ensemble des poids est $\mathbf{a} = (w_{11}^{(1)}, w_{12}^{(1)}, b_1^{(1)}, w_{21}^{(1)}, w_{22}^{(1)}, b_2^{(1)}, w_{11}^{(2)}, w_{12}^{(2)}, b_1^{(2)})$.

Étape 1 – *Forward pass* : calcul et stockage des valeurs intermédiaires. Pour une entrée $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ et des poids $\mathbf{a}$ fixés, on calcule couche par couche en stockant toutes les valeurs intermédiaires.

Pour le neurone j de la couche c on notera

- $u_j^{(c)}$ le résultat de la pré-activation , *i.e.* $\hat{\ell}_j^{(c)}(\mathbf{x}; \mathbf{a})$;
- $s_j^{(c)}$ la sortie, *i.e.* $\phi^{(c)}(u_j^{(c)})$.

- **Couche cachée.** Les pré-activations des deux neurones cachés sont :

$$u(1)_1 = w_{11}^{(1)} x_1 + w_{12}^{(1)} x_2 + b_1^{(1)},$$
$$u_2^{(1)} = w_{21}^{(1)} x_1 + w_{22}^{(1)} x_2 + b_2^{(1)}.$$

  Les sorties des neurones cachés sont :

$$s_1^{(1)} = \sigma\big(u_1^{(1)}\big), \qquad s_2^{(1)} = \sigma\big(u_2^{(1)}\big).$$

- **Couche de sortie.** La pré-activation du neurone de sortie est :

$$u_1^{(2)} = w_{11}^{(2)} s_1^{(1)} + w_{12}^{(2)} s_2^{(1)} + b_1^{(2)},$$

  et la sortie finale (avec $\phi = \mathrm{id}$) :

$$\hat{\mathrm{F}}(\mathbf{x}; \mathbf{a}) = u_1^{(2)}.$$

- **Ce qu'on stocke.** À l'issue du *forward pass*, on conserve en mémoire :

$$u_1^{(1)},\ u_2^{(1)},\ s_1^{(1)},\ s_2^{(1)},\ u_1^{(2)}.$$

Ces cinq valeurs seront réutilisées dans le backward pass sans être recalculées.

Étape 2 – *Backward pass* : remontée couche par couche On dispose d'un unique point d'entraînement $(\mathbf{X}, z)$. La perte locale est

$$\mathrm{E}(\mathbf{a}) = \big(\hat{\mathrm{F}}(\mathbf{X};\mathbf{a}) - z\big)^2 = \big(\hat{\ell}_1^{(2)} - z\big)^2.$$

On introduit comme pour le perceptron la fonction

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto (t-z)^2, \end{aligned}$$

de sorte que $\mathrm{E}(\mathbf{a}) = f(\hat{\ell}_1^{(2)})$.

- **Signal d'erreur de la couche de sortie.** On définit le signal d'erreur de la couche de sortie

$$\delta_1^{(2)} \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial u_1^{(2)}} = f'\big(u_1^{(2)}\big) = 2\big(u_1^{(2)} - z\big).$$

Les dérivées par rapport aux poids de la couche de sortie s'obtiennent immédiatement

$$\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial w_{11}^{(2)}} = \delta_1^{(2)} \cdot s_1^{(1)}, \qquad \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial w_{12}^{(2)}} = \delta_1^{(2)} \cdot s_2^{(1)}, \qquad \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial b_1^{(2)}} = \delta_1^{(2)}.$$

- **Signal d'erreur de la couche cachée.** Pour remonter à la couche cachée, on applique à nouveau la règle de la chaîne. Pour le neurone caché $j \in \{1,2\}$:

$$\delta_j^{(1)} \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial u_j^{(1)}} = \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial u_1^{(2)}} \cdot \frac{\partial \hat{\ell}_1^{(2)}}{\partial s_j^{(1)}} \cdot \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial u_j^{(1)}} = \delta_1^{(2)} \cdot w_{1j}^{(2)} \cdot \sigma'\big(u_j^{(1)}\big).$$

On voit apparaître le signal $\delta_1^{(2)}$ déjà calculé : c'est précisément la réutilisation des valeurs stockées qui évite les recalculs. Les dérivées par rapport aux poids de la couche cachée sont alors :

$$\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial w_{jk}^{(1)}} = \delta_j^{(1)} \cdot \mathrm{X}_k, \qquad \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial b_j^{(1)}} = \delta_j^{(1)},$$

où X_k est la k-ème composante de l'entrée $\mathbf{X}$.

Remarque

On observe la structure générale de la rétropropagation : le signal d'erreur $\delta_j^{(c)}$ d'un neurone de la couche c s'exprime en fonction des signaux $\delta^{(c+1)}$ de la couche suivante, multipliés par les poids $w^{(c+1)}$ et la dérivée de l'activation ϕ'. L'information se propage donc *en sens inverse* de la sortie vers l'entrée, d'où le nom de rétropropagation.

EXEMPLE

Prenons le point d'entraînement $(\mathbf{X}, z) = ((1,0), 1)$ et les **poids initiaux** :

$$w_{11}^{(1)} = 0.5,\ w_{12}^{(1)} = -0.5,\ b_1^{(1)} = 0,\ w_{21}^{(1)} = 0.5,\ w_{22}^{(1)} = 0.5,\ b_2^{(1)} = 0,\ w_{11}^{(2)} = 1,\ w_{12}^{(2)} = 1,\ b_1^{(2)} = 0.$$

- Étape 1 – Forward pass.

$$\begin{aligned} u_1^{(1)} &= \hat{\ell}_1^{(1)}(1,0) = 0.5 \times 1 + (-0.5) \times 0 + 0 = 0.5, \\ u_2^{(1)} &= \hat{\ell}_2^{(1)}(1,0) = 0.5 \times 1 + 0.5 \times 0 + 0 = 0.5, \\ s_1^{(1)} &= \sigma(u_1^{(1)}) \approx 0.622, \\ s_2^{(1)} &= \sigma(u_2^{(1)}) \approx 0.622, \\ u_1^{(2)} &= \hat{\ell}_1^{(2)}(1,0) = 1 \times 0.622 + 1 \times 0.622 + 0 = 1.244, \\ \hat{\mathrm{F}}((1,0);\mathbf{a}) &= \mathrm{id}(u_1^{(2)}) \approx 1.244. \end{aligned}$$

La perte vaut $\mathrm{E}(\mathbf{a}) = (1.244 - 1)^2 \approx 0.060$.

© 2024-2027 G. FACCANONI

- Étape 2 – Backward pass.
  Signal d'erreur de la couche de sortie :
  $$\delta_1^{(2)} = 2(1.244 - 1) = 0.488.$$
  Gradients de la couche de sortie :
  $$\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial w_{11}^{(2)}} = 0.488 \times 0.622 \approx 0.304, \quad \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial w_{12}^{(2)}} = 0.488 \times 0.622 \approx 0.304, \quad \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial b_1^{(2)}} = 0.488.$$
  Signaux d'erreur de la couche cachée, en utilisant $\sigma'(0.5) = \sigma(0.5)(1 - \sigma(0.5)) \approx 0.622 \times 0.378 \approx 0.235$:
  $$\delta_1^{(1)} = 0.488 \times 1 \times 0.235 \approx 0.115, \qquad \delta_2^{(1)} = 0.488 \times 1 \times 0.235 \approx 0.115.$$
  Gradients de la couche cachée :
  $$\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial w_{11}^{(1)}} = 0.115 \times 1 = 0.115, \quad \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial w_{12}^{(1)}} = 0.115 \times 0 = 0, \quad \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial b_1^{(1)}} = 0.115,$$
  $$\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial w_{21}^{(1)}} = 0.115 \times 1 = 0.115, \quad \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial w_{22}^{(1)}} = 0.115 \times 0 = 0, \quad \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial b_2^{(1)}} = 0.115.$$
- Mise à jour des poids avec $\eta = 0.5$.
  $$w_{11}^{(2)} \leftarrow 1 - 0.5 \times 0.304 = 0.848, \quad w_{12}^{(2)} \leftarrow 1 - 0.5 \times 0.304 = 0.848,$$
  $$b_1^{(2)} \leftarrow 0 - 0.5 \times 0.488 = -0.244,$$
  $$w_{11}^{(1)} \leftarrow 0.5 - 0.5 \times 0.115 = 0.443, \quad w_{12}^{(1)} \leftarrow -0.5 - 0.5 \times 0 = -0.5,$$
  $$w_{21}^{(1)} \leftarrow 0.5 - 0.5 \times 0.115 = 0.443, \quad w_{22}^{(1)} \leftarrow 0.5 - 0.5 \times 0 = 0.5.$$
- Vérification. On recalcule la perte après mise à jour :
  $$\begin{aligned}
  \hat{\ell}_1^{(1)} &= 0.443 \times 1 + (-0.5) \times 0 + 0 = 0.443,\\
  \hat{\ell}_2^{(1)} &= 0.443 \times 1 + 0.5 \times 0 + 0 = 0.443,\\
  s_1^{(1)} &= \sigma(0.443) \approx 0.609,\\
  s_2^{(1)} &= \sigma(0.443) \approx 0.609,\\
  \hat{\ell}_1^{(2)} &= 0.848 \times 0.609 + 0.848 \times 0.609 - 0.244 \approx 0.788,\\
  \mathrm{E} &= (0.788 - 1)^2 \approx 0.045 < 0.060.
  \end{aligned}$$
  La perte a bien diminué après un pas de descente.

⋆ Algorithme général de rétropropagation

L'exemple précédent (architecture $2 \to 2 \to 1$) illustre une structure qui se généralise à tout réseau de C couches. On dispose d'un ensemble d'entraînement $\{(\mathrm{X}^{(i)}, z^{(i)})\}_{i=1}^{\mathrm{N}}$ et d'une fonction de perte $\mathrm{E}(a) = \frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{E}^{(i)}(a)$. Pour calculer $\nabla_a \mathrm{E}(a)$, on procède en deux passes.

Passe avant (*forward pass*). Pour chaque donnée $\mathrm{X}^{(i)}$, calculer et stocker, couche par couche de $c = 1$ à C :
$$\hat{\ell}_j^{(c)} = b_j^{(c)} + \sum_{k=1}^{n_{c-1}} w_{jk}^{(c)} s_k^{(c-1)}, \qquad s_j^{(c)} = \phi^{(c)}\left(\hat{\ell}_j^{(c)}\right)$$
avec $s_k^{(0)} = \mathrm{X}_k^{(i)}$. La sortie du réseau est $\hat{\mathrm{F}}(\mathrm{X}^{(i)}; a) = (s_1^{(\mathrm{C})}, \dots, s_{n_\mathrm{C}}^{(\mathrm{C})})$.

Passe arrière (*backward pass*). Remonter les couches de $c = \mathrm{C}$ à $c = 1$ en calculant les signaux d'erreur :

- *Couche de sortie* ($c = \mathrm{C}$) :
  $$\delta_j^{(\mathrm{C})} = \frac{\partial \mathrm{E}^{(i)}}{\partial \hat{\ell}_j^{(\mathrm{C})}}$$
- *Couches cachées* ($c = \mathrm{C} - 1, \dots, 1$) :
  $$\delta_j^{(c)} = \phi'^{(c)}\left(\hat{\ell}_j^{(c)}\right) \sum_{k=1}^{n_{c+1}} w_{kj}^{(c+1)} \delta_k^{(c+1)}$$

Le signal d'erreur de chaque neurone est une combinaison pondérée des signaux de la couche suivante, multipliée par la dérivée de l'activation locale. L'information se propage en sens inverse de la sortie vers l'entrée, d'où le nom de **rétropropagation**.

Gradients. Une fois les signaux $\delta_j^{(c)}$ calculés pour toutes les couches, les gradients s'obtiennent immédiatement :

$$\frac{\partial \mathrm{E}^{(i)}}{\partial w_{jk}^{(c)}} = \delta_j^{(c)} \cdot s_k^{(c-1)}, \qquad \frac{\partial \mathrm{E}^{(i)}}{\partial b_j^{(c)}} = \delta_j^{(c)}.$$

Le gradient global $\nabla_a \mathrm{E}(a)$ est la moyenne de ces gradients sur toutes les données d'entraînement.

Mise à jour. Un pas de descente de gradient met à jour simultanément tous les poids :

$$a \leftarrow a - \eta \nabla_a \mathrm{E}(a).$$

Cette procédure — forward pass, backward pass, mise à jour — constitue une **itération** de l'algorithme d'apprentissage. Elle est répétée jusqu'à ce que l'erreur soit suffisamment faible.

5.3.5. Autres fonctions de perte

Jusqu'ici, nous avons systématiquement utilisé l'erreur quadratique moyenne (MSE) comme fonction de perte. Ce choix est naturel pour les problèmes de régression, mais il n'est pas toujours le plus adapté. Dans cette section, nous présentons d'autres fonctions de perte couramment utilisées, en motivant chaque choix par le type de problème auquel il répond.

⋆ Problèmes de régression

- **Erreur absolue moyenne (MAE).**

$$\mathrm{E}(\mathbf{a}) = \frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \left| \tilde{\mathrm{F}}^{(i)}(\mathbf{a}) - z^{(i)} \right|.$$

  Contrairement à la MSE, la MAE pénalise les erreurs proportionnellement à leur valeur absolue, sans les élever au carré. Elle est donc moins sensible aux valeurs aberrantes (*outliers*) : une erreur deux fois plus grande donne une pénalité deux fois plus grande (et non quatre fois pour la MSE).

  Son inconvénient est que $t \mapsto |t|$ n'est pas dérivable en 0, ce qui complique le calcul du gradient.

- **Erreur log-cosh.** Pour bénéficier à la fois de la robustesse de la MAE et de la régularité de la MSE, on introduit la version lisse suivante :

$$\mathrm{E}(\mathbf{a}) = \frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \ln\Big(\cosh\big(\tilde{\mathrm{F}}^{(i)}(\mathbf{a}) - z^{(i)}\big)\Big).$$

  La fonction $t \mapsto \ln(\cosh(t))$ est indéfiniment dérivable et se comporte comme $\frac{t^2}{2}$ près de 0 (comportement quadratique, comme la MSE) et comme $|t| - \ln 2$ pour $|t|$ grand (comportement linéaire, comme la MAE). Sa dérivée est tanh, à valeurs dans $(-1, 1)$: le gradient est toujours borné, ce qui évite les explosions numériques.

EXEMPLE (COMPARAISON MSE, MAE, LOG-COSH)
Pour fixer les idées, comparons les trois fonctions de perte sur deux erreurs : $\varepsilon = 1$ et $\varepsilon = 2$.

ε	MSE : ε^2	MAE : $\lvert\varepsilon\rvert$	log-cosh : $\ln(\cosh(\varepsilon))$
1	1	1	0.433
2	4	2	1.325

Lorsque l'erreur double, la MSE est multipliée par 4, la MAE par 2, et la log-cosh par un facteur intermédiaire (≈ 3.1). La MSE pénalise donc bien plus sévèrement les grandes erreurs.

⋆ Problèmes de classification binaire

Dans un problème de classification binaire, la cible est une étiquette $z^{(i)} \in \{0, 1\}$ et le réseau produit une probabilité $p^{(i)} = \tilde{\mathrm{F}}^{(i)}(\mathbf{a}) \in (0, 1)$, obtenue typiquement via une sigmoïde en sortie.

© 2024-2027 G. FACCANONI

- **Entropie croisée binaire.** L'idée naturelle est de maximiser la vraisemblance des observations : chaque paire $(z^{(i)}, p^{(i)})$ contribue par $(p^{(i)})^{z^{(i)}}(1-p^{(i)})^{1-z^{(i)}}$, ce qui vaut $p^{(i)}$ si $z^{(i)}=1$ et $1-p^{(i)}$ si $z^{(i)}=0$. Maximiser le produit de ces termes est équivalent à minimiser son opposé du logarithme, ce qui donne :

$$\mathrm{E}(\mathbf{a}) = -\frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{i=1}^{\mathrm{N}}\Big[z^{(i)}\ln(p^{(i)}) + (1-z^{(i)})\ln(1-p^{(i)})\Big].$$

  On vérifie que $\mathrm{E}(\mathbf{a}) \geq 0$ et $\mathrm{E}(\mathbf{a}) = 0$ si et seulement si $p^{(i)} = z^{(i)}$ pour tout i.

EXEMPLE
Pour $(z,p) = (1, 0.9)$: $\mathrm{E} = -\ln(0.9) \approx 0.105$. La prédiction est bonne, la pénalité est faible.

Pour $(z,p) = (1, 0.1)$: $\mathrm{E} = -\ln(0.1) \approx 2.303$. La prédiction est mauvaise et le réseau est très confiant dans le mauvais sens : la pénalité explose logarithmiquement, ce qui crée un gradient important et accélère la correction lors de la descente.

⋆ Problèmes de classification à K classes

Lorsque la classification porte sur $\mathrm{K} \geq 2$ classes, la cible est un vecteur *one-hot* $\mathbf{z}^{(i)} \in \{0,1\}^{\mathrm{K}}$ (une seule coordonnée vaut 1) et le réseau produit un vecteur de probabilités $\mathbf{p}^{(i)} = \tilde{\mathrm{F}}^{(i)}(\mathbf{a}) \in [0,1]^{\mathrm{K}}$ avec $\sum_{k=1}^{\mathrm{K}} p_k^{(i)} = 1$, obtenu via une couche *softmax* en sortie.

- **Entropie croisée catégorielle.**

$$\mathrm{E}(\mathbf{a}) = -\frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{i=1}^{\mathrm{N}}\sum_{k=1}^{\mathrm{K}} z_k^{(i)}\ln(p_k^{(i)}).$$

  Comme $z_k^{(i)} = 0$ sauf pour la vraie classe k_i^*, la somme sur k se réduit à un seul terme :

$$\mathrm{E}(\mathbf{a}) = -\frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{i=1}^{\mathrm{N}}\ln\big(p_{k_i^*}^{(i)}\big).$$

  Minimiser $\mathrm{E}(\mathbf{a})$ revient donc à maximiser la probabilité assignée à la bonne classe.

Remarque
Le choix de la fonction de perte dépend du type de problème :

- régression (cible réelle quelconque) : MSE, MAE ou $\log-\cosh$;
- classification binaire (cible $\in \{0,1\}$, sortie probabilité) : entropie croisée binaire ;
- classification à K classes (cible one-hot, sortie softmax) : entropie croisée catégorielle.

En pratique, utiliser la MSE pour un problème de classification est possible mais sous-optimal : l'entropie croisée est mieux adaptée car elle pénalise exponentiellement les prédictions erronées avec forte confiance.

5.4. Annexe : PINN (apprentissage non supervisé)

Dans la section précédente, la fonction cible F était apprise à partir de couples (X_i, z_i) observés. Dans certains problèmes – notamment en physique – la sortie exacte $z_i = y(t_i)$ n'est pas connue, mais la solution satisfait une équation différentielle connue. L'idée des Physics-Informed Neural Network (PINN) est d'incorporer cette connaissance physique directement dans la fonction de coût.

5.4.1. EDO, problème de Cauchy, solutions exacte / approchée / PINN

Les équations différentielles modélisent l'évolution de nombreux phénomènes physiques, biologiques ou économiques. Elles expriment des relations entre une fonction inconnue et ses dérivées. Lorsqu'elles ne font intervenir que des dérivées par rapport à une seule variable, on parle d'équations différentielles ordinaires (EDO). En revanche, lorsqu'elles impliquent des dérivées partielles par rapport à plusieurs variables, on parle d'équations aux dérivées partielles (EDP).

Une EDO s'écrit sous la forme générale :

$$\mathrm{F}\left(y(t), y'(t), y''(t), \ldots, y^{(p)}(t)\right) = g(t),$$

où $y : \mathrm{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction inconnue définie sur un intervalle I, et p est l'ordre de l'équation.

Résoudre une équation différentielle consiste à déterminer toutes les fonctions y satisfaisant cette relation sur un intervalle donné. La solution *générale* regroupe l'ensemble des solutions possibles sous une forme paramétrée par des constantes libres. Les EDO admettent en général une infinité de solutions. Pour isoler celle qui correspond à un problème physique concret, on impose des données supplémentaires appelées **conditions initiales**.

EXEMPLE
Résolvons l'EDO $y'(t) = -y(t)$. On cherche les fonctions $y(t)$ vérifiant cette relation pour tout $t \in \mathrm{I}$ où I est un intervalle qu'on cherchera le plus grand possible. Il est facile de vérifier que, pour $c \in \mathbb{R}$, les fonctions $y(t) = ce^{-t}$ sont solution pour tout $t \in \mathbb{R}$. Si on impose une condition initiale (=passage par un point), par exemple $y(0) = 1$, on sélectionne une seule fonction de cette famille,c'est la fonction $y(t) = e^{-t}$.

Le couple EDO+CI est appelé **problème de Cauchy**. Résoudre un tel problème revient à

- déterminer toutes les fonctions y vérifiant l'EDO ;
- parmi elles, identifier celles qui satisfont la condition initiale ;
- étudier l'intervalle maximal sur lequel la solution est définie et unique.

Dans ce chapitre, nous nous limiterons aux cas où le problème de Cauchy admet une unique solution définie sur l'intervalle spécifié.

EXEMPLE (CALCUL EXACT DE LA SOLUTION D'UNE EDO LINÉAIRES DU PREMIER ORDRE)
Une équation différentielle linéaire du premier ordre s'écrit sous la forme

$$a(x)y'(x) + b(x)y(x) = g(x),$$

où a, b et g sont des fonctions continues sur un intervalle $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$. Pour garantir l'existence d'une solution, on suppose que $a(x) \neq 0$ sur un sous-intervalle $\mathrm{J} \subset \mathrm{I}$. Sur un tel intervalle, toute solution $y(x)$ peut être exprimée comme combinaison de deux termes :

$$y(x) = \underbrace{\mathrm{C}e^{-\mathrm{A}(x)}}_{y_{\mathrm{H}}(x)} + \underbrace{\mathrm{B}(x)e^{-\mathrm{A}(x)}}_{y_{\mathrm{P}}(x)}, \qquad \forall \mathrm{C} \in \mathbb{R},$$

où $\mathrm{A}(x)$ est une primitive de $\frac{b(x)}{a(x)}$ et $\mathrm{B}(x)$ une primitive de $\dfrac{g(x)}{a(x)}e^{\mathrm{A}(x)}$.

Par exemple, considérons l'EDO $y'(x) - y(x) = x$. On identifie $a(x) = 1$, $b(x) = -1$, $g(x) = x$. On calcule alors

$$\mathrm{A}(x) = \int -1\,dx = -x, \qquad \mathrm{B}(x) = \int xe^{-x}dx = -(1+x)e^{-x},$$

d'où la famille de solutions

$$y(x) = \left(\mathrm{C} - (1+x)e^{-x}\right)e^{x} = \mathrm{C}e^{x} - (1+x).$$

Seules les équations différentielles les plus simples peuvent être résolues par des formules explicites. Si une solution analytique n'est pas disponible, la solution peut être approchée numériquement.

© 2024-2027 G. FACCANONI

Considérons le cadre classique d'un problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = \varphi(t, y(t)), \quad \forall\, t \in \mathrm{I} =]\, t_0, \mathrm{T}[, \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

où φ est une fonction donnée continue et y_0 une valeur initiale prescrite. On suppose qu'on a montré l'existence et l'unicité d'une solution y définie sur l'intervalle I.

On introduit les définitions suivantes de solution du problème de Cauchy :

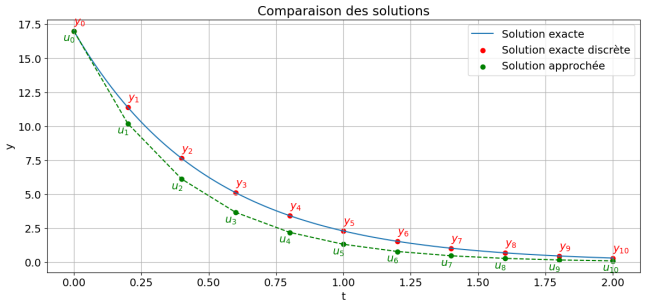
- **Solution exacte continue** : il s'agit d'une fonction $t \mapsto y(t)$ satisfaisant exactement l'équation différentielle et la condition initiale. Dans certains cas, une expression analytique de cette fonction est accessible.
- **Solution exacte discrète** : si l'on considère une discrétisation de l'intervalle temporel, par exemple $\{t_i\}_{i=0}^{\mathrm{N}}$, on peut évaluer la solution exacte en ces points et obtenir les valeurs exactes $\{y(t_i)\}_{i=0}^{\mathrm{N}}$ de la solution continue. Il s'agit alors d'une suite discrète représentant la solution au points de la grille.
- **Solution approchée discrète** : dans le cas des méthodes numériques classiques, on calcule une suite de valeurs $\{u_i\}_{i=0}^{\mathrm{N}}$ telles que $u_i \approx y(t_i)$. Ces approximations sont construites à l'aide de schémas numériques (typiquement, des suites définies par récurrence), sans connaître la solution exacte.
- **Solution PINN** : il s'agit d'une fonction $t \mapsto u(t)$ dont on fixe à l'avance la forme analytique (typiquement, un réseau de neurones) et dont on ajuste les paramètres internes pour qu'elle vérifie au mieux l'équation différentielle, la condition initiale et éventuellement certaines valeurs aux points de la grille. On aura ainsi $u(t) \approx y(t)$ pout tout t de l'intervalle I.

Pour les solutions (exacte et approchée) discrètes, on doit introduire une discrétisation de l'intervalle de temps $[t_0; \mathrm{T}]$. Pour cela, on choisit un pas $h > 0$, et on définit les $\mathrm{N}+1$ points

$$t_n = t_0 + nh, \quad n = 0, 1, \ldots, \mathrm{N}, \quad \text{avec } h = \frac{\mathrm{T} - t_0}{\mathrm{N}}.$$

Cette discrétisation divise l'intervalle $[t_0, \mathrm{T}]$ en N sous-intervalles de même longueur h, notés $\mathrm{I}_n = [t_n, t_{n+1}]$.

- L'ensemble des $\mathrm{N}+1$ valeurs $\{t_0, t_1, \ldots, t_{\mathrm{N}}\}$ définit la **grille de discrétisation**.
- Les valeurs $\{y(t_0), y(t_1), \ldots, y(t_{\mathrm{N}})\}$ constituent la **solution exacte discrète**.
- Une méthode numérique fournit une approximation de cette suite, notée $\{u_0 = y_0, u_1, \ldots, u_{\mathrm{N}}\}$, appelée **solution approchée discrète**.



5.4.2. Un schéma classique : le schéma d'Euler explicite

Considérons l'EDO $y'(t) = \varphi(t, y(t))$. En intégrant cette équation entre deux instants t_n et $t_{n+1} = t_n + h$, on obtient

$$\underbrace{\int_{t_n}^{t_{n+1}} y'(t)\,\mathrm{d}t}_{y_{n+1} - y_n} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \varphi(t, y(t))\,\mathrm{d}t.$$

L'idée des méthodes numériques consiste à approcher cette intégrale par une formule de quadrature. Par exemple, si on considère la *formule de quadrature du rectangle à gauche*, on obtient l'approximation suivante :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx (b-a) f(a) \quad \rightsquigarrow \quad y_{n+1} - y_n = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \varphi(t, y(t))\,\mathrm{d}t \approx h\varphi(t_n, y(t_n)).$$

On obtient le **schéma d'Euler explicite** qui construit la suite de $\mathrm{N}+1$ valeurs suivante :

$$\begin{cases} u_0 = y(t_0) = y_0, \\ u_{n+1} = u_n + h\varphi(t_n, u_n), \quad \text{pour } n = 0, 1, \ldots, \mathrm{N}-1. \end{cases}$$

```python
import numpy as np

def EE(phi, tt, y0):
    h = tt[1] - tt[0]
    u_euler = np.zeros_like(tt)
    u_euler[0] = y0
    for n in range(len(tt) - 1):
        u_euler[n+1] = u_euler[n] + h * phi(tt[n], u_euler[n])
    return u_euler
```

Pour d'autres exemples de schémas d'approximation, vous pouvez consulter le cours M64 Data Science and Scientific Computing 6

5.4.3. Approximation par réseau de neurones, fonction coût PINN

Au lieu de calculer une suite discrète de valeurs $(u_n)_{n=0,\dots,N}$ approchant les $y(t_n)$ à l'aide d'un schéma numérique, on adopte ici une approche différente : on cherche directement une fonction $t \mapsto u(t)$, d'expression analytique choisie, censée approcher la solution exacte $y(t)$ du problème de Cauchy. Cette fonction $u(t)$ est représentée par un réseau de neurones dont

- l'entrée est la variable temporelle t,
- la sortie est une valeur $u(t)$ censée approcher $y(t)$.

L'expression analytique dépend de la structure du réseau : combien de couches, combien de neurons dans chaque couche, quelles fonctions d'activations dans chaque couche.

La fonction sera fixée une fois les paramètres (poids et biais du réseau) déterminés. Contrairement aux méthodes d'apprentissage de type "fitting", on n'utilise pas une base d'apprentissage constituée de couples $(t_i, y(t_i))$, car la solution exacte $y(t)$ est inconnue. On dispose uniquement d'un ensemble de points $\{t_k\}$ dans l'intervalle $[t_0, T]$ et de la seule valeur connue $y(t_0) = y_0$. **Comment peut-on entraîner le réseau, *i.e.* comment choisir les poids qui fixerons la fonction u ?** L'idée est simple : on impose que $u(t)$ vérifie "au mieux" l'équation différentielle et la condition initiale en les points $\{t_k\}$. Pour cela, on définit une fonction de coût combinant les deux termes :

- l'erreur sur l'équation différentielle,
- l'erreur sur la condition initiale (en effet, la condition initiale n'est pas vérifiée exactement aux points t_0).

La fonction de coût est par exemple donnée par

$$E = \sum_k \big(u'(t_k) - \varphi(t_k, u(t_k))\big)^2 + \big(u(t_0) - y_0\big)^2.$$

L'entraînement du réseau consiste alors à ajuster les paramètres (poids et biais) de u pour minimiser cette erreur E. Cette approche est ce que l'on appelle un **PINN (Physics-Informed Neural Network)**.

Dans l'exemple ci-dessous nous avons choisi un réseau à deux couche cachées, chacune ayant 20 nuerons. La fonction d'activation est toujours une tangente hyperbolique.

```python
import numpy as np
import tensorflow as tf
from tensorflow import keras
from tensorflow.keras import layers

def PINN(phi, t0, y0, tt_train, max_epochs=5000):

    my_activation = 'tanh' # 'tanh', 'softplus', 'swish', 'relu', 'softmax',
     ↪  'exponential'

    model = keras.Sequential([
        layers.Input(shape=(1,)),
        layers.Dense(20, activation=my_activation),
        layers.Dense(20, activation=my_activation),
        layers.Dense(1)
    ])
```


© 2024-2027 G. Faccanoni

```
    optimizer = keras.optimizers.Adam(learning_rate=1e-3)

    t_train = tf.convert_to_tensor(tt_train, dtype=tf.float32)

    @tf.function
    def compute_loss(t_train):
        with tf.GradientTape() as tape:
            tape.watch(t_train)
            u = model(t_train)
            du_dt = tape.gradient(u, t_train)
            eq_residual = du_dt - phi(t_train, u)
            loss_eq = tf.reduce_mean(tf.square(eq_residual))
            loss_init = tf.square(model(tf.constant([[t0]],
             ↪  dtype=tf.float32)) - y0)
            return loss_eq + loss_init

    @tf.function
    def train_step(t_train):
        with tf.GradientTape() as tape:
            loss = compute_loss(t_train)
        grads = tape.gradient(loss, model.trainable_variables)
        optimizer.apply_gradients(zip(grads, model.trainable_variables))
        return loss


    for epoch in range(max_epochs):
        loss = train_step(t_train)
        if epoch % 100 == 0:
            print(f"Epoch {epoch}, Loss: {loss.numpy().item():.6f}")

    return model
```

Remarque (Extension aux EDO d'ordre supérieur)
Pour une EDO du second ordre $y''(t) = \psi(t, y, y')$, il suffit d'utiliser deux `GradientTape` imbriqués pour calculer $u''(t)$:

```
with tf.GradientTape() as tape2:
    tape2.watch(t_train)
    with tf.GradientTape() as tape1:
        tape1.watch(t_train)
        u = model(t_train)
    du_dt = tape1.gradient(u, t_train)
d2u_dt2 = tape2.gradient(du_dt, t_train)
```

Pour la résolution avec la méthode d'Euler, il suffit de transformer l'EDO scalaire d'ordre 2 en un système de 2 EDO d'ordre 1.

5.4.4. Comparaison Euler vs PINN sur un exemple

Dans cet exemple, nous résolvons le problème de Cauchy suivant à l'aide de deux méthodes : la méthode d'Euler explicite et un PINN.

Problème de Cauchy Considérons le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = -2y(t), & t \in [0;1] \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

```
t0, T = 0, 1
y0 = 1
phi = lambda t, y: -2*y
# phi = lambda t, y: t*y
# phi = lambda t, y: t / (y + 1e-3)  # évite la division par zéro
```

Méthode PINN : calibrage du réseau

```
N_train = 50
# tt_train = np.linspace(t0, T, N_train+1)
tt_train = np.random.rand(N_train, 1) * (T - t0) + t0
model = PINN(phi, t0, y0, tt_train)
```

Discrétisation et évaluations Considérons l'intervalle $[0,1]$ et une discrétisation contenant $N = 100$ sous-intervalles de même longueur $h = 1/N$.

```
# Grille régulière pour évaluation
# - de la solution exacte,
# - du reseau
# et pour la construction de la solution approchée par le schéma d'Euler
N_eval = 100
tt_eval = np.linspace(t0, T, N_eval+1)
```

La solution exacte est $y(t) = e^{-2t}$:

```
import sympy as sp

t = sp.Symbol('t')
y = sp.Function('y')(t)
eq = sp.Eq(sp.Derivative(y, t), phi(t,y))
sol = sp.dsolve(eq,ics={y.subs(t, t0): y0})
display(sol)
sol = sp.lambdify(t, sol.rhs, 'numpy')
```

Évaluons la solution exacte et le PINN sur la grille uniforme choisie. Calculons ensuite la solution obtenue par la méthode d'Euler sur cette même grille.

```
y_exact = sol(tt_eval)
u_euler = EE(phi, tt_eval, y0)
u_pinn = model.predict(tt_eval).flatten() # model.predict() renvoie un
↪  tableau de shape (N_eval+1, 1), donc un 2D array, alors que y_exact et
↪  u_euler sont des vecteurs 1D de shape (N_eval+1,).
```

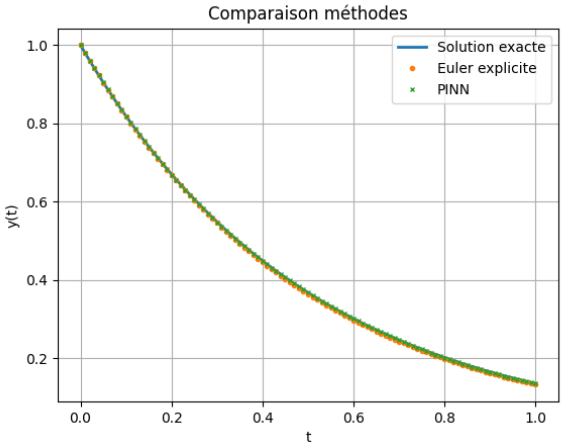
Comparaison Les résultats obtenus par les deux méthodes sont comparés en les points de la discrétisation en termes d'erreur relative entre la solution exacte et la solution approchée.

```
import matplotlib.pyplot as plt

plt.plot(tt_eval, y_exact, '-', label='Solution exacte', linewidth=2)
plt.plot(tt_eval, u_euler, 'o', label="Euler explicite", markersize=3)
plt.plot(tt_eval, u_pinn, 'x', label="PINN", markersize=3)
```


© 2024-2027 G. Faccanoni

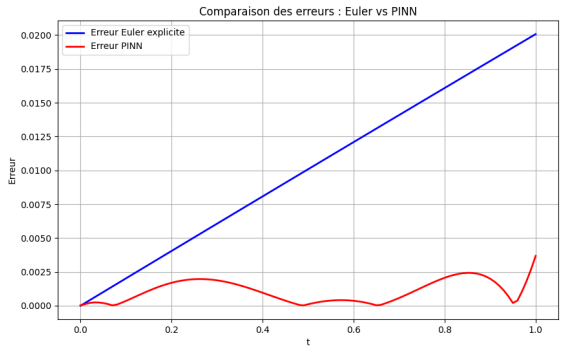
```
plt.legend()
plt.grid()
plt.xlabel("t")
plt.ylabel("y(t)")
plt.title("Comparaison méthodes")
plt.savefig("comparaison_methods.png")
# plt.show()
```



L'analyse des erreurs montre que la méthode d'Euler explicite présente des erreurs plus importantes, surtout pour des valeurs de t plus grandes. Pour en améliorer la précision il faut utiliser une grille plus fine. Le réseau de neurones utilisé donne des résultats plus précis, mais cela se dégrade si on diminue le nombre de neurones dans chaque couche.

```
# === Calcul des erreurs ===
error_euler = abs(y_exact - u_euler)/abs(y_exact)
error_pinn = abs(y_exact - u_pinn)/abs(y_exact)

# === Affichage des erreurs ===
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.plot(tt_eval, error_euler, label="Erreur Euler explicite", linewidth=2,
 ↪  color="blue")
plt.plot(tt_eval, error_pinn, label="Erreur PINN", linewidth=2, color="red")
plt.xlabel("t")
plt.ylabel("Erreur")
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.title("Comparaison des erreurs: Euler vs PINN")
plt.savefig("comparaison_errors.png")
# plt.show()
```

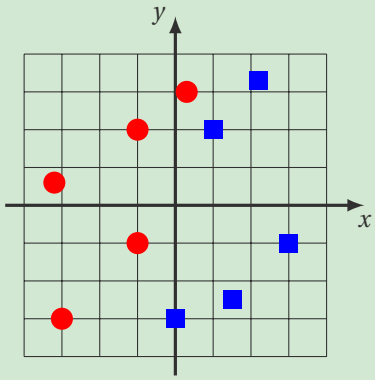


5.5. Exercices

5.5.1. Perceptron à poids fixés $\mathrm{F_a(x)}$

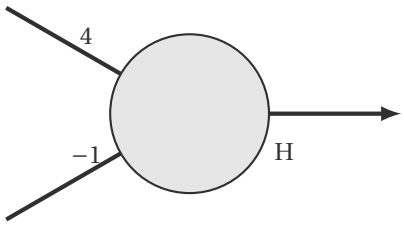
Exercice 5.1
On souhaite déterminer une fonction d'activation ainsi que des poids permettant de séparer les *carrés bleus* des *ronds rouges* dans le plan. Plus précisément, la fonction finale doit valoir

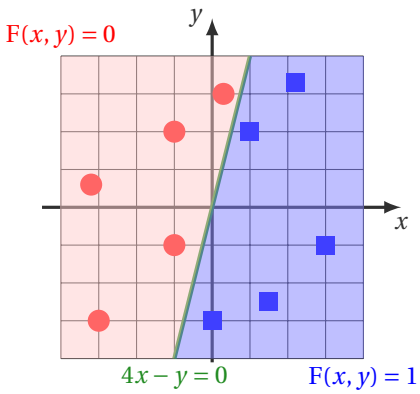
$$\mathrm{F}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si le point } (x,y) \text{ correspond à un carré bleu,} \\ 0 & \text{si le point } (x,y) \text{ correspond à un rond rouge.} \end{cases}$$



Correction
Il s'agit de trouver les deux poids a_1 et a_2 d'un perceptron, dont la fonction associée F vérifie $\mathrm{F}(x,y) = 1$ pour les coordonnées des carrés et $\mathrm{F}(x,y) = 0$ pour les ronds. Trouvons donc l'équation d'une droite qui les sépare (elle n'est pas unique). Par exemple, on remarque que la droite d'équation $4x - y = 0$ sépare les ronds des carrés. On définit alors le neurone avec les poids $a_1 = 4$ et $a_2 = -1$.

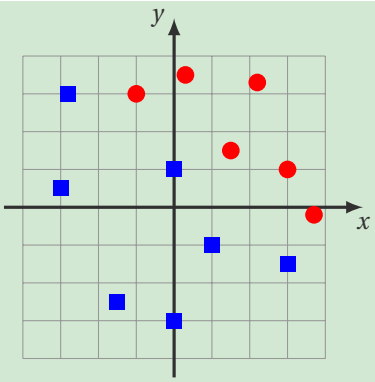
Si (x,y) sont les coordonnées d'un carré alors on a bien $\mathrm{F}(x,y) = 1$ et pour un rond $\mathrm{F}(x,y) = 0$.





Exercice 5.2
Trouver un perceptron qui distingue les carrés bleus des ronds rouges.

© 2024-2027 G. Faccanoni

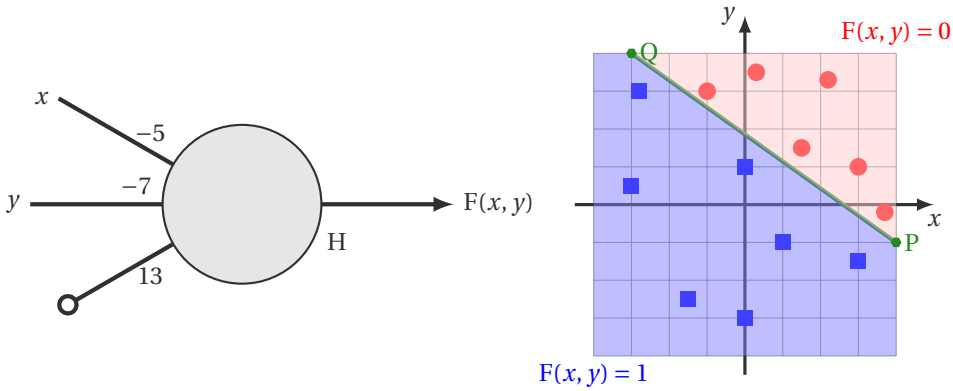


Correction
Il s'agit de trouver les deux poids a_1 et a_2 et le biais a_0 d'un perceptron, dont la fonction associée F vérifie $\mathrm{F}(x,y)=1$ pour les coordonnées des rond et $\mathrm{F}(x,y)=0$ pour les carrés.

Trouvons donc l'équation d'une droite qui les sépare. Par exemple, écrivons l'équation de la droite qui passe par les points $\mathrm{P}=(4,-1)$ et $\mathrm{Q}=(-3,4)$:

$$\underbrace{(\mathrm{P}_y-\mathrm{Q}_y)}_{a_1=-5}x+\underbrace{(\mathrm{Q}_x-\mathrm{P}_x)}_{a_2=-7}y+\underbrace{(\mathrm{Q}_y\mathrm{P}_x-\mathrm{Q}_x\mathrm{P}_y)}_{a_0=13}=0$$

soit encore $-5x-7y+13=0$. On définit alors le neurone avec les poids $a_1=-5$ et $a_2=-7$ et biais $a_0=13$. La partie positive se trouve à gauche du segmente orienté qui va de P à Q et qui correspond, dans notre exemple, aux carrés bleus. Pour vérifier, évaluons F en $(0,0)$: on trouve $\mathrm{F}(0,0)=\mathrm{H}(-5\times 0-7\times 0+13)=\mathrm{H}(13)=1$.



Exercice 5.3
Cas où une droite ne permet pas de separer les points mais si on passe en coordonnées polaires oui

Correction

5.5.2. Perceptron à entrées fixées $\tilde{\mathrm{F}}^{(i)}(\mathbf{a})$

Exercice 5.4
Quel perceptron correspond à la régression affine en deux variables de l'exercice 4.2, c'est-à-dire l'approximation au sens des moindres carrés de la forme $\mathrm{F}(x,y)=a+bx+cy$?

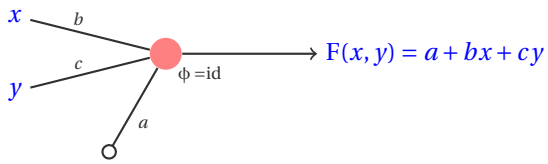
Correction
Nous devons adapter la structure du perceptron pour représenter un modèle de la forme

$$\mathrm{F}(x,y)=a+bx+cy$$

Un perceptron simple qui modélise cette régression pourrait avoir une architecture comme suit

- Deux entrées : x et y.
- Une sortie qui est une combinaison affine de ces termes.

Le perceptron peut être représenté graphiquement comme suit



5.5.3. Fonctions d'activation

Exercice 5.5
Pour chacun des perceptrons suivants (à deux entrées x, y), calculer la sortie pour les points $(-1,2)$, $(0,0)$ et $(3,-1)$, et tracer la frontière de décision dans le plan.

1. Poids $a_1 = 1, a_2 = -1, a_0 = 0$, activation H.
2. Poids $a_1 = 2, a_2 = 1, a_0 = -3$, activation σ.
3. Poids $a_1 = -1, a_2 = 2, a_0 = 1$, activation ReLU.

Correction
Rappel : pour un perceptron à deux entrées de poids (a_0, a_1, a_2), la pré-activation vaut $\ell(x,y) = a_1 x + a_2 y + a_0$ et la sortie est $\mathrm{F}(x,y) = \phi(\ell(x,y))$.

1. **Poids** $(a_1, a_2, a_0) = (1,-1,0)$**, activation** H**.**

(x,y)	$\ell(x,y) = x - y$	$\mathrm{F}(x,y) = \mathrm{H}(\ell)$
$(-1,2)$	-3	0
$(0,0)$	0	1
$(3,-1)$	4	1

   Frontière : $x - y = 0$, c'est-à-dire la droite $y = x$. F = 1 au-dessus ou sur cette droite, F = 0 en dessous.

2. **Poids** $(a_1, a_2, a_0) = (2,1,-3)$**, activation** σ**.**

(x,y)	$\ell(x,y) = 2x + y - 3$	$\mathrm{F}(x,y) = \sigma(\ell)$
$(-1,2)$	-3	$\sigma(-3) \approx 0.047$
$(0,0)$	-3	$\sigma(-3) \approx 0.047$
$(3,-1)$	2	$\sigma(2) \approx 0.880$

   La frontière $\ell(x,y) = 0$ est la droite $2x + y - 3 = 0$, soit $y = 3 - 2x$. La sortie vaut $\frac{1}{2}$ exactement sur cette droite.

3. **Poids** $(a_1, a_2, a_0) = (-1,2,1)$**, activation** ReLU**.**

(x,y)	$\ell(x,y) = -x + 2y + 1$	$\mathrm{F}(x,y) = \mathrm{ReLU}(\ell)$
$(-1,2)$	6	6
$(0,0)$	1	1
$(3,-1)$	-4	0

   La ReLU ne sépare pas en deux classes $\{0,1\}$: elle renvoie 0 pour les points tels que $-x + 2y + 1 \leq 0$ (côté négatif de la droite $-x + 2y + 1 = 0$, i.e. $y = \frac{x-1}{2}$) et une valeur positive proportionnelle à ℓ de l'autre côté. La frontière entre la zone nulle et la zone active reste la droite $-x + 2y + 1 = 0$.

Exercice 5.6
Montrer qu'un perceptron à activation sigmoïde définit une frontière de décision en les points x tels que $\mathrm{F}_{\mathbf{a}}(x) = \frac{1}{2}$. Quelle est cette frontière ?

© 2024-2027 G. Faccanoni

Correction
La sortie du perceptron est $\mathrm{F}_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = \sigma(\ell_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}))$ où $\ell_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n + a_0$.

On veut résoudre $\mathrm{F}_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}$, soit $\sigma(\ell_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})) = \frac{1}{2}$. Or $\sigma(t) = \frac{1}{2} \iff t = 0$ (le seul point où la sigmoïde vaut $\frac{1}{2}$, car σ est strictement croissante et $\sigma(0) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$). Donc :

$$\mathrm{F}_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = \tfrac{1}{2} \iff \ell_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = 0 \iff a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n + a_0 = 0.$$

La frontière de décision est donc **l'hyperplan** d'équation $\ell_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = 0$, exactement comme pour le perceptron à activation de Heaviside.

La différence est que la sigmoïde fournit en plus une *confiance graduée* : $\mathrm{F}_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})$ est proche de 1 loin d'un côté de l'hyperplan, proche de 0 de l'autre, avec une transition continue autour de la frontière.

5.5.4. Fonctions d'erreur

Exercice 5.7 (Comparaison des fonctions d'erreur)
Soit une donnée unique $(\mathrm{X}, z) = (1, 2)$ et un perceptron à activation identité produisant la sortie $\tilde{\mathrm{F}}(a, b) = a\mathrm{X} + b = a + b$.

1. Pour les poids $(a, b) = (0, 0)$, calculer la prédiction p, puis l'erreur MSE $\mathrm{E}_{\mathrm{MSE}} = (p - z)^2$ et l'erreur MAE $\mathrm{E}_{\mathrm{MAE}} = |p - z|$.
2. Même calcul pour $(a, b) = (1, 0)$.
3. Comparer les deux lignes et montrer que MSE pénalise davantage les grandes erreurs que MAE. Plus précisément, si l'erreur double, de quel facteur MSE et MAE sont-ils multipliés ?
4. Pour la classification binaire ($z \in \{0, 1\}$, $p \in (0, 1)$), rappeler la formule de l'entropie croisée E_{CE}, puis calculer sa valeur pour $(z, p) = (1, 0.9)$ et $(z, p) = (1, 0.1)$. Commenter.

Correction

1. Pour $(a, b) = (0, 0)$: $p = 0 + 0 = 0$, donc l'écart à la cible est $p - z = 0 - 2 = -2$.

$$\mathrm{E}_{\mathrm{MSE}}(0, 0) = (0 - 2)^2 = 4, \qquad \mathrm{E}_{\mathrm{MAE}}(0, 0) = |0 - 2| = 2.$$

2. Pour $(a, b) = (1, 0)$: $p = 1 + 0 = 1$, donc l'écart est $p - z = 1 - 2 = -1$.

$$\mathrm{E}_{\mathrm{MSE}}(1, 0) = (1 - 2)^2 = 1, \qquad \mathrm{E}_{\mathrm{MAE}}(1, 0) = |1 - 2| = 1.$$

3. Lorsque l'écart passe de 1 (cas $(1, 0)$) à 2 (cas $(0, 0)$), c'est-à-dire lorsqu'il **double** :
   - MAE est multipliée par 2 (elle est linéaire en l'écart) ;
   - MSE est multipliée par 4 (elle est quadratique en l'écart).

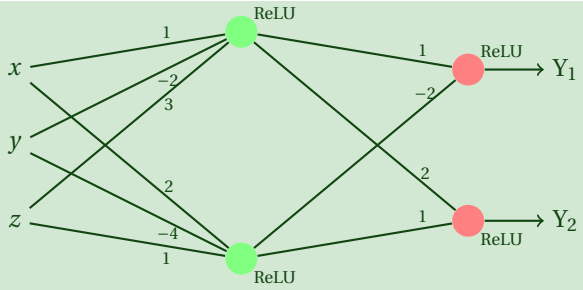
   Plus généralement, pour un écart ϵ :
   $$\mathrm{E}_{\mathrm{MSE}} = \epsilon^2, \qquad \mathrm{E}_{\mathrm{MAE}} = |\epsilon|.$$
   Un écart deux fois plus grand donne une pénalité MSE quatre fois plus grande, contre seulement deux fois pour MAE. La MSE est donc plus sévère envers les **outliers** (grandes erreurs ponctuelles).

4. Pour la classification binaire, l'entropie croisée s'écrit :
   $$\mathrm{E}_{\mathrm{CE}}(z, p) = -\big[z \ln p + (1 - z) \ln(1 - p)\big].$$
   - $(z, p) = (1, 0.9)$: $\mathrm{E}_{\mathrm{CE}} = -\ln(0.9) \approx 0.105$. La prédiction est bonne (p proche de $1 = z$) : pénalité faible.
   - $(z, p) = (1, 0.1)$: $\mathrm{E}_{\mathrm{CE}} = -\ln(0.1) \approx 2.303$. La prédiction est mauvaise (p loin de $1 = z$) : pénalité très élevée.

   L'entropie croisée explose logarithmiquement lorsque le réseau prédit avec forte confiance dans le mauvais sens, ce qui crée un gradient important et accélère la correction lors de la descente de gradient.

5.5.5. Réseau de neurones à poids fixés $\mathrm{F}_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})$

Exercice 5.8
Considérons le réseau de neurones représenté ci-dessous :



1. Décrire le réseau.
2. Calculer les valeurs de sortie (Y_1, Y_2) pour chacune des entrées (x, y, z) suivantes :

$$(0,0,0) \quad (1,0,0) \quad (1,-1,1) \quad (3,2,1)$$

3. Trouver un (x, y, z) tel que $Y_1 = 1$ et $Y_2 = 7$ (commencer par déterminer les valeurs de sorties s_1 et s_2 de la première couche).
4. Existe-t-il (x, y, z) tel que Y_2 soit nul, mais pas Y_1 ?

Correction

1. C'est un réseau à trois entrées et deux sorties.
   La première couche est constituée de deux neurones linéaires de fonction d'activation ReLU :
   - le premier neurone realise $s_1 = \text{ReLU}(x - 2y + 3z)$,
   - le deuxième neurone realise $s_2 = \text{ReLU}(2x - 4y + z)$.

   La dernière couche est constituée de deux neurones linéaires de fonction d'activation ReLU :
   - le premier neurone realise $Y_1 = \text{ReLU}(s_1 - 2s_2)$,
   - le deuxième neurone realise $Y_2 = \text{ReLU}(2s_1 + s_2)$.
2. - Soit $(x, y, z) = (0,0,0)$. Alors $s_1 = \text{ReLU}(0) = 0$ et $s_2 = \text{ReLU}(0) = 0$ donc $Y_1 = \text{ReLU}(0) = 0$ et $Y_2 = \text{ReLU}(0) = 0$.
   - Soit $(x, y, z) = (1,0,0)$. Alors $s_1 = \text{ReLU}(1) = 1$ et $s_2 = \text{ReLU}(2) = 2$ donc $Y_1 = \text{ReLU}(1 - 4) = 0$ et $Y_2 = \text{ReLU}(2 + 2) = 4$.
   - Soit $(x, y, z) = (1, -1, 1)$. Alors $s_1 = \text{ReLU}(6) = 6$ et $s_2 = \text{ReLU}(7) = 7$ donc $Y_1 = \text{ReLU}(6 - 14) = 0$ et $Y_2 = \text{ReLU}(12 + 7) = 19$.
   - Soit $(x, y, z) = (3, 2, 1)$. Alors $s_1 = \text{ReLU}(2) = 2$ et $s_2 = \text{ReLU}(-1) = 0$ donc $Y_1 = \text{ReLU}(2 - 0) = 2$ et $Y_2 = \text{ReLU}(4 + 0) = 4$.
3. Pour obtenir $Y_1 = 1$ et $Y_2 = 7$ il faut imposer $s_1 - 2s_2 = 1$ et $2s_1 + s_2 = 7$. Cela donne $s_1 = 3$ et $s_2 = 1$.
   Pour obtenir $s_1 = 3$ et $s_2 = 1$ il faut imposer $x - 2y + 3z = 3$ et $2x - 4y + z = 1$. Cela donne une infinité de solutions de la forme $(2\kappa, \kappa, 1)$. On peut donc prendre par exemple l'entrée $(2, 1, 1)$.
4. Si $Y_2 = 0$ alors $2s_1 + s_2 = 0$. Comme $s_1, s_2 \geq 0$ (car sorties d'une fonction ReLU), alors $s_1 = s_2 = 0$ et $Y_1 = s_1 - 2s_2 = 0$.

```python
import sympy as sp

# Variables d'entrée et Poids
x, y, z = sp.symbols('x y z')
a11, a12, a13 = sp.symbols('a11 a12 a13')  # Poids pour le premier neurone de
 ↪  la première couche
a21, a22, a23 = sp.symbols('a21 a22 a23')  # Poids pour le second neurone de
 ↪  la première couche
b11, b12 = sp.symbols('b11 b12')           # Poids pour la deuxième couche
 ↪  menant à Y1
b21, b22 = sp.symbols('b21 b22')           # Poids pour la deuxième couche
 ↪  menant à Y2

# Fonction ReLU
ReLU = lambda x: sp.Max(0, x)

# Calcul des neurones de la première couche
```


© 2024-2027 G. Faccanoni

```
I_1 = ReLU(a11 * x + a12 * y + a13 * z)
I_2 = ReLU(a21 * x + a22 * y + a23 * z)

# Calcul des sorties finales
Y_1 = ReLU(b11 * I_1 + b12 * I_2)
Y_2 = ReLU(b21 * I_1 + b22 * I_2)

# Substituer les poids par leurs valeurs spécifiques
# Poids pour la première couche
weight_substitutions = {
    a11: 1, a12: -2, a13: 3,  # Poids du premier neurone de la première
    ↪ couche
    a21: 2, a22: -4, a23: 1,  # Poids du second neurone de la première couche
    b11: 1, b12: -2,          # Poids du premier neurone de la seconde couche
    b21: 2, b22: 1            # Poids du second neurone de la seconde couche
}

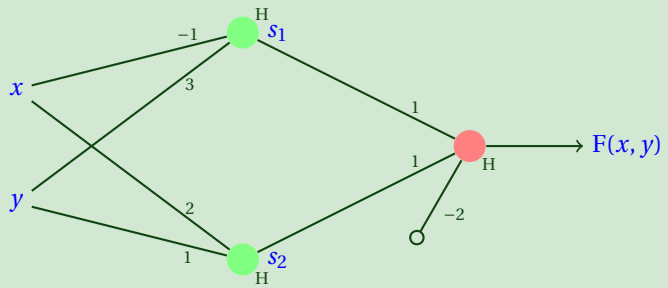
# Liste des points à évaluer
k = sp.var('k')
points = [(0, 0, 0), (1, 0, 0), (1, -1, 1), (3, 2, 1), (2*k,k,1)]

# Itérer sur chaque point et afficher les résultats
for px, py, pz in points:
    point_substitutions = {x: px, y: py, z: pz}
    I_1_val = I_1.subs({**weight_substitutions, **point_substitutions})
    I_2_val = I_2.subs({**weight_substitutions, **point_substitutions})
    Y_1_val = Y_1.subs({**weight_substitutions, **point_substitutions})
    Y_2_val = Y_2.subs({**weight_substitutions, **point_substitutions})

    print(f"Avec (x, y, z) = ({px}, {py}, {pz}), on a s_1 = {I_1_val}, s_2 =
    ↪ {I_2_val}, Y_1 = {Y_1_val}, Y_2 = {Y_2_val}")
```

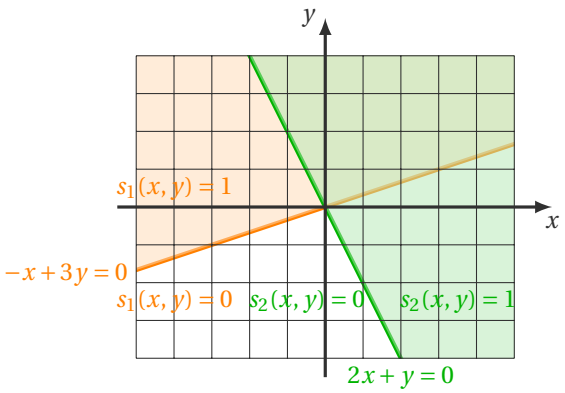
```
Avec (x, y, z) = (0, 0, 0), on a s_1 = 0, s_2 = 0, Y_1 = 0, Y_2 = 0
Avec (x, y, z) = (1, 0, 0), on a s_1 = 1, s_2 = 2, Y_1 = 0, Y_2 = 4
Avec (x, y, z) = (1, -1, 1), on a s_1 = 6, s_2 = 7, Y_1 = 0, Y_2 = 19
Avec (x, y, z) = (3, 2, 1), on a s_1 = 2, s_2 = 0, Y_1 = 2, Y_2 = 4
Avec (x, y, z) = (2*k, k, 1), on a s_1 = 3, s_2 = 1, Y_1 = 1, Y_2 = 7
```

Exercice 5.9 (Neurone ET $\rightsquigarrow$ intersection)
Étudier le réseau de 3 neurones suivant : deux sur la première couche et un sur la seconde. La fonction d'activation est partout la fonction marche de Heaviside. Combien vaut la fonction associée F selon l'entrée (x, y) ? Quelle interprétation géométrique peut-on donner au neurone de sortie ?

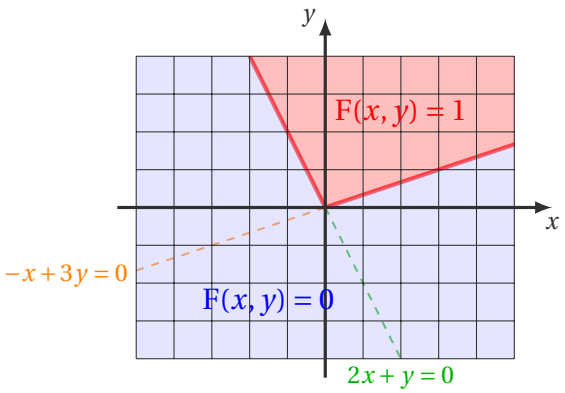


Correction
On commence par calculer les sorties des neurones de la première couche. Pour le premier neurone la sortie s_1 dépend du signe de $-x+3y$. Si $-x+3y \geq 0$ alors $s_1(x, y) = 1$, sinon $s_1(x, y) = 0$. Donc pour les points (x, y) situés au-dessus de la

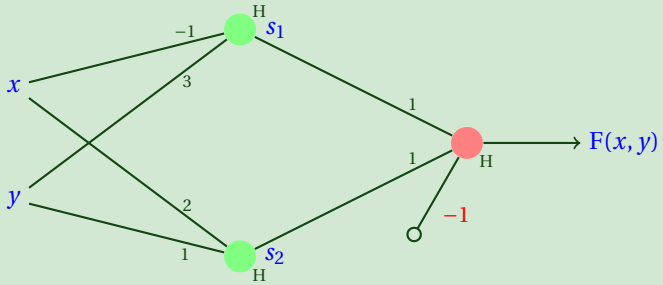
droite d'équation $-x+3y=0$, on a $s_1(x,y)=1$. De même pour le second neurone, on a $s_2(x,y)=1$ pour les points situés au dessus de la droite $2x+y=0$. Voir la figure ci-dessous.



On reconnaît dans le neurone de sortie un neurone qui réalise le « ET ». C'est pourquoi l'ensemble des points pour lesquels F vaut 1 est l'intersection des deux demi-plans en lesquels s_1 et s_2 valent 1. Ainsi $F(x,y)=1$ dans un secteur angulaire et $F(x,y)=0$ ailleurs. Voir la figure ci-dessous.

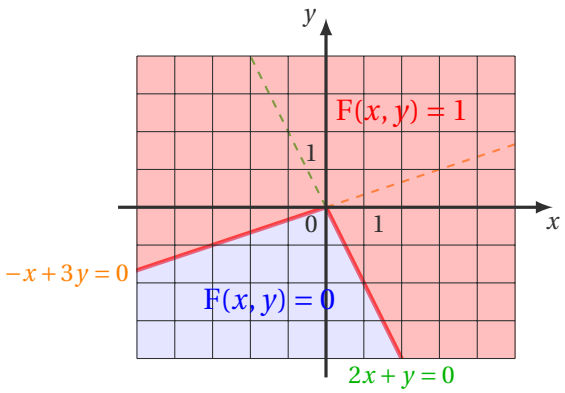


Exercice 5.10 (Neurone OU $\rightsquigarrow$ union)
On reprend la même architecture que l'exemple précédent, mais en changeant les poids du neurone de sortie qui réalise cette fois l'opération « OU ». Quelle interprétation géométrique peut-on donner au neurone de sortie?

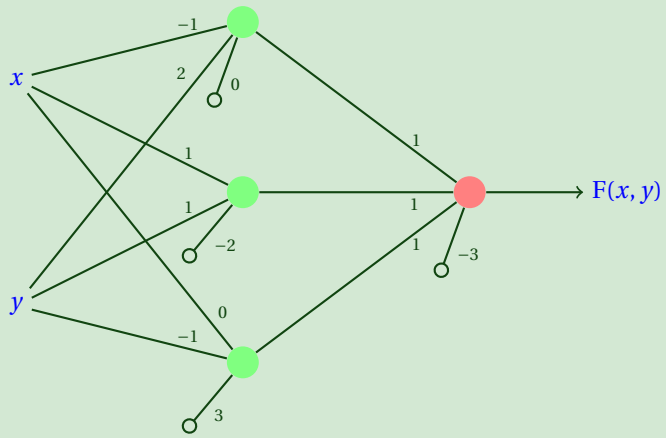


Correction
L'ensemble des points pour lesquels F vaut 1 est maintenant l'union des deux demi-plans en lesquels s_1 et s_2 valent 1.

© 2024-2027 G. Faccanoni

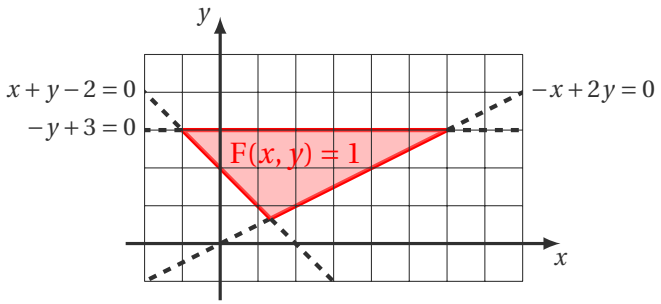


Exercice 5.11 (Neurone ET ⇝ intersection)
Étudier le réseau de neurones suivant (la fonction d'activation est H partout). Quelle interprétation géométrique peut-on donner au neurone de sortie ?

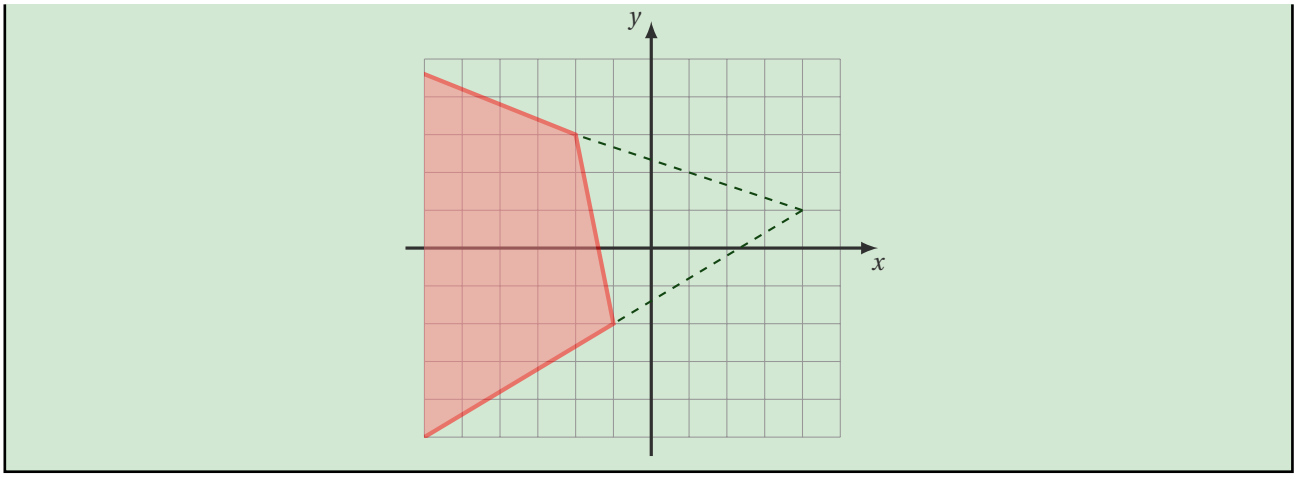


Correction
Chaque neurone de la première couche délimite un demi-plan. Ce sont les demi-plans $-x+2y \geq 0$, $x+y-2 \geq 0$ et $-y+3 \geq 0$.

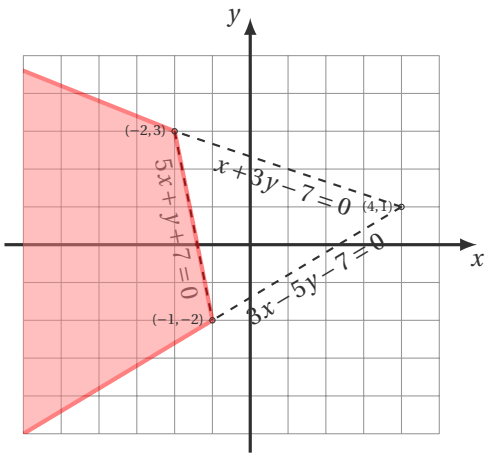
Le neurone de sortie est un neurone qui réalise l'opération « ET » : il s'active uniquement si les trois précédents neurones sont activés. Ainsi la sortie finale $\mathrm{F}(x,y)$ vaut 1 si et seulement si (x,y) appartient simultanément aux trois demi-plans.

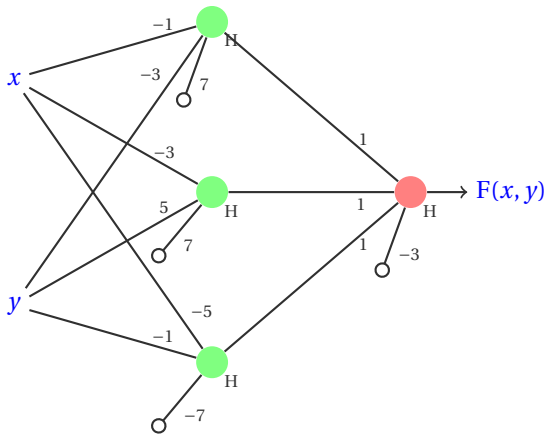


Exercice 5.12
En utilisant les idées de l'exemple précédent et pour le dessin ci-dessous, trouver un réseau de neurones dont la fonction F vaut 1 pour la zone colorée et 0 ailleurs.

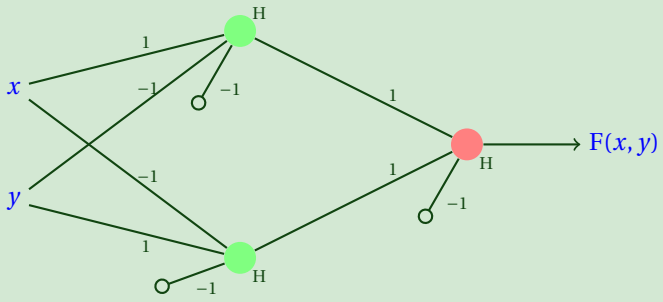


Correction
On remarque que la région est délimitée par trois droites. Pour trouver leurs équations on note qu'elles s'intersectent en $(-2,3)$, $(4,1)$ et $(-1,-2)$. La partie coloriée correspond à l'intersection des demi-plans $-x-3y+7\geq 0$, $-3x+5y+7\geq 0$ et $-5x-y-7\geq 0$. Un réseau de neurones qui réalise cette opération est donc le suivant.



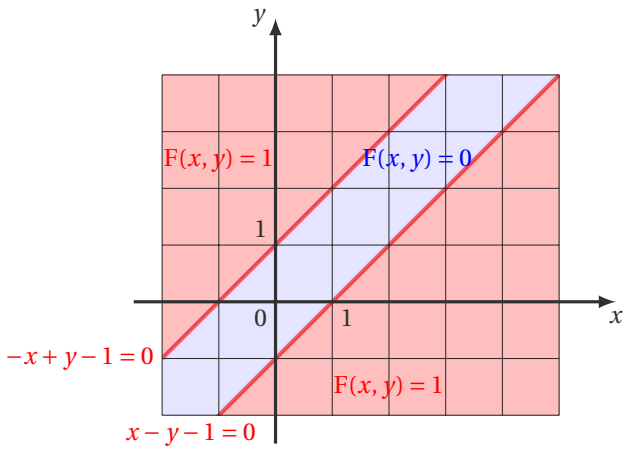


Exercice 5.13 (OU exclusif (XOR))
Étudier le réseau suivant et en donner une interprétation géométrique.



Correction
Nous avons vu qu'un seul neurone ne permet pas de réaliser la fonction associée au « OU exclusif ». Le réseau de neurones proposé sépare le plan en trois parties, le secteur central en lequel la fonction associée au réseau vaut 0, alors que la fonction vaut 1 partout ailleurs (y compris sur la frontière rouge).

© 2024-2027 G. Faccanoni

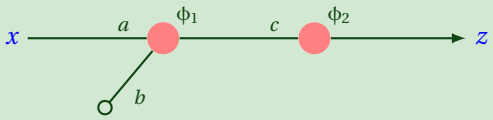


Ce réseau permet d'obtenir une valeur $\mathrm{F}(x,y)=1$ en $(1,0)$ et $(0,1)$ et une valeur $\mathrm{F}(x,y)=0$ en $(0,0)$ et $(1,1)$. L'idée de ce réseau vient du fait que l'opération « OU exclusif » est une combinaison de « OU » et de « ET » :

$$x \text{ OUex } y = (x \text{ ET non} y) \text{ OU } (\text{non} x \text{ ET } y).$$

5.5.6. Réseau de neurones à entrées fixées $\widetilde{\mathrm{F}}^{(i)}(\mathbf{a})$

Exercice 5.14
Voici un réseau très simple avec
- une entrée x, une sortie $\mathrm{F}(x)$,
- trois poids a,b,c,
- des fonctions d'activation (plutôt fantaisistes) $\phi_1 : u \mapsto u^2$ et $\phi_2 : v \mapsto \ln(v)$ (définie pour $v>0$, ce qui impose $c(ax+b)^2>0$).



1. Écrire explicitement les fonctions $\mathrm{F}_{\mathbf{a}}$, $\widetilde{\mathrm{F}}$ et $\widehat{\mathrm{F}}$.
2. Calculer $\nabla_{\mathbf{a}}\widetilde{\mathrm{F}}$.

Correction
Nous pouvons associer trois fonctions à ce réseau :

$$\begin{array}{lll} \mathrm{F}:\mathbb{R}\to\mathbb{R} & \widetilde{\mathrm{F}}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R} & \widehat{\mathrm{F}}:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R} \\ x\mapsto \mathrm{F}(x) & (a,b,c)\mapsto \widetilde{\mathrm{F}}(a,b,c) & (x;a,b,c)\longmapsto \widehat{\mathrm{F}}(x;a,b,c) \end{array}$$

- La première couche contient un seul perceptron affine $s=\phi_1(ax+b)=(ax+b)^2$.
- La deuxième couche contient un seul perceptron linéaire $z=\phi_2(cs)=\ln(cs)$.
- On a donc

$$z=\phi_2(v)|_{v=c\phi_1(u)}=\phi_2\big(c\phi_1(u)\big)|_{u=ax+b}=\phi_2\big(c\phi_1(ax+b)\big)=\ln\big(c(ax+b)^2\big)=\ln(c)+2\ln(ax+b).$$

Notons que $\widehat{\mathrm{F}}$ est définie ssi $c(ax+b)^2>0$ donc ssi $c>0$ et $ax+b\neq 0$.
On a alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial\widetilde{\mathrm{F}}}{\partial a}&=\frac{\partial\Big(\ln(c)+2\ln(ax+b)\Big)}{\partial a}=2\frac{x}{ax+b}\\ \frac{\partial\widetilde{\mathrm{F}}}{\partial b}&=\frac{\partial\Big(\ln(c)+2\ln(ax+b)\Big)}{\partial b}=2\frac{1}{ax+b}\\ \frac{\partial\widetilde{\mathrm{F}}}{\partial c}&=\frac{\partial\Big(\ln(c)+2\ln(ax+b)\Big)}{\partial c}=\frac{1}{c} \end{aligned}$$

Pour comprendre comment fonctionne la dérivation automatique, écrivons explicitement les fonctions de pre-activation :

$$x \xrightarrow{\ell_1} y \xrightarrow{\phi_1} u \xrightarrow{\ell_2} v \xrightarrow{\phi_2} w$$

avec

$$\ell_1(x;a,b) = ax+b, \qquad \phi_1(y) = y^2, \qquad \ell_2(u;c) = cu; \qquad \phi_2(v) = \ln(v).$$

On a alors $z = \widehat{\mathrm{F}}(x;a,b,c) = \phi_2\left(\ell_2\left(\phi_1\left(\ell_1(x;a,b)\right);c\right)\right)$ et on peut dériver cette fonction par rapport aux poids :

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathrm{F}}(x;a,b,c) &= \phi_2\left(\ell_2\left(\phi_1\left(\ell_1(x;a,b)\right);c\right)\right)\\
\frac{\partial\widehat{\mathrm{F}}}{\partial a}(x;a,b,c) &= \phi_2'\left(\ell_2\left(\phi_1(\ell_1(x;a,b));c\right)\right)\cdot\frac{\partial\ell_2}{\partial u}\left(\phi_1(\ell_1(x;a,b));c\right)\cdot\phi_1'\left(\ell_1(x;a,b)\right)\cdot\frac{\partial\ell_1}{\partial a}(x;a,b)\\
\frac{\partial\widehat{\mathrm{F}}}{\partial b}(x;a,b,c) &= \phi_2'\left(\ell_2\left(\phi_1(\ell_1(x;a,b));c\right)\right)\cdot\frac{\partial\ell_2}{\partial u}\left(\phi_1(\ell_1(x;a,b));c\right)\cdot\phi_1'\left(\ell_1(x;a,b)\right)\cdot\frac{\partial\ell_1}{\partial b}(x;a,b)\\
\frac{\partial\widehat{\mathrm{F}}}{\partial c}(x;a,b,c) &= \phi_2'\left(\ell_2\left(\phi_1(\ell_1(x;a,b));c\right)\right)\cdot\frac{\partial\ell_2}{\partial c}\left(\phi_1(\ell_1(x;a,b));c\right)
\end{aligned}$$

On remarque que beaucoup de termes se répètent dans ces dérivées et il suffit de les calculer une fois pour toutes. En particulier, pour les ℓ_1, ℓ_2, ϕ_1 et ϕ_2 de notre énoncé, on a besoin des dérivées suivantes :

$$\begin{aligned}
\phi_1'\left(\ell_1(x;a,b)\right) &= 2\ell_1(x;a,b), & \frac{\partial\ell_1}{\partial a}(x;a,b) &= x, & \frac{\partial\ell_2}{\partial u}\left(\phi_1(\ell_1(x;a,b));c\right) &= c,\\
\phi_2'\left(\ell_2\left(\phi_1(\ell_1(x;a,b));c\right)\right) &= \frac{1}{\ell_2\left(\phi_1(\ell_1(x;a,b));c\right)}, & \frac{\partial\ell_1}{\partial b}(x;a,b) &= 1, & \frac{\partial\ell_2}{\partial c}\left(\phi_1(\ell_1(x;a,b));c\right) &= \phi_1(\ell_1(x;a,b)).
\end{aligned}$$

On a alors

$$\frac{\partial\widehat{\mathrm{F}}}{\partial a}(x;a,b,c) = \frac{1}{\ell_2\left(\phi_1(\ell_1(x;a,b));c\right)}\cdot c\cdot 2\ell_1(x;a,b)\cdot x = \frac{1}{c(ax+b)^2}\cdot c\cdot 2(ax+b)\cdot x = 2\frac{x}{ax+b} = \frac{\partial\widetilde{\mathrm{F}}}{\partial a}(a,b,c)$$

$$\frac{\partial\widehat{\mathrm{F}}}{\partial b}(x;a,b,c) = \frac{1}{\ell_2\left(\phi_1(\ell_1(x;a,b));c\right)}\cdot c\cdot 2\ell_1(x;a,b)\cdot 1 = \frac{1}{c(ax+b)^2}\cdot c\cdot 2(ax+b)\cdot 1 = 2\frac{1}{ax+b} = \frac{\partial\widetilde{\mathrm{F}}}{\partial b}(a,b,c)$$

$$\frac{\partial\widehat{\mathrm{F}}}{\partial c}(x;a,b,c) = \frac{1}{\ell_2\left(\phi_1(\ell_1(x;a,b));c\right)}\cdot\phi_1(\ell_1(x;a,b)) = \frac{1}{c(ax+b)^2}\cdot(ax+b)^2 = \frac{1}{c} = \frac{\partial\widetilde{\mathrm{F}}}{\partial c}(a,b,c)$$

Exercice 5.15 (Régression parabolique)
Quel réseau de neurones correspond-il à la régression parabolique ?

Correction
Pour obtenir une régression parabolique (ou régression quadratique), nous devons adapter la structure du réseau de neurones pour représenter un modèle de la forme

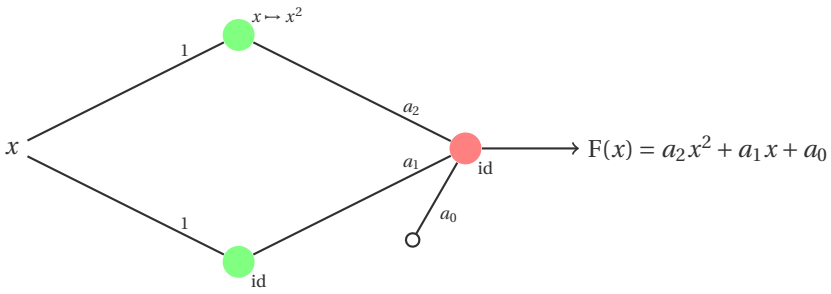
$$\mathrm{F}(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$$

Un réseau de neurones simple qui modélise cette régression pourrait avoir une architecture comme suit

- Une entrée x.
- Une couche cachée à deux neurones
- Une sortie qui est une combinaison affine de ces termes.

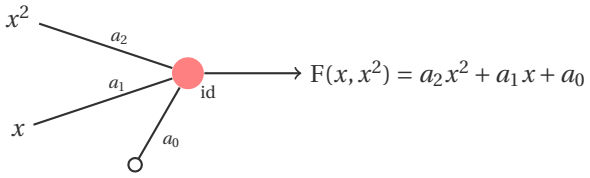
Le réseau de neurones peut être représenté graphiquement comme suit

© 2024-2027 G. Faccanoni



- **Entrée** : Le réseau reçoit une seule entrée x.
- **Couche cachée** :
  - Le premier neurone applique la fonction d'activation $\phi(x) = x^2$ avec un poids de 1, produisant le terme quadratique.
  - Le deuxième neurone applique l'identité $\phi(x) = x$ avec un poids de 1, produisant le terme linéaire.
- **Neurone de sortie** :
  - Applique la fonction identité à la combinaison linéaire $a_2x^2+a_1x+a_0$, pour produire la fonction de régression $\mathrm{F}(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$.

Attention : les poids de la première couche sont donnés, c'est pour cela qu'on préfère modéliser le problème de la régression parabolique par un seul perceptron :



Exercice 5.16
Quel réseau de neurones correspond-il à la régression polynomiale ?

Correction
Pour obtenir une régression polynomiale de degré n, nous pouvons utiliser un réseau de neurones avec une couche cachée comprenant n neurones, où chaque neurone correspond à un terme polynomial.

- **Entrée** : le réseau reçoit une seule entrée x.
- **Couche cachée** : chaque neurone i applique la fonction d'activation $\phi(x) = x^i$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$. Cela produit les termes polynomiaux $x^1, x^2, \ldots, x^n$.
- **Neurone de sortie** : combine les termes $a_nx^n, a_{n-1}x^{n-1}, \ldots, a_1x + a_0$, et un biais a_0, pour produire la fonction de régression polynomiale

$$\mathrm{F}(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0.$$

Ainsi, le réseau de neurones peut modéliser n'importe quel polynôme de degré n en utilisant des neurones avec des fonctions d'activation correspondant aux puissances de x.

Exercice 5.17 (Régression dans un espace vectoriel quelconque)
Quel réseau de neurones correspond-il à l'approximation au sens des moindres carrés dans l'espace engendré par $\{\varphi_1, \varphi_2\}$?

Correction
Nous devons adapter la structure du réseau de neurones pour représenter un modèle de la forme

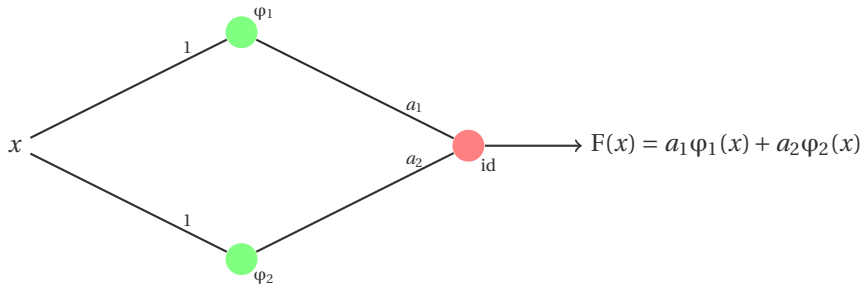
$$\mathrm{F}(x) = a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x).$$

Un réseau de neurones simple qui modélise cette régression pourrait avoir une architecture comme suit

- Une entrée x.
- Une couche cachée à deux neurones

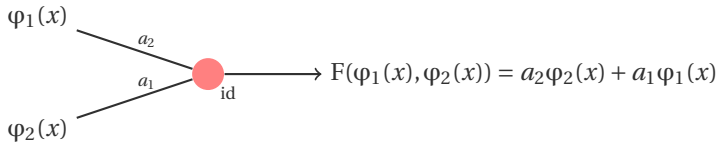
- Une sortie qui est une combinaison linéaire de ces termes.

Le réseau de neurones peut être représenté graphiquement comme suit



- **Entrée** : le réseau reçoit une seule entrée x.
- **Couche cachée** : le neurones i applique la fonction d'activation $\phi_i(x)$ avec un poids de 1,
- **Neurone de sortie** : applique la fonction identité à la combinaison linéaire $\sum_i a_i\varphi_i(x)$, pour produire la fonction de régression

Attention : les poids de la première couche sont donnés, c'est pour cela qu'on préfère modéliser le problème de la régression dans un espace vectoriel de base $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ par un seul perceptron :



5.5.7. Retropropagation, apprentissage, tests

Exercice 5.18 (Un pas de descente de gradient)
Considérons un perceptron à activation sigmoïde $\hat{F}(x; a, b) = \sigma(ax+b)$ avec les données d'entraînement $(X^{(1)}, Y^{(1)}) = (0,0)$ et $(X^{(2)}, Y^{(2)}) = (2,1)$.

1. Écrire la fonction d'erreur $E(a,b) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}(\tilde{F}^{(i)}(a,b) - Y^{(i)})^2$.
2. Calculer $\nabla_{(a,b)}E$ en utilisant la dérivée $\sigma'(u) = \sigma(u)(1-\sigma(u))$.
3. Évaluer ∇E en $(a,b) = (0,0)$, puis effectuer un pas de descente avec $\eta = 0.5$.
4. Vérifier que l'erreur diminue après ce pas.

Correction
On note $\tilde{F}^{(i)}(a,b) = \sigma(aX^{(i)} + b)$. Les données sont $(X^{(1)}, Y^{(1)}) = (0,0)$ et $(X^{(2)}, Y^{(2)}) = (2,1)$.

1. La fonction d'erreur est :
$$E(a,b) = \tfrac{1}{2}\Big[(\sigma(b) - 0)^2 + (\sigma(2a+b) - 1)^2\Big].$$
2. On pose $u^{(i)} = aX^{(i)} + b$. Par la règle de la chaîne et $\sigma'(u) = \sigma(u)(1-\sigma(u))$:
$$\frac{\partial E}{\partial a} = \sum_{i=1}^{2}(\sigma(u^{(i)}) - Y^{(i)})\,\sigma(u^{(i)})(1-\sigma(u^{(i)}))X^{(i)},$$
$$\frac{\partial E}{\partial b} = \sum_{i=1}^{2}(\sigma(u^{(i)}) - Y^{(i)})\,\sigma(u^{(i)})(1-\sigma(u^{(i)})).$$
3. En $(a,b) = (0,0)$: $u^{(1)} = 0$, $u^{(2)} = 0$, donc $\sigma(u^{(i)}) = \frac{1}{2}$ pour $i = 1,2$.

   Signaux d'erreur :
$$\delta^{(1)} = (\tfrac{1}{2} - 0)\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{8}, \qquad \delta^{(2)} = (\tfrac{1}{2} - 1)\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2} = -\tfrac{1}{8}.$$
$$\frac{\partial E}{\partial a}(0,0) = \delta^{(1)}\cdot 0 + \delta^{(2)}\cdot 2 = -\tfrac{1}{4}, \qquad \frac{\partial E}{\partial b}(0,0) = \delta^{(1)} + \delta^{(2)} = 0.$$
   Pas de descente avec $\eta = 0.5$:
$$a_1 = 0 - 0.5\times(-\tfrac{1}{4}) = \tfrac{1}{8} \approx 0.125, \qquad b_1 = 0 - 0.5\times 0 = 0.$$

© 2024-2027 G. Faccanoni

4. Vérification :
$$\mathrm{E}(0,0) = \tfrac{1}{2}\big[(\tfrac{1}{2})^2 + (\tfrac{1}{2}-1)^2\big] = \tfrac{1}{2}\cdot 2\cdot\tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{4} = 0.25.$$
$$\mathrm{E}(0.125,0) = \tfrac{1}{2}\big[\sigma(0)^2 + (\sigma(0.25)-1)^2\big] = \tfrac{1}{2}\big[\tfrac{1}{4} + (\sigma(0.25)-1)^2\big].$$
Or $\sigma(0.25)\approx 0.562$, donc $(\sigma(0.25)-1)^2 \approx 0.188$ et $\mathrm{E}(0.125,0)\approx \tfrac{1}{2}(0.25+0.188) = 0.219 < 0.25$. L'erreur a bien diminué.

Exercice 5.19 (Apprentissage d'une porte logique)
On souhaite apprendre la porte ET à l'aide d'un perceptron $\hat{\mathrm{F}}(x,y;a,b,c) = \sigma(ax+by+c)$.
1. Écrire l'erreur quadratique $\mathrm{E}(a,b,c)$ sur les quatre points de la table de vérité de ET.
2. Initialiser $(a_0,b_0,c_0) = (0,0,0)$ et effectuer deux pas de descente de gradient avec $\eta = 1$.
3. Comparer avec le perceptron "exact" trouvé dans le cours (poids $1,1,-2$, activation H). Pourquoi la sigmoïde donne-t-elle un résultat différent ?

Correction
Le perceptron est $\hat{\mathrm{F}}(x,y;a,b,c) = \sigma(ax+by+c)$. La table de vérité de ET est : $\mathrm{F}(0,0)=0$, $\mathrm{F}(1,0)=0$, $\mathrm{F}(0,1)=0$, $\mathrm{F}(1,1)=1$.

1. La fonction d'erreur quadratique est :
$$\mathrm{E}(a,b,c) = \tfrac{1}{4}\Big[(\sigma(c)-0)^2 + (\sigma(a+c)-0)^2 + (\sigma(b+c)-0)^2 + (\sigma(a+b+c)-1)^2\Big].$$

2. En $(a_0,b_0,c_0)=(0,0,0)$, tous les pré-activations valent 0, donc $\sigma(0)=\tfrac{1}{2}$ pour les quatre points.

   Gradient (par symétrie, $\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial a} = \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial b}$) :
$$\delta^{(k)} = (\sigma(u^{(k)}) - z^{(k)})\,\sigma(u^{(k)})(1-\sigma(u^{(k)}))$$
   avec $(u^{(k)}, z^{(k)})$ les quatre pré-activations et cibles. Tous les $\sigma(u^{(k)}) = \tfrac{1}{2}$, donc $\sigma(1-\sigma) = \tfrac{1}{4}$.
   - Points $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$: $\delta = (\tfrac{1}{2}-0)\cdot\tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{8}$.
   - Point $(1,1)$: $\delta = (\tfrac{1}{2}-1)\cdot\tfrac{1}{4} = -\tfrac{1}{8}$.
$$\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial a}(0,0,0) = \tfrac{1}{4}\big[0\cdot\tfrac{1}{8} + 1\cdot\tfrac{1}{8} + 0\cdot\tfrac{1}{8} + 1\cdot(-\tfrac{1}{8})\big] = 0.$$
   Par symétrie $\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial b}(0,0,0) = 0$.
$$\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial c}(0,0,0) = \tfrac{1}{4}\big[\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{8}-\tfrac{1}{8}\big] = \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{2}{8} = \tfrac{1}{16}.$$
   Premier pas ($\eta=1$) : $a_1 = 0$, $b_1 = 0$, $c_1 = 0 - \tfrac{1}{16} = -0.0625$.

   Au deuxième pas, les pré-activations sont $c_1 = -0.0625$, $a_1+c_1 = -0.0625$, $b_1+c_1 = -0.0625$, $a_1+b_1+c_1 = -0.0625$, soit $\sigma(\cdot)\approx 0.484$ pour les trois premiers et ≈ 0.484 pour le dernier également. Le gradient de c reste faiblement positif ; a et b commencent à diverger légèrement.

3. **Comparaison.** Le perceptron "exact" du cours utilise la fonction H (marche de Heaviside) : le plan est coupé en deux demi-espaces et la sortie est exactement 0 ou 1. La sigmoïde est à valeurs dans $(0,1)$: elle ne peut jamais atteindre exactement 0 ou 1, donc elle cherche à s'en approcher — ce qui nécessite des poids a,b,c de grande valeur absolue (le minimum de E est atteint à l'infini). La descente de gradient converge *lentement* vers ces grandes valeurs. En pratique, après suffisamment d'itérations, on obtient $a\approx b \gg 0$ et $c \ll 0$, ce qui reproduit qualitativement le comportement du perceptron à Heaviside.

Exercice 5.20 (Normalisation et convergence)
On dispose des données $(\mathrm{X}^{(i)}, \mathrm{Y}^{(i)})$ pour $i = 1,\dots,\mathrm{N}$.
1. Expliquer pourquoi la normalisation des données $\mathrm{X}^{(i)}_{\text{norm}} = \frac{\mathrm{X}^{(i)} - \mu_{\mathrm{X}}}{\sigma_{\mathrm{X}}}$ peut améliorer la convergence de la descente de gradient.
2. Pour les données $(1,2),(3,4),(5,6)$, calculer μ_{X}, σ_{X}, μ_{Y}, σ_{Y}, puis les données normalisées.
3. Si la régression affine sur les données normalisées donne $a_{\text{norm}} = 1.1$ et $b_{\text{norm}} = 0$, retrouver les coefficients

a et b pour les données originales.

Correction

1. **Pourquoi normaliser améliore la convergence.**
   Sans normalisation, si X varie dans un intervalle très large et Y dans un intervalle étroit (ou vice versa), les lignes de niveau de la fonction d'erreur $\mathrm{E}(a,b)$ sont des ellipses très allongées. La descente de gradient oscille alors le long du grand axe et avance très lentement. Après normalisation, les lignes de niveau sont proches de cercles (données isotropes) et la descente converge en beaucoup moins d'itérations.
2. **Calcul sur** $(1,2),(3,4),(5,6)$**.**

$$\mu_X = \frac{1+3+5}{3} = 3, \quad \sigma_X = \sqrt{\frac{(1-3)^2+(3-3)^2+(5-3)^2}{3}} = \sqrt{\frac{8}{3}} \approx 1.633.$$

$$\mu_Y = \frac{2+4+6}{3} = 4, \quad \sigma_Y = \sqrt{\frac{(2-4)^2+(4-4)^2+(6-4)^2}{3}} = \sqrt{\frac{8}{3}} \approx 1.633.$$

   (Ici $\sigma_X = \sigma_Y$ car $Y = X + 1$.)
   Données normalisées $X_{\text{norm}} = \frac{X-3}{\sigma_X}$, $Y_{\text{norm}} = \frac{Y-4}{\sigma_Y}$:

X	Y	X_{norm}	Y_{norm}
1	2	$-2/\sigma_X \approx -1.225$	$-2/\sigma_Y \approx -1.225$
3	4	0	0
5	6	$2/\sigma_X \approx 1.225$	$2/\sigma_Y \approx 1.225$

3. **Reconversion des coefficients.**
   La régression normalisée donne $Y_{\text{norm}} \approx a_{\text{norm}} X_{\text{norm}} + b_{\text{norm}}$ avec $a_{\text{norm}} = 1.1$ et $b_{\text{norm}} = 0$. En substituant les définitions :

$$\frac{Y-\mu_Y}{\sigma_Y} = a_{\text{norm}} \cdot \frac{X-\mu_X}{\sigma_X} + b_{\text{norm}}.$$

   On en déduit :

$$a = a_{\text{norm}} \cdot \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} = 1.1 \times \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} = 1.1 \times 1 = 1.1$$

   (ici $\sigma_X = \sigma_Y$ donc $a = a_{\text{norm}}$), et

$$b = b_{\text{norm}} \cdot \sigma_Y + \mu_Y - a\,\mu_X = 0 + 4 - 1.1 \times 3 = 4 - 3.3 = 0.7.$$

   La droite optimale est donc $Y \approx 1.1\,X + 0.7$.
   Vérification : pour $X = 3$, $Y \approx 3.3 + 0.7 = 4 = \mu_Y$. ✓

Exercice 5.21 (Rétropropagation sur un réseau à deux couches)
Considérons le réseau minimal $\hat{F}(x;a,b,c,d) = \sigma(c \cdot \sigma(ax+b)+d)$ avec un unique point d'entraînement $(X,Y) = (1,1)$.

1. Écrire $E(a,b,c,d) = (\hat{F}(1;a,b,c,d)-1)^2$.
2. Calculer $\frac{\partial E}{\partial c}$ et $\frac{\partial E}{\partial d}$ (couche de sortie).
3. Calculer $\frac{\partial E}{\partial a}$ et $\frac{\partial E}{\partial b}$ (couche cachée) par la règle de la chaîne.
4. Évaluer ces quatre dérivées partielles en $(a,b,c,d) = (1,0,1,0)$.

Correction
On introduit les notations intermédiaires :

$u = ax+b$ (pré-activation couche 1), $s = \sigma(u)$ (sortie couche 1), $v = cs+d$ (pré-activation couche 2), $\hat{F} = \sigma(v)$.

La donnée est $(X,Y) = (1,1)$, donc $u = a \cdot 1 + b = a + b$, $s = \sigma(a+b)$, $v = cs + d$.

1.

$$E(a,b,c,d) = \big(\sigma(c\,\sigma(a+b)+d)-1\big)^2.$$

© 2024-2027 G. Faccanoni

2. **Dérivées par rapport à c et d (couche de sortie).**
   Par la règle de la chaîne, en notant $r = \hat{\mathrm{F}} - \mathrm{Y} = \sigma(v) - 1$ le résidu :

$$\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial c} = 2r \cdot \sigma'(v) \cdot \frac{\partial v}{\partial c} = 2r \cdot \sigma(v)(1-\sigma(v)) \cdot s,$$

$$\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial d} = 2r \cdot \sigma'(v) \cdot \frac{\partial v}{\partial d} = 2r \cdot \sigma(v)(1-\sigma(v)) \cdot 1.$$

3. **Dérivées par rapport à a et b (couche cachée).**
   $\frac{\partial v}{\partial a} = c\,\sigma'(u) \cdot 1 = c\,\sigma(u)(1-\sigma(u))$, donc :

$$\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial a} = 2r \cdot \sigma'(v) \cdot c \cdot \sigma'(u) \cdot \mathrm{X} = 2r \cdot \sigma(v)(1-\sigma(v)) \cdot c \cdot \sigma(u)(1-\sigma(u)) \cdot 1,$$

$$\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial b} = 2r \cdot \sigma(v)(1-\sigma(v)) \cdot c \cdot \sigma(u)(1-\sigma(u)) \cdot 1.$$

   (Ici $\mathrm{X} = 1$ donc $\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial a} = \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial b}$.)

4. **Évaluation en $(a, b, c, d) = (1, 0, 1, 0)$.**

$$u = 1 + 0 = 1, \quad s = \sigma(1) \approx 0.731, \quad v = 1 \times 0.731 + 0 = 0.731, \quad \hat{\mathrm{F}} = \sigma(0.731) \approx 0.675.$$

$$r = 0.675 - 1 = -0.325, \quad \sigma'(v) = \sigma(v)(1-\sigma(v)) \approx 0.675 \times 0.325 \approx 0.219.$$

$$\sigma'(u) = \sigma(u)(1-\sigma(u)) \approx 0.731 \times 0.269 \approx 0.197.$$

$$\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial c} = 2 \times (-0.325) \times 0.219 \times 0.731 \approx -0.104.$$

$$\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial d} = 2 \times (-0.325) \times 0.219 \approx -0.142.$$

$$\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial a} = \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial b} = 2 \times (-0.325) \times 0.219 \times 1 \times 0.197 \approx -0.028.$$

   Les poids de sortie (c, d) reçoivent un gradient plus élevé en valeur absolue que les poids de la couche cachée (a, b) : c'est l'effet de la *dilution* du signal d'erreur lors de la rétropropagation à travers les couches.

Deuxième partie

Annexes

ANNEXE A

Exercices de calcul différentiel et intégral dans $\mathbb{R}$

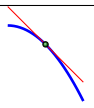
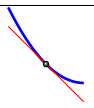
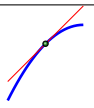
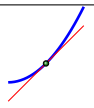
Dans ce chapitre

A.1 Dérivées 261
A.2 Primitives et intégrales 274

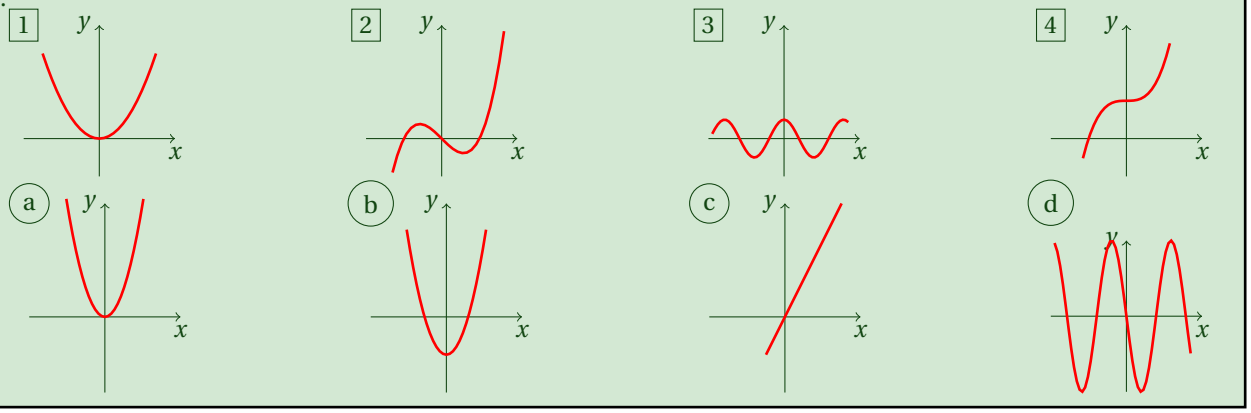
A.1. Dérivées

Rappels

$f''(x)$	$f'(x)$	$f(x)$
	>0	$\nearrow$
	$=0$	f tangente horizontale
	<0	$\searrow$
>0	$\nearrow$	convexe
$=0$	$\longleftrightarrow$	
<0	$\searrow$	concave

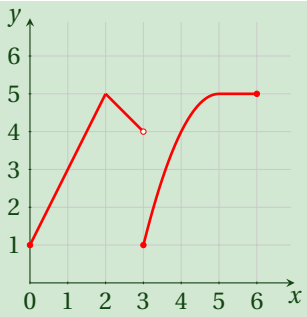
	$f''(x_0)<0$	$f''(x_0)>0$
$f'(x_0)<0$		
$f'(x_0)=0$		
$f'(x_0)>0$		

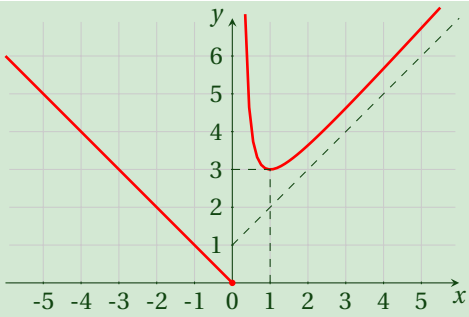
Exercice A.1
Pour les fonctions représentées en figure, trouver les appariements entre les fonction 1, 2, 3, 4 et les dérivées a, b, c, d.



Correction
1-c 2-b 3-d 4-a

Exercice A.2
Pour chacune des fonctions représentées, tracer une esquisse du graphe de leur dérivée (la graphe de gauche est constitué de parties de droites ou paraboles).

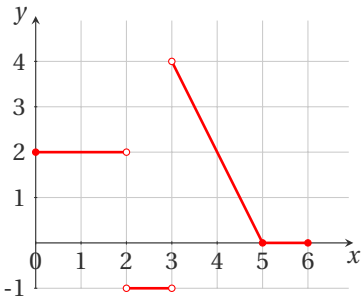


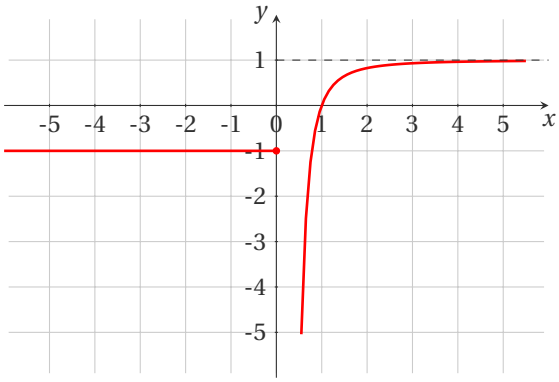


Correction
Pour la fonction de gauche on remarque que $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } 0 \le x \le 2, \\ -x+7 & \text{si } 2 \le x < 3, \\ 5-(x-5)^2 & \text{si } 3 \le x \le 5, \\ 5 & \text{si } x \ge 5 \end{cases}$ ainsi $f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } 0 \le x < 2, \\ -1 & \text{si } 2 < x < 3, \\ -2x & \text{si } 3 \le x < 5, \\ 0 & \text{si } x > 5 \end{cases}$

Étudions les raccordements :

- $f'(2)$ n'existe pas car $\lim_{x\to 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = 2$ tandis que $\lim_{x\to 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = -1$
- $f'(3)$ n'existe pas car f n'est pas continue en $x=3$
- $f'(5) = 0$





Exercice A.3
Calculer $f'(x)$ pour les fonctions suivantes :

1. $f(x) = 3\sin(x) - 5\cos(x)$
2. $f(x) = 3e^x - x^2$
3. $f(x) = 3\ln(x)$
4. $f(x) = \sin(2x)$
5. $f(x) = \sin(x + x^3)$
6. $f(x) = (x+4)^3$
7. $f(x) = (x + \sin(x))^5$
8. $f(x) = \sin(\ln(x^2))$
9. $f(x) = \exp(\cos^2(x))$
10. $f(x) = xe^x$
11. $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{x^2}$
12. $f(x) = e^x \sin(x)$
13. $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^4}$
14. $f(x) = \sin(x)\cos(x)$
15. $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{e^x}$
16. $f(x) = x^2 \sin(x)$
17. $f(x) = \dfrac{e^{1/x}}{x}$

Correction

1. $f'(x) = 3\cos(x) + 5\sin(x)$
2. $f'(x) = 3e^x - 2x$
3. $f'(x) = \dfrac{3}{x}$
4. $f'(x) = 2\cos(2x)$
5. $f'(x) = (1+3x^2)\cos(x+x^3)$
6. $f'(x) = 3(x+4)^2$
7. $f'(x) = 5(x+\sin(x))^4(1+\cos(x))$
8. $f'(x) = \dfrac{2}{x}\cos(\ln(x^2))$
9. $f'(x) = -2\cos(x)\sin(x)\exp(\cos^2(x))$
10. $f'(x) = (1+x)e^x$
11. $f'(x) = \dfrac{-x\sin(x) - 2\cos(x)}{x^3}$
12. $f'(x) = e^x(\sin(x) + \cos(x))$

© 2024-2027 G. Faccanoni

13. $f'(x) = \dfrac{1-4\ln(x)}{x^5}$
14. $f'(x) = -\sin^2(x) + \cos^2(x)$
15. $f'(x) = \dfrac{1-x\ln(x)}{xe^x}$
16. $f'(x) = 2x\sin(x) + x^2\cos(x)$
17. $f'(x) = -\dfrac{1+x}{x^3}e^{1/x}$

Exercice A.4
Calculer les dérivées des fonctions :

1. $5x^2$
2. $4x^3+2x-1$
3. $\left(1-\dfrac{x}{7}\right)^7$
4. $(3x+2)^9$
5. $\dfrac{1}{(2x+1)^4}$
6. $\dfrac{1}{\sqrt{x^3}}$
7. $\dfrac{x^2+3}{x^3+3x-7}$
8. $x^3\sin(x)$
9. $x^2\tan(x)$
10. $\dfrac{\cos(x)}{1-\sin(x)}$
11. $\sin(x)\cos(x)$
12. $\cos(-2x+1)$
13. $\dfrac{x}{\sin(2x)}$
14. $\ln(x^2+1)$
15. e^{x^2-3}
16. $\dfrac{4x}{\cos(x)}$
17. $2xe^{\cos(x)}$
18. $\sqrt{\cos(x)+2}$
19. $\sin(2x+1)$
20. $x\cos(5x)$
21. $\sin(x^2)$
22. $\sin\left(\dfrac{x-2}{x+3}\right)$
23. $\sin(2x)\cos(7x)$

Correction

1. $10x$
2. $12x^2+2$
3. $-\left(1-\dfrac{x}{7}\right)^6$
4. $27(3x+2)^8$
5. $-\dfrac{8}{(2x+1)^5}$
6. $(x^{-3/2})' = -\dfrac{3}{2}x^{-5/2} = -\dfrac{3}{2\sqrt{x^5}}$
7. $\dfrac{2x(x^3+3x-7)-(x^2+3)(3x^2+3)}{(x^3+3x-7)^2} = -\dfrac{x^4+6x^2+14x+9}{(x^3+3x-7)^2}$
8. $x^2(3\sin(x)+x\cos(x))$
9. $2x\tan(x)+x^2(1+\tan^2(x))$
10. $\dfrac{1}{1-\sin(x)}$
11. $\cos^2(x)-\sin^2(x) = \begin{vmatrix} 2\cos^2(x)-1 \\ 1-2\sin^2(x) \end{vmatrix}$
12. $2\sin(-2x+1)$
13. $\dfrac{\sin(2x)-2x\cos(2x)}{\sin^2(2x)}$
14. $\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$
15. $2xe^{x^2-3}$
16. $\dfrac{4\cos(x)+4x\sin(x)}{\cos^2(x)}$
17. $2(1-x\sin(x))e^{\cos(x)}$
18. $\dfrac{-\sin(x)}{2\sqrt{\cos(x)+2}}$
19. $2\cos(2x+1)$
20. $\cos(5x)-5x\sin(5x)$
21. $2x\cos(x^2)$
22. $\dfrac{5}{(x+3)^2}\cos\left(\dfrac{x-2}{x+3}\right)$
23. $2\cos(2x)\cos(7x)-7\sin(2x)\sin(7x)$

Exercice A.5
Calculer la dérivée 100-ème de la fonction $f(x) = (x^2-x)^{-1}$.

Correction
On a

- $f(x) = \dfrac{1}{x(x-1)} = \dfrac{\mathrm{A}}{x} + \dfrac{\mathrm{B}}{x-1}$ ssi $\mathrm{A} = -1$ et $\mathrm{B} = 1$
- $\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\dfrac{1}{x} = (-1)^n n!\dfrac{1}{x^{n+1}}$
- $\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\dfrac{1}{x-1} = (-1)^n n!\dfrac{1}{(x-1)^{n+1}}$

donc $(x^2-x)^{-1} = (x-1)^{-1} - x^{-1}$ donc $f^{(100)}(x) = 100!\left((x-1)^{-101} - x^{-101}\right)$ et plus généralement

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}f(x) = (-1)^n n!\frac{1}{(x-1)^{n+1}} - (-1)^n n!\frac{1}{x^{n+1}} = (-1)^n n!\left((x-1)^{-n-1} - x^{-n-1}\right)$$

Exercice A.6
Vérifier que la fonction donnée est solution de l'EDO (équation différentielle ordinaire) indiquée :

1. $y(x) = e^{-x}$ et $y'(x) = -y(x)$
2. $y(x) = \mathrm{C}e^{x^2/2}$ et $y'(x) = xy(x)$
3. $y(x) = \mathrm{C}e^{x} - (1+x)$ et $y'(x) + y(x) = x$
4. $\mathrm{T}(t) = \mathrm{T}_a + (\mathrm{T}_0 - \mathrm{T}_a)e^{\gamma t}$ et $\mathrm{T}'(t) = \gamma(\mathrm{T}(t) - \mathrm{T}_a$
5. $y(x) = \frac{1}{c+x^2}$ et $y'(x) + 2xy^2(x) = 0$

Correction

1. $y(x) = e^{-x}$ donc $y'(x) = -e^{-x} = -y(x)$
2. $y(x) = \mathrm{C}e^{x^2/2}$ donc $y'(x) = \mathrm{C}xe^{x^2/2} = xy(x)$
3. $\mathrm{T}(t) = \mathrm{T}_a + (\mathrm{T}_0 - \mathrm{T}_a)e^{\gamma t}$ donc $\mathrm{T}'(t) = \gamma(\mathrm{T}_0 - \mathrm{T}_a)e^{\gamma t} = \gamma(\mathrm{T}(t) - \mathrm{T}_a)$
4. $y(x) = \frac{1}{c+x^2}$ donc $y'(x) = -\frac{2x}{(c+x^2)^2} = -2xy^2(x)$

Exercice A.7

1. Une masse tombe avec une accélération constante a. Comment évolue sa vitesse ?
2. Le volume V et la pression P d'un gaz maintenu à une température constante sont liés par la loi de VAN DER WAALS qui s'écrit $\mathrm{P}(\mathrm{V}) = n\mathrm{RT}/(\mathrm{V} - nb) - an^2/\mathrm{V}^2$ où a et b sont des constantes propres au gaz, n désigne le nombre de moles, T est la température et R est une constante. Calculer P'.
3. Trouver la vitesse au temps $t = 2$ d'une masse attachée à un ressort et dont la position au temps t est donnée par $x(t) = \mathrm{A}\cos(2\pi\omega t)$. Que se passe-t-il avec la vitesse si on double l'amplitude A ?
4. Un ballon s'élève verticalement à la vitesse de $10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. S'il se trouve initialement au sol à une distance de 200 m d'un observateur, quel est le taux de variation $\vartheta'(t)$ de son angle d'élévation par rapport à l'observateur lorsque l'angle d'élévation est égal à $\pi/4$?
5. Un ballon s'élève verticalement à la vitesse de $10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. S'il se trouve initialement au sol à une distance de 100 m d'un observateur, quel est le taux de variation $\vartheta'(t)$ de son angle d'élévation par rapport à l'observateur après 10 s ?
6. Quelle accélération constante (en $\mathrm{m\,s^{-2}}$) un véhicule doit-il avoir pour passer d'une vitesse de $0\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ à une vitesse de $100\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ en 10 s ?
7. Un glaçon sphérique fond en conservant sa forme. Le taux de variation de son volume avec le temps est proportionnel à sa surface. Il faut une heure pour qu'un glaçon de un centimètre de rayon fonde totalement. Après combien de temps le glaçon a-t-il diminué de moitié en volume ? Rappel : la surface et le volume d'une sphère de rayon r sont respectivement $\mathrm{S} = 4\pi r^2$ et $\mathrm{V} = \frac{4}{3}\pi r^3$.
8. Un glaçon cubique fond en conservant sa forme. Le taux de variation de son volume avec le temps est proportionnel à sa surface. Il faut une heure pour qu'un glaçon de un centimètre de coté fonde totalement. Après combien de temps le glaçon a-t-il diminué de moitié en volume ?

Correction

1. $v(t) = at + v(0)$.
2. $\mathrm{P}'(\mathrm{V}) = -\dfrac{n\mathrm{RT}}{(\mathrm{V} - nb)^2} + \dfrac{2an^2}{\mathrm{V}^3}$.
3. $x'(t) = -2\pi\omega\mathrm{A}\sin(2\pi\omega t)$. Lorsque l'amplitude double, la vitesse double.
4. $h(t) = 10t$ et $\dfrac{h(t)}{200} = \tan(\vartheta(t))$ donc $\vartheta(t) = \arctan\left(\dfrac{t}{20}\right)$ et $\vartheta'(t) = \dfrac{20}{400 + t^2}$. Si $\bar{t}$ est l'instant tel que $\vartheta(\bar{t}) = \pi/4$, alors $\bar{t} = 20\tan(\pi/4) = 20$ et $\vartheta'(\bar{t}) = \dfrac{20}{400+400} = \dfrac{1}{40}$ radians par second.
5. $h(t) = 10t$ et $\dfrac{h(t)}{100} = \tan(\vartheta(t))$ donc $\vartheta(t) = \arctan\left(\dfrac{t}{10}\right)$ et $\vartheta'(t) = \dfrac{10}{100 + t^2}$ et $\vartheta'(10) = \dfrac{1}{20}$ radians par second.
6. $100\,\mathrm{km\,h^{-1}} = \frac{100000}{3600}\,\mathrm{m\,s^{-1}} = \frac{1000}{36}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ donc $a = (1000/36 - 0)/10\,\mathrm{m\,s^{-2}} = \frac{10}{36}\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.
7. Le rayon est fonction du temps donc $\mathrm{V}'(t) = 4\pi[r(t)]^2 r'(t)$. Comme le taux de variation de son volume avec le temps est proportionnel à sa surface, il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{V}'(t) = k4\pi[r(t)]^2$. Donc $4\pi[r(t)]^2 r'(t) = k4\pi[r(t)]^2$, autrement dit $k = r'(t)$ ce qui implique que $r(t) = at + b$. Comme il faut une heure pour qu'un glaçon de un

© 2024-2027 G. FACCANONI

centimètre de rayon fonde totalement, on a $r(0) = 1$ et $r(1) = 0$ et on obtient la relation $r(t) = 1 - t$. On cherche alors $\hat{t}$ tel que $V(\hat{t}) = V(0)/2$, c'est-à-dire $\frac{4}{3}\pi(1-\hat{t})^3 = \frac{4}{3}\pi\frac{1}{2}$: le glaçon a diminué de moitié en volume après $\hat{t} = 1 - 2^{-1/3} \approx 0.20$ h = 12 minutes.

8. La surface et le volume d'un cube de coté ℓ sont respectivement $S = 6\ell^2$ et $V = \ell^3$. Le coté est fonction du temps donc $V'(t) = [\ell(t)]^2\ell'(t)$. Comme le taux de variation de son volume avec le temps est proportionnel à sa surface, il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $V'(t) = k6[\ell(t)]^2$. Donc $[\ell(t)]^2\ell'(t) = k6[\ell(t)]^2$, autrement dit $6k = \ell'(t)$ ce qui implique que $\ell(t) = at + b$. Comme il faut une heure pour qu'un glaçon de un centimètre de coté fonde totalement, on a $\ell(0) = 1$ et $\ell(1) = 0$ et on obtient la relation $\ell(t) = 1 - t$. On cherche alors $\hat{t}$ tel que $V(\hat{t}) = V(0)/2$, c'est-à-dire $(1-\hat{t})^3 = 1/2$: le glaçon a diminué de moitié en volume après $\hat{t} = 1 - 2^{-1/3} \approx 0.20$ h = 12 minutes.

Exercice A.8 (Droite tangente au graphe d'une fonction)

1. Trouver l'équation de la tangente au graphe de la fonction définie par $f(x) = x^2 + 1$ en 1.
2. Trouver l'équation de la tangente au graphe de la fonction définie par $f(x) = \frac{4x}{x^2+1}$ en 0.
3. Trouver l'équation de la tangente au graphe de la fonction définie par $f(x) = \frac{4x}{x^2+1}$ en 1.
4. Le graphe de la fonction définie par $f(x) = ax^2 + bx + 3$ passe par le point $(2,0)$. La tangente au graphe de f en ce point est parallèle à la droite d'équation $y = 3x + 2$. Trouver a et b.
5. La pente de la tangente au graphe de f en $x = 1$ est égale à 3. La pente de la tangente au graphe de g en $x = 1$ est égale à 7. Calculer la pente de la tangente au graphe de $f + g$ en $x = 1$. Que peut-on dire de la pente de la tangente au graphe de fg en $x = 1$? Que peut-on dire de la pente de la tangente au graphe de fg en $x = 1$ si $f(1) = 3$ et $g(1) = 2$?

Correction

L'équation de la droite tangente au graphe de f en x_0 est $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

1. Pente : $f'(1) = 2$. Équation : $y = 2(x-1) + f(1) = 2x$.
2. Pente : $f'(0) = 4$. Équation : $y = 4x + f(0) = 4x$.
3. Pente : $f'(1) = 0$. Équation : $y = f(1) = 2$.
4. $f'(2) = 3$ et $f(2) = 0$ donc $a = 9/4$ et $b = -6$.
5. $f'(1) = 3$ et $g'(1) = 7$, alors $(f+g)'(1) = 10$ (pente de la tangente au graphe de $f + g$ en $x = 1$). Comme $(fg)'(1) = f'(1)g(1) + f(1)g'(1)$ on ne peut rien dire sans connaître $f(1)$ et $g(1)$. Si $f(1) = 3$ et $g(1) = 2$ alors $(fg)'(1) = f'(1)g(1) + f(1)g'(1) = 3 \times 2 + 3 \times 7 = 27$ (pente de la tangente au graphe de fg en $x = 1$).

Exercice A.9 (Parabole osculatrice au graphe d'une fonction)

Trouver l'équation de la parabole osculatrice au graphe de la fonction en le point indiqué.

1. $f(x) = x^2 + 1$ en $x_0 = 1$
2. $g(x) = e^x$ en $x_0 = 0$
3. $h(x) = \ln(1 + x)$ en $x_0 = 0$
4. $w(x) = \cos(x)$ en $x_0 = 0$

Correction

L'équation de la parabole osculatrice au graphe de f en x_0 est $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2$.

1. On a $f(x) = x^2 + 1$, $f'(x) = 2x$ et $f''(x) = 2$ donc $f(1) = 2$, $f'(1) = 2$, $f''(1) = 2$. L'équation cherchée est $y = 2 + 2(x-1) + \frac{2}{2}(x-1)^2 = 2x + (x-1)^2 = x^2 + 1$, ce qui est évident car la meilleure parabole qui approche f est f elle même car f est une parabole.
2. On a $g(x) = e^x$, $g'(x) = g''(x) = e^x$ donc $g(0) = g'(0) = g''(0) = 1$. L'équation cherchée est $y = 1 + 1(x-0) + \frac{1}{2}(x-0)^2 = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$. Pour x proche de zéro on peut donc approcher la fonction exponentielle par sa droite tangente ou, encore mieux, par sa parabole osculatrice. Par exemple, on peut approcher $\sqrt{e}$ par $1 + \frac{1}{2}$ ou, encore mieux, par $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2^2}$. Avec une calculatrice on vérifie que $\sqrt{e} \approx 1.648721271$, $1 + \frac{1}{2} = 1.5$ et $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2^2} = 1.625$.
3. On a $h(x) = \ln(1 + x)$, $h'(x) = \frac{1}{1+x}$ et $g''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$ donc $h(0) = 0$, $h'(0) = 1$ et $h''(0) = -1$. L'équation cherchée est $y = 0 + 1(x-0) - \frac{1}{2}(x-0)^2 = x - \frac{1}{2}x^2$. Pour x proche de zéro on peut donc approcher la fonction h par sa droite tangente ou, encore mieux, par sa parabole osculatrice. Par exemple, on peut approcher $\ln(1.5)$ par $\frac{1}{2}$ ou, encore mieux, par $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{2^2}$. Avec une calculatrice on vérifie que $\ln(1.5) \approx 0.405465108$, $\frac{1}{2} = 0.5$ et $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{2^2} = 0{,}375$.

4. On a $w(x) = \cos(x)$, $w'(x) = -\sin(x)$ et $w''(x) = -\cos(x)$ donc $w(0) = 1$, $w'(0) = 0$ et $w''(0) = -1$. L'équation cherchée est $y = 1 - \frac{1}{2}(x-0)^2 = 1 - \frac{1}{2}x^2$. Pour x proche de zéro on peut donc approcher la fonction $\cos(x)$ par sa parabole osculatrice. Par exemple, on peut approcher $\cos(\pi/6)$ (radiants !) par $1 - \frac{1}{72}\pi^2$. Avec une calculatrice on vérifie que $\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2 \approx 0.86602540378$ et $1 - \frac{1}{72}\pi^2 \approx 0.862922161$.

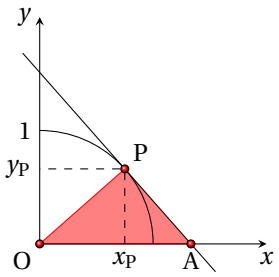
Exercice A.10
On considère une fonction exponentielle $f : x \mapsto c^x$. Soit P le point d'intersection du graphe de f avec la tangente à ce graphe passant par l'origine du plan cartésien. Montrer que l'ordonnée de P ne dépend pas du choix de la base de l'exponentielle, *i.e.* qu'importe la valeur choisie pour c.

Correction
Notons (x_P, y_P) les coordonnées de P.

- P appartient au graphe de la courbe, donc $y_P = c^{x_P}$.
- P appartient à la tangente au graphe de f passant par l'origine. Cette droite a pour équation $y = f'(x_P)x$ et l'on a $f'(x) = \ln(c)c^x$ donc on a aussi $y_P = \ln(c)c^{x_P}x_P$.

x_P est alors solution de l'équation $c^{x_P} = \ln(c)c^{x_P}x_P$, ce qui équivaut à $x_P = \frac{1}{\ln(c)} = \log_c(e)$. Alors $y_P = c^{x_P} = e$ quelque soit la base c choisie.

Exercice A.11
On considère le quart de circonférence d'équation $y = \sqrt{1-x^2}$ pour $0 < x < 1$. Soit $P = (x_P, y_P)$ un point du quart de circonférence. On note par A le point d'intersection de la tangente en P avec l'axe x. Exprimer la surface du triangle OAP en fonction de x_P.



Correction
Soit $f(x) = \sqrt{1-x^2}$. L'équation de la droite tangente en $x = x_P$ s'écrit

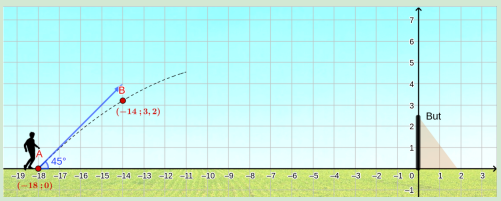
$$y = f'(x_P)(x - x_P) + f(x_P) = \frac{-x_P}{\sqrt{1-x_P^2}}(x - x_P) + \sqrt{1-x_P^2}$$

$A = (x_A, 0)$ est le point d'intersection de cette droite avec la droite d'équation $y = 0$, donc on a

$$\frac{-x_P}{\sqrt{1-x_P^2}}(x_A - x_P) + \sqrt{1-x_P^2} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x_A = \frac{1}{x_P}$$

et la surface du triangle OAP en fonction de x_P est $\frac{x_A y_P}{2} = \frac{\sqrt{1-x_P^2}}{2x_P}$.

Exercice A.12
Un joueur de foot, situé à 18m du but, effectue un tir en cloche. On modélise la situation dans un repère orthonormé (l'unité choisie est le mètre). On suppose que la trajectoire du ballon est parabolique et passe par les points $(-18;0)$ et $(-14;3.2)$, la tangente à la courbe en $x = -18$ forme un angle de 45° avec l'horizontale. On note p la fonction qui à l'abscisse x de la balle associe son ordonnée $p(x)$.



1. Écrire et résoudre le système qui permet de déterminer p.
2. À quelle hauteur maximale le ballon va-t-il s'élever ?
3. Sachant que le but a une hauteur de 2.44m, le tir est-il cadré ?

© 2024-2027 G. Faccanoni

Correction
Source : https://www.python-lycee.com/activite-en-ligne-mathematiques

1. On cherche a, b, c tels que $p(x) = c + bx + ax^2$. On sait que $p(-18) = 0$, $p(-14) = \frac{32}{10}$ et $p'(-18) = 1$, d'où le système linéaire
$$\begin{cases} c - 18b + (-18)^2 a = 0 \\ c - 14b + (-14)^2 a = \frac{32}{10} \\ b - 18 \times 2a = 1 \end{cases}$$
On utilise la méthode de Gauss (pour les calculs se rappeler que $14^2 - 18^2 = (14-18)(14+18) = -4 \times 32$) :
$$\begin{cases} c - 18b + (-18)^2 a = 0 \\ c - 14b + (-14)^2 a = \frac{32}{10} \\ b - 18 \times 2a = 1 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} c - 18b + 18^2 a = 0 \\ 4b - 4 \times 32a = \frac{32}{10} \\ b - 18 \times 2a = 1 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} c - 18b + 18^2 a = 0 \\ b - 32a = \frac{8}{10} \\ b - 18 \times 2a = 1 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} c - 18b + 18^2 a = 0 \\ b - 32a = \frac{8}{10} \\ -4a = \frac{1}{5} \end{cases}$$
donc
$$c = \frac{9}{5}, \quad b = -\frac{4}{5}, \quad a = -\frac{1}{20}.$$
2. $p'(x) = 0$ ssi $x = -\frac{b}{2a} = -8$ et $p(-8) = 5$: le ballon s'élèvera jusqu'à 5m et cette hauteur sera atteinte en $x = -8$.
3. Le but est en $x = 0$ et l'on a $p(0) = \frac{9}{5} = 1.8 < 2.44$: le tir est cadré.

Exercice A.13
Calculer les points stationnaires des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ suivantes et établir leur nature.

1. $f(x) = (x-2)^2$
2. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$
3. $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2$
4. $f(x) = xe^{-x}$
5. $f(x) = x^2 \ln(x)$

Correction
1. $f(x) = (x-2)^2$
$f'(x) = 2(x-2)$ et $f'(x) = 0$ ssi $x = 2$.
$f''(x) = 2$ et $f''(2) = 2 > 0$ donc $x = 2$ est un minimum.
2. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$
$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x-1)(x-3)$ et $f'(x) = 0$ ssi $x = 1$ ou $x = 3$.
$f''(x) = 6x - 12 = 6(x-2)$ et $f''(1) = -6 < 0$ donc $x = 1$ est un maximum tandis que $f''(3) = 6 > 0$ donc $x = 3$ est un minimum.
3. $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 = x^2(3x^2 - 8x + 6) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
$f'(x) = 12x^3 - 24x^2 + 12x = 12x(x^2 - 2x + 1) = 12x(x-1)^2$ et $f'(x) = 0$ ssi $x = 0$ ou $x = 1$.
f décroissante pour $x < 0$ et f croissante pour $x > 0$ avec tangente horizontale en $x = 1$.
$x = 0$ est un minimum.
$f''(x) = 36x^2 - 48x + 12 = 12(3x^2 - 4x + 1) = 12(x-1)(3x-1)$ et $f''(1) = 0$ avec $f''(x) < 0$ si $\frac{1}{3} < x < 1$ et $f''(x) > 0$ si $x > 1$ donc $x = 1$ est un point d'inflexion.
4. $f(x) = xe^{-x}$
$f'(x) = (1-x)e^{-x}$ et $f'(x) = 0$ ssi $x = 1$.
$f''(x) = (x-2)e^{-x}$ et $f''(1) = -1/e < 0$ donc $x = 1$ est un maximum.
5. $f(x) = x^2 \ln(x)$ donc $x > 0$
$f'(x) = x(1 + 2\ln(x))$ et $f'(x) = 0$ ssi $x = 1/\sqrt{e}$.
$f''(x) = 3 + 2\ln(x)$ et $f''(1/\sqrt{e}) = 2 > 0$ donc $x = 1/\sqrt{e}$ est un minimum

Exercice A.14
Un triangle a deux côtés et l'angle entre eux mesurant respectivement a, b et δ. Quelle est la valeur de δ qui maximise l'aire du triangle ?

Correction
L'aire du triangle vaut $A(\delta) = \frac{ab}{2}\sin(\delta)$ avec $0 \le \delta \le \pi$. On a $A'(\delta) = \frac{ab}{2}\cos(\delta)$ et $A'(\delta) = 0$ ssi $\delta = \frac{\pi}{2}$. Comme $A''(\delta) = -\frac{ab}{2}\sin(\delta)$, alors $A''(\frac{\pi}{2}) = -\frac{ab}{2} < 0$ donc il s'agit bien d'un maximum.

Exercice A.15
Une société produit des boîtes en carton de 5 L en forme de parallélépipède à base carrée. Les boîtes doivent utiliser la moindre quantité de carton possible. Quelles dimensions doit-elle fixer ?

Correction
Notons ℓ la longueur (en décimètre) des cotés de la base (carrée) et h la hauteur (en décimètre) de la boîte. On a $\ell^2 h = 5$ ainsi la surface de la boîte mesure $S(\ell) = 2\ell^2 + 4h\ell = 2\ell^2 + \frac{20}{\ell}$ décimètres carrées. Il s'agit d'une parabole dont le minimum s'obtient pour $\ell = \sqrt[3]{5} \simeq 171\,\text{mm}$ et dans ce cas l'on a $h = \ell$: la boîte qui utilise la moindre quantité de carton possible est un cube.

Exercice A.16
La distance r qui sépare deux molécules résulte d'un équilibre entre une force attractive proportionnelle à $1/r^6$ et une force répulsive proportionnelle à $1/r^{12}$. La distance d'équilibre est celle pour laquelle le potentiel de LENNARD-JONES est minimal. Calculer cette distance sachant que ce potentiel est donné par

$$V(r) = 4\varepsilon\left(\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r}\right)^{6}\right)$$

où σ est une distance, appelée distance de collision, et ε est le potentiel minimal.

Correction

$$V'(r) = 4\varepsilon\left(-\frac{12}{r}\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{12} + \frac{6}{r}\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{6}\right) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad r = \sqrt[6]{2}\sigma \qquad \text{et} \qquad V(\sqrt[6]{2}\sigma) = -\varepsilon.$$

Exercice A.17
Dans une molécule diatomique, l'énergie potentielle varie avec la distance r entre les deux atomes. L'expression empirique de ce potentiel (appelé potentiel de MORSE) est donnée par

$$V(r) = D(1 - e^{\alpha-\beta r})^2$$

où $\alpha, \beta > 0$ sont des constantes propres à chaque molécule. À l'équilibre une molécule de trouve au niveau de son énergie potentielle la plus basse. Trouver cette position d'équilibre. La différence entre l'énergie potentielle à l'équilibre et celle lorsque r tend vers l'infini est l'énergie de dissociation. Calculer cette énergie.

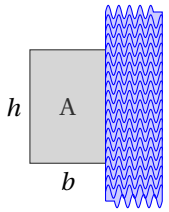
Correction
- Position d'équilibre :

$$V'(r) = 2D(1-e^{\alpha-\beta r})\times(-e^{\alpha-\beta r})\times(-\beta) = -2\beta V(r) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad V(r) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad r = \frac{\alpha}{\beta} \qquad \text{et} \qquad V\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = D.$$

- Énergie de dissociation :

$$\lim_{r\to+\infty} V\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) - V(r) = \lim_{r\to+\infty} D\left(1 - (1 - e^{\alpha-\beta r})^2\right) = \lim_{r\to+\infty} D\left(-e^{2(\alpha-\beta r)} + 2e^{\alpha-\beta r}\right) = D.$$

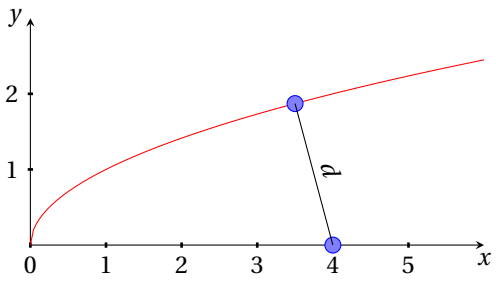
Exercice A.18
Un terrain rectangulaire d'aire A se trouve le long de la rive (rectiligne) d'une rivière. Quelle est la longueur minimale de la clôture nécessaire pour clôturer les trois autres côtés du terrain ?



Correction
Aire : $A = bh$. Longueur clôture : $\ell(b) = 2b + h(b) = 2b + \frac{A}{b}$. Recherche du minimum : $\ell'(b) = 2 - \frac{A}{b^2}$ et $\ell'(b) = 0$ ssi $b = \sqrt{\frac{A}{2}}$.
Comme $\ell''(b) = \frac{2A}{b^3} > 0$ pour tout $b > 0$, il s'agit bien d'un minimum et la clôture mesure $\ell(b) = 2\sqrt{\frac{A}{2}} + \frac{A\sqrt{2}}{\sqrt{A}}$.
Remarque : si on clôture tous les quatre côtés on a $\ell(b) = 2b + 2h(b)$ et donc $h = b = \sqrt{A}$.

© 2024-2027 G. FACCANONI

Exercice A.19
Trouver le point de la courbe d'équation $y = \sqrt{x}$ plus proche au point $(4,0)$.



Correction
Soit $(x, \sqrt{x})$ un point quelconque de la courbe d'équation $y = \sqrt{x}$. Il s'agit de trouver le minimum de la distance entre ce point et le point $(4,0)$:

$$d(x) = \sqrt{(x-4)^2 + (\sqrt{x}-0)^2} = \sqrt{x^2 - 7x + 16}.$$

Sa dérivée vaut

$$d'(x) = \frac{2x-7}{2\sqrt{x^2-7x+16}}.$$

Dans ce cas il est plus simple d'étudier directement le signe de d' (qui est le même que celui de $2x-7$) plutôt que de calculer la dérivée seconde. On a

- $d'(x) = 0 \iff x = \frac{7}{2}$,
- $d'(x) > 0 \iff x > \frac{7}{2}$,
- $d'(x) < 0 \iff x < \frac{7}{2}$,

par conséquent le point cherché est $\left(\frac{7}{2}, \sqrt{\frac{7}{2}}\right)$.

Méthode simplifiée : comme la fonction $\sqrt{}$ est strictement croissante, minimiser d équivaut à minimiser d^2 : c'est une parabole convexe de sommet $x = \frac{7}{2}$ et $d(7/2) = \sqrt{d_2(7/2)} = \sqrt{7/2}$.

Exercice A.20
La mesure de la distance entre deux points donne une série de valeurs expérimentales $d_1, d_2, \ldots, d_n$. Sur la base de ces valeurs, on désire obtenir une estimation de d qui soit la plus proche possible de la réalité. Trouver une formule pour d telle que la mesure d'erreur

$$(d-d_1)^2 + (d-d_2)^2 + \cdots + (d-d_1)^n$$

soit minimale.

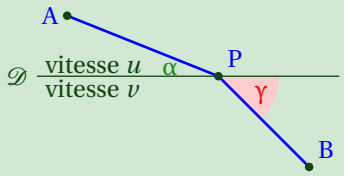
Correction
On veut minimiser la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ définie par $f(d) = \sum_{i=1}^n (d-d_i)^2$. On a

$$f'(d) = 2\sum_{i=1}^n (d-d_i) = 2\left(nd - \sum_{i=1}^n d_i\right)$$

donc $f'(d) = 0$ ssi $d = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n d_i$.

Exercice A.21 (Loi de réfraction)
D'après le principe de FERMAT un rayon lumineux n'emprunte pas le chemin le plus court mais le chemin le plus rapide. Autrement dit, ce n'est pas la longueur du parcours mais sa durée qui est minimale.

1. Démontrer la loi de la réfraction : "dans le plan soient A et B deux points de chaque côté d'une droite $\mathscr{D}$. On suppose que la lumière voyage à vitesse u dans le demi plan contenant A et à vitesse v dans l'autre demi-plan. Alors le rayon lumineux prend le chemin caractérisé par l'équation $u\cos(\gamma) = v\cos(\alpha)$ où α et γ sont les angles indiqués ci-dessous."

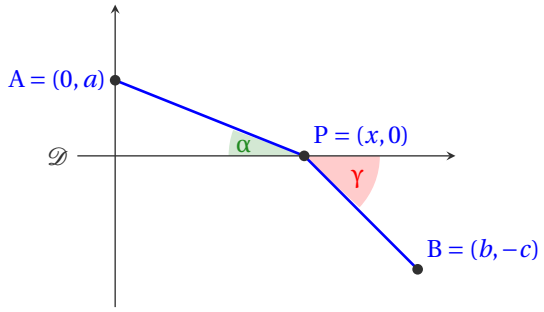


(Indication : choisir un repère adapté et exprimer le temps nécessaire pour le chemin en fonction de la position du point P ; puis minimiser par un calcul de dérivée.)

2. Pour un rayon lumineux qui arrive sur la surface d'un lac un nageur mesure $\alpha = 45°$ et $\gamma = 58°$. En déduire la vitesse de la lumière dans l'eau.

Correction

1. On remarque que sur le dessin $u > v$. En effet, dans le demi-plan supérieur la partie du chemin est un peu plus longue que si on suivait le chemin direct [AC] ; on gagne du temps en faisant un chemin plus long dans le demi-plan où la vitesse est plus rapide. Choisissons un système de coordonnées orthonormées et des notations comme indiquées ci-dessous.



Alors

$$\mathrm{AP} = \sqrt{x^2 + a^2},$$
$$\mathrm{CP} = \sqrt{(b-x)^2 + c^2}.$$

Ainsi la durée du trajet APC est

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{u} + \frac{\sqrt{(b-x)^2+c^2}}{v}.$$

Cette expression définit une fonction dérivable f sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x) = \frac{x}{u\sqrt{x^2+a^2}} - \frac{b-x}{v\sqrt{(b-x)^2+c^2}} = \frac{\cos(\alpha)}{u} - \frac{\sin(\gamma)}{u}.$$

Ainsi $f'(x) = 0$ si et seulement si $u\cos(\gamma) = v\cos(\alpha)$. Géométriquement il est plus ou moins évident que cette condition correspond effectivement à un minimum de la fonction f, mais on peut aussi procéder rigoureusement en dérivant encore une fois :

$$f''(x) = \frac{a^2}{u\sqrt{(x^2+a^2)^3}} + \frac{c^2}{v\sqrt{((b-x)^2+c^2)^3}} > 0.$$

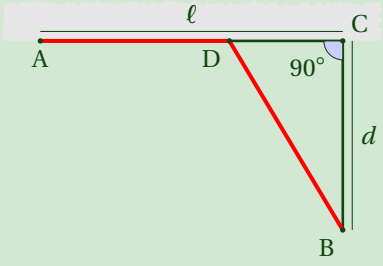
Le signe de la dérivée seconde étant strictement positif la dérivée f' change de signe au point où elle s'annule, de sorte que ce point est un minimum. Remarque : si la vitesse de la lumière varie en fonction du lieu (lieu anisotrope) le chemin le plus court n'est pas forcément le plus rapide ! C'est comme en voiture, un détour peut être plus rapide s'il évite des bouchons.

2. On obtient comme vitesse de la lumière dans l'eau :

$$v = \frac{\cos(58°)}{\cos(45°)} u \simeq \sqrt{2} \times 0.53 \times 3 \times 10^8 \,\mathrm{m\,s^{-1}} \simeq 2.25{\times}10^8 \,\mathrm{m\,s^{-1}}.$$

Exercice A.22

Un tracteur partant d'un point A situé sur une route rectiligne doit atteindre un point B situé dans un champ (voir la figure ci-contre). On connait les distances AC = ℓ et CB = d et on sait que le tracteur va deux fois moins vite dans le champ que sur la route. Il quitte la route en un point D de [AC] à préciser. Les trajets de A à D et de D à B sont supposés rectilignes. Déterminez le point D pour que le temps total soit minimal. Discutez suivant ℓ et d.



© 2024-2027 G. Faccanoni

Correction
Soit AD $= x$ avec $0 \le x \le \ell$. On a alors DB $= \sqrt{(\ell-x)^2+d^2}$. Si v désigne la vitesse du tracteur dans le champ, sa vitesse sur la route est de $2v$ et le temps total mis pas le tracteur pour atteindre B depuis A est

$$t(x) = \frac{x}{2v} + \frac{\sqrt{(\ell-x)^2+d^2}}{v}.$$

On cherche $x \in [0;\ell]$ qui minimise la fonction t. On a

$$t'(x) = \frac{1}{2v} + \frac{-2(\ell-x)}{2v\sqrt{(\ell-x)^2+d^2}} = \frac{\sqrt{(\ell-x)^2+d^2} - 2(\ell-x)}{2v\sqrt{(\ell-x)^2+d^2}}$$

donc $t'(x) = 0$ si et seulement si $x = \ell - \frac{d}{\sqrt{3}}$ et

$$t''(x) = \frac{d^2}{v((\ell-x)^2+d^2)^{\frac{3}{2}}} > 0.$$

ce qui implique que $t'(x) > 0$ si et seulement si $x < \ell - \frac{d}{\sqrt{3}}$. Par conséquent,

- si $\ell < \frac{d}{\sqrt{3}}$ alors $t'(x) < 0$ pour tout $x \in [0;\ell]$: la fonction t atteint son minimum en $x = 0$, c'est-à-dire que le tracteur quitte la route en A ;
- si $\ell > \frac{d}{\sqrt{3}}$ alors $t'(x) < 0$ pour tout $x \in [0;\ell - \frac{d}{\sqrt{3}}]$ et $t'(x) > 0$ pour tout $x \in [\ell - \frac{d}{\sqrt{3}};\ell]$: la fonction t atteint son minimum en $x = \ell - \frac{d}{\sqrt{3}}$.

Exercice A.23
On note x la quantité produite, p le prix et $f(x)$ le coût. On suppose que l'on se trouve dans un cas de concurrence parfaite, dans lequel le prix de la marchandise est indépendant de la quantité produite. Le profit est la fonction $\Pi(x) =$ recette $-$ coût. Prouver que le profit est optimal lorsque la recette marginale est égal au coût marginal.

Correction
La recette est $g(x) = px$. La recette marginale est $g'(x) = p$ et le coût marginal est $f'(x)$. Le profit est $\Pi(x) = g(x) - f(x)$. On a $\Pi'(x) = g'(x) - f'(x) = p - f'(x)$. Donc si $p = f'(x)$ la dérivée du profit s'annule et le profit et extrémal.

Exercice A.24
On considère un produit dont le prix unitaire est p ($p > 0$). On note q la quantité vendue de ce produit pendant un mois et on suppose que $q(p) = \alpha + \beta p$ où α et β sont des réels.

1. Peut-on déjà prédire le signe de la constante β ?
2. De combien varie la quantité vendue lorsque le prix augmente de 1 ?
3. Quelle est la plus grande valeur de p possible sachant que la quantité vendue q est un nombre positif ?
4. On suppose désormais que $q = 5000$ si $p = 100$, et que $q = 4000$ si $p = 200$. Déterminer α et β.
5. Déterminer en fonction de p les recettes mensuelles $r(p)$.
6. Quelle est la valeur maximale des recettes ?
7. Le coût unitaire de fabrication du produit est égal à 100. Déterminer en fonction de p le profit $g(p)$ total réalisé (c'est-à-dire la différence entre recettes et coût).
8. Pour quelle quantité le profit est-il maximal ?

Correction

1. La fonction q est affine. La quantité vendue est forcement une fonction décroissante du prix, donc β doit être négatif.
2. Le taux d'accroissement est $\beta = \frac{5000-4000}{100-200} = -10$. On en déduit (par décalage) que

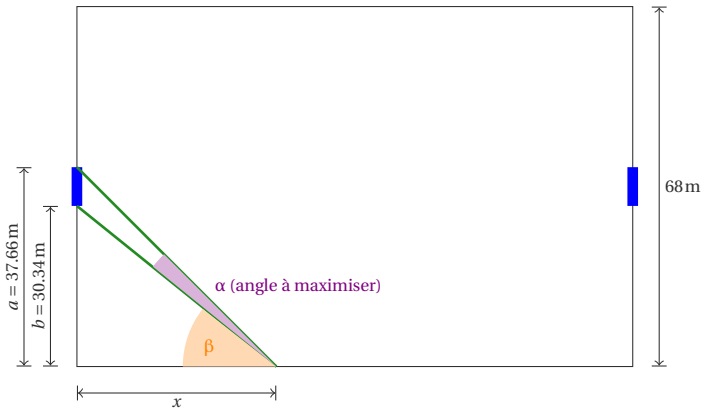
$$q(p) = -10(p-100) + 5000 = 6000 - 10p.$$

   Donc $\alpha = 6000$.
3. Comme $\beta = -10$, lorsque le prix augmente de 1 on perd 10 acheteurs.

4. On résout l'inégalité
$$q(p) \geq 0 \iff 6000 - 10p \geq 0 \iff p \leq 600.$$
Donc on trouve des acheteurs si et seulement si le prix est inférieur à 600.
5. Les recettes mensuelles sont
$$r(p) = \text{prix unitaire} \times \text{quantité vendue} = p \times q(p) = 10p(600 - p).$$
6. La dérivée est
$$r'(p) = 20(300 - p),$$
donc r est croissante sur $[0,300]$ et décroissante sur $[300,600]$. Il y a donc un maximum en $p = 300$. Les recettes maximales sont donc
$$r(300) = 900000.$$
Solution alternative: la courbe de la fonction $p \mapsto r$ est une parabole concave ayant deux intersections avec l'axe des abscisses, en $p = 0$ et $p = 600$. Par symétrie le maximum se trouve au milieu entre ces deux intersections, c'est-à-dire au prix de 300.
7. On a
$$g(p) = r(p) - 100q(p) = (10p - 1000)(600 - p).$$
8. Après un petit calcul on trouve $g'(p) = 7000 - 20p$, donc g est croissante sur $[0,350]$ et décroissante sur $[350;600]$. Il y a donc un maximum pour le prix 350. Cela correspond à une quantité de $q(350) = 2500$.
Solution alternative: la courbe de la fonction $p \mapsto g$ est une parabole concave ayant deux intersections avec l'axe des abscisses, en $p = 100$ et $p = 600$. Par symétrie le maximum se trouve au milieu entre ces deux intersections, c'est-à-dire au prix de 350.

Exercice A.25
Un joueur de football, en possession du ballon, court sur la ligne de touche. Ayant une frappe extrêmement forte il ne se soucie pas de la distance et tire à l'endroit où l'angle d'ouverture par rapport au but est maximal. Quel est alors cet angle (en degrés) ?
Utiliser les dimensions recommandées par la FIFA: terrain 105 m × 68 m et largeur du but 7.32 m.

Correction
D'après ce dessin



on trouve
$$\begin{cases} \tan(\beta) = \frac{b}{x}, \\ \tan(\alpha+\beta) = \frac{a}{x}, \end{cases} \implies \begin{cases} \beta = \arctan\left(\frac{b}{x}\right), \\ \alpha+\beta = \arctan\left(\frac{a}{x}\right), \end{cases} \implies \alpha(x) = \arctan\left(\frac{a}{x}\right) - \arctan\left(\frac{b}{x}\right),$$
puis, par dérivation,
$$\alpha'(x) = \frac{b}{x^2+b^2} - \frac{a}{x^2+a^2} = \frac{(a-b)(ab-x^2)}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}.$$
Cette dérivée s'annule au seul point
$$x_0 = \sqrt{ab} = \sqrt{30.34\,\text{m} \times 37.66\,\text{m}} \simeq 33.8\,\text{m}.$$

 © 2024-2027 G. Faccanoni

Géométriquement il est évident que la fonction $x \mapsto a(x)$ possède un unique maximum qui est donc x_0. (On peut aussi remarquer que $a(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$ et que $\lim_{x\to 0} a(x) = \lim_{x\to\infty} a(x) = 0$; ainsi la fonction dérivable α possède un maximum sur $\mathbb{R}_+$ qui se trouve donc en x_0). L'angle maximal est alors

$$\alpha(x_0) = \arctan\left(\frac{a}{x_0}\right) - \arctan\left(\frac{b}{x_0}\right) \simeq 6.18°.$$

Exercice A.26
Deux rues se coupent en formant un angle droit. Une voiture circule sur une rue à une vitesse de $2\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et une seconde voiture circule sur l'autre rue à une vitesse de $4\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Les voitures partent toutes les deux d'une distance de 200 m du point d'intersection et se dirigent vers l'intersection des rues. Quelle sera leur distance minimale ?

Correction
Plaçons les deux rues dans un plan cartésien, la première rue sera l'axe des abscisses, la deuxième ceux des ordonnées et l'intersection des deux rue se trouve au point de coordonnées $(0,0)$. Indiquons par (x_i, y_i) la position de la voiture i ($i = 1$ ou 2). Alors

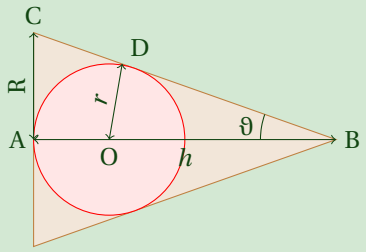
$$(x_1, y_1) = (-200 + 2t, 0) \qquad (x_2, y_2) = (0, -200 + 4t)$$

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ le carré de la fonction distance des deux voitures en fonction du temps :

$$f(t) = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = (-200 + 2t - 0)^2 + (0 + 200 - 4t)^2 = 20t^2 - 2400t + 80000.$$

Cette fonction est minimale pour $t = 60\,\mathrm{s}$ et l'on a $\sqrt{f(t)} = \sqrt{20 \times 60^2 - 2400 \times 60 + 80000} = \sqrt{8000} \approx 90\,\mathrm{m}$.

Exercice A.27 (Cônes de glace)
On veut insérer entièrement une sphère de glace dans un cône de biscuit de sorte à ce que le cône soit le plus remplis possible. Ceci revient à minimiser le rapport entre le volume du cône et le volume de la sphère.



- Exprimer la hauteur h et le rayon R du cône en fonction de $r > 0$ le rayon de la sphère et de $\vartheta \in]0; \frac{\pi}{2}[$ l'angle du cône.
- Trouver la valeur de ϑ qui minimise le rapport $\frac{\text{Volume du cône}}{\text{Volume de la sphère}}$.
- Calculer la hauteur h et le rayon R optimales du cône en fonction du rayon de la sphère r.

Correction

- On a deux triangles rectangles : le triangle ABC rectangle en A et le triangle OBD rectangle en D, par conséquent

$$\tan(\vartheta) = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{R}{h}, \qquad \sin(\vartheta) = \frac{\overline{OD}}{\overline{OB}} = \frac{r}{h-r}, \qquad \text{donc} \qquad R = h\tan(\vartheta), \qquad h = \left(\frac{1}{\sin(\vartheta)} + 1\right) r.$$

- Soit $f :]0; \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ la fonction ainsi définie :

$$f(\vartheta) = \frac{\text{Volume du cône}}{\text{Volume de la sphère}} = \frac{\frac{1}{3}\pi R^2 h}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{R^2 h}{4r^3} = \frac{(1+\sin(\vartheta))^3}{4\sin(\vartheta)\cos^2(\vartheta)}.$$

Pour minimiser f on cherche a annuler sa dérivée première :

$$f'(\vartheta) = \frac{\left[3\,(1+\sin(\vartheta))^2\cos(\vartheta)\right] \times \left[4\sin(\vartheta)\cos^2(\vartheta)\right] - \left[(1+\sin(\vartheta))^3\right] \times \left[4\left(\cos(\vartheta)\cos^2(\vartheta) - 2\sin^2(\vartheta)\cos(\vartheta)\right)\right]}{\left[4\sin(\vartheta)\cos^2(\vartheta)\right]^2}$$
$$= 4\frac{3\sin(\vartheta)\cos^3(\vartheta) - (1+\sin(\vartheta))\left(\cos^3(\vartheta) - 2\sin^2(\vartheta)\cos(\vartheta)\right)}{\left(4\sin(\vartheta)\cos^2(\vartheta)\right)^2}(1+\sin(\vartheta))^2$$

et $f'(\vartheta) = 0$ si et seulement si

$$3\sin(\vartheta)\cos^3(\vartheta) - (1+\sin(\vartheta))\left(\cos^2(\vartheta) - 2\sin^2(\vartheta)\right)\cos(\vartheta) = 0.$$

On peut diviser par $\cos(\vartheta)$ car $\vartheta \in]0;\frac{\pi}{2}[$, ce qui donne

$$3\sin(\vartheta)\cos^2(\vartheta) - (1+\sin(\vartheta))\left(\cos^2(\vartheta) - 2\sin^2(\vartheta)\right) = 0.$$

On utilise la relation $\cos^2(\vartheta) = 1 - \sin^2(\vartheta)$

$$3\sin(\vartheta)\left(1-\sin^2(\vartheta)\right) - (1+\sin(\vartheta))\left(1-3\sin^2(\vartheta)\right) = 0.$$

On remarque que $\left(1-\sin^2(\vartheta)\right) = (1-\sin(\vartheta))(1+\sin(\vartheta))$ et qu'on peut diviser par $(1+\sin(\vartheta))$ car $\vartheta \in]0;\frac{\pi}{2}[$, ce qui donne

$$3\sin(\vartheta)(1-\sin(\vartheta)) - \left(1-3\sin^2(\vartheta)\right) = 0.$$

On trouve ainsi que l'angle $\hat{\vartheta}$ qui annule la dérivée première est tel que

$$\sin(\hat{\vartheta}) = \frac{1}{3}$$

et l'on a $f(\hat{\vartheta}) = 2$, *i.e.* la sphère occupe la moitié du volume du cône.

- On trouve directement $h = \left(\frac{1}{\sin(\vartheta)} + 1\right) r = 4r$. De plus, sachant que pour $\vartheta \in]0;\frac{\pi}{2}[$ on a

$$\tan(\vartheta) = \frac{\sin(\vartheta)}{\sqrt{1-\sin^2(\vartheta)}},$$

on conclut que $\mathrm{R} = h\tan(\vartheta) = h\frac{1}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}r$.

A.2. Primitives et intégrales

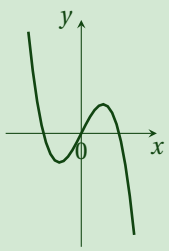
Si F est une primitive de f alors $\mathrm{F}' = f$.

Rappels		
$\mathrm{F}'' = f'$	$\mathrm{F}' = f$	F
	>0	$\nearrow$
	$=0$	f tangente horizontale
	<0	$\searrow$
>0	$\nearrow$	convexe
$=0$	$\longleftrightarrow$	
<0	$\searrow$	concave

Ainsi,

- si F est croissante (résp. décroissante), alors sa dérivée f est positive (résp. négative) ; si F a des extrema, alors sa dérivée f s'annule ;
- si F est convexe (résp. concave), alors sa dérivée seconde f' est positive (résp. négative), c'est-à-dire f est croissante (résp. décroissante) ; si F a un point d'inflexion, alors sa dérivée seconde f' s'annule, c'est-à-dire f a un extremum.

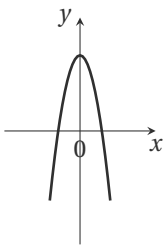
Exercice A.28
Soit f une fonction. Ci-dessous on a tracé le graphe d'une de ses primitives.



© 2024-2027 G. Faccanoni

Que peut-on dire sur le signe de f ? Et sur la croissance de f ?

Correction
Un graphe possible de f est donc



Exercice A.29 (Par intégration directe)
Calculer les primitives suivantes :

1. $\int 2x^3 - 3x + 1 \, dx$
2. $\int (1+2x^3)^2 \, dx$
3. $\int \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} \, dx$
4. $\int \frac{1}{x\sqrt[3]{x}} \, dx$
5. $\int \frac{1}{\sqrt{x+1}} \, dx$
6. $\int \sqrt[4]{(x-1)^3} \, dx$
7. $\int \frac{x}{x+1} \, dx$
8. $\int \frac{x^3+x+1}{x^2+1} \, dx$

Correction

1. $2\frac{x^4}{4} - 3\frac{x^2}{2} + x + c = \frac{1}{2}x(x^3 - 3x + 2) + c$
2. $\int 4x^6 + 4x^3 + 1 \, dx = \frac{4}{7}x^7 + x^4 + x + c$
3. $\int x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}} \, dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + c$
4. $\int x^{-\frac{4}{3}} \, dx = -\frac{3}{\sqrt[3]{x}} + c$
5. $\frac{(x+1)^{\frac{1}{2}}}{1/2} + c = 2\sqrt{x+1} + c$
6. $\frac{4}{7}(x-1)^{7/4} + c$
7. $\int \frac{x+1-1}{x+1} \, dx = \int 1 - \frac{1}{x+1} \, dx = x - \ln(x+1) + c$
8. $\int \frac{x(x^2+1)+1}{x^2+1} \, dx = \int x + \frac{1}{x^2+1} \, dx = \frac{x^2}{2} + \arctan(x) + c$

Exercice A.30
Calculer les primitives suivantes :

1. $\int \frac{1}{1+x} \, dx$
2. $\int \frac{1}{1-x} \, dx$
3. $\int \frac{1}{1+x^2} \, dx$
4. $\int \frac{1}{1-x^2} \, dx$
5. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$

Correction

1. $u(x) = 1 + x$, $u'(x) = 1$, $\int \frac{u'(x)}{u(x)} \, dx = \ln|1+x| + c$
2. $u(x) = 1 - x$, $u'(x) = -1$, $-\int \frac{u'(x)}{u(x)} \, dx = -\ln|1-x| + c$
3. $\arctan(x) + c$
4. $\frac{1}{1-x^2} = \frac{1/2}{1-x} + \frac{1/2}{1+x}$, $\frac{1}{2}\int \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} \, dx = \frac{1}{2}(\ln|1+x| - \ln|1-x|) + c = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + c = \ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) + c$
5. $\arcsin(x) + c = -\arccos(x) + c$

Exercice A.31 (Par transformations élémentaires ou changement de variable)
Calculer les primitives suivantes en utilisant

$$\int f(\underbrace{u(x)}_{=t})\underbrace{u'(x)}_{=\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}}\,\mathrm{d}x = \int f(t)\frac{\mathrm{d}t}{\cancel{\mathrm{d}x}}\cancel{\mathrm{d}x} = \int f(t)\,\mathrm{d}t$$

Remarque : si $u(x) = \mathrm{A}x + \mathrm{B}$ alors $u'(x) = \mathrm{A}$ constante et on pourra utiliser la propriété $\int f(\underbrace{u(x)}_{=t})\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\mathrm{A}}\int f(t)\mathrm{A}\,\mathrm{d}t$.

1. $\int \frac{e^x}{1+e^x}\,\mathrm{d}x$
2. $\int \frac{1}{1+e^x}\,\mathrm{d}x$
3. $\int \sqrt{2x+1}\,\mathrm{d}x$
4. $\int \frac{\ln^3(x)}{x}\,\mathrm{d}x$
5. $\int \frac{e^{-1/x}}{x^2}\,\mathrm{d}x$
6. $\int \frac{1}{x\ln^3(x)}\,\mathrm{d}x$
7. $\int \frac{1+\cos(x)}{x+\sin(x)}\,\mathrm{d}x$
8. $\int \frac{2x}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$
9. $\int \frac{\sin(2x)}{1+\sin^2(x)}\,\mathrm{d}x$
10. $\int \sin^3(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x$
11. $\int \frac{1}{\sin(x)\cos(x)}\,\mathrm{d}x$
12. $\int \frac{e^{\tan(x)}}{\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x$
13. $\int \frac{1-2x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$
14. $\int \frac{x+1}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x$
15. $\int x(x^2+1)^2\,\mathrm{d}x$
16. $\int e^{2x+1}\,\mathrm{d}x$
17. $\int x\sqrt{5+x^2}\,\mathrm{d}x$
18. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$
19. $\int xe^{x^2}\,\mathrm{d}x$
20. $\int x^2e^{x^3}\,\mathrm{d}x$
21. $\int \frac{\sin\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$
22. $\int \frac{x}{\sqrt[3]{x^2+3}}\,\mathrm{d}x$
23. $\int \frac{x^3}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$
24. $\int \sin(3x)\,\mathrm{d}x$
25. $\int \frac{e^{\tan(x)}}{\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x$

Correction

1. $u(x) = 1+e^x$, $u'(x) = e^x$, $\int \frac{u'(x)}{u(x)}\,\mathrm{d}x = \ln(1+e^x)+c$
2. $u(x) = 1+e^x$, $u'(x) = e^x$, $\int \frac{1+e^x-e^x}{1+e^x}\,\mathrm{d}x = \int 1\,\mathrm{d}x - \int \frac{u'(x)}{u(x)}\,\mathrm{d}x = x - \ln(1+e^x)+c$
3. $u(x) = 2x+1$, $u'(x) = 2$, $\frac{1}{2}\int \sqrt{u(x)}u'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int [u(x)]^{1/2}u'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{[u(x)]^{3/2}}{3} = \frac{\sqrt{(2x+1)^3}}{3}+c$
4. $u(x) = \ln(x)$, $u'(x) = 1/x$, $\int (u(x))^3u'(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{\ln^4(x)}{4}+c$
5. $u(x) = -1/x$, $u'(x) = 1/x^2$, $\int e^{u(x)}u'(x)\,\mathrm{d}x = e^{-1/x}+c$
6. $u(x) = \ln(x)$, $u'(x) = 1/x$, $\int \frac{u'(x)}{(u(x))^3}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2\ln^2(x)}+c$
7. $u(x) = x+\sin(x)$, $u'(x) = 1+\cos(x)$, $\int \frac{u'(x)}{u(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|x+\sin(x)|+c$
8. $u(x) = x^2$, $u'(x) = 2x$, $\int \frac{u'(x)}{1+(u(x))^2}\,\mathrm{d}x = \arctan(x^2)+c$
9. $u(x) = 1+\sin^2(x)$, $u'(x) = 2\sin(x)\cos(x) = \sin(2x)$, $\int \frac{u'(x)}{u(x)}\,\mathrm{d}x = \ln(1+\sin^2(x))+c$
10. $u(x) = \sin(x)$, $u'(x) = \cos(x)$, $\int (u(x))^3u'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\sin^4(x)}{4}+c$
11. $u(x) = \tan(x)$, $u'(x) = 1/\cos^2(x)$, $\int \frac{\cos(x)}{\sin(x)\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{u'(x)}{u(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|\tan(x)|+c$
12. $u(x) = \tan(x)$, $u'(x) = 1/\cos^2(x)$, $\int e^{u(x)}u'(x)\,\mathrm{d}x = e^{\tan(x)}+c$
13. $u(x) = 1-x^2$, $u'(x) = -2x$, $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x + \int (u(x))^{-1/2}u'(x)\,\mathrm{d}x = \arcsin(x)+2\sqrt{1-x^2}+c$
14. $u(x) = x^2+2x+1$, $u'(x) = 2x+2$, $\frac{1}{2}\int \frac{u'(x)}{u(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+1)+c$
15. $u(x) = x^2+1$, $u'(x) = 2x$, $\frac{1}{2}\int (u(x))^2u'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{(x^2+1)^3}{6}+c$
16. $u(x) = 2x+1$, $u'(x) = 2$, $\frac{1}{2}\int e^{u(x)}u'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}e^{u(x)}+c = \frac{e^{2x+1}}{2}+c$
17. $u(x) = 5+x^2$, $u'(x) = 2x$, $\frac{1}{2}\int (u(x))^{1/2}u'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}(5+x^2)^{3/2}+c$
18. $u(x) = \sqrt{x}$, $u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $2\int e^{u(x)}u'(x)\,\mathrm{d}x = 2e^{\sqrt{x}}+c$
19. $u(x) = x^2$, $u'(x) = 2x$, $\frac{1}{2}\int e^{u(x)}u'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{e^{x^2}}{2}+c$
20. $u(x) = x^3$, $u'(x) = 3x^2$, $\frac{1}{3}\int e^{u(x)}u'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{e^{x^3}}{3}+c$
21. $u(x) = \sqrt{x}$, $u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $\frac{1}{2}\int \sin(u(x))\,u'(x)\,\mathrm{d}x = -2\cos\sqrt{x}+c$
22. $u(x) = x^2+3$, $u'(x) = 2x$, $\frac{1}{2}\int (u(x))^{-1/3}u'(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{3}{4}\sqrt[3]{(x^2+3)^2}+c$

© 2024-2027 G. Faccanoni

23. $u(x)=1+x^4$, $u'(x)=4x^3$, $\frac{1}{4}\int \frac{u'(x)}{u(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{\ln(1+x^4)}{4}+c$
24. $u(x)=3x$, $u'(x)=3$, $\frac{1}{3}\int \sin(u(x))u'(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\cos(3x)+c$
25. Si on pose $t=\tan(x)$ alors $\mathrm{d}t = \frac{1}{\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x$ et on obtient $e^{\tan(x)}+c$ car $\frac{1}{\cos^1(x)} = 1+\tan^2(x) =$

Exercice A.32 (Par transformations élémentaires ou changement de variable)
Calculer les primitives suivantes en utilisant

$$\int f(\underbrace{u(x)}_{=t})\,\mathrm{d}x = \int f(t)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t.$$

Pour cela il faut tout d'abord calculer $x=u^{-1}(t)$ puis en calculer la dérivée. Plus généralement, si on a une relation du type $u(x)=h(t)$ alors $u'(x)\,\mathrm{d}x = h'(t)\,\mathrm{d}t$ ce qui permet de remplacer $\mathrm{d}x = \frac{h'(t)}{u'(x)}\,\mathrm{d}t$ avec $x=u^{-1}(h(t))$.

1. $\int \frac{\sin(\ln(x))}{x}\,\mathrm{d}x$
2. $\int \frac{1+e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$
3. $\int \frac{1}{x-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$
4. $\int \frac{1}{\sqrt{x(1+\sqrt{x})}}\,\mathrm{d}x$
5. $\int \frac{e^x}{1+e^x}\,\mathrm{d}x$
6. $\int \frac{1}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}x$
7. $\int \frac{1}{x\sqrt{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}}\,\mathrm{d}x$
8. $\int e^x\ln(1+e^x)\,\mathrm{d}x$
9. $\int \frac{1}{x(2+\ln^2(x))}\,\mathrm{d}x$
10. $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$
11. $\int \frac{x^5}{\sqrt{x^3-1}}\,\mathrm{d}x$
12. $\int \sqrt{e^x-1}\,\mathrm{d}x$
13. $\int \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x$
14. $\int \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,\mathrm{d}x$
15. $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$
16. $\int x\sqrt{a+x^2}\,\mathrm{d}x$
17. $\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2(x)}}\,\mathrm{d}x$
18. $\int \frac{e^{1/x}}{x^2}\,\mathrm{d}x$
19. $\int \frac{\cos(x)}{1+\sin(x)}\,\mathrm{d}x$
20. $\int \frac{1}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)\,\mathrm{d}x$
21. $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$
22. $\int \frac{1}{3+x^2}\,\mathrm{d}x$
23. $\int \frac{x}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$

Correction
Ici c'est plus difficile de reconnaître $u'(x)$ ainsi on inverse la relation $t=u(x)$ pour obtenir $x=u^{-1}(t)$ avant de calculer les dérivées et trouver la relation entre $\mathrm{d}t$ et $\mathrm{d}x$:

1. Pour $x>0$, si on pose $t=\ln(x)$ alors $\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$ et on obtient $-\cos(\ln(x))+c$
2. Pour $x>0$, si on pose $t=\sqrt{x}$ alors $\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$ et on obtient $2(\sqrt{x}+e^{\sqrt{x}})+c$
3. Pour $x>0$, si on pose $t=\sqrt{x}$ alors $\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$ et on obtient $2\ln(\sqrt{x}-1)+c$
4. Pour $x>0$, si $x>0$. Si on pose $t=\sqrt{x}$ alors $\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$ et on obtient $4\sqrt{1+\sqrt{x}}+c$
5. Si on pose $t=e^x$ alors $e^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$ et on obtient $\ln(1+e^x)+c$
6. Pour $x>0$, si on pose $t=\ln(x)$ alors $\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$ et on obtient $\ln|\ln(x)|+c$
7. Pour $x>0$, si on pose $t=\ln\left(\frac{1}{x}\right)=-\ln(x)$ alors $-\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$ et on obtient $-2\sqrt{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}+c$
8. Si on pose $t=1+e^x$ alors $e^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$ ainsi $\int e^x\ln(1+e^x)\,\mathrm{d}x = \int \ln(t)\,\mathrm{d}t$. Sans utiliser l'intégration par partie, si on pose $t=e^w$ alors $\mathrm{d}t = e^w\,\mathrm{d}w$ ainsi $\int \ln(t)\,\mathrm{d}t = \int we^w\,\mathrm{d}w = (w-1)e^w$ et on obtient $(1+e^x)\ln(1+e^x)-e^x+c$.
9. Pour $x>0$, si on pose $t=\ln(x)$ alors $\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$ et on obtient $\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\ln(x)}{\sqrt{2}}\right)+c$
10. Si on pose $t^2=1-x^2$ alors $-x\,\mathrm{d}x = t\,\mathrm{d}t$ et on obtient $-\frac{1}{3}(x^2+2)\sqrt{1-x^2}+c$
11. Si on pose $t^2=x^3-1$ alors $3x^2\,\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$ et on obtient $\frac{2}{9}(x^3+2)\sqrt{x^3-1}+c$
12. Si on pose $t^2=e^x-1$ alors $\mathrm{d}x = \frac{2t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$ et on obtient $2\left(\sqrt{e^x-1}-\arctan(\sqrt{e^x-1})\right)+c$
13. Pour $x>0$, si on pose $t=\ln(x)$ alors $\mathrm{d}x = e^t\,\mathrm{d}t$ et on obtient $\frac{1}{2}\ln^2(x)+c$
14. Si on pose $t=e^x$ alors $\mathrm{d}x = \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ et on obtient $\arctan e^x+c$
15. Si on pose $t=\sqrt{1+x^2}$ alors $2x\,\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$ et on obtient $\sqrt{1+x^2}+c$

16. Pour $a+x^2 \geq 0$, si on pose $t = \sqrt{a+x^2}$ alors $2x\,\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$ et on obtient $\frac{1}{3}\sqrt{(a+x^2)^3}+c$
17. Pour $x>0$, si on pose $t=\ln(x)$ alors $\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$ et on obtient $\arcsin(\ln(x))+c$
18. Si on pose $t=\frac{1}{x}$ alors $-\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$ et on obtient $-e^{1/x}+c$
19. Si on pose $t=1+\sin(x)$ alors $\cos(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$ et on obtient $\ln|1+\sin(x)|+c$
20. Si on pose $t=\frac{1}{x}$ alors $-\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$ et on obtient $-\sin\left(\frac{1}{x}\right)+c$
21. Si on pose $t^2 = 1+x^2$ alors $x\,\mathrm{d}x = t\,\mathrm{d}t$ et on obtient $\frac{1}{3}(x^2-2)\sqrt{x^2+1}+c$
22. $\int \frac{1}{3+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2}\,\mathrm{d}x$. Si on pose $t=x/\sqrt{3}$ alors $\mathrm{d}x = \sqrt{3}t\,\mathrm{d}t$ et on obtient $\frac{\sqrt{3}}{3}\arctan(x/\sqrt{3})+c$
23. Si on pose $t=x^2$ alors $2\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$ et on obtient $\frac{1}{2}\arctan(x^2)+c$

Exercice A.33
Calculer les primitives suivantes :

1. $\displaystyle\int \frac{\cos^2(x)}{1-\sin(x)}\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int \frac{\sin(x)+\cos(x)}{\sin(x)-\cos(x)}\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2(x)\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int \frac{1}{\cos(x)\sin(x)}\,\mathrm{d}x$
5. $\displaystyle\int \frac{1}{\sin(x)}\,\mathrm{d}x$
6. $\displaystyle\int \frac{1}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x$

Correction

1. $\cos^2(x) = 1-\sin^2(x) = (1-\sin(x))(1+\sin(x))$, $\int \frac{(1-\sin(x))(1+\sin(x))}{1-\sin(x)}\,\mathrm{d}x = x-\cos(x)+c$
2. $1 = \cos^2(x)+\sin^2(x)$, $u(x) = \sin(x)-\cos(x)$, $u'(x) = \sin(x)+\cos(x)$, $\int \frac{\sin(x)+\cos(x)}{\sin(x)-\cos(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{u'(x)}{u(x)}\,\mathrm{d}x = \ln(\sin(x)-\cos(x))+c$
3. $1 = \cos^2(x)+\sin^2(x)$, $\int \frac{\sin^2(x)+\cos^2(x)}{\sin^2(x)\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{\sin^2(x)}\,\mathrm{d}x = \tan(x) - \dfrac{1}{\tan(x)}+c$
4. $1 = \cos^2(x)+\sin^2(x)$, $\int \frac{1}{\cos(x)\sin(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos(x)\sin(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} + \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\,\mathrm{d}x = -\ln|\cos(x)|+\ln|\sin(x)|+c$
5. $\sin(x) = 2\sin(x/2)\cos(x/2)$, $u(x) = x/2$, $u'(x) = 1/2$, $\int \frac{1}{\sin(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\cos(u(x))\sin(u(x))}u'(x)\,\mathrm{d}x = -\ln|\cos(x/2)| + \ln|\sin(x/2)|+c = \ln|\tan(x/2)|+c$.
6. $\cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$, $u(x) = \frac{\pi}{2}-x$, $u'(x) = -1$, $\int \frac{1}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{1}{\sin\left(u(x)\right)}u'(x)\,\mathrm{d}x = \ln|\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2})|-\ln|\sin(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2})|+c = \ln(\sin(x)-\cos(x))+c$

Exercice A.34 (Intégration par parties)
Calculer les primitives suivantes en utilisant $\int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x$:

1. $\displaystyle\int \frac{\ln(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int \ln(1+x)\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int x^2e^x\,\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$
5. $\displaystyle\int x\sin(x)\,\mathrm{d}x$
6. $\displaystyle\int x^2\cos(x)\,\mathrm{d}x$
7. $\displaystyle\int x\ln(x)\,\mathrm{d}x$
8. $\displaystyle\int \frac{\sin(x)}{\cos^3(x)}e^{\tan(x)}\,\mathrm{d}x$
9. $\displaystyle\int x^3\ln(x)\,\mathrm{d}x$
10. $\displaystyle\int \frac{\ln(x)}{\sqrt[4]{x}}\,\mathrm{d}x$
11. $\displaystyle\int \ln^2(x)\,\mathrm{d}x$
12. $\displaystyle\int x^3\sin(x^2)\,\mathrm{d}x$

Correction

1. On pose $f(x) = \ln(x)$ et $g'(x) = \frac{1}{x^2}$. Alors $f'(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = -\frac{1}{x}$. On obtient $f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1+\ln(x)}{x}+c$
2. On pose $f(x) = \ln(1+x)$ et $g'(x) = 1$. Alors $f'(x) = \frac{1}{1+x}$ et $g(x) = x$. On obtient $f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = (1+x)\ln(1+x) - x + c$
3. On pose $f(x) = x^2$ et $g'(x) = e^x$. Alors $f'(x) = 2x$ et $g(x) = e^x$. On obtient $f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = x^2e^x - 2\int xe^x\,\mathrm{d}x$. On intègre encore par partie et on obtient$= e^x((x-2)x+2)+c$
4. On pose $f(x) = \ln(x)$ et $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Alors $f'(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = 2\sqrt{x}$. On obtient $f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{x}(\ln(x)-2)+c$
5. On pose $f(x) = x$ et $g'(x) = \sin(x)$. Alors $f'(x) = 1$ et $g(x) = -\cos(x)$. On obtient $f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = -x\cos(x)+\sin(x)+c$

© 2024-2027 G. Faccanoni

6. On pose $f(x) = x^2$ et $g'(x) = \cos(x)$. Alors $f'(x) = 2x$ et $g(x) = \sin(x)$. On obtient $f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = x^2\sin(x) - 2[-x\cos(x) + \sin(x)] + c$
7. On pose $f(x) = \ln(x)$ et $g'(x) = x$. Alors $f'(x) = 1/x$ et $g(x) = x^2/2$. On obtient $f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2\ln(x) - \frac{1}{4}x^2 + c$
8. On pose $f(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ et $g'(x) = \frac{e^{\tan(x)}}{\cos^2(x)}$. Alors $f'(x) = \frac{1}{cos^2(x)}$ et $g(x) = e^{\tan(x)}$. On obtient $f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = e^{\tan(x)}(\tan(x) - 1) + c$
9. On pose $f(x) = \ln(x)$ et $g'(x) = x^3$. Alors $f'(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = \frac{x^4}{4}$. On obtient $f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{16}x^4(4\ln(x) - 1) + c$
10. On pose $f(x) = \ln(x)$ et $g'(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x}}$. Alors $f'(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = \frac{4x^{3/4}}{3}$. On obtient $f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \frac{4}{3}x^{3/4}\left(\ln(x) - \frac{4}{3}\right) + c$
11. On pose $f(x) = \ln(x)$ et $g'(x) = \ln(x)$. Alors $f'(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = x\ln(x) - x$. On obtient $f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = x(\ln^2(x) - 2\ln(x) + 2) + c$
12. On pose d'abord $t = x^2$ ainsi $\mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x$. Alors $\int x^3\sin(x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int x^2\sin(x^2)2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int t\sin(t)\,\mathrm{d}t$. On pose $f(t) = t$ et $g'(t) = \sin(t)$. Alors $f'(t) = 1$ et $g(t) = -\cos(t)$. On obtient $f(t)g(t) - \int f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{-t\cos(t) + \sin(t)}{2} + c = \dfrac{-x^2\cos(x^2) + \sin(x^2)}{2} + c$

Exercice A.35
Calculer la primitive suivante en utilisant un changement de variable. Comparer ensuite au résultat obtenu en utilisant l'intégration par parties :

$$\int \frac{x\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

Correction
CV Si on pose $t = \arcsin(x)$ alors $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$ et $x = \sin(t)$ et on obtient

$$\int \frac{x\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int t\sin(t)\,\mathrm{d}t$$

On a calculé cette intégrale à l'exercice A.34(5.) :

$$\int t\sin(t)\,\mathrm{d}t = -t\cos(t) + \sin(t) + c = -\arcsin(x)\cos(\arcsin(x)) + x + c$$

IPP

$$\int \frac{x\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \quad \begin{array}{ccc} f(x) = \arcsin(x) & \Rightarrow & f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ g(x) = -\sqrt{1-x^2} & \Leftarrow & g'(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \end{array} = -\sqrt{1-x^2}\cdot\arcsin(x) + x + c$$

Les deux calculs donnent le même résultat car $\cos(\arcsin(x)) = \pm\sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))} = \pm\sqrt{1-x^2}$

Exercice A.36 (cf. P. Halmos)
Si $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions dérivables quelconques, on sait que *la dérivée du produit n'est pas le produit des dérivées*, autrement dit $(fg)' \neq f'g'$. Cependant, il existe des fonctions f et g pour lesquelles on a bien $(fg)' = f'g'$, par exemple si f et g sont toutes deux égales à une constante (pas nécessairement la même). Pouvez-vous en trouver d'autres ?

Correction
- Si $f(x) = k_1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $g(x) = k_2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors $(fg)'(x) = (k_1k_2)' = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $f'(x)g'(x) = 0 \times 0 = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- Si $g = f$, on cherche f telle que $(f^2)' = (f')^2$, c'est-à-dire $2f(x)f'(x) = (f'(x))^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc, soit $f'(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et on trouve à nouveau $f(x) = g(x) = k$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, soit $2f(x) = f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et on trouve $f(x) = g(x) = ke^{2x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

- Dire que $(fg)' = f'g'$ revient à dire que $f'g + fg' = f'g'$. En divisant par le produit fg (il est inutile à ce stade de se préoccuper de la possibilité de diviser par 0, nous cherchons seulement formellement des conditions nécessaires) on a
$$\frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot \frac{g'(x)}{g(x)}$$
c'est-à-dire $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\frac{g'(x)}{g(x)}}{1-\frac{g'(x)}{g(x)}}$, soit encore
$$[\ln(f(x))]' = \frac{g'(x)}{g'(x) - g(x)}.$$
Si on choisit g, il suffit de poser $f = e^{\mathrm{G}}$ où G est une primitive de $\frac{g'(x)}{g'(x)-g(x)}$.
Voyons quelques exemples :
  - si on pose $g(x) = x$ alors $\mathrm{G}(x) = \int \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x = -\ln(1-x)$ et $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Vérifions si on a bien $(fg)' = f'g'$:
$$(fg)'(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$
$$f'(x)g'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$$
  - si on pose $g(x) = x^a$ alors $\mathrm{G}(x) = \int \frac{ax^{a-1}}{ax^{a-1}-x^a}\,\mathrm{d}x = \int \frac{ax^{a-1}}{ax^{a-1}-x^a}\,\mathrm{d}x = -a\ln(a-x)$ et $f(x) = \frac{1}{(a-x)^a}$. Vérifions si on a bien $(fg)' = f'g'$:
$$(fg)'(x) = \left(\frac{x^a}{(a-x)^a}\right)' = a^2 x^{a-1}(a-x)^{-a-1}$$
$$f'(x)g'(x) = a(a-x)^{-a-1} \cdot ax^{a-1} = a^2 x^{a-1}(a-x)^{-a-1}$$
  - si on pose $g(x) = e^{ax}$ alors $\mathrm{G}(x) = \int \frac{ae^{ax}}{ae^{ax}-e^{ax}}\,\mathrm{d}x = \frac{a}{a-1}x$ et $f(x) = e^{bx}$ où $b = a/(a-1)$. Vérifions si on a bien $(fg)' = f'g'$:
$$(fg)'(x) = (e^{bx}e^{ax})' = (e^{(a+b)x})' = (a+b)e^{(a+b)x}$$
$$f'(x)g'(x) = be^{bx}ae^{ax} = (ab)e^{(a+b)x} = (a+b)e^{(a+b)x}$$

Exercice A.37 (Formules de réduction)
Les formules de réduction dérivent de l'application répétée de la règle d'intégration par parties.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{R}^*$, montrer que
$$\int x^n e^{\alpha x}\,\mathrm{d}x = \left(x^n - \frac{n}{\alpha}x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{\alpha^2}x^{n-2} \cdots + (-1)^n \frac{n!}{\alpha^n}\right)\frac{e^{\alpha x}}{\alpha} + c$$
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que
$$\int \sin^n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{-\sin^{n-1}(x)\cos(x)}{n} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}(x)\,\mathrm{d}x,$$
$$\int \cos^n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\cos^{n-1}(x)\sin(x)}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}(x)\,\mathrm{d}x.$$
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que
$$\int x^n \sin(x)\,\mathrm{d}x = -x^n\cos(x) + nx^{n-1}\sin(x) - n(n-1)\int x^{n-2}\sin(x)\,\mathrm{d}x,$$
$$\int x^n \cos(x)\,\mathrm{d}x = x^n\sin(x) + nx^{n-1}\cos(x) - n(n-1)\int x^{n-2}\cos(x)\,\mathrm{d}x.$$

© 2024-2027 G. Faccanoni

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha \neq -1$ et $x > 0$. Montrer que

$$\int x^\alpha \ln^n(x)\,\mathrm{d}x = \left(\ln^n(x) - \frac{n}{\alpha+1}\ln^{n-1}(x) + \frac{n(n-1)}{(\alpha+1)^2}\ln^{n-2}(x)\cdots + (-1)^n\frac{n!}{(\alpha+1)^n}\right)\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c.$$

Correction

1. On pose $\mathrm{I}_n = \int x^n e^{\alpha x}\,\mathrm{d}x$. En intégrant par parties ($f(x) = x^n$ et $g'(x) = e^{\alpha x}$) on trouve

$$\mathrm{I}_n = x^n\frac{e^{\alpha x}}{\alpha} - \frac{n}{\alpha}\mathrm{I}_{n-1} = x^n\frac{e^{\alpha x}}{\alpha} - \frac{n}{\alpha}\left(x^{n-1}\frac{e^{\alpha x}}{\alpha} - \frac{n-1}{\alpha}\mathrm{I}_{n-2}\right) = \cdots = \left(x^n - \frac{n}{\alpha}x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{\alpha^2}x^{n-2}\cdots + (-1)^n\frac{n!}{\alpha^n}\right)\frac{e^{\alpha x}}{\alpha} + c$$

2. On pose $\mathrm{I}_n = \int \sin^n(x)\,\mathrm{d}x$. En intégrant par parties ($f(x) = \sin^{n-1}(x)$ et $g'(x) = \sin(x)$) on trouve

$$\mathrm{I}_n = -\sin^{n-1}(x)\cos(x) + (n-1)\mathrm{I}_{n-2} - (n-1)\mathrm{I}_n = \frac{-\sin^{n-1}(x)\cos(x)}{n} + \frac{n-1}{n}\mathrm{I}_{n-2}$$

De la même manière, on pose $\mathrm{I}_n = \int \cos^n(x)\,\mathrm{d}x$. En intégrant par parties ($f(x) = \cos^{n-1}(x)$ et $g'(x) = \cos(x)$) on trouve

$$\mathrm{I}_n = \frac{\cos^{n-1}(x)\sin(x)}{n} + \frac{n-1}{n}\mathrm{I}_{n-2}$$

3. On pose $\mathrm{I}_n = \int x^n\sin(x)\,\mathrm{d}x$ et $\mathrm{J}_n = \int x^n\cos(x)\,\mathrm{d}x$. En intégrant par parties ($f(x) = x^n$ et $g'(x) = \sin(x)$ dans la première intégrale et $f(x) = x^n$ et $g'(x) = \cos(x)$ dans la deuxième intégrale) on trouve

$$\mathrm{I}_n = -x^n\cos(x) + n\mathrm{J}_{n-1} \qquad \mathrm{J}_n = x^n\sin(x) - n\mathrm{I}_{n-1}$$

Par conséquence

$$\mathrm{I}_n = -x^n\cos(x) + n\left(x^{n-1}\sin(x) - (n-1)\mathrm{I}_{n-2}\right) = -x^n\cos(x) + nx^{n-1}\sin(x) - n(n-1)\mathrm{I}_{n-2}$$
$$\mathrm{J}_n = x^n\sin(x) - n\left(-x^{n-1}\cos(x) + (n-1)\mathrm{J}_{n-2}\right) = x^n\sin(x) + nx^{n-1}\cos(x) - n(n-1)\mathrm{J}_{n-2}$$

4. On pose $\mathrm{I}_n = \int x^\alpha\ln^n(x)\,\mathrm{d}x$. En intégrant par parties ($f(x) = \ln^n(x)$ et $g'(x) = x^\alpha$) on trouve

$$\mathrm{I}_n = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ln^n(x) - \frac{n}{\alpha+1}\mathrm{I}_{n-1} = \cdots = \left(\ln^n(x) - \frac{n}{\alpha+1}\ln^{n-1}(x) + \frac{n(n-1)}{(\alpha+1)^2}\ln^{n-2}(x)\cdots + (-1)^n\frac{n!}{(\alpha+1)^n}\right)\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c.$$

Exercice A.38 (Vitesse et accélération)
Soit $\mathrm{V} > 0$ une constante. Une voiture roule à une vitesse de $v(t) = \mathrm{V}t(1-t)$ km h^{-1} durant l'intervalle de temps $0 \leq t \leq 1$ h. Quelle a été sa vitesse maximale ? Que vaut l'accélération instantanée ? Quelle distance a-t-elle parcouru ?

Correction

- Vitesse maximale : $v(t) = \mathrm{V}t(1-t) = \mathrm{V}(t-t^2)$, $v'(t) = \mathrm{V}(1-2t)$, $v'(t) = 0$ ssi $t = \frac{1}{2}$ et $v\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\mathrm{V}}{4}$.
- Accélération instantanée : $a(t) = v'(t = \mathrm{V}(1-2t)$ donc $a > 0$ si $t < \frac{1}{2}$ et $a < 0$ si $t > \frac{1}{2}$
- Distance parcourue : $v(t) = x'(t)$ donc $x_{\text{parcourue}} = \displaystyle\int_0^1 v(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{V}}{6}$.

Exercice A.39
Calculer

$$\mathscr{A} = \int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x, \qquad \mathscr{B} = \int_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}}\frac{1}{1+3x^2}\,\mathrm{d}x, \qquad \mathscr{C} = \int_{-1}^{1}\frac{2x-5}{x^2-5x+6}\,\mathrm{d}x.$$

Correction

$$\mathscr{A} = [\arctan(x)]_{-1}^{1} = \arctan(1) - \arctan(-1) = \frac{\pi}{4} - \frac{-\pi}{4} = \frac{\pi}{2},$$
$$\mathscr{B} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathscr{A}}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}},$$
$$\mathscr{C} = \int_{-1}^{1}\frac{2x-5}{x^2-5x+6}\,\mathrm{d}x = \left[\ln|x^2-5x+6|\right]_{-1}^{1} = \ln(2) - \ln(12) = \ln(2) - \ln(3) - 2\ln(2) = -\ln(2) - \ln(3).$$

Exercice A.40 (Calcul de l'aire)
Calculer l'aire comprise entre le graphe de la fonction $f(x)$ et le graphe de la fonction $g(x)$:

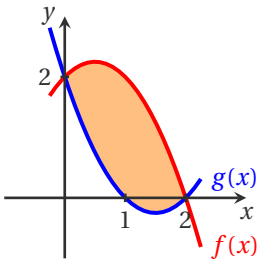
a) $f(x) = -x^2 + x + 2$ et $g(x) = x^2 - 3x + 2$ b) $f(x) = \frac{x^3}{4}$ et $g(x) = x^2 - x$

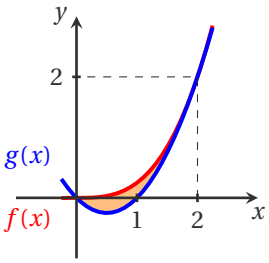
Correction

a) Comme $f(x) = g(x)$ ssi $x \in \{0,2\}$ et $f(x) \geq g(x)$ pour $x \in [0,2]$, l'aire comprise entre le graphe de la fonction $f(x)$ et le graphe de la fonction $g(x)$ est $\displaystyle\int_0^2 (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x = \int_0^2 -2x^2 + 4x\,\mathrm{d}x = \left[-2\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = \frac{8}{3}$.

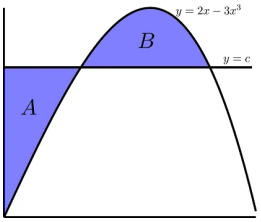
b) Comme $f(x) = g(x)$ ssi $x \in \{0,2\}$ et $f(x) \geq g(x)$ pour $x \in [0,2]$, l'aire comprise entre le graphe de la fonction $f(x)$ et le graphe de la fonction $g(x)$ est $\displaystyle\int_0^2 (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \frac{x^3}{4} - x^2 + x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^4}{16} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_0^2 = \frac{1}{3}$.

$f(x) = -x^2 + x + 2 = -(x+1)(x-2)$ et $g(x) = x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$ $f(x) = \frac{x^3}{4}$ et $g(x) = x^2 - x = x(x-1)$





Exercice A.41 (Putnam 1993)
La ligne horizontale $y = c$ coupe la courbe $y = 2x - 3x^3$ dans le premier quadrant comme sur la figure. Trouvez c de sorte que les aires des deux régions coloriées soient égales.



Correction

Les deux aires dépendent de l'endroit où la ligne $y = c$ coupe la courbe $y = 2x - 3x^3$. Notons ces points a et b avec $0 < a < b$. On a alors

$$\mathrm{A} = \int_0^a c\,\mathrm{d}x - \int_0^a 2x - 3x^3\,\mathrm{d}x, \qquad \mathrm{B} = \int_a^b 2x - 3x^3\,\mathrm{d}x - \int_a^b c\,\mathrm{d}x.$$

Si A = B alors

$$0 = \mathrm{B} - \mathrm{A} = \int_a^b 2x - 3x^3\,\mathrm{d}x - \int_a^b c\,\mathrm{d}x - \int_0^a c\,\mathrm{d}x + \int_0^a 2x - 3x^3\,\mathrm{d}x = \int_0^b 2x - 3x^3 x^3\,\mathrm{d}x - \int_0^b c\,\mathrm{d}x$$
$$= [cx]_0^b - \left[x^2 - \frac{3}{4}x^4\right]_0^b = bc - b^2 + \frac{3}{4}b^4 = b\left(c - b + \frac{3}{4}b^3\right).$$

Cela signifie que la solution du problème ne dépend pas de a.

Comme $2b - 3b^3 = c$ (le point (b,c) appartient à la parabole), on doit alors résoudre

$$0 = 2b - 3b^3 - b + \frac{3}{4}b^3 = b - \frac{9}{4}b^3 = b\left(1 - \frac{9}{4}b^2\right)$$

ainsi $b = \frac{2}{3}$ et $c = 2b - 3b^3 = \frac{4}{9}$.

© 2024-2027 G. Faccanoni

Exercice A.42 (Calcul de l'aire)
Calculer l'aire de A et de B ainsi définis :

$$\mathrm{A} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \le x \le 2\pi, \frac{1}{8} \le y \le \cos^3(x) \right\}, \qquad \mathrm{B} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -\pi \le x \le \pi, \frac{1}{8} \le y \le \cos^3(x) \right\}.$$

Correction
Remarquons d'abord que

$$\begin{aligned}\int \cos^3(x)\,\mathrm{d}x &\overset{\cos^2(x)=1-\sin^2(x)}{=} \int (1-\sin^2(x))\cos(x)\,\mathrm{d}x = \\ &= \int \cos(x) - \cos(x)\sin^2(x)\,\mathrm{d}x = \sin(x) - \int \cos x\,\sin^2(x)\,\mathrm{d}x \overset{\substack{t=\sin(x)\\ \mathrm{d}t=\cos(x)\,\mathrm{d}x}}{=} \\ &= \sin(x) - \int t^2\,\mathrm{d}t = \sin(x) - \frac{t^3}{3} + k = \sin(x) - \frac{\sin^3(x)}{3} + k\,, \quad k \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

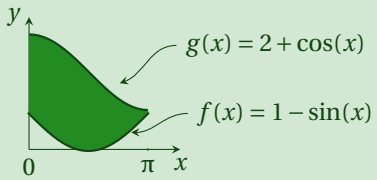
Comme $\cos^3(x) = \frac{1}{8}$ ssi $x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = \frac{5\pi}{3}$ alors

$$\text{Aire (A)} = 2\left(\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^3(x)\,\mathrm{d}x - \frac{\frac{\pi}{3}-0}{8} \right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{24} \right) = \frac{9\sqrt{3}-\pi}{12}$$

et

$$\text{Aire (B)} = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^3(x)\,\mathrm{d}x - 2\cdot\frac{\frac{\pi}{3}-0}{8} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{24} \right) = \frac{9\sqrt{3}-\pi}{12}.$$

Exercice A.43
Que vaut l'aire coloriée comprise entre les deux courbes ?



Correction
$\int_0^{\pi} 2+\cos(x)-1+\sin(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} 1+\cos(x)+\sin(x)\,\mathrm{d}x = [x+\sin(x)-\cos(x)]_0^{\pi} = (\pi+0-(-1))-(0+0-1) = \pi+2.$

Exercice A.44
La valeur moyenne de la fonction $f(x) = x^3$ sur l'intervalle $[0;k]$ est 9. Calculer k.

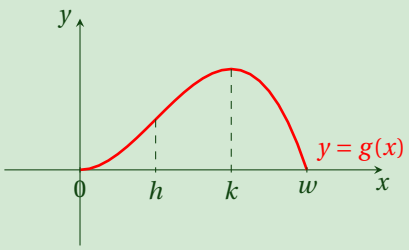
Correction
valeur moyenne de $f \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{k}\int_0^k x^3\,\mathrm{d}x = 9 \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{k}\frac{k^4}{4} = 9 \quad \Longrightarrow \quad k = \sqrt[3]{36}.$

Exercice A.45

Dans la figure ci-contre on a tracé le graphe de la fonction $g\colon [0;w] \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

avec $f\colon [0;w] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et dérivable. Le graphe de g a tangente horizontale en $x = 0$ et présente un changement de concavité en $x = h$ et un maximum en $x = k$.



1. Calculer $f(0)$ et $f(k)$.
2. Tracer un graphe plausible de f et montrer qu'elle admet un maximum.
3. Dorénavant on suppose que g est une fonction polynomiale de degré 3.
   3.1. Montrer que $h = w/3$ et $k = 2h$.
   3.2. Pour $w = 3$ et $g(1) = 2/3$ trouver l'expression de g.

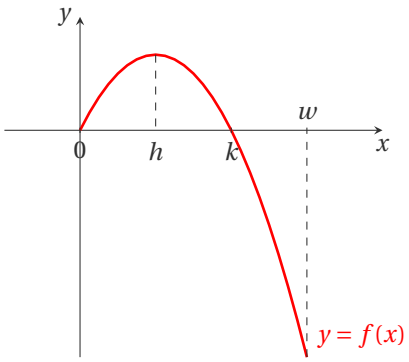
Correction

1. $g'(x) = f(x)$ pour tout $x \in [0;w]$. Puisque $x = 0$ et $x = k$ sont des points à tangente horizontale pour le graphe de g, alors $g'(0) = g'(k) = 0$ donc $f(0) = f(k) = 0$.
2. f est continue par hypothèse. D'après le théorème de WEIERSTRASS elle admet un maximum et un minimum sur $[0;w]$.

   On a vu au point précédent que $f(0) = f(k) = 0$ et que $g'(x) = f(x)$ pour tout $x \in [0;w]$. g est croissante ($g'(x) > 0$) sur $[0;k]$ et décroissante ($g'(x) < 0$) sur $[k;w]$, donc f est positive sur $[0;h]$ et négative sur $[h;w]$.

   De plus, $g''(x) = f'(x)$ pour tout $x \in [0;w]$. g est convexe ($g''(x) > 0$) sur $[0;h]$ et concave ($g''(x) < 0$) sur $[h;w]$, donc f est croissante sur $[0;h]$ et décroissante sur $[h;w]$. $x = h$ est un maximum absolu pour f et $x = w$ un minimum absolu.

   Un graphe plausible de f est donc le suivant :



3. g est une fonction polynomiale de degré 3, $x = w$ est un zéro simple et $x = 0$ est un zéro double (car $g'(0) = 0$), donc $g(x) = a(x-w)(x-0)^2 = ax^2(x-w)$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ un paramètre.

   3.1. On a $f(x) = g'(x) = ax(3x-2w)$: il s'agit d'une parabole. Comme $f(0) = f(k) = 0$ alors $k = 2w/3$. De plus, le sommet de la parabole se trouve en $x = k/2$ et $f'(k/2) = 0$. Comme $x = h$ est le maximum de f, alors $h = k/2 = w/3$.

   3.2. Si $w = 3$ alors $g(x) = ax^2(x-3)$ et la condition $g(1) = 2/3$ implique $a = -1/3$. On obtient ainsi $g(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2$.

Exercice A.46 (Probabilité géométrique)

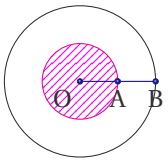
1. On sélectionne un point au hasard sur une cible *circulaire*. Quelle est la probabilité que le point choisi soit plus prêt du centre que de la circonférence de la cible ?
2. On sélectionne un point au hasard sur une cible *carrée*. Quelle est la probabilité que le point sélectionné soit

© 2024-2027 G. FACCANONI

plus prêt du centre du carré que d'un de ses côtés ?
Source : http://www.thedudeminds.net

Correction

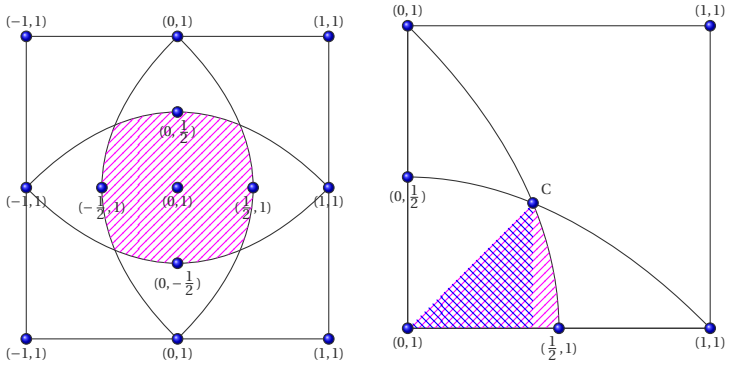
1. Il semble assez évident de délimiter correctement de manière intuitive les zones par deux disques concentriques.



Attention néanmoins à ne pas répondre que la probabilité de choisir un point dans la zone hachurée est 1/2 (parce que le rayon du disque hachuré correspond à la moitié du rayon du grand disque). Or, si le petit disque possède un rayon de r et le grand $2r$, on a

$$\mathrm{P} = \frac{\text{Aire du petit disque hachuré}}{\text{Aire du grand disque}} = \frac{\pi r^2}{\pi(2r)^2} = \frac{1}{4}.$$

2. L'ensemble de points équidistants d'un point et d'une droite est une parabole. La région à considérer est donc délimitée par quatre paraboles qui ont pour foyer le centre du carré et comme droites directrices les droites qui supportent les côtés du carré. On s'affaire donc à trouver l'aire de cette région hachurée. On place d'abord le tout dans un repère cartésien. Les sommets du carré sont $(1,1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$ et $(1,-1)$ (cf. figure à gauche). En vertu des symétries de la figure, il nous est possible de nous concentrer seulement sur la partie située dans le premier quadrant. Qui plus est, il est possible de ne s'attarder qu'à la moitié de cette dernière région (cf. figure à droite).



Ce «croissant de parabole» correspond à la moitié de la région à considérer dans le premier quadrant. On note au passage que l'aire du carré dans ce premier quadrant est 1. Le «croissant» est à son tour divisé en deux parties : la zone de forme triangulaire $\mathscr{T}$ et la zone $\mathscr{A}$. On cherche l'aire de ces zones. Pour y arriver, on aura besoin des coordonnées de C. L'équation de la parabole qui nous intéresse est $y^2 = 1-2x$. On ne s'intéressera qu'à la branche située au dessus de l'axe des abscisses. Ainsi $y = \sqrt{1-2x}$. On cherche ensuite les coordonnées de C, le point d'intersection entre la courbe d'équation $y = \sqrt{1-2x}$ et la droite d'équation $y = x$ et on obtient $x = -1+\sqrt{2}$. Il nous est donc déjà possible de trouver l'aire du triangle, que l'on a identifié comme $\mathscr{T} = \frac{3-2\sqrt{2}}{2}$. Il reste à trouver l'aire de la région sous la courbe :

$$\mathscr{A} = \int_{-1+\sqrt{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-2x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int_{3-2\sqrt{2}}^{0} \sqrt{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\sqrt{\left(3-2\sqrt{2}\right)^3} = \frac{(-1+\sqrt{2})^3}{3}.$$

L'aire totale est donc

$$\mathscr{T} + \mathscr{A} = \frac{-5+4\sqrt{2}}{6}.$$

Comme le carré du premier quadrant à une aire de 1, il ne reste qu'à doubler ce résultat afin d'obtenir la probabilité recherchée

$$\mathrm{P} = \frac{-5+4\sqrt{2}}{3}$$

ce qui correspond à un peu moins de 22%.

ANNEXE B

Exercices sur la Méthode de Gauss

Dans ce chapitre

B.1 Systèmes carrés 287
B.2 Systèmes avec plus d'équations qu'inconnues 292
B.3 Systèmes avec plus d'inconnues que d'équations 293

B.1. Systèmes carrés

Exercice B.1
Résoudre les systèmes linéaires suivantes par la méthode de GAUSS

(1) $\begin{cases} 4x-3y=84 \\ 5x+7y=19 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=2, \\ x_1-2x_2-3x_3=-6, \\ x_1+4x_2+4x_3=3. \end{cases}$ (3) $\begin{cases} -x_1+x_2+3x_3=12, \\ 2x_1-x_2+2x_3=-8, \\ 4x_1+x_2-4x_3=15. \end{cases}$ (4) $\begin{cases} -2u-4v+3w=-1 \\ 2v-w=1 \\ u+v-3w=-6 \end{cases}$

(5) $\begin{cases} 2v-w=1 \\ -2u-4v+3w=-1 \\ u+v-3w=-6 \end{cases}$ (6) $\begin{cases} u+v-3w=-6 \\ 2v-w=1 \\ -2u-4v+3w=-1 \end{cases}$ (7) $\begin{cases} -2x+y+z=0 \\ x-2y+z=0 \\ x+y-2z=0 \end{cases}$ (8) $\begin{cases} -2x-y+4t=2 \\ 2x+3y+3z+2t=14 \\ x+2y+z+t=7 \\ -x-z+t=-1 \end{cases}$

Correction
Système (1)

$$\begin{cases} 4x-3y=84 \\ 5x+7y=19 \end{cases} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2-\frac{5}{4}L_1} \begin{cases} 4x-3y=84 \\ \frac{43}{4}y=-86 \end{cases}$$

donc $y=-8$ et $x=15$.

Système (2)

$$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=2, \\ x_1-2x_2-3x_3=-6, \\ x_1+4x_2+4x_3=3. \end{cases} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3-L_1]{L_2 \leftarrow L_2-L_1} \begin{cases} x_1+2x_2-x_3=2, \\ -4x_2-2x_3=-8, \\ 2x_2+5x_3=1. \end{cases} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3+L_2/2} \begin{cases} x_1+2x_2-x_3=2, \\ -4x_2-2x_3=-8, \\ 4x_3=-3. \end{cases}$$

donc $x_3=-\frac{3}{4}$, $x_2=\frac{19}{8}$ et $x_1=-\frac{7}{2}$.

Système (3)

$$\begin{cases} -x_1+x_2+3x_3=12 \\ 2x_1-x_2+2x_3=-8 \\ 4x_1+x_2-4x_3=15 \end{cases} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3+4L_1]{L_2 \leftarrow L_2+2L_1} \begin{cases} -x_1+x_2+3x_3=12 \\ x_2+8x_3=16 \\ 5x_2+8x_3=63 \end{cases} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3-5L_2} \begin{cases} -x_1+x_2+3x_3=12 \\ x_2+8x_3=16 \\ -32x_3=-17 \end{cases}$$

donc $x_3=\frac{17}{32}$, $x_2=\frac{47}{4}$ et $x_1=\frac{43}{32}$.

Système (4)

$$\begin{cases} -2u-4v+3w=-1 \\ 2v-w=1 \\ u+v-3w=-6 \end{cases} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3+L_1/2} \begin{cases} -2u-4v+3w=-1 \\ 2v-w=1 \\ -v-\frac{3}{2}w=-\frac{13}{2} \end{cases} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3+L_2/2} \begin{cases} -2u-4v+3w=-1 \\ 2v-w=1 \\ -2w=-6 \end{cases}$$

donc $w=3$, $v=2$ et $u=1$.

Système (5) Il n'est pas possible d'utiliser la méthode de Gauss directement, il faut d'abord échanger deux lignes (la solution d'un système linéaire ne dépend pas de l'ordre de ses équations). Si on échange la ligne 1 avec la ligne 2 on retrouve le système précédent.

Système (6) Il s'agit encore du même système, mais ce nouveau ordre des équations rend les calculs plus simples :

$$\begin{cases} u+v-3w=-6 \\ 2v-w=1 \\ -2u-4v+3w=-1 \end{cases} \xrightarrow{L_3\leftarrow L_3+2L_1} \begin{cases} u+v-3w=-6 \\ 2v-w=1 \\ -2v-3w=-13 \end{cases} \xrightarrow{L_3\leftarrow L_3+L_2} \begin{cases} u+v-3w=-6 \\ 2v-w=1 \\ -4w=-12 \end{cases}$$

donc $w=3$, $v=2$ et $u=1$.

Système (7)

$$\begin{cases} -2x+y+z=0 \\ x-2y+z=0 \\ x+y-2z=0 \end{cases} \xrightarrow[L_3\leftarrow L_3+\frac{L_1}{2}]{L_2\leftarrow L_2+\frac{L_1}{2}} \begin{cases} -2x+y+z=0 \\ -\frac{3}{2}y+\frac{3}{2}z=0 \\ \frac{3}{2}y-\frac{3}{2}z=0 \end{cases} \xrightarrow{L_3\leftarrow L_3+L_2} \begin{cases} -2x+y+z=0 \\ -\frac{3}{2}y+\frac{3}{2}z=0 \\ 0z=0 \end{cases}$$

donc $z=\kappa\in\mathbb{R}$, $y=z$ et $x=z$.

Système (8)

$$\begin{cases} -2x-y+4t=2 \\ 2x+3y+3z+2t=14 \\ x+2y+z+t=7 \\ -x-z+t=-1 \end{cases} \xrightarrow[L_4\leftarrow L_4-\frac{L_1}{2}]{L_2\leftarrow L_2+L_1 \\ L_3\leftarrow L_3+\frac{L_1}{2}} \begin{cases} -2x-y+4t=2 \\ 2y+3z+6t=16 \\ \frac{3}{2}y+z+3t=8 \\ \frac{1}{2}y-z-t=-2 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[L_4\leftarrow L_2-\frac{L_2}{4}]{L_3\leftarrow L_3-\frac{3}{4}L_2} \begin{cases} -2x-y+4t=2 \\ 2y+3z+6t=16 \\ -\frac{5}{4}z-\frac{3}{2}t=-4 \\ -\frac{7}{4}z-\frac{5}{2}t=-6 \end{cases} \xrightarrow{L_4\leftarrow L_4-\frac{7}{5}L_3} \begin{cases} -2x-y+4t=2 \\ 2y+3z+6t=16 \\ -\frac{5}{4}z-\frac{3}{2}t=-4 \\ -\frac{2}{5}t=-\frac{2}{5} \end{cases}$$

donc $t=1$, $z=2$, $y=2$ et $x=0$.

Exercice B.2
Trouver toutes les solutions des systèmes linéaires homogènes suivantes

$$(1)\ \begin{cases} -3x_1+x_2+2x_3=0, \\ -2x_1+2x_3=0, \\ -11x_1+6x_2+5x_3=0. \end{cases} \qquad (2)\ \begin{cases} x_1+x_2+3x_3+x_4=0, \\ x_1+3x_2+2x_3+4x_4=0, \\ 2x_1+x_3-x_4=0. \end{cases} \qquad (3)\ \begin{cases} 2x_1-x_2-3x_3=0, \\ -x_1+2x_3=0, \\ 2x_1-3x_2-x_3=0. \end{cases}$$

Correction
Système (1)

$$\begin{cases} -3x_1+x_2+2x_3=0, \\ -2x_1+2x_3=0, \\ -11x_1+6x_2+5x_3=0. \end{cases} \xrightarrow[L_3\leftarrow L_3-\frac{11}{3}L_1]{L_2\leftarrow L_2-\frac{2}{3}L_1} \begin{cases} -3x_1+x_2+2x_3=0, \\ -\frac{2}{3}x_2+\frac{2}{3}x_3=0, \\ \frac{7}{3}x_2-\frac{7}{3}x_3=0, \end{cases} \xrightarrow{L_3\leftarrow L_3+\frac{7}{2}L_2} \begin{cases} -3x_1+x_2+2x_3=0, \\ -\frac{2}{3}x_2+\frac{2}{3}x_3=0, \\ 0=0, \end{cases}$$

Le système admet une infinité de solutions de la forme (κ,κ,κ) avec $\kappa\in\mathbb{R}$.

Système (2)

$$\begin{cases} x_1+x_2+3x_3+x_4=0, \\ x_1+3x_2+2x_3+4x_4=0, \\ 2x_1+x_3-x_4=0. \end{cases} \xrightarrow[L_3\leftarrow L_3-2L_1]{L_2\leftarrow L_2-L_1} \begin{cases} x_1+x_2+3x_3=1, \\ 2x_2-x_3=3, \\ -2x_2-5x_3=-3, \end{cases} \xrightarrow{L_3\leftarrow L_3+L_2} \begin{cases} x_1+x_2+3x_3=1, \\ 2x_2-x_3=3, \\ -6x_3=0, \end{cases}$$

Le système admet une infinité de solutions de la forme $(\frac{1}{2}\kappa,-\frac{3}{2}\kappa,0,\kappa)$ avec $\kappa\in\mathbb{R}$.

© 2024-2027 G. Faccanoni

Système (3)

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0, \\ -x_1 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 0. \end{cases} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - L_1]{L_2 \leftarrow L_2 + \frac{L_1}{2}} \begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0, \\ -\frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 0, \\ -2x_2 + 2x_3 = 0, \end{cases} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2} \begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0, \\ -\frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 0, \\ 0 = 0, \end{cases}$$

Le système admet une infinité de solutions de la forme $(2\kappa, \kappa, \kappa)$, $\kappa \in \mathbb{R}$.

Exercice B.3 (V. GUIRARDEL)
Vous projetez de passer un concours de recrutement l'an prochain. Vous avez sous les yeux le tableau de notes suivant :

CANDIDAT	Mathématique	Anglais	Informatique	Moyenne
QUI	7	12	6	8
QUO	11	6	10	9
QUA	11	16	14	14

Retrouver les coefficients de chaque épreuve. La solution est-elle unique ?

Correction
Il s'agit de trouver les trois coefficients $m, a, i \in [0;1]$ tels que

$$\begin{cases} 7m + 12a + 6i = 8, \\ 11m + 6a + 10i = 9, \\ 11m + 16a + 14i = 14. \end{cases}$$

Utilisons la méthode de GAUSS :

$$\begin{cases} 7m+12a+6i=8, \\ 11m+6a+10i=9, \\ 11m+16a+14i=14, \end{cases} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - \frac{11}{7}L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{11}{7}L_1} \begin{cases} 7m+12a+6i=8, \\ -\frac{90}{7}a+\frac{4}{7}i=-\frac{25}{7}, \\ -\frac{20}{7}a+\frac{32}{7}i=\frac{10}{7}, \end{cases} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{2}{9}L_2} \begin{cases} 7m+12a+6i=8, \\ -\frac{90}{7}a+\frac{4}{7}i=-\frac{25}{7}, \\ \frac{40}{9}i=\frac{20}{9}, \end{cases}$$

qui admet l'unique solution $(0.2, 0.3, 0.5)$.

Exercice B.4
Équilibrer la réaction

$$Zn + H_2SO_4 + K_2Cr_2O_7 \rightarrow KCr(SO_4)_2 + ZnSO_4 + H_2O.$$

Correction
Écrivons les coefficients stœchiométriques et les contraintes :

$$x_1 Zn + x_2 H_2SO_4 + x_3 K_2Cr_2O_7 \rightarrow x_4 KCr(SO_4)_2 + x_5 ZnSO_4 + x_6 H_2O$$

1. Atomes de Zn : $x_1 = x_5$, *i.e.* $x_1 - x_5 = 0$
2. Atomes de H : $2x_2 = 2x_6$, *i.e.* $x_2 - x_6 = 0$
3. Atomes de S : $x_2 = 2x_4 + x_5$, *i.e.* $x_2 - 2x_4 - x_5 = 0$
4. Atomes de K : $2x_3 = x_4$, *i.e.* $2x_3 - x_4 = 0$
5. Atomes de Cr : $2x_3 = x_4$, *i.e.* $2x_3 - x_4 = 0$
6. Atomes de O : $4x_2 + 7x_3 = 8x_4 + 4x_5 + x_6$, *i.e.* $4x_2 + 7x_3 - 8x_4 - 4x_5 - x_6 = 0$

Notons que la contrainte $2x_3 - x_4 = 0$ est répétée deux fois, donc on ne l'écrira qu'une seule fois dans le système linéaire ; cela donne 5 équations pour 6 inconnues. Fixons arbitrairement un des coefficients, par exemple $x_6 = 1$; on obtient alors le système linéaire

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 7 & -8 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ce qui donne

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1&0&0&0&-1&0\\ 0&1&0&0&0&1\\ 0&1&0&-2&-1&0\\ 0&0&2&-1&0&0\\ 0&4&7&-8&-4&1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_5\leftarrow L_5-4L_2]{L_3\leftarrow L_3-L_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1&0&0&0&-1&0\\ 0&1&0&0&0&1\\ 0&0&0&-2&-1&-1\\ 0&0&2&-1&0&0\\ 0&0&7&-8&-4&-3 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3\leftrightarrow L_4} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1&0&0&0&-1&0\\ 0&1&0&0&0&1\\ 0&0&2&-1&0&0\\ 0&0&0&-2&-1&-1\\ 0&0&7&-8&-4&-3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_5\leftarrow L_5-\frac{7}{2}L_3} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1&0&0&0&-1&0\\ 0&1&0&0&0&1\\ 0&0&2&-1&0&0\\ 0&0&0&-2&-1&-1\\ 0&0&0&-\frac{9}{2}&-4&-3 \end{array}\right) \xrightarrow{L_5\leftarrow L_5-\frac{9}{4}L_4} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1&0&0&0&-1&0\\ 0&1&0&0&0&1\\ 0&0&2&-1&0&0\\ 0&0&0&-2&-1&-1\\ 0&0&0&0&-\frac{7}{4}&-\frac{3}{4} \end{array}\right)$$

dont la solution est bien

$$\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7}\\ 1\\ \frac{1}{7}\\ \frac{2}{7}\\ \frac{3}{7} \end{pmatrix}$$

Si on multiplie tous les coefficients par 7 on obtient

$$\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\\ 7\\ 1\\ 2\\ 3\\ 7 \end{pmatrix}$$

et donc la réaction équilibrée

$$3Zn + 7H_2SO_4 + K_2Cr_2O_7 \to 2KCr(SO_4)_2 + 3ZnSO_4 + 7H_2O.$$

Exercice B.5
Soit le système linéaire

$$(S) \quad \begin{cases} x - \alpha y = 1, \\ \alpha x - y = 1. \end{cases}$$

Déterminer les valeurs de α de telle sorte que ce système possède :
1. une infinité de solutions ;
2. aucune solution ;
3. une solution unique.

Correction

$$\left\{\begin{array}{rr} x-\alpha y=1 \\ \alpha x\ -y=1 \end{array}\right. \xrightarrow{L_2\leftarrow L_2-\alpha L_1} \left\{\begin{array}{rr} x & -\alpha y=1 \\ & (\alpha^2-1)\,y=-(\alpha-1) \end{array}\right.$$

Comme $-1+\alpha^2=(\alpha-1)(\alpha+1)$ on conclut que

1. si $\alpha=1$ (*i.e.* la dernière équation correspond à $0=0$) alors (S) possède une infinité de solutions,
2. si $\alpha=-1$ (*i.e.* la dernière équation correspond à $0=2$) alors (S) ne possède aucune solution,
3. si $\alpha\notin\{-1;1\}$ alors (S) possède une solution unique $x=\frac{1}{\alpha+1}$ et $y=-\frac{1}{\alpha+1}$.

© 2024-2027 G. Faccanoni

Exercice B.6
Soit le système linéaire

$$(S)\quad \begin{cases} x+y-z=1,\\ 2x+3y+\beta z=3,\\ x+\beta y+3z=-3. \end{cases}$$

Déterminer les valeurs de β de telle sorte que ce système possède :
1. une infinité de solutions ;
2. aucune solution ;
3. une solution unique.

Correction

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3=1\\ 2x_1+3x_2+\beta x_3=3\\ x_1+\beta x_2+3x_3=-3 \end{cases} \xrightarrow[L_3\leftarrow L_3-L_1]{L_2\leftarrow L_2-2L_1} \begin{cases} x_1+x_2-x_3=1\\ x_2+(\beta+2)x_3=1\\ (\beta-1)x_2+4x_3=-4 \end{cases} \xrightarrow{L_3\leftarrow L_3+(1-\beta)L_2} \begin{cases} x_1+x_2-x_3=1\\ x_2+(\beta+2)x_3=1\\ (6-\beta-\beta^2)x_3=-(3+\beta) \end{cases}$$

Comme $6-\beta-\beta^2=(2-\beta)(3+\beta)$ on conclut que
1. si $\beta=-3$ (*i.e.* la dernière équation correspond à $0z=0$) alors (S) possède une infinité de solutions,
2. si $\beta=2$ (*i.e.* la dernière équation correspond à $0z=-5$) alors (S) ne possède aucune solution,
3. si $\beta\notin\{2;-3\}$ alors (S) possède une solution unique.

Exercice B.7
En utilisant la méthode de Gauss, résoudre le système linéaire en discutant suivant la valeur du paramètre $a\in\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x+2y+3z=2,\\ x-y+2z=7,\\ 3x+az=10. \end{cases}$$

Correction

$$\begin{cases} x+2y+3z=2\\ x-y+2z=7\\ 3x+az=10 \end{cases} \xrightarrow[L_3\leftarrow L_3-3L_1]{L_2\leftarrow L_2-L_1} \begin{cases} x+2y+3z=2\\ -3y-z=5\\ -6y+(a-9)z=4 \end{cases} \xrightarrow{L_3\leftarrow L_3-2L_2} \begin{cases} x+2y+3z=2\\ -3y-z=5\\ (a-7)z=-6 \end{cases}$$

On a ainsi transformé le système linéaire initial dans le système linéaire triangulaire supérieur équivalent

$$\begin{cases} x+2y+3z=2,\\ -3y-z=5,\\ (a-7)z=-6. \end{cases}$$

Par conséquent,
- si $a\neq 7$, $z=\dfrac{-6}{a-7}$, $y=\dfrac{5+z}{-3}=\dfrac{5a-41}{-3(a-7)}$ et $x=2-2y-3z=\dfrac{2(8a-35)}{3(a-7)}$ est l'unique solution du système linéaire ;
- si $a=7$ il n'y a pas de solutions du système linéaire.

Exercice B.8
Soit α, β et γ des réels et considérons le système linéaire

$$\begin{cases} x+y=\alpha,\\ x+\beta y=\gamma, \end{cases}$$

d'inconnues x, y. En utilisant le pivot de Gauss, déterminer les valeurs de α, β et $\gamma\in\mathbb{R}$ de telle sorte que ce système possède :
a) une infinité de solutions ;

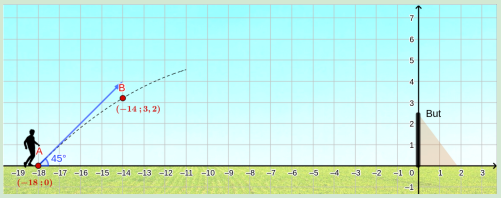
b) aucune solution ;
c) une solution unique.

Correction

$$\begin{cases} x + y = \alpha \\ x + \beta y = \gamma \end{cases} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - \alpha L_1} \begin{cases} x + y = \alpha \\ (\beta - 1) y = \gamma - \alpha \end{cases}$$

a) Si $\beta = 1$ et $\gamma = \alpha$ (*i.e.* la dernière équation correspond à $0y = 0$) alors (S) possède une infinité de solutions,
b) si $\beta = 1$ et $\gamma \neq \alpha$ (*i.e.* la dernière équation correspond à $0y = \gamma - \alpha$) alors (S) ne possède aucune solution,
c) si $\beta \neq 1$ alors, pour tout α et tout γ, (S) possède une solution unique $y = \frac{\gamma - \alpha}{\beta - 1}$ et $x = \alpha - y$.

Exercice B.9
Un joueur de foot, situé à 18m du but, effectue un tir en cloche. On modélise la situation dans un repère orthonormé (l'unité choisie est le mètre). On suppose que la trajectoire du ballon est parabolique et passe par les points $(-18;0)$ et $(-14;3.2)$, la tangente à la courbe en $x = -18$ forme un angle de 45° avec l'horizontale. On note p la fonction qui à l'abscisse x de la balle associe son ordonnée $p(x)$.



1. Écrire et résoudre le système matriciel qui permet de déterminer p.
2. À quelle hauteur maximale le ballon va-t-il s'élever ?
3. Sachant que le but a une hauteur de 2.44m, le tir est-il cadré ?

Correction
Source : https://www.python-lycee.com/activite-en-ligne-mathematiques

1. On cherche a, b, c tels que $p(x) = c + bx + ax^2$. On sait que $p(-18) = 0$, $p(-14) = \frac{32}{10}$ et $p'(-18) = 1$, d'où le système linéaire
$$\begin{pmatrix} 1 & -18 & (-18)^2 \\ 1 & -14 & (-14)^2 \\ 0 & 1 & -18 \times 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{32}{10} \\ 1 \end{pmatrix}$$
On utilise la méthode de Gauss (pour les calculs se rappeler que $14^2 - 18^2 = (14-18)(14+18) = -4 \times 32$) :
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -18 & 18^2 & 0 \\ 1 & -14 & 14^2 & \frac{32}{10} \\ 0 & 1 & -18 \times 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -18 & 18^2 & 0 \\ 0 & 4 & -4 \times 32 & \frac{32}{10} \\ 0 & 1 & -18 \times 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_2/4} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -18 & 18^2 & 0 \\ 0 & 4 & -4 \times 32 & \frac{32}{10} \\ 0 & 0 & -4 & \frac{1}{5} \end{array}\right)$$
donc
$$\begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{5} \\ -\frac{4}{5} \\ -\frac{1}{20} \end{pmatrix}$$
2. $p'(x) = 0$ ssi $x = -\frac{b}{2a} = -8$ et $p(-8) = 5$: le ballon s'élèvera jusqu'à 5m et cette hauteur sera atteinte en $x = -8$.
3. Le but est en $x = 0$ et l'on a $p(0) = \frac{9}{5} = 1.8 < 2.44$: le tir est cadré.

B.2. Systèmes avec plus d'équations qu'inconnues

© 2024-2027 G. Faccanoni

Exercice B.10
Résoudre les systèmes suivants d'inconnue $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$:

$$(S_1)\ \begin{cases} x+2y+z=-1,\\ 2x+y-z=1,\\ -x+y+2z=-2,\\ x+y+z=4, \end{cases}\qquad (S_2)\ \begin{cases} x+y+z=3,\\ x+2y+3z=6,\\ -x-y+2z=0,\\ 3x+2y-4z=1, \end{cases}\qquad (S_3)\ \begin{cases} x-2y+2z=0,\\ 2x+y-2z=0,\\ 3x+4y-6z=0,\\ 3x-11y+12z=0. \end{cases}$$

Correction
(S_1) étant un système de 4 équations à 3 inconnues, on considère (S') le sous-système carré d'ordre 3 qu'on peut résoudre par la méthode du pivot de Gauss

$$(S')\ \begin{cases} x+2y\ +z=-1,\\ 2x\ +y\ -z=1,\\ -x\ +y+2z=-2, \end{cases}\xrightarrow[L_3\leftarrow L_3+L_1]{L_2\leftarrow L_2-2L_1}\begin{cases} x+2y\ +z=-1,\\ -3y-3z=3,\\ 3y+3z=-3, \end{cases}\xrightarrow{L_3\leftarrow L_3+L_2}\begin{cases} x+2y\ +z=-1,\\ -3y-3z=3,\\ 0=0, \end{cases}$$

qui admet une infinité de solutions de la forme $(1+\kappa,-1-\kappa,\kappa)$ pour $\kappa\in\mathbb{R}$. Cherchons parmi ces solutions celles qui vérifient l'équation de (S_1) qui n'apparaît pas dans (S') : pour $(x,y,z)=(1+\kappa,-1-\kappa,\kappa)$ on a $x+y+z=1+\kappa-1-\kappa+\kappa=\kappa$ donc $x+y+z=4$ si et seulement si $\kappa=4$ ainsi (S_1) admet l'unique solution $(5,-5,4)$.

(S_2) étant un système de 4 équations à 3 inconnues, on considère (S') le sous-système carré d'ordre 3 qu'on peut résoudre par la méthode du pivot de Gauss

$$(S')\ \begin{cases} x\ +y\ +z=3,\\ x+2y+3z=6,\\ -x\ -y+2z=0, \end{cases}\xrightarrow[L_3\leftarrow L_3+L_1]{L_2\leftarrow L_2-L_1}\begin{cases} x+y\ +z=3,\\ y+2z=3,\\ 3z=3, \end{cases}$$

qui admet l'unique solution $(1,1,1)$. On étudie alors si elle est aussi solution de l'équation de (S_2) qui n'apparaît pas dans (S') : pour $(x,y,z)=(1,1,1)$ on a $3x+2y-4z=1$ donc le triplet $(1,1,1)$ est solution de (S_2) et c'est l'unique.

(S_3) étant un système de 4 équations à 3 inconnues, on considère le sous-système (S') carré d'ordre 3 suivant qu'on peut résoudre par la méthode du pivot de GAUSS

$$(S')\ \begin{cases} x-2y+2z=0,\\ 2x\ +y-2z=0,\\ 3x+4y-6z=0, \end{cases}\xrightarrow[L_3\leftarrow L_3-3L_1]{L_2\leftarrow L_2-2L_1}\begin{cases} x-2y\ +2z=0,\\ 5y\ -6z=0,\\ 10y-12z=0, \end{cases}\xrightarrow{L_3\leftarrow L_3-2L_2}\begin{cases} x-2y+2z=0,\\ 5y-6z=0,\\ 0=0, \end{cases}$$

qui admet une infinité de solutions de la forme $(2\kappa,6\kappa,5\kappa)$ pour $\kappa\in\mathbb{R}$. Cherchons parmi ces solutions celles qui vérifient l'équation de (S_3) qui n'apparaît pas dans (S') : pour $(x,y,z)=(2\kappa,6\kappa,5\kappa)$ on a $3x-11y+12z=6\kappa-66\kappa+60\kappa=0$ donc $3x-11y+12z=0$ pour tout $\kappa\in\mathbb{R}$ ainsi (S_3) admet une infinité de solutions de la forme $(2\kappa,6\kappa,5\kappa)$ pour $\kappa\in\mathbb{R}$.

B.3. Systèmes avec plus d'inconnues que d'équations

Exercice B.11
Résoudre le système suivant d'inconnue $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$

$$(S)\ \begin{cases} -2x+y+z=0,\\ x-2y+z=0, \end{cases}$$

Correction
(S) est équivalent au système

$$\begin{cases} -2x+y+z=0,\\ -3y+3z=0, \end{cases}$$

qui admet une infinité de solutions de la forme (κ,κ,κ) pour $\kappa\in\mathbb{R}$.

Exercice B.12
Soit le système linéaire

$$(S) \quad \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 6, \\ -3x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 12x_4 = b. \end{cases}$$

1. Pour quelle valeur de b le système est-il possible ?
2. Donner à b la valeur trouvée au point précédent et calculer la solution complète du système.

Correction
(S) est équivalent au système

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 6, \\ 0 = b + 18. \end{cases}$$

1. (S) est possible si et seulement si $b = -18$.
2. Si $b = -18$, (S) admet une infinité de solutions dépendant de trois paramètres. Elles sont de la forme $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (6 - a + 2b - 4c, a, b, c)$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.

© 2024-2027 G. Faccanoni