

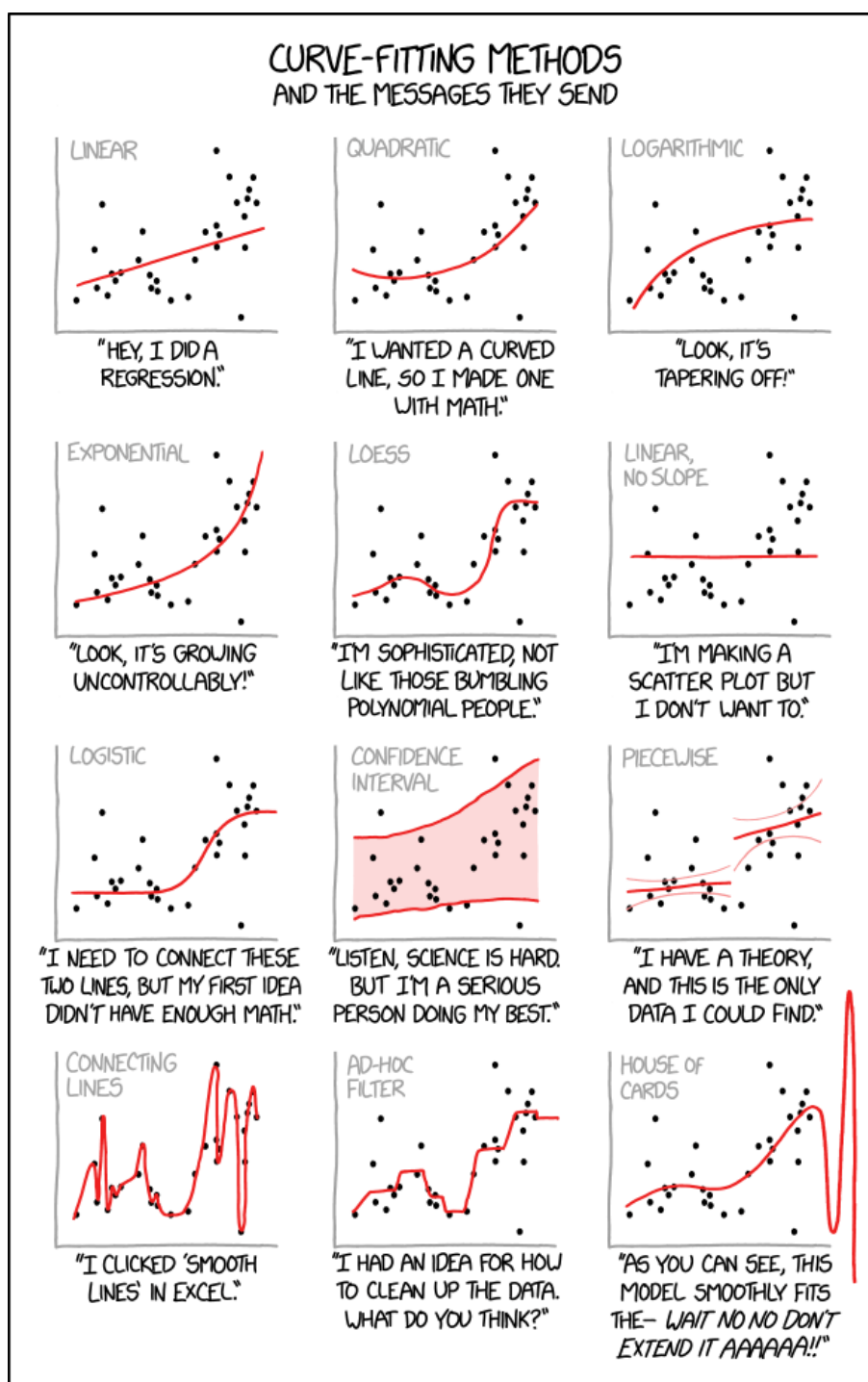
UE 731 – Remise à niveau Mathématiques

Recueil d'exercices corrigés et aide-mémoire

Gloria Faccanoni

<http://faccanoni.univ-tln.fr>

Dernière mise-à-jour : Mardi 30 septembre 2025



Gloria FACCANONI

IMATH Bâtiment M-117
Université de Toulon
Avenue de l'université
83957 LA GARDE - FRANCE

☎ 0033 (0)4 83 16 66 72

✉ gloria.faccanoni@univ-tln.fr

🌐 <http://faccanoni.univ-tln.fr>

Table des matières

Syllabus	5
I Contenu principal du cours	9
1. Calcul différentiel et intégrale dans $\mathbb{R}^2$	11
1.1 Introduction	11
1.2 Lignes ou courbes de niveau	12
1.3 Dérivées partielles du premier ordre et gradient	13
1.4 Dérivées partielles de deuxième ordre et matrice Hessienne	20
1.5 Optimisation (dans un ouvert et sans contraintes)	21
1.6 Optimisation approchée: principe de la méthode “descente de gradient”	25
1.7 Intégrales doubles	28
1.8  Fonctions prédéfinies en Python	34
1.9 Exercices	40
2. Interpolation	89
2.1 Interpolation polynomiale	89
2.2 Généralisation: l'interpolation dans un espace vectoriel quelconque	100
2.3 Exercices	105
3. Approximation au sens des moindres carrés	131
3.1 <i>Fitting</i> par une relation affine	131
3.2 <i>Fitting</i> polynomiale	137
3.3 <i>Fitting</i> dans un espace vectoriel quelconque	140
3.4 Résumé	143
3.5 Exercices	149
4. Initiation aux réseaux de neurones	159
4.1 Perceptron: fonction paramétrique	160
4.2 Réseau de neurones	169
4.3 Calcul des poids d'un réseau de neurones	177
4.4 Application ①: l'approximation au sens des moindres carrées par un réseau de neurones	180
4.5 Application ②: Physics-Informed Neural Network (PINN)	192
II Annexes	199
A. Exercices de calcul différentiel et intégral dans $\mathbb{R}$	201
A.1 Dérivées	201
A.2 Primitives et intégrales	214
B. Exercices sur la Méthode de Gauss	227
B.1 Systèmes carrés	227
B.2 Systèmes avec plus d'équations qu'inconnues	232
B.3 Systèmes avec plus d'inconnues que d'équations	233

Syllabus

L'UE 731 de la première année du Master Informatique se compose de deux volets : une remise à niveau en mathématiques et une remise à niveau en informatique.

Vous recevrez deux notes distinctes : une pour les mathématiques (CC_M) et une pour l'informatique (CC_I). La note finale est déterminée de manière à favoriser votre meilleur résultat, selon la formule suivante :

$$\text{Note finale} = \max \left\{ 0.4 \times CC_M + 0.6 \times CC_I; 0.6 \times CC_M + 0.4 \times CC_I \right\}.$$

Une page Moodle dédiée à l'UE (contenant ce polycopié ainsi que d'autres ressources) est accessible librement (*i.e.* même en accès anonyme) à l'adresse <https://moodle.univ-tln.fr/course/view.php?id=8899>.

Partie “Informatique”

La partie *remise à niveau en informatique* est coordonnée par Mme Valérie GILLOT. Elle fait intervenir plusieurs enseignants-chercheurs. L'organisation précise de cette partie, ainsi que les modalités de calcul de la note CC_I , vous seront présentées lors de sa première séance.

Partie “Mathématiques”

Contenu

La partie *remise à niveau en mathématiques* a pour objectif de consolider les acquis de licence tout en introduisant des méthodes mathématiques appliquées à des situations concrètes

Le contenu se décline en quatre grands thèmes.

1. **Optimisation sans contrainte.** Fonctions de plusieurs variables, courbes de niveau, dérivées partielles du premier et du second ordre, gradient, matrice hessienne, conditions d'optimalité dans un ouvert sans contraintes, intégrales doubles.
2. **Interpolation.** Interpolation polynomiale avec les bases canonique, de Lagrange et de Newton, puis interpolation dans un espace vectoriel plus général, avec une introduction à la base de Fourier.
3. **Approximation au sens des moindres carrés.** Ajustement de données (*fitting*) par des fonctions affines et polynomiales, avec généralisation à des sous-espaces vectoriels quelconques.
4. **Introduction aux réseaux de neurones.** Modélisation d'un neurone simple à poids fixés (avec interprétation géométrique), construction de réseaux multicouches à poids fixés (avec interprétation géométrique), calcul des poids par minimisation d'une fonction d'énergie (rétropropagation), mise en perspective avec les méthodes de *fitting* vues précédemment.

Nous utiliserons le langage Python pour vérifier certains calculs et illustrer des notions. Deux approches seront distinguées :

- les **calculs formels**, réalisés à l'aide du module `sympy`, permettant de manipuler des expressions exactes ;
- les **calculs numériques ou approchés**, réalisés à l'aide de modules comme `numpy`, `scipy` ou `pandas`.

Les deux séances de TP seront consacrées à l'utilisation ou même à l'implémentation de certains algorithmes mathématiques sous-jacents à ces bibliothèques, afin de mieux en comprendre les principes et les limites.

Polycopié

Tous les chapitres sont accompagnés d'un support pédagogique exposant les notions essentielles du cours et d'exercices corrigés afin de renforcer la compréhension et la mise en pratique. L'aide-mémoire propose une explication concise des concepts abordés en cours, mettant en avant les points clés pour structurer le travail personnel et faciliter la compréhension d'autres ouvrages. Il contient de nombreux exercices corrigés. Toutefois, il ne saurait remplacer les séances de cours ni la prise de notes. Il est conçu pour aider à se concentrer sur les explications orales. Enfin, notez que ce document peut contenir des erreurs que vous êtes encouragés à signaler.

Organisation

En ce qui concerne la partie “Mathématiques”, elle est organisée en 17 séances de 2h chacune. Voici le découpage des séances :

Date	Heure	Séance n°	Contenu	Déroulement
lundi 8/9	10h-12h	1	Syllabus / Rappels	2h de CM/TD
lundi 8/9	14h-16h	2	Chapitre 1	2h de CM
mardi 9/9	14h-16h	3		2h de TD
jeudi 11/9	10h-12h	4		1h de TD + 45' CC ₁ + 15' corrections
lundi 15/9	10h-12h	5	Chapitre 2	2h de CM
mardi 16/9	10h15-12h15	6		2h de TD
mardi 16/9	14h-16h	7		1h de TD + 45' CC ₂ + 15' corrections
lundi 22/9	10h-12h	8	-	2h de TP (Jupyter)
lundi 22/9	14h-16h	9	Chapitre 3	2h de CM
mardi 23/9	10h15-12h15	10		2h de TD
mardi 23/9	14h-16h	11		1h de TD + 45' CC ₃ + 15' corrections
lundi 29/9	10h15-12h15	12	Chapitre 4	2h de CM
mardi 30/9	10h15-12h15	13		2h de TD
mardi 30/9	14h-16h	14		1h de TD + 45' CC ₄ + 15' corrections
vendredi 3/10	14h-16h	15	-	2h de TP (Jupyter)
lundi 6/10	10h-12h	16	-	2h de TD
lundi 6/10	14h-16h	17	-	2h CC _{Final}

Évaluation

La note CC_M est obtenue comme moyenne pondérée de plusieurs évaluations :

$$CC_M = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^4 CC_i + \frac{1}{2} CC_{\text{Final}}.$$

- Le CC_{Final} est une évaluation écrite individuelle sur tout le programme. Une (et une seule!) feuille A4 recto-verso manuscrite par étudiant est autorisée.
- Les quatre CC_i sont des contrôles continus par équipe : chaque équipe doit rendre une seule copie. Lors de ces évaluations, une (et une seule!) feuille A4 recto-verso manuscrite par équipe est autorisée.

Composition des équipes

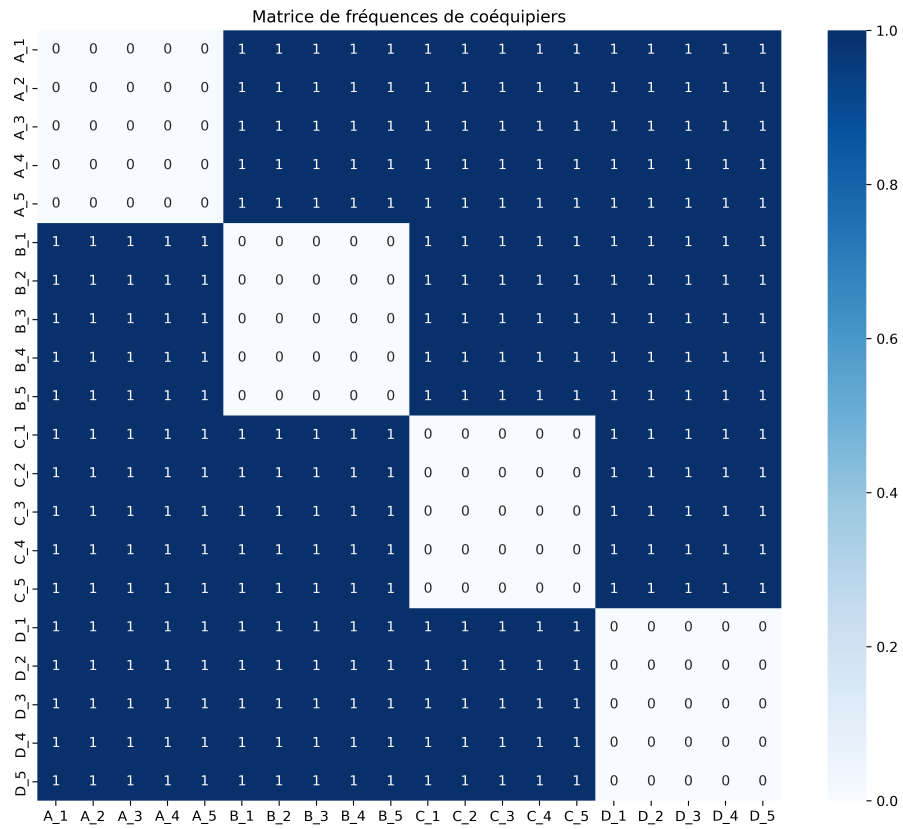
Pour composer les équipes, je vous ai regroupés en 4 groupes comme suit :

A ₁ Falchi Ugo	B ₁ Bigueure Pierre	C ₁ Rodyhin Nikita	D ₁ Cartry Ambre
A ₂ Cissé Fatou	B ₂ Dixon Joshua	C ₂ Dega Hugo	D ₂ Phan Damien
A ₃ Fennech Nessia	B ₃ Gesset Maxime	C ₃ Boulidat Yassine	D ₃ Dejean Thomas
A ₄ Pugni-Beaulieu Nathan	B ₄ Marandon Lorenzo	C ₄ Durogene Judyanne	D ₄ Borel Yannis
A ₅ Viesier Agate	B ₅ Ali-Moussa Naïm	C ₅ Martin Dylan	D ₅

Chaque équipe est constituée de 4 étudiants, un par groupe. La composition des équipes change d'un chapitre à l'autre et **est imposée**.

	Chapitre 1	Chapitre 2	Chapitre 3	Chapitre 4	TP Info
Equipe α	A ₁ , B ₁ , C ₁ , D ₁	A ₁ , B ₂ , C ₃ , D ₄	A ₁ , B ₃ , C ₅ , D ₂	A ₁ , B ₄ , C ₂ , D ₅	A ₁ , B ₅ , C ₄ , D ₃
Equipe β	A ₂ , B ₂ , C ₂ , D ₂	A ₂ , B ₃ , C ₄ , D ₅	A ₂ , B ₄ , C ₁ , D ₃	A ₂ , B ₅ , C ₃ , D ₁	A ₂ , B ₁ , C ₅ , D ₄
Equipe γ	A ₃ , B ₃ , C ₃ , D ₃	A ₃ , B ₄ , C ₅ , D ₁	A ₃ , B ₅ , C ₂ , D ₄	A ₃ , B ₁ , C ₄ , D ₂	A ₃ , B ₂ , C ₁ , D ₅
Equipe δ	A ₄ , B ₄ , C ₄ , D ₄	A ₄ , B ₅ , C ₁ , D ₂	A ₄ , B ₁ , C ₃ , D ₅	A ₄ , B ₂ , C ₅ , D ₃	A ₄ , B ₃ , C ₂ , D ₁
Equipe ε	A ₅ , B ₅ , C ₅ , D ₅	A ₅ , B ₁ , C ₂ , D ₃	A ₅ , B ₂ , C ₄ , D ₁	A ₅ , B ₃ , C ₁ , D ₄	A ₅ , B ₄ , C ₃ , D ₂

Vous pouvez vérifier dans ce tableau de fréquences qu'un étudiant n'est en équipe avec un autre étudiant qu'une et une seule fois (et jamais avec un étudiant de son groupe) :



Première partie

Contenu principal du cours

CHAPITRE 1

Calcul différentiel et intégrale dans $\mathbb{R}^2$

Dans ce chapitre

1.1	Introduction	11
1.1.1	Représentations de fonctions de deux variables	11
1.2	Lignes ou courbes de niveau	12
1.3	Dérivées partielles du premier ordre et gradient	13
1.3.1	Dérivées partielles premières	14
1.3.2	Dérivées des fonctions composées: règle de dérivation en chaîne (<i>chain rule</i>)	15
1.3.3	Gradient	16
1.3.4	Plan tangent et calcul approché	19
1.4	Dérivées partielles de deuxième ordre et matrice Hessienne	20
1.5	Optimisation (dans un ouvert et sans contraintes)	21
1.6	Optimisation approchée: principe de la méthode “descente de gradient”	25
1.6.1	Descente de gradient	26
1.7	Intégrales doubles	28
1.7.1	Applications	31
1.8	■ Fonctions prédéfinies en Python	34
1.8.1	Calcul formel avec sympy	34
1.8.2	Affichage avec matplotlib	35
1.8.3	Descente de gradient	37
1.9	Exercices	40

1.1. Introduction

Une *fonction* f de $\mathbb{R}^n$ à valeurs réelles associe à tout point $\mathbf{x} \equiv (x_1, x_2, \dots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ un réel $f(\mathbf{x})$. Le point $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ se note aussi $\mathbf{x}$ ou $\underline{x}$. Pour $n = 2$, on utilise souvent la notation (x, y) , pour $n = 3$, (x, y, z) .

Le *domaine de définition* de f est l'ensemble $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}^n$ des points $\mathbf{x} \equiv (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ayant une image par f .

L'ensemble $S = \{(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) \mid \mathbf{x} \in \mathcal{D}_f\}$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ est la *surface représentative* de f , analogue à la courbe représentative d'une fonction d'une variable. La représentation géométrique des fonctions de n variables se fait dans un espace à $n + 1$ dimensions, ce qui dépasse la bidimensionnalité des pages d'un livre. Pour contourner cette difficulté, nous nous limiterons aux représentations des fonctions de deux variables, sous forme de dessins en perspective ou de coupes par des plans horizontaux ou verticaux, offrant des informations utiles bien que partielles. Ce problème de visualisation introduit une rupture nette par rapport aux fonctions d'une variable étudiées antérieurement.

1.1.1. Représentations de fonctions de deux variables

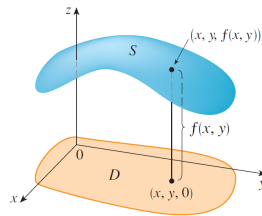
Lorsque $n = 2$, le graphe

et de la latitude). On visualise le graphe d'une fonction

$$\mathcal{G}_f \equiv \{(x, y, z = f(x, y)) \mid (x, y) \in \mathcal{D}_f\}$$

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto f(x, y) \end{aligned}$$

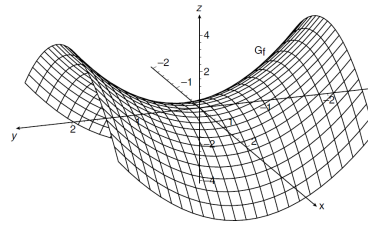
est tridimensionnel, et peut être vu comme le relief d'une région (par exemple, l'altitude en fonction de la longitude par l'altitude $z = f(x, y)$).



Les axes x et y sont conventionnellement situés dans un plan horizontal (le domaine $\mathcal{D}_f$ apparaît alors comme un sous-ensemble de ce plan), tandis que la dimension verticale est réservée aux valeurs de z . Ainsi, à tout $(x, y) \in \mathcal{D}_f$, dont l'image est $f(x, y) \in \mathbb{R}$, correspond le point du graphe $(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3$. Une mise en perspective permet de visualiser les surfaces en trois dimensions, avec l'axe z toujours vertical. Pour des raisons de lisibilité, les axes x et y peuvent ne pas être présentés selon la même orientation.

EXEMPLE

Le graphe de la fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2 - y^2$ est une surface de $\mathbb{R}^3$ ayant la forme d'une selle de cheval, comme visible ci-dessous.



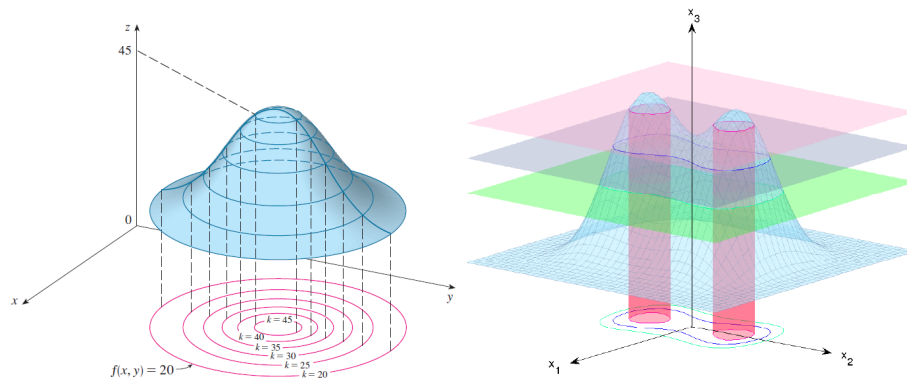
1.2. Lignes ou courbes de niveau

Si on considère des coupes horizontales, on obtient des courbes planes, dites *courbes ou lignes de niveau*.

Définition 1.1 (Lignes de niveau)

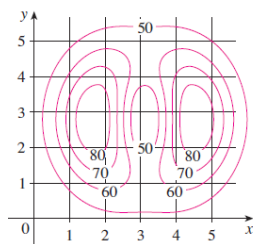
Soit $k \in \mathbb{R}$ et f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$; la courbe de niveau k de f est la projection sur le plan d'équation $z = 0$ de l'intersection de la surface représentative de f avec le plan horizontal $z = k$, i.e. l'ensemble $\{(x, y) \in \mathcal{D} \mid f(x, y) = k\}$.

En pratique, on représente simultanément différentes courbes de niveau pour visualiser la progression du graphe. Cette représentation s'apparente aux cartes géographiques où le niveau correspond à l'altitude. Les courbes de niveau d'une fonction $f(x, y)$ fournissent une représentation géométrique de f sur le plan, tandis que son graphe en donne une dans l'espace.

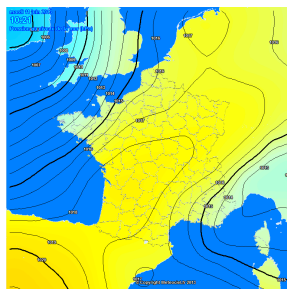


EXEMPLE

L'image ci-contre montre les courbes de niveau d'une fonction f . On peut alors se faire une idée de l'allure de la fonction supposée continue. Par exemple, $f(1, 3) \approx 72$, $f(4, 5) \approx 56$, et $40 < f(3, 3) < 50$ ou $50 < f(3, 3) < 60$.



EXEMPLE (CARTES MÉTÉOROLOGIQUE)

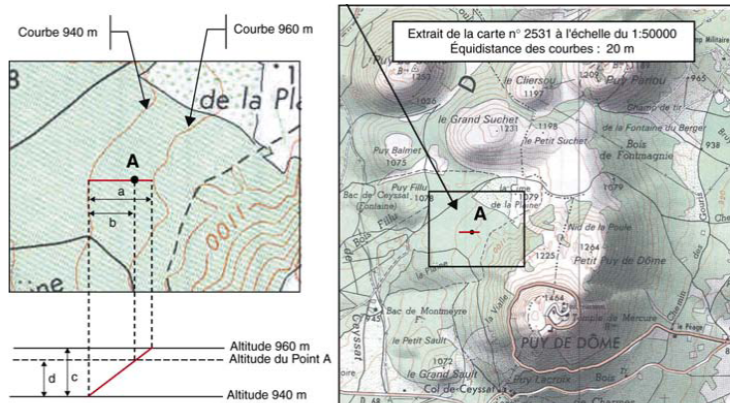


Sur une carte météorologique, les courbes de niveau sont les isothermes (lignes reliant les points d'égale température) ou les isobares (lignes reliant les points d'égale pression).

EXEMPLE (CARTES TOPOGRAPHIQUES)

On peut considérer le relief d'une région comme le graphe d'une fonction de deux variables (par exemple, l'altitude en fonction de la longitude et de la latitude). Une courbe de niveau indique les points de même altitude (ici, l'altitude du point A est $940 + d = 940 + cb/a$). En dessinant les courbes de niveau avec leur altitude correspondante, on obtient la *carte topographique du relief*. La lecture d'une carte topographique permet d'obtenir des mesures quantitatives du relief et de faire des observations qualitatives sur sa nature. Par exemple, localiser les points de plus haute et de plus basse altitude, les crêtes, les vallées, les cols, etc., ainsi que les endroits où les pentes sont plus escarpées ou plus douces, correspondant respectivement aux courbes de niveau très rapprochées ou très distantes.

Attention : dans cette représentation, les couleurs ne correspondent pas à la représentation planaire, mais servent à reproduire les ombres.



1.3. Dérivées partielles du premier ordre et gradient

Rappels Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur I , un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. On dit que f est dérivable en $x_0 \in I$ s'il existe la limite finie

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

ce qui équivaut à

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Cette limite, notée $f'(x_0)$, est la dérivée de f en x_0 .

Pour une fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, dont le graphe est une surface de $\mathbb{R}^3$, la situation est différente. Le plan $\mathbb{R}^2$ possède une infinité de directions. Pour étudier comment une fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ évolue lorsque la variable suit l'une ou l'autre direction du plan, considérons d'abord la direction à y fixé. Prenons le point (x_0, y_0) du domaine de f . Son image est $f(x_0, y_0) \in \mathbb{R}$, et le graphe de la fonction, qui est la surface d'équation $z = f(x, y)$ de $\mathbb{R}^3$, comporte le point $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. L'intersection du graphe de f avec le plan vertical $y = y_0$ est la courbe d'équation $z = f(x, y_0)$ de $\mathbb{R}^2$. Le point (x_0, y_0) étant fixé, cette courbe peut être interprétée comme le graphe de la fonction $f_{y=y_0}$ d'une seule variable définie par $f_{y=y_0}(x) = f(x, y_0)$. Si $f_{y=y_0}$ est dérivable en x_0 , alors sa dérivée nous renseigne sur la variation de f lorsque (x, y) se déplace le long de la droite horizontale de $\mathbb{R}^2$ passant par (x_0, y_0) .

Par analogie, on peut répéter le même raisonnement à x fixé. En conclusion, lorsqu'on fixe toutes les variables sauf une, on obtient une fonction d'une seule variable qui peut être dérivée selon les règles habituelles.

1.3.1. Dérivées partielles premières

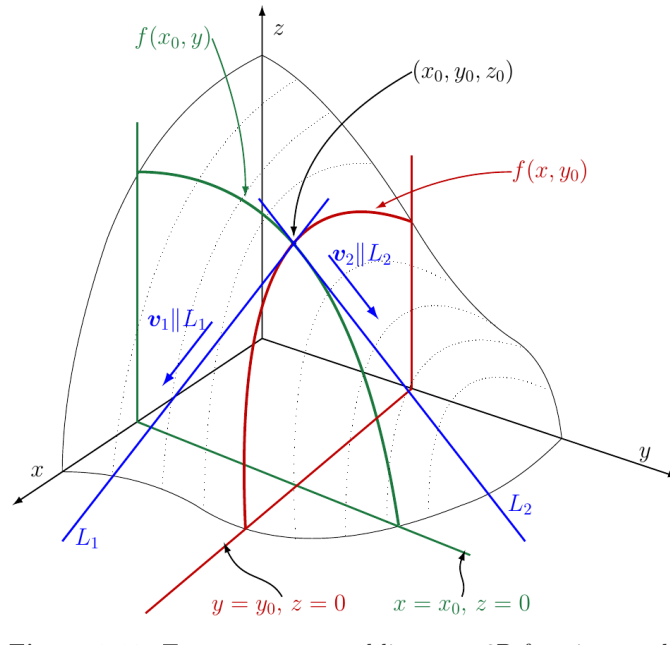
Définition 1.2 (Dérivées partielles premières)

Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur une partie ouverte $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^2$. Soit $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$. Les dérivées partielles de f en (x_0, y_0) sont les dérivées des fonctions partielles f_{y_0} et f_{x_0} évaluées en (x_0, y_0) , c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) &= \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}.\end{aligned}$$

Il s'agit de limites d'une fonction réelle de variable réelle!

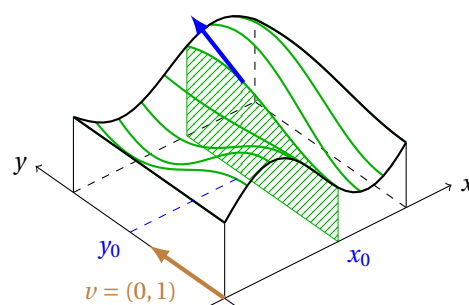
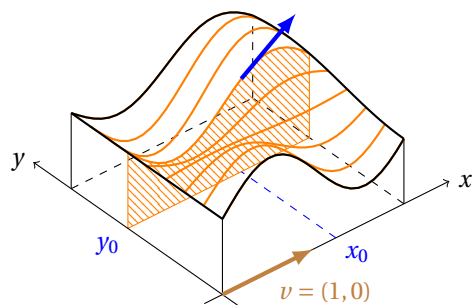
Si f admet toutes les dérivées partielles premières, on dit que f est *dérivable*.



Pour une fonction d'une variable, la dérivée est la pente de la tangente au graphe de la fonction (le graphe étant alors une courbe). Pour une fonction de deux variables $(x, y) \mapsto f(x, y)$, les dérivées partielles indiquent les pentes au graphe de f selon certaines directions (le graphe étant ici une surface). Plus précisément :

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ est la pente du graphe de f en (x_0, y_0) suivant la direction de l'axe (Ox) . En effet cette pente est celle de la tangente à la courbe $z = f(x, y_0)$ et est donnée par la dérivée de $x \mapsto f(x, y_0)$ en x_0 , c'est donc bien $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$.
- $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ est la pente du graphe de f en (x_0, y_0) suivant la direction de l'axe (Oy) .

Sur la figure de gauche, la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ indique la pente de la tranche parallèle à l'axe (Ox) (en orange). Sur la figure de droite, la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial y}$ indique la pente de la tranche parallèle à l'axe (Oy) (en vert).

**Remarque (Notation)**

La dérivée $\frac{\partial f}{\partial x}$ se note aussi $\partial_x f$, $f_{,x}$ ou encore $\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_y$ en insistant sur la variable considérée constante. (Attention à ne pas confondre $f_{,x}$, la dérivée de f par rapport à x , avec $f_{x=x_0}$, la fonction partielle associée à f .)

Astuce

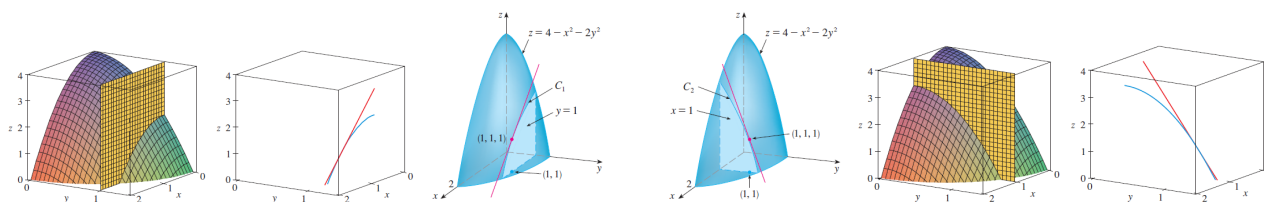
En pratique, pour calculer $\partial_x f$ (resp. $\partial_y f$), on dérive f comme si elle était une fonction de la seule variable x (resp. y), l'autre variable étant considérée comme une constante.

EXEMPLE

Soit $f(x, y) = 4 - x^2 - 2y^2$. Le graphe de f est le parabolôïde $z = 4 - x^2 - 2y^2$. On a $\partial_x f(x, y) = -2x$ et $\partial_y f(x, y) = -4y$.

Le plan vertical $y = 1$ intersecte le parabolôïde dans la parabole $z(x) = 2 - x^2$ (courbe C_1 à gauche). La pente de la tangente à cette parabole au point $(1, 1)$ est $\partial_x f(1, 1) = -2$.

De même, le plan vertical $x = 1$ intersecte le parabolôïde dans la parabole $z(y) = 2 - 2y^2$ (courbe C_2 à droite). La pente de la tangente à cette parabole au point $(1, 1)$ est $\partial_y f(1, 1) = -4$.

**EXEMPLE**

1. Pour $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = 3x^2 + xy - 2y^2$, on a $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^2$, f est continue, $\partial_x f(x, y) = 6x + y$ (car y est considérée constante) et $\partial_y f(x, y) = x - 4y$ (car x est considérée constante).

2. Pour la fonction $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = 5xz \ln(1 + 7y)$, on a $\mathcal{D}_f = \{(x, y, z) \mid y > -1/7\}$, f est continue,

$$\partial_x f(x, y, z) = 5z \ln(1 + 7y), \quad \partial_y f(x, y, z) = \frac{35xz}{1 + 7y}, \quad \partial_z f(x, y, z) = 5x \ln(1 + 7y).$$

3. Pour $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = \cos(x + y^2)e^{-z}$ on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = -\sin(x + y^2)e^{-z}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = -2y \sin(x + y^2)e^{-z}, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = -\cos(x + y^2)e^{-z}.$$

4. Soit $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$, alors pour $i = 1, \dots, n$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) = 2x_i.$$

1.3.2. Dérivées des fonctions composées : règle de dérivation en chaîne (chain rule)

Cas $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ Soit f une fonction de deux variables admettant des dérivées partielles premières et x et y deux fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto f(x, y)$$

$$\mathbf{h}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \mapsto \begin{pmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{pmatrix}$$

Alors la fonction g

$$\begin{array}{c}
g: \mathbb{R} \xrightarrow{\mathbf{h}} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R} \\
t \longmapsto \mathbf{h}(t) = \begin{pmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{pmatrix} \longmapsto g(t) = f(h_1(t), h_2(t))
\end{array}$$

est dérivable et

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \times x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \times y'(t)$$

avec $x = h_1(t)$ et $y = h_2(t)$.

Cas $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ Soit f une fonction de deux variables x et y elles-mêmes fonctions des deux variables u et v .

$$\begin{array}{llll}
f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} & x: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} & y: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} & \mathbf{h}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\
(x, y) \mapsto f(x, y) & (u, v) \mapsto x(u, v) & (u, v) \mapsto y(u, v) & (u, v) \mapsto \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \end{pmatrix}
\end{array}$$

On peut définir la fonction composée $g(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$:

$$\begin{array}{c}
g: \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\mathbf{h}} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R} \\
(u, v) \longmapsto \mathbf{h}(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \end{pmatrix} \longmapsto g(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))
\end{array}$$

Lorsque les dérivées partielles premières qui interviennent sont définies, on a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(u, v), y(u, v)) \times \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u, v), y(u, v)) \times \frac{\partial y}{\partial u}(u, v), \\
\frac{\partial g}{\partial v}(u, v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(u, v), y(u, v)) \times \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u, v), y(u, v)) \times \frac{\partial y}{\partial v}(u, v).
\end{aligned}$$

En notation matricielle

$$\begin{pmatrix} \partial_u g \\ \partial_v g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_u x & \partial_u y \\ \partial_v x & \partial_v y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_x f \\ \partial_y f \end{pmatrix}$$

Cas $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Soit f une fonction d'une variable x et x elle-même une fonction de deux variables u et v .

$$\begin{array}{ll}
f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} & x: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\
x \mapsto f(x) & (u, v) \mapsto x(u, v)
\end{array}$$

On peut définir la fonction composée $g(u, v) = f(x(u, v))$:

$$\begin{array}{c}
g: \mathbb{R}^2 \xrightarrow{x} \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \\
(u, v) \longmapsto x(u, v) \longmapsto g(u, v) = f(x(u, v))
\end{array}$$

Lorsque les dérivées partielles premières qui interviennent sont définies, on a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) &= f'(x(u, v)) \times \frac{\partial x}{\partial u}(u, v), \\
\frac{\partial g}{\partial v}(u, v) &= f'(x(u, v)) \times \frac{\partial x}{\partial v}(u, v).
\end{aligned}$$

1.3.3. Gradient

Définition 1.3 (Vecteur gradient)

Le gradient de la fonction $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ évalué au point $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)$, noté $\nabla f(\hat{\mathbf{x}})$ ou encore $\mathbf{grad} f(\hat{\mathbf{x}})$, est le vecteur dont les composantes sont les dérivées partielles premières:

$$\nabla f(\hat{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f(\hat{\mathbf{x}}) \\ \partial_{x_2} f(\hat{\mathbf{x}}) \\ \vdots \\ \partial_{x_n} f(\hat{\mathbf{x}}) \end{pmatrix}$$

Remarque

Le gradient est un élément de $\mathbb{R}^n$ écrit comme un vecteur colonne. Parfois, pour alléger l'écriture, on peut aussi l'écrire sous la forme d'un vecteur ligne.

EXEMPLE

Considérons la fonction $f(x, y) = x^2 + 3y$. Son gradient est $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 3 \end{pmatrix}$. Par exemple, au point $(1, 2)$, le gradient est $\nabla f(1, 2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

EXEMPLE

- $f(x, y) = x^2 y^3$, $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2xy^3 \\ 3x^2 y^2 \end{pmatrix}$. Au point $(x_0, y_0) = (2, 1)$, $\nabla f(2, 1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \end{pmatrix}$.
- $f(x, y, z) = x^2 \sin(yz)$, $\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x \sin(yz) \\ x^2 z \cos(yz) \\ x^2 y \cos(yz) \end{pmatrix}$.
- $f(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$, $\nabla f(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ \vdots \\ 2x_n \end{pmatrix}$.

Définition 1.4 (Droite tangente en (x_0, y_0) à la courbe de niveau $f(x_0, y_0)$)

Au point (x_0, y_0) , l'équation de la tangente à la ligne de niveau de f est :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$$

pourvu que le gradient de f en ce point ne soit pas le vecteur nul.

EXEMPLE (TANGENTE À UNE COURBE DE NIVEAU)

Considérons la fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$. Considérons la ligne de niveau passant par le point $(x_0, y_0) = \left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$. On a

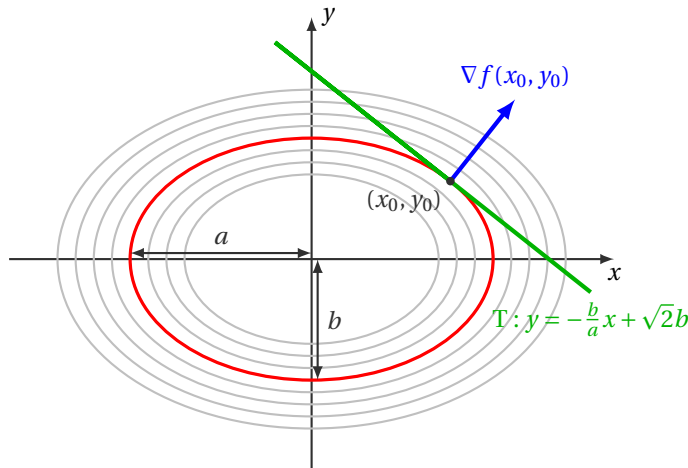
$$f\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right) = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = \frac{a^2}{2a^2} + \frac{b^2}{2b^2} = 1.$$

La courbe de niveau passant par (x_0, y_0) a pour niveau 1 et c'est une ellipse. Calculons maintenant la droite tangente à cette courbe au point (x_0, y_0) : les dérivées partielles en (x_0, y_0) sont

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{2x_0}{a^2} = \frac{2}{a^2} \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{a} = \frac{1}{x_0}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{2y_0}{b^2} = \frac{2}{b^2} \frac{b}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{b} = \frac{1}{y_0}.$$

L'équation de la droite tangente à l'ellipse $\mathcal{E}$ en ce point est donc

$$\frac{1}{x_0}(x - x_0) + \frac{1}{y_0}(y - y_0) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{1}{x_0}x + \frac{1}{y_0}y = 2 \quad \rightsquigarrow \quad y = 2y_0 - \frac{y_0}{x_0}x \quad \rightsquigarrow \quad y = -\frac{b}{a}x + \sqrt{2}b.$$

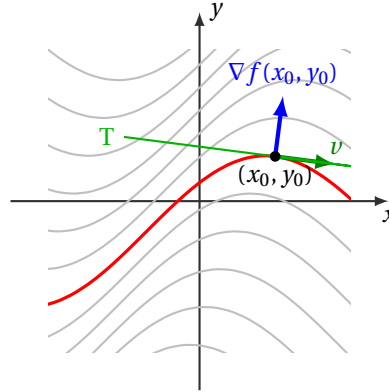


Proposition 1.5

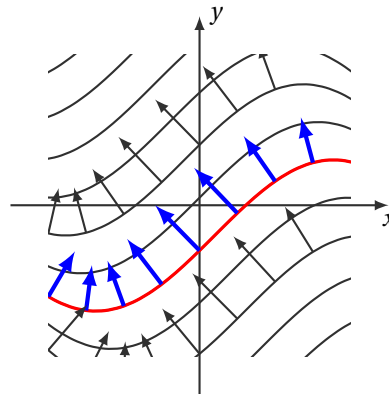
Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable. On considère les lignes de niveau $f(x, y) = k$. Le vecteur gradient $\nabla f(x_0, y_0)$ est orthogonal à la ligne de niveau de f passant au point (x_0, y_0) .

Il indique ainsi la direction dans laquelle la fonction varie le plus vite.

Sur ce premier dessin, sont dessinés la ligne de niveau passant par le point (x_0, y_0) (en rouge), un vecteur tangent v en ce point et la tangente à la ligne de niveau (en vert). Le vecteur gradient est un vecteur du plan qui est orthogonal à la ligne de niveau en ce point (en bleu).

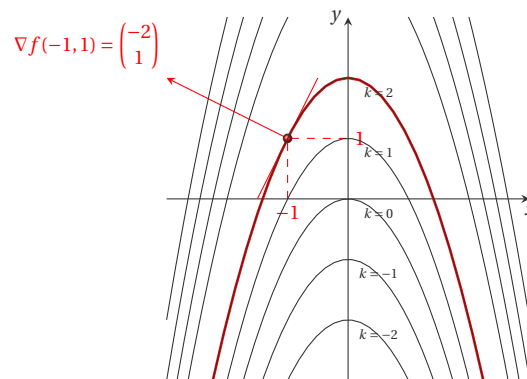


À chaque point du plan, on peut associer un vecteur gradient. Ce vecteur gradient est orthogonal à la ligne de niveau passant par ce point. Nous verrons juste après comment savoir s'il est orienté « vers le haut » ou « vers le bas ».

**EXEMPLE**

Considérons la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2 + y$. Le gradient de f est le vecteur $\nabla f(x, y) = (2x, 1)^T$. La courbe de niveau k de la fonction f est l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y = k\}$, autrement dit la parabole d'équation $y = -x^2 + k$. Le gradient est orthogonal à la courbe de niveau de f qui passe par le point (x, y) .

Dans la figure ci-dessous on considère le point $(-1, 1)$. Le vecteur gradient de f dans ce point vaut $(-2, 1)^T$. Le point donné appartient à la courbe de niveau 2 qui a pour équation $y = -x^2 + 2$. La droite tangente à cette courbe au point $(-1, 1)$ a pour équation $y = 2x + 3$ qui est orthogonale au gradient.



1.3.4. Plan tangent et calcul approché

Définition 1.6 (Plan tangent)

Soit $\mathcal{D}$ une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$ et soit $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable en (x_0, y_0) . L'équation du plan tangent au graphe de la fonction $f(x, y)$ en (x_0, y_0) s'écrit

$$L(x, y) = f(x_0, y_0) + (x - x_0)\partial_x f(x_0, y_0) + (y - y_0)\partial_y f(x_0, y_0)$$

ce qui équivaut, en notant $(h, k) = (x - x_0, y - y_0)$, à

$$L(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + h\partial_x f(x_0, y_0) + k\partial_y f(x_0, y_0).$$

Si h et k sont petits, alors on a

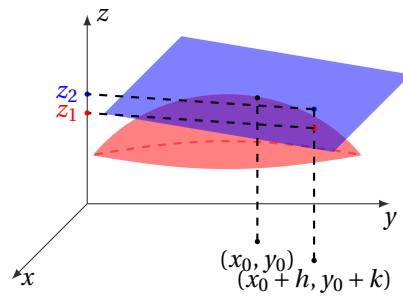
$$f(x, y) \approx L(x, y).$$

EXEMPLE

Considérons la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2 + y$. Le gradient de f est le vecteur $\nabla f(x, y) = (2x, 1)^T$. Le plan tangent à f en $\hat{\mathbf{x}} = (-1, 1)$ s'écrit

$$L(\mathbf{x}) = f(\hat{\mathbf{x}}) + (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^T \cdot \nabla f(\hat{\mathbf{x}}) = (-1)^2 + 1 + (x + 1, y - 1) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 - 2(x + 1) + (y - 1) = -2x + y - 1.$$

On peut approcher la valeur de f en (x_0, y_0) par la valeur du plan tangent au graphe en ce point. Sur la figure ci-dessous sont représentés le graphe de f (en rouge), le plan tangent au-dessus du point (x_0, y_0) (en bleu). La valeur $z_1 = f(x_0 + h, y_0 + k)$ est la valeur exacte donnée par le point de la surface au dessus de $(x_0 + h, y_0 + k)$. On approche cette valeur par $z_2 = f(x_0, y_0) + h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ donnée par le point du plan tangent au dessus de $(x_0 + h, y_0 + k)$.



EXEMPLE

On veut calculer une valeur approchée de $f(1.002, 0.997)$ si $f(x, y) = x^2 y$. Prenons $(x_0, y_0) = (1, 1)$, $h = 2 \times 10^{-3}$ et $k = -3 \times 10^{-3}$. On a alors $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2$, donc $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 2$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 1$. Ainsi

$$f(1 + h, 1 + k) \simeq f(1, 1) + 2h + k \quad \rightsquigarrow \quad f(1.002, 0.997) \simeq 1 + 2 \times 2 \times 10^{-3} - 3 \times 10^{-3} \simeq 1.001.$$

Avec une calculatrice, on trouve $f(1.002, 0.997) = 1.000992$: l'approximation est bonne.

EXEMPLE

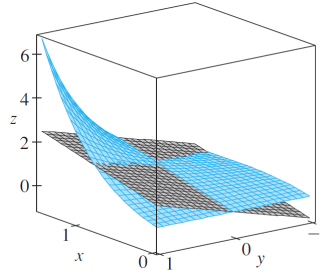
On peut calculer le plan tangent à la fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = xe^{xy}$ en $(1, 0)$ et utiliser sa linéarisation pour approcher $f(1.1, -0.1)$. On a

$$\begin{aligned} f(x, y) &= xe^{xy} & f(1, 0) &= 1 \\ \partial_x f(x, y) &= e^{xy} + xye^{xy} & \partial_x f(1, 0) &= 1 \\ \partial_y f(x, y) &= x^2 e^{xy} & \partial_y f(1, 0) &= 1 \end{aligned}$$

Les trois fonctions f , $\partial_x f$ et $\partial_y f$ sont continues, donc f est différentiable. Sa linéarisation donne

$$f(x, y) \simeq f(1, 0) + (x - 1)\partial_x f(1, 0) + (y - 0)\partial_y f(1, 0) = 1 + (x - 1) + y = x + y,$$

autrement dit $xe^{xy} \simeq x + y$ lorsque $(x, y) \simeq (1, 0)$, ainsi $f(1.1, -0.1) \simeq 1.1 - 0.1 = 1$. En effet, $f(1.1, -0.1) = 1.1e^{-0.11} \approx 0.98542$



Cette notion se généralise naturellement pour $n > 2$: il s'agit en fait d'un plan tangent pour $n = 2$ et d'un hyperplan tangent pour $n > 2$. Dans un espace de dimension n , un hyperplan est une variété linéaire de dimension $n - 1$.

Définition 1.7 (Plan tangent en $\mathbb{R}^n$)

Soit $\mathcal{D}$ une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$ et soit $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable en $\hat{\mathbf{x}}$. L'équation du plan tangent au graphe de la fonction $f(\mathbf{x})$ en $\hat{\mathbf{x}}$ est

$$L(\mathbf{x}) = f(\hat{\mathbf{x}}) + (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^T \cdot \nabla f(\hat{\mathbf{x}}).$$

ce qui équivaut, en notant $\delta \mathbf{h} = (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})$, à

$$L(\hat{\mathbf{x}} + \delta \mathbf{h}) = f(\hat{\mathbf{x}}) + \delta \mathbf{h}^T \cdot \nabla f(\hat{\mathbf{x}}).$$

Si toutes les composantes de $\delta \mathbf{h}$ sont petites, alors on a

$$f(\mathbf{x}) \approx L(\mathbf{x}).$$

1.4. Dérivées partielles de deuxième ordre et matrice Hessienne

Si les fonctions dérivées partielles admettent elles-mêmes des dérivées partielles en (x_0, y_0) , ces dérivées sont appelées dérivées partielles secondes, ou dérivées partielles d'ordre 2, de f en (x_0, y_0) . On peut, de la même façon, introduire les dérivées partielles d'ordres supérieurs. Les définitions suivantes s'énoncent dans des ensembles ouverts pour éviter les problèmes liés au calcul de limites au bord du domaine.

Définition 1.8 (Dérivées partielles d'ordre 2 pour une fonction de deux variables)

Soit la fonction $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ où $\mathcal{D}_f$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. On a 2 dérivées partielles d'ordre 1 et donc 4 dérivées partielles d'ordre 2 ainsi notées :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)(x_0, y_0) && \text{(notée aussi } \partial_{xx} f(x_0, y_0)), \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)(x_0, y_0) && \text{(notée aussi } \partial_{xy} f(x_0, y_0)), \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)(x_0, y_0) && \text{(notée aussi } \partial_{yx} f(x_0, y_0)), \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)(x_0, y_0) && \text{(notée aussi } \partial_{yy} f(x_0, y_0)). \end{aligned}$$

Les dérivées partielles d'ordre supérieur à 2 se définissent par récurrence de façon analogue. Soit la fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$; on aura n dérivées partielles d'ordre 1, n^2 dérivées partielles d'ordre 2, etc. donc n^k dérivées partielles d'ordre k .

Théorème 1.9 (Théorème de SCHWARZ (ou de CLAIRAUT))

Si les dérivées partielles mixtes $\partial_{xy} f$ et $\partial_{yx} f$ sont continues en (x_0, y_0) alors $\partial_{xy} f(x_0, y_0) = \partial_{yx} f(x_0, y_0)$.

Définition 1.10 (Matrice hessienne)

Soit la fonction $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ où $\mathcal{D}_f$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. La matrice hessienne de f en (x_0, y_0) est la matrice de taille 2×2 dont les entrées sont les dérivées partielles secondes :

$$H_f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \partial_{xx} f(x_0, y_0) & \partial_{xy} f(x_0, y_0) \\ \partial_{yx} f(x_0, y_0) & \partial_{yy} f(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

Son déterminant est le réel $\det(H_f(x_0, y_0)) \equiv \partial_{xx} f(x_0, y_0) \partial_{yy} f(x_0, y_0) - \partial_{xy} f(x_0, y_0) \partial_{yx} f(x_0, y_0)$.

Cette notion se généralise naturellement pour $n > 2$.

EXEMPLE

Les dérivées premières et secondes de la fonction $f(x, y) = -2x^2 + 3xy^2 - y^3$ sont

$$\begin{aligned}\partial_x f(x, y) &= -4x + 3y^2, & \partial_y f(x, y) &= 6xy - 3y^2, \\ \partial_{xx} f(x, y) &= -4, & \partial_{xy} f(x, y) &= 6y, & \partial_{yx} f(x, y) &= 6y, & \partial_{yy} f(x, y) &= 6x - 6y.\end{aligned}$$

La matrice hessienne est

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} -4 & 6y \\ 6y & 6x - 6y \end{pmatrix}.$$

Dans cet exemple, on remarque que la matrice hessienne de f est symétrique du fait que les dérivées secondes mixtes, $\partial_{xy} f$ et $\partial_{yx} f$, sont égales.

Comme la dérivée seconde pour les fonctions d'une seule variable, la matrice hessienne permet d'étudier la convexité des fonctions de plusieurs variables et joue, dès lors, un rôle important dans leur optimisation.

1.5. Optimisation (dans un ouvert et sans contraintes)

Un optimum ou extremum est soit un maximum soit un minimum, c'est-à-dire la valeur la plus haute ou la plus faible que prend la fonction sur son ensemble de définition ou tout sous-ensemble de son ensemble de définition.

Définition 1.11

Soit f une fonction de $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. On dit que

- f est bornée dans $\mathcal{D}$ s'il existe un nombre réel $M \geq 0$ tel que

$$\forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}, |f(\mathbf{x})| \leq M;$$

- f admet un maximum (resp. minimum) *global* (ou absolu) en $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{D}$ si

$$\forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}, f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0) \text{ (resp. } f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0));$$

- f admet un maximum (resp. minimum) *local* (ou relatif) en $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{D}$ s'il existe une boule de rayon non nul $\mathcal{B}(\mathbf{x}_0, r)$ telle que

$$\forall \mathbf{x} \in \mathcal{D} \cap \mathcal{B}(\mathbf{x}_0, r), f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0) \text{ (resp. } f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0)).$$

Théorème 1.12 (de FERMAT : condition nécessaire du premier ordre)

Soit $\mathcal{D}$ un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}_0$ un point contenu dans $\mathcal{D}$ et $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ en ce point. Si f présente un extremum local alors

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}.$$

Dans la suite du cours nous chercherons les points pour lesquels une fonction donnée présente un extremum local. D'après le théorème précédent, ces points sont à chercher parmi les points en lesquels le gradient s'annule. On appelle ces points des points stationnaires ou critiques :

Définition 1.13 (Point stationnaire ou critique)

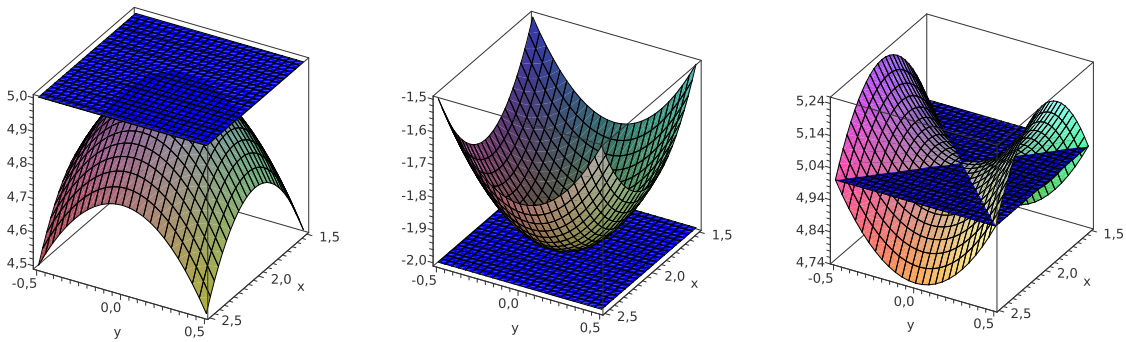
Un point $\mathbf{x}_0$ vérifiant $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ est appelé *point stationnaire* ou *point critique* de f .

Nature d'un point critique : étude directe La condition du premier ordre signifie géométriquement que le plan tangent à la surface d'équation $z = f(x, y)$ au point (x_0, y_0) de coordonnées $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ est horizontal. Après avoir déterminé un point stationnaire $\mathbf{x}_0$, on peut alors déterminer sa nature en étudiant le signe de la différence

$$d(\mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0).$$

Si cette différence est de signe constant pour $\mathbf{h}$ voisin de $\mathbf{0}$, il s'agit d'un extrémum local (un *maximum* si $d < 0$, un *minimum* si $d > 0$). Sinon, il s'agit d'un *point-col* (ou *point-selle*). Mieux, si le signe est constant pour $\mathbf{h}$ quelconque, alors l'extrémum est global.

La figure à gauche illustre le cas d'un *maximum* et la figure au centre le cas d'un *minimum*. La figure à droite illustre le fait que la condition nécessaire d'optimalité n'est pas une condition suffisante; dans ce cas on dit que f présente un *col* en (x_0, y_0) ou que (x_0, y_0) est un *point-selle* de f . Le mot col vient de l'exemple de la fonction altitude et de la configuration (idéalisée) d'un col de montagne: minimum de la ligne de crête, maximum de la route, sans être un extremum du paysage. Le mot selle vient de l'exemple d'une selle de cheval.


EXEMPLE

On cherche les extrema de la fonction $f(x, y) = x^2 + y^2$ dans le disque ouvert centré en $(0, 0)$ de rayon 1, représenté par $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$. Le seul candidat extremum est l'unique point critique $(0, 0)$ qu'on trouve en résolvant $\partial_x f(x, y) = 0$ et $\partial_y f(x, y) = 0$. La définition implique de façon immédiate que f admet un minimum global en $(0, 0)$. En effet

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \geq 0 = f(0, 0) \quad \forall (x, y) \in \mathcal{D}_f.$$

En revanche, la fonction n'admet aucun maximum.

EXEMPLE

Chercher les points en lesquels $f(x, y) = x^2 - y^3 + xy$ peut atteindre son minimum.

- **Recherche des points critiques.** On calcule

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + y$$

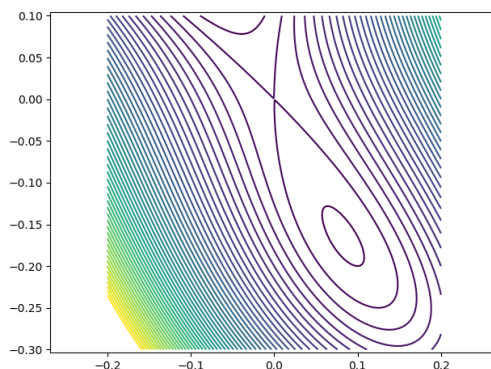
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -3y^2 + x.$$

On cherche les points (x, y) en lesquels les deux dérivées partielles s'annulent. Par l'annulation de la première dérivée, on a $2x + y = 0$ donc $y = -2x$. Par l'annulation de la seconde dérivée, on a $-3y^2 + x = 0$ ce qui donne par substitution $-12x^2 + x = 0$, ainsi $x(-12x + 1) = 0$. Donc soit $x = 0$ et alors on a $y = 0$, soit $x = \frac{1}{12}$ et alors $y = -\frac{1}{6}$. Il y a donc deux points critiques

$$(0, 0) \quad \text{et} \quad \left(\frac{1}{12}, -\frac{1}{6}\right).$$

- **Étude du point critique $(0, 0)$.** On a $f(0, 0) = 0$ mais on remarque que $f(0, y) = -y^3$ qui peut être négatif ou positif (selon le signe de y proche de 0), donc en $(0, 0)$ il n'y a ni minimum ni maximum.
- **Étude du point critique $(\frac{1}{12}, -\frac{1}{6})$.** Il existe un critère (que l'on ne décrira pas ici) qui permet de dire qu'en ce point f admet un minimum local.

Sur le dessin ci-dessous, le minimum est situé à l'intérieur du petit ovale, l'autre point critique en $(0, 0)$ correspond à l'intersection de la ligne de niveau $f = 0$ avec elle-même.



Sur l'exemple précédent, nous avons assez facilement calculé les points critiques à partir des deux équations à deux inconnues. Il faut prendre garde que, en toute généralité, **ce n'est pas un système linéaire** et que dans le cas d'une fonction plus compliquée il aurait été impossible de déterminer exactement les points critiques.

On note aussi dans l'exemple précédent que certains points critiques ne sont ni des maximums ni des minimums. L'exemple type, illustré ci-dessous, est celui d'un col appelé aussi point-selle en référence à sa forme de selle de cheval.

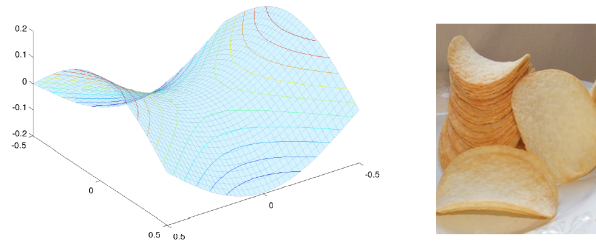


FIGURE 1.1. – Point col ou point selle

Théorème 1.14 (Condition suffisante d'extrémum local dans un ouvert (cas de 2 variables))

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ et (x_0, y_0) un point stationnaire; posons

$$\det(H_f(x_0, y_0)) \equiv \partial_{xx}f(x_0, y_0) \cdot \partial_{yy}f(x_0, y_0) - (\partial_{xy}f(x_0, y_0))^2,$$

le déterminant de la matrice hessienne de f évalué en (x_0, y_0) .

- Si $\det(H_f(x_0, y_0)) > 0$, alors f présente un extrémum relatif en (x_0, y_0) ; il s'agit
 - d'un maximum si $\partial_{xx}f(x_0, y_0) < 0$
 - d'un minimum si $\partial_{xx}f(x_0, y_0) > 0$;
- si $\det(H_f(x_0, y_0)) < 0$, alors f présente un point-selle (ou point-col) en (x_0, y_0) (cf. la figure 1.1); ce n'est pas un extrémum;
- si $\det(H_f(x_0, y_0)) = 0$, on ne peut pas conclure à partir des dérivées secondes.

En résumé, si $\partial_x f(x_0, y_0) = 0$ et $\partial_y f(x_0, y_0) = 0$, la nature du point critique (x_0, y_0) est déterminée par le tableaux suivant:

$\det(H_f(x_0, y_0))$	$\partial_{xx}f(x_0, y_0)$	Nature de (x_0, y_0)
+	+	minimum local
+	-	maximum local
-		point-selle
0		on ne peut pas conclure

EXEMPLE

On veut étudier la fonction $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y$ sur $\mathbb{R}^2$. Elle a pour dérivées partielles $\partial_x f(x, y) = 2x - 2$ et $\partial_y f(x, y) = 2y - 4$ qui ne s'annulent qu'en $(1, 2)$, seul point où il peut donc y avoir un extrémum local. On étudie directement le signe de la différence

$$d(h, k) = f(1 + h, 2 + k) - f(1, 2) = h^2 + k^2 > 0.$$

Comme cette différence est positive pour h et k voisins de 0 il s'agit d'un minimum. En effet, $\partial_{xx}f(1, 2) = 2 > 0$, $\partial_{yy}f(1, 2) = 2$, $\partial_{xy}f(1, 2) = 0$ donc $\det(H_f(1, 2)) = 4 > 0$ et il s'agit bien d'un minimum.

EXEMPLE

Pour déterminer les extrema libres de la fonction $f(x, y) = x^2 + y^3 - 2xy - y$ dans $\mathbb{R}^2$, on constate d'abord que f est un polynôme, donc différentiable dans l'ouvert $\mathbb{R}^2$. Les seuls candidats extrema locaux sont les points critiques. Toutefois, nous ne disposons d'aucune garantie a priori sur le fait que les éventuels extrema locaux soient globaux.

Recherche des points critiques On a

$$\nabla f = \mathbf{0} \iff \begin{pmatrix} 2x - 2y \\ 3y^2 - 2x - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff (x, y) = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) \text{ ou } (x, y) = (1, 1).$$

Les deux candidats sont donc $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ et $(1, 1)$.

Classification La matrice hessienne de f en un point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ est

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} \partial_{xx}f(x, y) & \partial_{xy}f(x, y) \\ \partial_{yx}f(x, y) & \partial_{yy}f(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6y \end{pmatrix}.$$

Comme $\det(H_f(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})) < 0$ et $D(1, 1) > 0$, alors $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ est un point-selle et f admet en $(1, 1)$ un minimum local de valeur $f(1, 1) = -1$. Ce minimum n'est cependant pas global puisque, par exemple, $f(0, -2) = -6 < f(1, 1) = -1$.

EXEMPLE

Une firme produit deux types de biens A et B. Son coût total de fabrication C et la demande respective des deux biens q_A et q_B sont donnés par

$$C = q_A^2 + 2q_B^2 + 10, \quad (1.1)$$

$$q_A = 40 - 2p_A - p_B, \quad (1.2)$$

$$q_B = 35 - p_A - p_B. \quad (1.3)$$

Quels sont les niveaux de production qui maximisent le profit? Quels sont les prix de A et B qui suscitent une demande correspondant à ces niveaux optimaux?

Pour répondre à ces questions, on écrit la fonction profit $\Pi(q_A, q_B) = q_A p_A + q_B p_B - C(q_A, q_B)$. De (1.2) et (1.3) on peut déduire

$$p_A = 5 - q_A + p_B, \quad (1.4)$$

$$p_B = 30 + q_A - 2q_B, \quad (1.5)$$

et donc que

$$\Pi(q_A, q_B) = 5q_A - 2q_A^2 + 2q_A q_B - 4q_B^2 + 30q_B - 10.$$

Pour maximiser le profit en fonction du niveau de production, on recherche d'abord les points stationnaires de Π :

$$\nabla \Pi(q_A, q_B) = \begin{pmatrix} 5 - 4q_A + 2q_B \\ 2q_A - 8q_B + 30 \end{pmatrix}, \quad \nabla \Pi(q_A, q_B) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff (q_A, q_B) = (50/14, 65/14).$$

On étudie la nature de ce point critique en évaluant la matrice Hessienne:

$$H_{\Pi}(q_A, q_B) = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -8 \end{pmatrix};$$

pour le point stationnaire $(50/14, 65/14)$ on a $\det(H_{\Pi})(50/14, 65/14) > 0$ et $\partial_{q_A q_A} \Pi(50/14, 65/14) < 0$, donc le point $(50/14, 65/14)$ est un maximum local de Π . Comme $H_{\Pi}(q_A, q_B)$ ne dépend pas des variables q_A et q_B , on a $\det(H_{\Pi})(q_A, q_B) > 0$ et $\partial_{q_A q_A} \Pi(q_A, q_B) < 0$ en tout point du domaine, autrement dit Π est une fonction concave et le point $(50/14, 65/14)$ est un maximum global de Π . Comme $q_A = 50/14$ et $q_B = 65/14$ maximisent le profit en fonction des niveaux de production, les prix associés à ce niveau de production sont $p_A = 85/14$ et $p_B = 340/14$.

EXEMPLE (LOIS DE SNELL-DESCARTES)

Un rayon lumineux se propage à la vitesse v_1 dans le milieu M_1 et à la vitesse v_2 dans le milieu M_2 . Le principe de FERMAT précise que la lumière suit le trajet le plus économique en temps.

En dimension 2. En notant x l'abscisse du point où la trajectoire coupe l'interface, le temps nécessaire pour aller de (x_1, z_1) à (x_2, z_2) en passant par le point d'abscisse x vaut

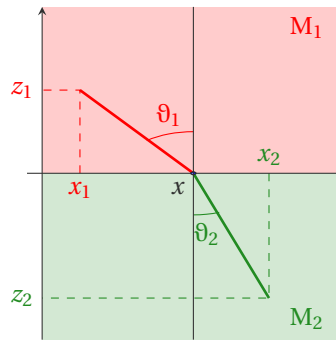
$$t(x) = \frac{\sqrt{(x-x_1)^2 + z_1^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(x_2-x)^2 + z_2^2}}{v_2}.$$

Cette quantité est (localement) optimale quand sa dérivée par rapport à x s'annule, c'est à dire lorsque

$$\frac{x-x_1}{v_1 \sqrt{(x-x_1)^2 + z_1^2}} - \frac{x_2-x}{v_2 \sqrt{(x_2-x)^2 + z_2^2}} = 0,$$

ce qui conduit à la loi de SNELL-DESCARTES

$$\frac{\sin(\theta_1)}{v_1} = \frac{\sin(\theta_2)}{v_2}.$$



En dimension 3. Dans le cas tridimensionnel, la situation est similaire. Il s'agit cette fois de déterminer les coordonnées (x, y) dans le plan de l'interface où le rayon coupera celui-ci. Le temps de trajet vaut cette fois

$$t(x, y) = \frac{\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + z_1^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(x_2 - x)^2 + (y_2 - y)^2 + z_2^2}}{v_2}.$$

Il s'agit cette fois d'optimiser par rapport à x et y simultanément, ce qui revient à annuler simultanément les dérivées de t par rapport à x et y , c'est à dire son gradient. Ceci conduit aux équations

$$\nabla t = \mathbf{0} \iff \begin{pmatrix} \frac{x - x_1}{v_1 \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + z_1^2}} - \frac{x_2 - x}{v_2 \sqrt{(x_2 - x)^2 + (y_2 - y)^2 + z_2^2}} \\ \frac{y - y_1}{v_1 \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + z_1^2}} - \frac{y_2 - y}{v_2 \sqrt{(x_2 - x)^2 + (y_2 - y)^2 + z_2^2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x_2 - x \\ y_2 - y \end{pmatrix} = \frac{v_2 d_2}{v_1 d_1} \begin{pmatrix} x - x_1 \\ y - y_1 \end{pmatrix}$$

autrement dit, le point du plan de coordonnées (x, y) se trouve dans le segment compris entre (x_1, y_1) et (x_2, y_2) . On se ramène donc à un problème bidimensionnel et le raisonnement ci-dessus s'applique directement.

On obtient de la même façon la loi de SNELL-DESCARTES à la réflexion.

Remarque (Optimisation libre versus liée)

Imaginez-vous en train de parcourir un chemin de montagne, explorant les hauteurs et les vallées de la région. Dans cette excursion, vous pourriez avoir deux objectifs distincts, chacun reflétant une approche différente de l'optimisation.

D'une part, vous pourriez être un passionné de randonnée, cherchant à atteindre les sommets les plus élevés de la région. Votre but est alors de maximiser l'altitude à laquelle vous vous trouvez, explorant les crêtes les plus spectaculaires et les panoramas les plus impressionnants.

D'autre part, vous pourriez opter pour une approche plus pragmatique. Suivant un chemin balisé, votre objectif est de simplement savoir, à la fin de la journée, à quel point vous vous êtes retrouvé au point le plus élevé ou le plus bas de votre parcours. Vous ne visez pas nécessairement les sommets les plus hauts, mais plutôt les points les plus élevés ou les plus bas sur le chemin que vous avez suivi.

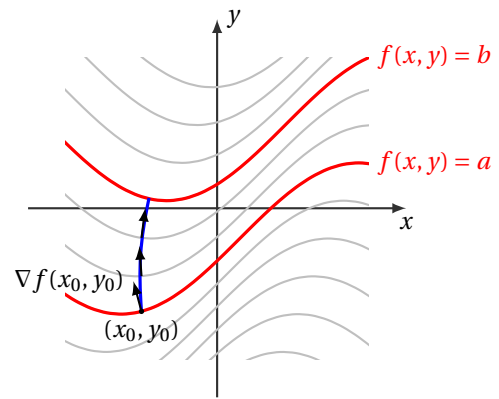
Dans les deux cas, l'altitude est une fonction de deux variables, représentant votre position sur la carte en termes de coordonnées (x, y) . L'optimisation dans ce contexte peut être abordée de deux manières différentes : dans le premier cas, dans la quête des sommets les plus élevés, vous cherchez à trouver le maximum de la fonction d'altitude $h(x, y)$. Votre objectif est de découvrir les points les plus hauts de la région, il s'agit d'une optimisation libre (comme à la section précédente). Dans le deuxième cas, lorsque vous suivez un chemin spécifique défini par une équation $g(x, y) = 0$, votre objectif est différent. Vous cherchez alors les points (x_0, y_0) où $g(x_0, y_0)$ est vérifié, tout en assurant que la fonction d'altitude h atteigne un extremum. En d'autres termes, vous cherchez les points les plus élevés ou les plus bas sur le chemin donné, tout en respectant la contrainte imposée par le chemin lui-même. C'est ce qu'on appelle l'optimisation sous contrainte, ou liée, que vous verrez dans le cours d'optimisation.

1.6. Optimisation approchée : principe de la méthode “descente de gradient”

Comme il peut être difficile de calculer les points critiques de façon exacte, vous verrez lors du cours d’“Optimisation” au deuxième semestre des méthodes numériques pour un calcul approché. Voici une petite introduction.

Lignes de plus forte pente Le vecteur gradient $\nabla f(x_0, y_0)$ indique la direction de plus grande pente à partir du point (x_0, y_0) .

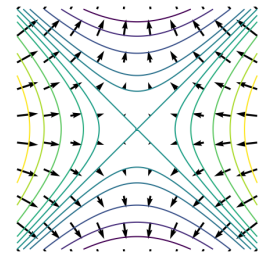
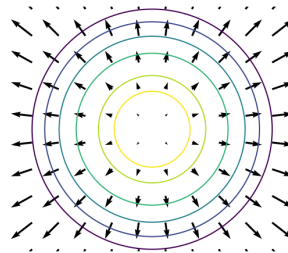
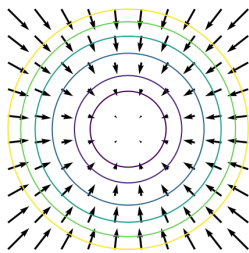
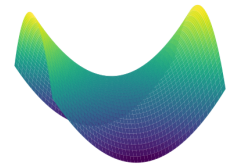
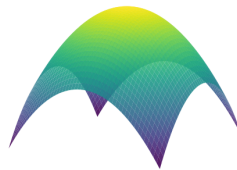
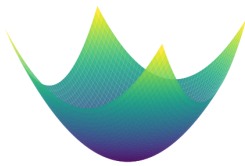
Autrement dit, si l'on veut, à partir d'un point donné (x_0, y_0) de niveau a , passer au niveau $b > a$ le plus vite possible alors il faut démarrer en suivant la direction du gradient $\nabla f(x_0, y_0)$.



Imaginons une goutte d'eau en haut d'une colline. La goutte d'eau descend en suivant la ligne de plus grande pente et elle s'arrête lorsqu'elle atteint un point bas. C'est exactement ce que fait la descente de gradient : partant d'un point sur une surface, on cherche la pente la plus grande en calculant le gradient et on descend d'un petit pas, on recommence à partir du nouveau point jusqu'à atteindre un minimum local.

L'idée de la méthode de descente de gradient classique est la suivante : puisque le gradient indique la direction dans laquelle la fonction f croît le plus rapidement, nous allons suivre la direction opposée au gradient, pour laquelle f décroît le plus rapidement. Ainsi, partant d'un point (x_0, y_0) au hasard, on sait dans quelle direction se déplacer pour obtenir un nouveau point (x_1, y_1) en lequel f est plus petite. Et on recommence.

Sur les trois dessins ci-dessous, on a dessiné les lignes de niveau d'une fonction f ainsi que les vecteurs $-\nabla f(x, y)$. On voit que ces vecteurs pointent bien vers le minimum (figure de gauche), s'éloignent d'un maximum (figure centrale), le cas d'un point-selle est spécial (figure de droite). Dans tous les cas, la longueur des vecteurs gradients diminue à l'approche du point critique.



Cas d'un minimum

Cas d'un maximum

Cas d'un point-selle

1.6.1. Descente de gradient

On nous donne une fonction f de deux variables (a, b) et nous cherchons un point $(a_{\min}, b_{\min})$ en lequel f atteint un minimum. Voici la méthode expliquée par des dessins sur lesquels ont été tracées des lignes de niveau.

Figure (a) Au départ nous n'avons aucune information globale sur f . La seule opération que l'on s'autorise c'est calculer $\nabla f(a, b)$ en certains points.

Figure (b) On choisit un point (a_0, b_0) au hasard. Si on note $c_0 = f(a_0, b_0)$ la valeur de f en ce point, on sait que la ligne de niveau ($f = c_0$) passe par (a_0, b_0) .

Figure (c) On calcule en ce point le gradient de f . On trace l'opposé du gradient : $-\nabla f(a_0, b_0)$. On sait d'une part que la ligne de niveau est orthogonale à ce gradient et surtout que dans la direction de $-\nabla f(a_0, b_0)$, les valeurs de f vont diminuer. On se dirige alors dans la direction opposée au gradient d'un facteur δ (par exemple

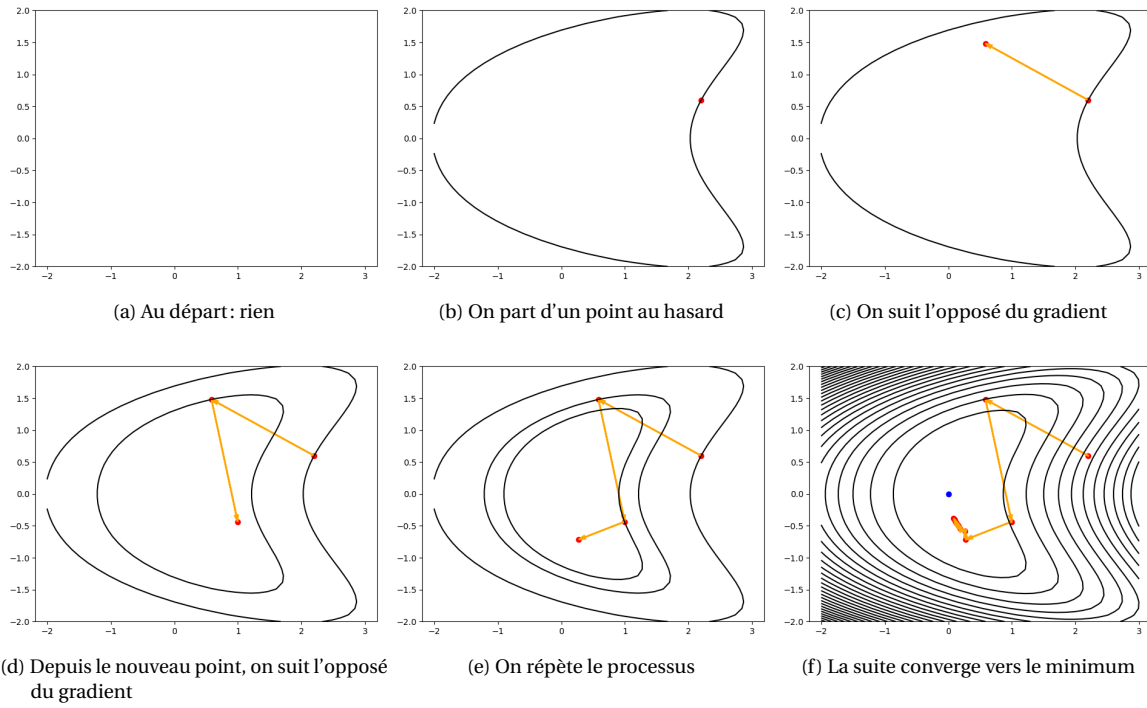


FIGURE 1.2. – Illustration de la descente de gradient

$\delta = 0.1$). On arrive à un point noté (a_1, b_1) . Par construction, si δ est assez petit, la valeur $c_1 = f(a_1, b_1)$ est plus petite que c_0 .

Figure (d) On recommence depuis (a_1, b_1) . On calcule l'opposé du gradient en (a_1, b_1) , on se dirige dans cette nouvelle direction pour obtenir un point (a_2, b_2) où $c_2 = f(a_2, b_2) < c_1$.

Figure (e) On itère le processus pour obtenir une suite de points (a_k, b_k) pour lesquels f prend des valeurs de plus en plus petites.

Figure (f) On choisit de s'arrêter (selon une condition préalablement établie) et on obtient une valeur approchée (a_N, b_N) du point $(a_{\min}, b_{\min})$ en lequel f atteint son minimum.

Évidemment avec la vision globale de la fonction, on se dit qu'on aurait pu choisir un point de départ plus près et que certaines directions choisies ne sont pas les meilleures. Mais souvenez-vous que l'algorithme est « aveugle », il ne calcule pas les valeurs de f en les (a_k, b_k) et n'a pas connaissance du comportement de f au voisinage de ces points.

Algorithme de la descente de gradient pour le calcul d'un minimum

Soit une fonction

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto f(x, y) \end{aligned}$$

On se donne un pas $\delta > 0$ et une tolérance $\epsilon > 0$ et on calcule une suite de points $\{(x_k, y_k)\}_k$ par récurrence de la façon suivante:

$$\begin{cases} (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \text{ donné,} \\ (x_{k+1}, y_{k+1}) = (x_k, y_k) - \delta \nabla f(x_k, y_k). \end{cases}$$

On s'arrête lorsque $\|\nabla f(x_k, y_k)\| \leq \epsilon$ ou après un certain nombre d'itérations.

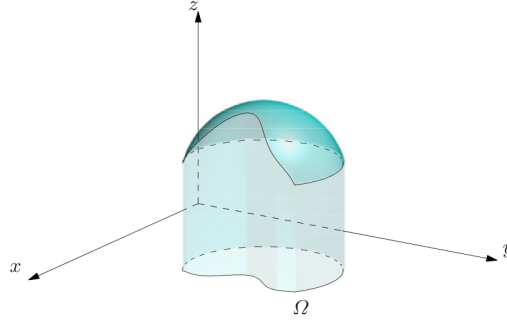
Remarque

- Plus on choisit le point initial (x_0, y_0) proche d'un minimum local, plus l'algorithme va aboutir rapidement. Mais comme on ne sait pas où est ce minimum local (c'est ce que l'on cherche), le plus simple est de choisir un (x_0, y_0) au hasard.
- Le critère d'arrêt assure qu'en (x_k, y_k) le gradient est très petit. Cela ne garantit pas que ce point soit proche d'un minimum local (et encore moins d'un minimum global). Souvenez-vous: en un minimum local le gradient est nul, mais ce n'est pas parce que le gradient est nul que l'on a atteint un minimum local, cela pourrait être un point-selle voire un maximum local.

- Il est important de calculer $\nabla f(x, y)$ rapidement.
- Le choix du pas δ est crucial. On sait juste que l'on peut choisir δ assez petit de façon à avoir $f(x_{k+1}, y_{k+1}) \leq f(x_k, y_k)$ car dans la direction de $-\nabla f(x_k, y_k)$ la fonction f décroît.
On peut fixer à l'avance un pas δ commun à toutes les itérations, par exemple $\delta = 0.01$. On pourrait également tester à chaque itération plusieurs valeurs de δ par balayage ($\delta = 0.001$, puis $\delta = 0.002 \dots$) et choisir pour δ celui en lequel f prend la plus petite valeur.

1.7. Intégrales doubles

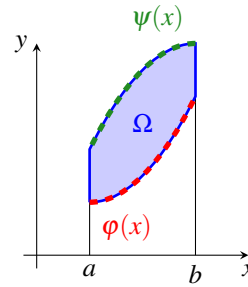
Dans cette dernière section, nous introduisons le concept d'intégrale double, qui est l'intégrale d'une fonction de deux variables. Nous expliquons comment évaluer cette intégrale et illustrons son utilité, notamment pour calculer l'aire d'un domaine d'intégration et le volume d'un solide délimité par le graphe d'une fonction à deux variables.



Théorème 1.15 (de FUBINI)

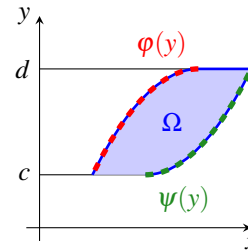
Soient $x \mapsto \varphi(x)$ et $x \mapsto \psi(x)$ deux fonctions continues sur l'intervalle $[a; b]$ avec $\varphi(x) \leq \psi(x)$ pour tout $x \in [a; b]$. Définissons Ω comme l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a \leq x \leq b$ et $\varphi(x) \leq y \leq \psi(x)$. Alors l'intégrale double de $f(x, y)$ sur Ω peut être évaluée comme suit :

$$\iint_{\Omega} f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) \, dy \, dx.$$



Si le domaine Ω le permet, on peut échanger les rôles de x et de y . Soient $y \mapsto \varphi(y)$ et $y \mapsto \psi(y)$ deux fonctions continues sur l'intervalle $[c; d]$ avec $\varphi(y) \leq \psi(y)$ pour tout $y \in [c; d]$. Définissons Ω comme l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $c \leq y \leq d$ et $\varphi(y) \leq x \leq \psi(y)$. Alors l'intégrale double de $f(x, y)$ sur Ω peut être évaluée comme suit :

$$\iint_{\Omega} f(x, y) \, dx \, dy = \int_c^d \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) \, dx \, dy.$$



Quelquefois, en inversant l'ordre d'intégration sur un domaine élémentaire, une intégrale double qui semble difficile à évaluer peut devenir relativement simple à résoudre.

EXEMPLE

Soient $f(x, y) = xe^{xy}$ et $\mathcal{R} = [0; 1] \times [0; 2]$. Alors

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{R}} xe^{xy} \, dx \, dy &= \int_0^1 \int_0^2 xe^{xy} \, dy \, dx = \int_0^1 x \left(\int_0^2 e^{xy} \, dy \right) dx = \int_0^1 x \left[\frac{e^{xy}}{x} \right]_{y=0}^{y=2} dx \\ &= \int_0^1 x \left(\frac{e^{2x}}{x} - \frac{1}{x} \right) dx = \int_0^1 (e^{2x} - 1) dx = \left[\frac{e^{2x}}{2} - x \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{e^2}{2} - 1 - \frac{1}{2} + 0 = \frac{e^2}{2} - \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

EXEMPLE

On veut calculer le volume du solide qui s'élève sur le domaine Ω du plan Oxy délimité par la droite d'équation $y = 2x$ et la parabole $y = x^2$ et couverte par le paraboloïde $z = x^2 + y^2$.

Première méthode. Le domaine Ω peut être décrit par

$$\Omega = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq 2x \}.$$

Le volume se calcule alors par

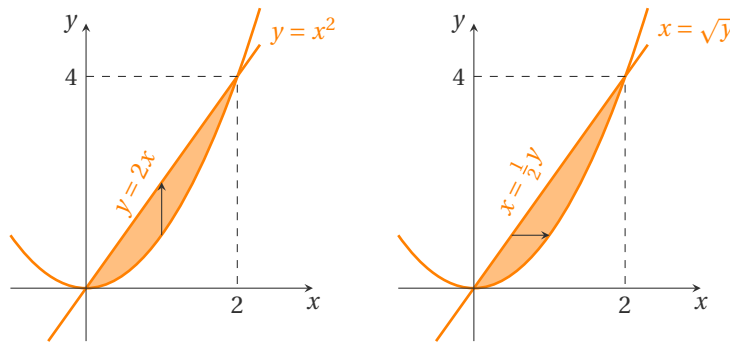
$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} (x^2 + y^2) \, dx \, dy &= \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (x^2 + y^2) \, dy \, dx = \int_0^2 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_{y=x^2}^{y=2x} dx = \int_0^2 \left(x^2(2x) + \frac{(2x)^3}{3} - x^2(x^2) - \frac{(x^2)^3}{3} \right) dx \\ &= \int_0^2 \left(\frac{14x^3}{3} - x^4 + \frac{x^6}{3} \right) dx = \left[\frac{7x^4}{6} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{21} \right]_{x=0}^{x=2} = \frac{216}{35}. \end{aligned}$$

Deuxième méthode. Le domaine Ω peut être décrit par

$$\Omega = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 4, \sqrt{y} \leq x \leq y/2 \}.$$

Le volume se calcule alors par

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} (x^2 + y^2) \, dx \, dy &= \int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^{y/2} (x^2 + y^2) \, dx \, dy = \int_0^4 \left[\frac{x^3}{3} + xy^2 \right]_{x=\sqrt{y}}^{x=y/2} dy = \int_0^4 \left(\frac{\sqrt{y}^3}{3} + \sqrt{y}y^2 - \frac{(y/2)^3}{3} - (y/2)y^2 \right) dy \\ &= \int_0^4 \left(\frac{y^{3/2}}{3} + y^{5/2} - \frac{13y^3}{24} \right) dy = \left[\frac{2y^{5/2}}{15} + \frac{2y^{7/2}}{7} - \frac{13y^4}{96} \right]_{y=0}^{y=4} = \frac{216}{35}. \end{aligned}$$

**Remarque (Cas très particulier)**

Si Ω est le rectangle $\Omega = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d \}$ et si f est le produit d'une fonction qui ne dépend que de x et d'une fonction qui ne dépend que de y , i.e. $f(x, y) = h(x)g(y)$, alors

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) \, dy \, dx = \left(\int_a^b h(x) \, dx \right) \left(\int_c^d g(y) \, dy \right).$$

EXEMPLE

Soit $R = [0; 1] \times [0; 2]$; on veut calculer l'intégrale double $\iint_R xy \, dx \, dy$. On a

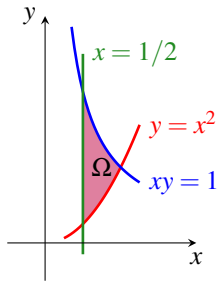
$$\iint_R xy \, dx \, dy = \int_0^1 \int_0^2 xy \, dy \, dx = \left(\int_0^1 x \, dx \right) \left(\int_0^2 y \, dy \right) = \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=0}^{x=1} \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=2} = \frac{1}{2}.$$

EXEMPLE

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ l'ensemble délimité par les courbes d'équation $x = \frac{1}{2}$, $xy = 1$ et $y = x^2$.

On veut calculer l'intégrale double $\iint_{\Omega} 1 \, dx \, dy$. Cette intégrale mesure l'aire de la zone coloriée et on peut la calculer par plusieurs méthodes. Pour cela, il faut tout d'abord cal-

culer les points d'intersection des courbes qui délimitent Ω :



$$\begin{aligned} \begin{cases} xy = 1, \\ y = x^2, \end{cases} &\iff (x, y) = (1, 1); \\ \begin{cases} x = 1/2, \\ y = x^2, \end{cases} &\iff (x, y) = (1/2, 1/4); \\ \begin{cases} x = 1/2, \\ xy = 1, \end{cases} &\iff (x, y) = (1/2, 2). \end{aligned}$$

1. On calcule l'intégrale double $\iint_{\Omega} f(x, y) \, dx \, dy$ avec $f(x, y) = 1$ pour tout $(x, y) \in \Omega$:

• soit par

$$\iint_{\Omega} f(x, y) \, dx \, dy = \int_{1/2}^1 \int_{x^2}^{1/x} 1 \, dy \, dx = \int_{1/2}^1 [y]_{x^2}^{1/x} \, dx = \int_{1/2}^1 \frac{1}{x} - x^2 \, dx = \ln(1) - \frac{1}{3} + \ln(2) + \frac{1}{24} = \ln(2) - \frac{7}{8};$$

• soit par

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} f(x, y) \, dx \, dy &= \int_{1/4}^1 \int_{1/2}^{\sqrt{y}} 1 \, dx \, dy + \int_1^2 \int_{1/2}^{1/y} 1 \, dx \, dy = \int_{1/4}^1 [x]_{1/2}^{\sqrt{y}} \, dy + \int_1^2 [x]_{1/2}^{1/y} \, dy \\ &= \int_{1/4}^1 \sqrt{y} - \frac{1}{2} \, dy + \int_1^2 \frac{1}{y} - \frac{1}{2} \, dy = \left[\frac{y^{3/2}}{3/2} - \frac{y}{2} \right]_{1/4}^1 + \left[\ln(y) - \frac{y}{2} \right]_1^2 = \ln(2) - \frac{7}{24}. \end{aligned}$$

2. On calcule l'aire comme au lycée:

$$\int_{1/2}^1 \frac{1}{x} \, dx - \int_{1/2}^1 x^2 \, dx = [\ln(x)]_{1/2}^1 - \left[\frac{x^3}{3} \right]_{1/2}^1 = \ln(1) + \ln(2) - \frac{1}{3} + \frac{1}{24} = \ln(2) - \frac{7}{24}.$$

Proposition 1.16 (Changement de variables)

Soient $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $\psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ deux bijections de classe $\mathcal{C}^1$. Considérons la fonction de changement de variables

$$\begin{aligned} F: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (u, v) &\mapsto (x = \varphi(u, v), y = \psi(u, v)) \end{aligned}$$

Soit $f(x, y)$ une fonction continue sur un domaine D fermé et borné, alors

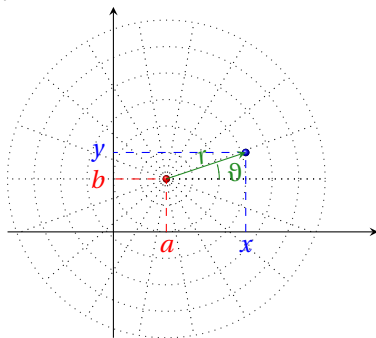
$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{\mathbb{R}^2} f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \cdot |J| \, du \, dv,$$

où $J = \partial_u \varphi \partial_v \psi - \partial_v \varphi \partial_u \psi$, appelé jacobien, est le déterminant de la matrice $\begin{bmatrix} \partial_u \varphi & \partial_v \varphi \\ \partial_u \psi & \partial_v \psi \end{bmatrix}$ appelée jacobienne de la fonction F .

Cas des coordonnées polaires

$$(r, \vartheta) \mapsto (x = a + r \cos(\vartheta), y = b + r \sin(\vartheta))$$

où $(r, \vartheta) \in \mathbb{R}_+^* \times [0; 2\pi[$ sont les coordonnées du point $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(a, b)\}$.



Cette application a pour jacobien

$$\begin{aligned} J &= \det \begin{pmatrix} \partial_r x & \partial_{\vartheta} x \\ \partial_r y & \partial_{\vartheta} y \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & -r \sin(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) & r \cos(\vartheta) \end{pmatrix} \\ &= r \cos^2(\vartheta) + r \sin^2(\vartheta) = r \end{aligned}$$

donc

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \iint_D f(a + r \cos(\vartheta), b + r \sin(\vartheta)) \cdot r \, dr \, d\vartheta.$$

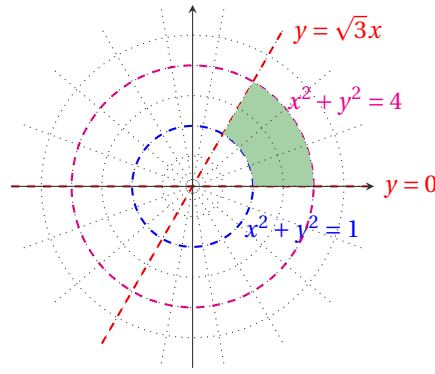
EXEMPLE

On veut intégrer la fonction $f(x, y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}$ sur l'ensemble

$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y < \sqrt{3}x \text{ et } 1 < x^2 + y^2 < 4 \right\}.$$

Si on passe en coordonnées polaires on a

$$\Omega = \left\{ (r, \vartheta) \in \mathbb{R}_+^* \times [0; 2\pi[\mid 0 < \vartheta < \frac{\pi}{3} \text{ et } 1 < r < 2 \right\}.$$



On doit alors calculer

$$\int_{\Omega} \frac{1}{1+r^2} r \, dr \, d\vartheta = \int_0^{\pi/3} \int_1^2 \frac{r}{1+r^2} \, dr \, d\vartheta = \left(\int_0^{\pi/3} d\vartheta \right) \left(\int_1^2 \frac{r}{1+r^2} \, dr \right) = \frac{\pi}{3} \left[\frac{\ln(1+r^2)}{2} \right]_1^2 = \frac{\pi \ln(5/2)}{6}.$$

EXEMPLE

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \, dx &= \sqrt{\left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \, dx \right) \left(\int_0^{+\infty} e^{-y^2} \, dy \right)} = \sqrt{\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-x^2-y^2} \, dy \, dx} = \sqrt{\int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} r e^{-r^2} \, d\vartheta \, dr} \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2} \int_0^{+\infty} r e^{-r^2} \, dr} = \sqrt{\frac{\pi}{2} \left[-\frac{e^{-r^2}}{2} \right]_0^{+\infty}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \end{aligned}$$

1.7.1. Applications

Définition 1.17 (Aire)

L'intégrale double $\iint_A 1 \, dx \, dy$ mesure l'aire de A .

EXEMPLE (AIRE D'UN DISQUE)

Calculons l'aire d'un disque D_R de rayon $R > 0$: on se place dans un système de coordonnées centré sur le centre du disque, qui a donc pour équation $x^2 + y^2 \leq R^2$. Alors

$$D_R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq R^2 \right\} = \left\{ (r, \vartheta) \in \mathbb{R}_+^* \times [0; 2\pi[\mid r \leq R \right\}$$

et

$$\iint_{D_R} 1 \, dx \, dy = \int_0^{2\pi} \int_0^R r \, dr \, d\vartheta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^R d\vartheta = \frac{R^2}{2} \int_0^{2\pi} 1 \, d\vartheta = \pi R^2.$$

Remarquons que dans ce cas on aurait pu utiliser directement ce qu'on a appris au premier semestre : si nous ne conservons que les valeurs positives de y , on obtiendra un demi-disque, ensemble des points :

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -R \leq x \leq R \text{ et } 0 \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2} \right\}.$$

C'est la surface sous la courbe de la fonction $x \mapsto f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ dans l'intervalle $[-R; R]$. Comme c'est une fonction positive, l'aire correspondante égale l'intégrale $\int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} \, dx$. Pour calculer celle-ci, effectuons le changement de variable $x = R \cos(t)$. On souhaite que x varie dans l'intervalle $[-R; R]$, on prend donc t variant dans l'intervalle $[0; \pi]$ par exemple. Là, la fonction $\varphi(t) = R \cos(t)$ est continûment dérivable sur $[0; \pi]$. De plus $\sqrt{R^2 - x^2} = R \sin(t)$ car le sinus est

positif ou nul sur $[0; \pi]$. On a donc, en effectuant ce changement de variable

$$\begin{aligned} & \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} dx \xrightarrow{\quad \quad \quad} \int_0^\pi \sqrt{R^2 - R^2 \cos^2(t)} (-R \sin(t)) dt \quad \begin{array}{l} x = R \cos(t) \\ dx = -R \sin(t) dt \end{array} \\ &= -R^2 \int_0^\pi \sin^2 t dt \xrightarrow{\quad \quad \quad} -R^2 \int_0^\pi \frac{1 - \cos(2t)}{2} dt \quad \cos(2t) = 1 - 2 \sin^2 t \\ &= -R^2 \left[\frac{t}{2} - \sin(2t) \right]_0^\pi = -R^2 \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

C'est l'aire d'un demi-disque, donc l'aire du disque entier est πR^2 .

Définition 1.18 (Masse)

Si $f(x, y)$ est la densité au point (x, y) , l'intégrale double $\iint_A f(x, y) dx dy$ est la masse de la partie A.

EXEMPLE

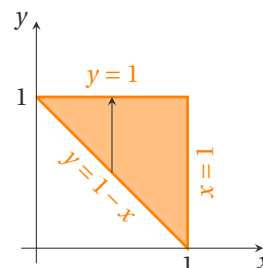
Si une charge électrique est répartie sur une région A et si la densité de charge (en unités par unités carrées) est donnée par $\sigma(x, y)$ en un point (x, y) de A, alors la charge totale Q est donnée par

$$\iint_A \sigma(x, y) dx dy.$$

Par exemple, supposons qu'une charge est distribuée sur le domaine A de la figure ci-contre de telle sorte que la densité de charge en (x, y) est $\sigma(x, y) = xy$, mesurée en coulombs par mètre carré ($C m^{-2}$). Alors la charge totale est

$$\begin{aligned} Q &= \iint_A \sigma(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_{1-x}^1 xy dy dx = \int_0^1 \left[x \frac{y^2}{2} \right]_{y=1-x}^{y=1} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 x(1 - (1-x)^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (2x^2 - x^3) dx = \frac{1}{2} \left[\frac{2}{3} x^3 - \frac{1}{4} x^4 \right]_0^1 = \frac{5}{24}. \end{aligned}$$

La charge totale est donc de $\frac{5}{24} C$.



Définition 1.19 (Centre de gravité)

Si $f(x, y)$ est la densité au point (x, y) , le centre de gravité de la partie A se trouve en (x_G, y_G) ainsi définis

$$x_G = \frac{\iint_A x f(x, y) dx dy}{\iint_A f(x, y) dx dy}, \quad y_G = \frac{\iint_A y f(x, y) dx dy}{\iint_A f(x, y) dx dy}.$$

Physiquement cela signifie que la plaque A se comporte comme si toute sa masse était concentrée en son centre d'inertie. Par exemple, elle est en équilibre horizontal lorsqu'elle repose sur son centre d'inertie.

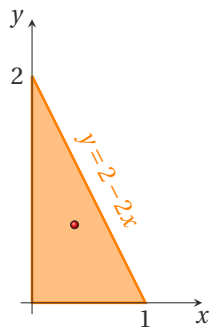
EXEMPLE

On veut déterminer la masse et le centre d'inertie d'une fine plaque de métal triangulaire dont les sommets sont en $(0, 0)$, $(1, 0)$ et $(0, 2)$, sachant que la fonction densité est $f(x, y) = 1 + 3x + y$.

Le triangle est représenté dans la figure ci-contre (l'équation de la frontière supérieure est $y = 2 - 2x$). La masse de

la plaque de métal est

$$\begin{aligned} m &= \iint_A f(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_0^{2-2x} (1 + 3x + y) dy dx \\ &= \int_0^1 \left[y + 3xy + \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=2-2x} dx = \int_0^1 \left[2 - 2x + 3x(2 - 2x) + \frac{(2 - 2x)^2}{2} \right] dx \\ &= 4 \int_0^1 (1 - x^2) dx = 4 \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$



Le moment de la plaque de métal entière par rapport à l'axe Ox est

$$\iint_A x f(x, y) \, dx \, dy = \int_0^1 \int_0^{2-2x} x(1+3x+y) \, dy \, dx = \int_0^1 \left[xy + 3x^2y + \frac{xy^2}{2} \right]_{y=0}^{y=2-2x} dx = 4 \int_0^1 (x - x^3) \, dx = 4 \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = 1$$

et le moment de la plaque de métal entière par rapport à l'axe Oy est

$$\begin{aligned} \iint_A y f(x, y) \, dx \, dy &= \int_0^1 \int_0^{2-2x} y(1+3x+y) \, dy \, dx = \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2} + 3x \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^{y=2-2x} dx = \frac{2}{3} \int_0^1 (7 - 9x - 3x^2 + 5x^3) \, dx \\ &= \frac{2}{3} \left[7x - \frac{9}{2}x^2 - x^3 + \frac{5}{4}x^4 \right]_0^1 = \frac{11}{6}. \end{aligned}$$

Les coordonnées du centre d'inertie sont donc $\left(\frac{1}{3}, \frac{11}{6} \right) = \left(\frac{3}{8}, \frac{11}{16} \right)$.

1.8. Fonctions prédéfinies en Python

1.8.1. Calcul formel avec sympy

Avec sympy, nous pouvons effectuer des calculs symboliques tels que le gradient et la matrice hessienne d'une fonction donnée. Il est également possible de trouver les points critiques de cette fonction. Si ces points critiques existent et sont calculables exactement, nous pouvons ensuite évaluer la matrice hessienne en chacun de ces points pour déterminer leur nature.

```
import sympy as sp

# Définition des symboles
x, y = sp.symbols('x y', real=True)

# La fonction
f = lambda x,y : 2*x-y**3+x**2*y
print(f"$f(x,y) = {sp.latex(f(x,y))}$\n\n")

# Le gradient
df_dx = sp.diff(f(x,y),x)
df_dy = sp.diff(f(x,y),y)
print(f"$\nabla f(x,y) = ({sp.latex(df_dx)},{sp.latex(df_dy)})^T$\n\n")

# Équation du plan tangent en (1, 1)
x0, y0 = 1, 1
plan_tangent = f(x0,y0) + (x-x0)*df_dx.subs({x:x0,y:y0}) +
    (y-y0)*df_dy.subs({x:x0,y:y0})
print(f"Équation du plan tangent en ({x0}, {y0}) :
    {sp.latex(plan_tangent)}$\n\n")

# Points critiques
critical_points = sp.solve([df_dx, df_dy], (x, y))
print(f"$\text{{Points critiques}} = {sp.latex(critical_points)}$\n\n")

# La matrice Hessienne
d2f_dxx = sp.diff(df_dx,x)
d2f_dxy = sp.diff(df_dx,y)
d2f_dyx = sp.diff(df_dy,x)
d2f_dyy = sp.diff(df_dy,y)
hessian = sp.Matrix([[d2f_dxx, d2f_dxy], [d2f_dyx, d2f_dyy]])
print(f"$H(x,y) = {sp.latex(hessian)}$\qquad")

det_hessian = d2f_dxx*d2f_dyy - d2f_dxy*d2f_dyx
print(f"$\det(H(x,y)) = {sp.latex(det_hessian)}$\n\n")

print("Analyse de la nature des points critiques\n")
for x_c,y_c in critical_points:
    hessian_at_critical = sp.Matrix([[d2f_dxx, d2f_dxy], [d2f_dyx,
        d2f_dyy]]).subs({x:x_c, y:y_c})
    det_hessian_at_critical = det_hessian.subs({x:x_c, y:y_c})
    print(f"$({x_c},{y_c}) = ({sp.latex(x_c)},{sp.latex(y_c)})$\qquad")
    print(f"$H({x_c},{y_c}) = {sp.latex(hessian_at_critical)}$\qquad")
    print(f"$\det(H({x_c},{y_c})) = {sp.latex(det_hessian_at_critical)}$\n")
```

De la même manière, on peut lui demander de calculer des intégrales. Voici le calcul du deuxième exemple :

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega} (x^2 + y^2) \, dx \, dy &= \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (x^2 + y^2) \, dy \, dx = \int_0^2 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_{y=x^2}^{y=2x} dx = \int_0^2 \left(x^2(2x) + \frac{(2x)^3}{3} - x^2(x^2) - \frac{(x^2)^3}{3} \right) dx \\ &= \int_0^2 \left(\frac{14x^3}{3} - x^4 - \frac{x^6}{3} \right) dx = \left[\frac{7x^4}{6} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{21} \right]_{x=0}^{x=2} = \frac{216}{35}.\end{aligned}$$

```
import sympy as sp

# Définition des symboles
x, y = sp.symbols('x y', real=True)

# Définition des bornes du domaine
y_min = x**2
y_max = 2*x

# Fonction à intégrer
f = x**2 + y**2

# Intégrale intérieure (par rapport à y)
inner = sp.integrate(f, (y, y_min, y_max))

# Intégrale extérieure (par rapport à x)
outer = sp.integrate(inner, (x, 0, 2))

# Affichage
print(f"${{\\int_{{0}}^{{2}} \\int_{{{sp.latex(y_min)}}}^{{{sp.latex(y_max)}}} }}$  

      - $({{sp.latex(f)}})\\mathrm{d}y\\mathrm{d}x = "$  

      f"$\\int_{{0}}^{{2}} {{sp.latex(inner)}}\\mathrm{d}x = {{sp.latex(outer)}}$$$")
```

$$\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (x^2 + y^2) \, dy \, dx = \int_0^2 -\frac{x^6}{3} - x^4 + \frac{14x^3}{3} \, dx = \frac{216}{35}$$

1.8.2. Affichage avec matplotlib

Pour visualiser une fonction de deux variables, nous utiliserons `matplotlib`. Nous commencerons par afficher les courbes de niveau, puis nous verrons comment représenter la surface en trois dimensions. Il existe de nombreuses variantes et options de coloriage possibles ; pour plus de détails, consultez la documentation officielle.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

f = lambda x,y : 2*x-y**3+x**2*y

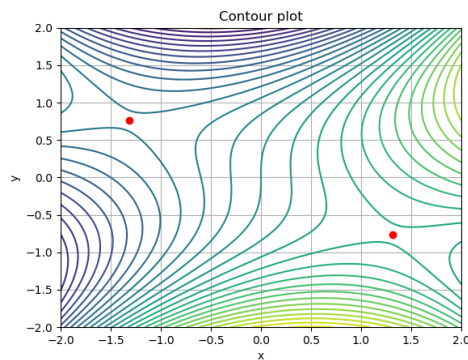
x = np.linspace(-2,2,100)
y = np.linspace(-2,2,100)
X,Y = np.meshgrid(x,y)
Z = f(X,Y)

plt.figure()
plt.contour(X,Y,Z, levels=30)
#contour = plt.contour(X,Y,Z, levels=30)
#plt.clabel(contour, inline=True, fontsize=8)
```

```
# plt.contourf(X,Y,Z, levels=30)

xx_c = [-3**0.25, 3**0.25]
yy_c = [3**(-0.25), -3**(-0.25)]
plt.scatter( xx_c, yy_c, color='red')

plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.title('Contour plot')
plt.grid(True)
plt.savefig('contour_plot.png')
# plt.show()
```

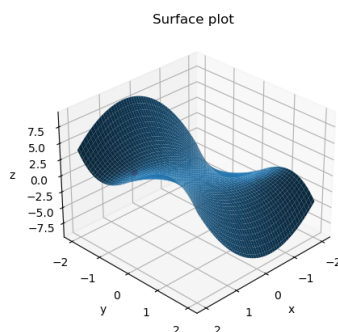


```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D

f = lambda x,y : 2*x-y**3+x**2*y

x = np.linspace(-2,2,100)
y = np.linspace(-2,2,100)
X,Y = np.meshgrid(x,y)
Z = f(X,Y)

plt.figure()
ax = plt.axes(projection='3d')
ax.view_init(30, 45)
ax.plot_surface(X, Y, Z)
xx_c = [-3**0.25, 3**0.25]
yy_c = [3**(-0.25), -3**(-0.25)]
zz_c = [f(x_c,y_c) for x_c,y_c in zip(xx_c,yy_c)]
ax.scatter(xx_c, yy_c, zz_c, color='red')
ax.set_xlabel('x')
ax.set_ylabel('y')
ax.set_zlabel('z')
ax.set_title('Surface plot')
plt.savefig('surface_plot.png')
# plt.show()
```

1.8.3. Descente de gradient

Essayons de voir comment la descente de gradient permet de s'approcher du minimum de la fonction $f(x, y) = x^2 + y^2$

```
import sympy as sp
x, y = sp.symbols('x y', real=True)

f = lambda x, y: x**2 + y**2
grad_f = [sp.diff(f(x, y), x), sp.diff(f(x, y), y)]

# Paramètres de la descente de gradient
eps = 1 / sp.S(100)
delta = 1 / sp.S(10)

# Initialisation
print(f"{'k':<5} {'xk':<15} {'yk':<15} {'||grad_f||':<15}")
xk, yk = 1, 1
grad_f_k = [g.subs({x: xk, y: yk}) for g in grad_f]
norm_grad = sp.sqrt(sum(g**2 for g in grad_f_k))
k = 0
print(f"{'k':<5} {'float(xk):<15.10f} {'float(yk):<15.10f}
      {'float(norm_grad):<15.10f}")
x_vals, y_vals, z_vals = [xk], [yk], [f(xk, yk)]

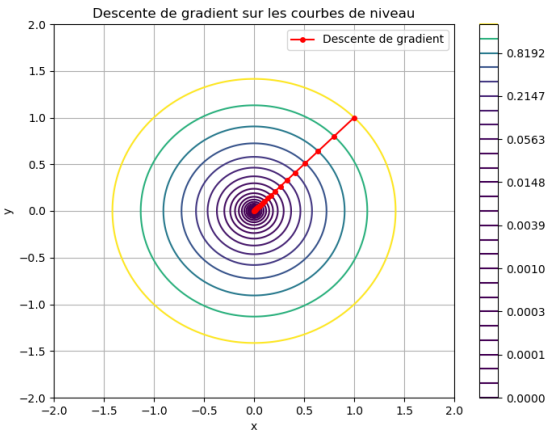
# Boucle de la descente de gradient
while sp.sqrt(sum(g**2 for g in grad_f_k)) >= eps:
    xk = xk - delta * grad_f_k[0]
    yk = yk - delta * grad_f_k[1]
    grad_f_k = [g.subs({x: xk, y: yk}) for g in grad_f]
    k += 1
    norm_grad = sp.sqrt(sum(g**2 for g in grad_f_k))
    print(f"{'k':<5} {'float(xk):<15.10f} {'float(yk):<15.10f}
          {'float(norm_grad):<15.10f}")
    x_vals.append(float(xk))
    y_vals.append(float(yk))
    z_vals.append(float(f(xk, yk)))

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
x_range = np.linspace(-2, 2, 400)
y_range = np.linspace(-2, 2, 400)
X, Y = np.meshgrid(x_range, y_range)
Z = f(X, Y)
```

```
plt.figure(figsize=(8, 6))
contour = plt.contour(X, Y, Z, levels=sorted(z_vals), cmap='viridis')
plt.colorbar(contour)

# Tracer les étapes de la descente de gradient
plt.plot(x_vals, y_vals, 'ro-', label='Descente de gradient', markersize=4)
plt.title("Descente de gradient sur les courbes de niveau")
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.savefig('descente_sympy.png')
plt.show()
```

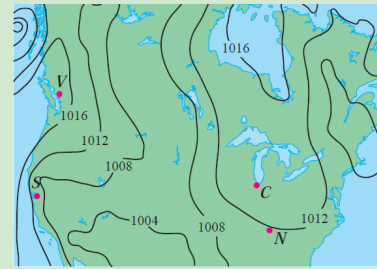
k	xk	yk	grad_f
0	1.0000000000	1.0000000000	2.8284271247
1	0.8000000000	0.8000000000	2.2627416998
2	0.6400000000	0.6400000000	1.8101933598
3	0.5120000000	0.5120000000	1.4481546879
4	0.4096000000	0.4096000000	1.1585237503
5	0.3276800000	0.3276800000	0.9268190002
6	0.2621440000	0.2621440000	0.7414552002
7	0.2097152000	0.2097152000	0.5931641602
8	0.1677721600	0.1677721600	0.4745313281
9	0.1342177280	0.1342177280	0.3796250625
10	0.1073741824	0.1073741824	0.3037000500
11	0.0858993459	0.0858993459	0.2429600400
12	0.0687194767	0.0687194767	0.1943680320
13	0.0549755814	0.0549755814	0.1554944256
14	0.0439804651	0.0439804651	0.1243955405
15	0.0351843721	0.0351843721	0.0995164324
16	0.0281474977	0.0281474977	0.0796131459
17	0.0225179981	0.0225179981	0.0636905167
18	0.0180143985	0.0180143985	0.0509524134
19	0.0144115188	0.0144115188	0.0407619307
20	0.0115292150	0.0115292150	0.0326095446
21	0.0092233720	0.0092233720	0.0260876357
22	0.0073786976	0.0073786976	0.0208701085
23	0.0059029581	0.0059029581	0.0166960868
24	0.0047223665	0.0047223665	0.0133568695
25	0.0037778932	0.0037778932	0.0106854956
26	0.0030223145	0.0030223145	0.0085483965



1.9. Exercices

Exercice 1.1

Dans la figure ci-contre on a tracé les isobares de l'Amérique du Nord au 12 août 2008. La pression indiquée est mesurée en millibars (mbar).



1. Donner une estimation de la pression

- à Nashville (point N),
- à Chicago (point C),
- à San Francisco (point S)
- et à Vancouver (point V).

2. Dans quelle ville le vent est le plus fort?

Correction

- Au point N la pression est de 1012 mbar environ,
 - au point C la pression est de 1013 mbar environ,
 - au point S la pression est de 1010 mbar environ,
 - au point V la pression est comprise entre 1016 mbar et 1020 mbar ou entre 1012 mbar et 1016 mbar.
- Le vent est plus fort à San Francisco car les lignes de pression sont le plus rapprochées.

Exercice 1.2

Déterminer les courbes de niveau des fonctions suivantes :

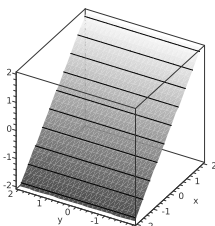
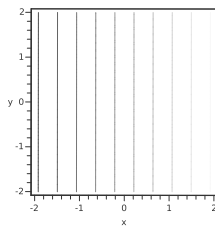
$$f(x, y) = x, \quad f(x, y) = y + 1, \quad f(x, y) = x + y - 1, \quad f(x, y) = e^{y-x^2}, \quad f(x, y) = y - \cos(x).$$

Esquissez ensuite leurs graphes (le graphe peut être vu comme un empilement de courbes de niveau qui forment une surface dans $\mathbb{R}^3$).

Correction

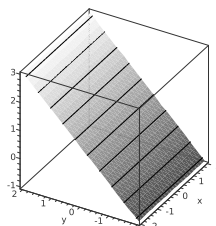
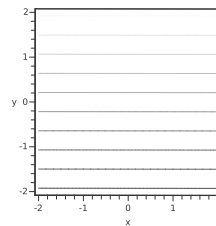
- $f(x, y) = x$:

$f(x, y) = \kappa$ ssi $x = \kappa$, les courbes de niveau sont des droites verticales et la surface représentative de f est un plan.



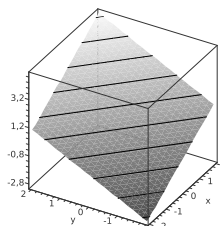
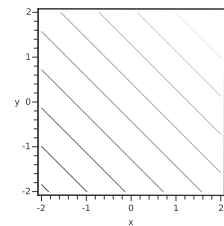
- $f(x, y) = y + 1$:

$f(x, y) = \kappa$ ssi $y = \kappa - 1$, les courbes de niveau sont des droites horizontales et la surface représentative de f est un plan.

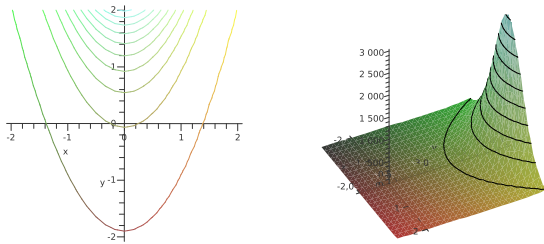


- $f(x, y) = x + y - 1$:

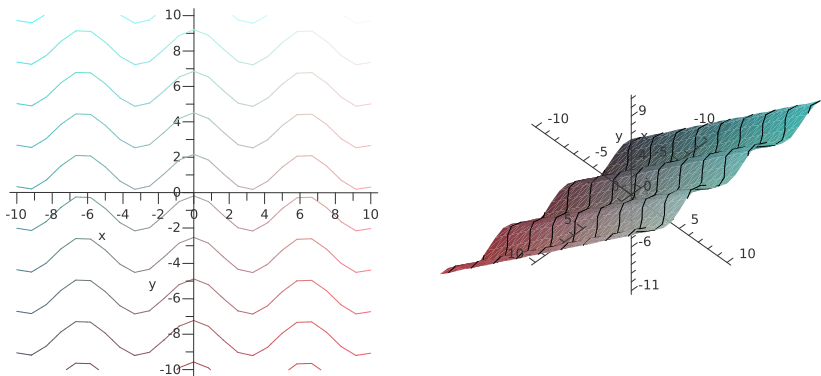
$f(x, y) = \kappa$ ssi $y = -x + (\kappa + 1)$, les courbes de niveau sont des droites de pente -1 et la surface représentative de f est un plan.



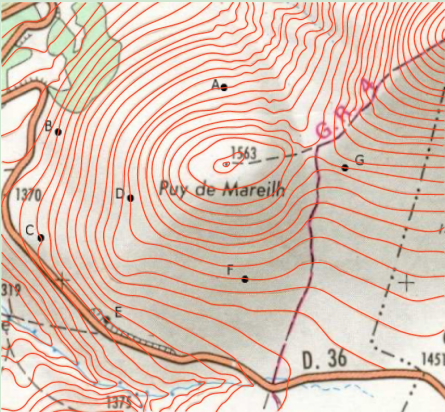
- $f(x, y) = e^{y-x^2}$:
 $f(x, y) = \kappa$ ssi $y = x^2 + \ln(\kappa)$, les courbes de niveau sont des paraboles. On observe notamment la croissance exponentielle marquée lorsque les valeurs prises par y sont grandes et celles prises par $|x|$ sont petites.



- $f(x, y) = y - \cos(x)$:
 $f(x, y) = \kappa$ ssi $y = \cos(x) + \kappa$



Exercice 1.3 (Cartes topographiques du relief)



Sur une *carte topographique*, les courbes de niveau désignent les points de même altitude. On observe sur l'extrait de carte ci-contre de l'institut Géographique National (IGN), des courbes qui donnent une idée du relief (Massif du Sancy). Elles représentent des coupes horizontales successives du terrain à des altitudes qui varient de 10 mètres en 10 mètres. Tous les points de même altitude sont situés sur la même courbe de niveau.

- Compléter le tableau

Point	A	B	C	D	E	F	G
Altitude		1370					

- Lorsque les courbes de niveau se resserrent, que peut-on dire du relief?
- La rivière coule-t-elle d'est en ouest ou vice-versa?

Correction

1. On a

Point	A	B	C	D	E	F	G
Altitude	1470	1370	1380	1470	1400	1460	1520

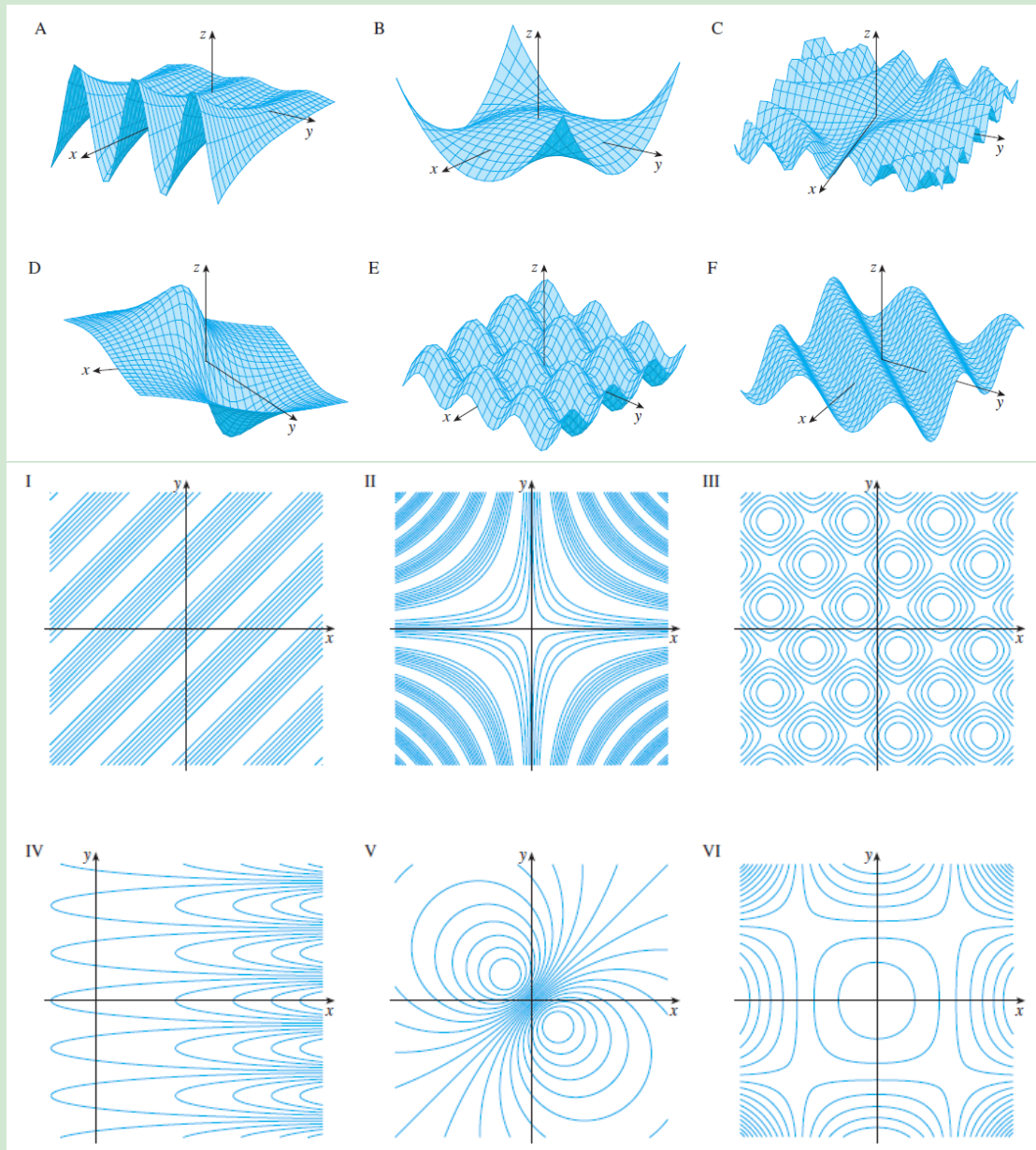
2. Les endroits du relief où les pentes sont plus escarpées ou plus douces correspondent respectivement aux courbes de niveau très rapprochées ou très distantes.

3. La rivière coule de l'est à l'ouest.

Exercice 1.4

Associer chaque fonction (1-6) à sa surface (A-F) et à ses courbes de niveau (I-VI). Commencer par associer chaque surface à ses courbes de niveau.

- | | | |
|--|----------------------------|-----------------------------------|
| 1. $f(x, y) = \sin(xy)$ | 2. $f(x, y) = \sin(x - y)$ | 3. $f(x, y) = (1 - x^2)(1 - y^2)$ |
| 4. $f(x, y) = \frac{x - y}{1 + x^2 + y^2}$ | 5. $f(x, y) = e^x \cos(y)$ | 6. $f(x, y) = \sin(x) - \sin(y)$ |



Correction

- C-II: la fonction est périodique en x et en y ; f ne change pas quand on échange x et y , *i.e.* le graphe est symétrique par rapport au plan d'équation $y = x$; $f(0, y) = f(x, 0) = 0$.
- F-I: la fonction est périodique en x et en y ; f est constante si $y = x + \kappa$.
- B-VI: $f(\pm 1, y) = f(x, \pm 1) = 0$; la trace dans le plan xz est $z = 1 - x^2$ et dans le plan yz est $z = 1 - y^2$.
- D-V: $f(x, x) = 0$; $f(x, y) > 0$ si $x > y$; $f(x, y) < 0$ si $x < y$.

5. A-IV : la fonction est périodique en y ;
6. E-III : la fonction est périodique en x et en y .

Exercice 1.5

Calculer toutes les dérivées partielles d'ordre 1 des fonctions données :

1. $f(x, y) = y^5 - 3xy$
2. $f(x, y) = x^2 + 3xy^2 - 6y^5$
3. $f(x, y) = x \cos(e^{xy})$
4. $f(x, y) = \frac{x}{y}$
5. $f(x, y) = x^y$
6. $f(x, y, z) = x \cos(xz) + \ln(2 - \sin^2(y + z))$
7. $f(x, t) = e^{-t} \cos(\pi x)$
8. $z(x, y) = (2x + 3y)^{10}$
9. $f(x, y) = \frac{ax+by}{cx+dy}$
10. $F(x, y) = \int_y^x \cos(e^t) dt$

Correction

1. $\partial_x f(x, y) = -3y$ et $\partial_y f(x, y) = 5y^4 - 3x$
2. $\partial_x f(x, y) = 2x + 3y^2$ et $\partial_y f(x, y) = 6xy - 30y^4$
3. $\partial_x f(x, y) = \cos(e^{xy}) - xye^{xy} \sin(e^{xy})$ et $\partial_y f(x, y) = -x^2 e^{xy} \sin(e^{xy})$
4. $\partial_x f(x, y) = 1/y$ et $\partial_y f(x, y) = -x/y^2$
5. $\partial_x f(x, y) = yx^y/x$ et $\partial_y f(x, y) = \ln(x)x^y$ $\triangleq x^y = e^{y \ln(x)}$ donc $x > 0$
6. $\partial_x f(x, y, z) = \cos(xz) - xz \sin(xz)$, $\partial_y f(x, y, z) = \frac{-2 \sin(y+z) \cos(y+z)}{2 - \sin^2(y+z)}$ et $\partial_z f(x, y, z) = -x^2 \sin(xz) + \frac{-2 \sin(y+z) \cos(y+z)}{2 - \sin^2(y+z)}$
7. $\partial_x f(x, t) = -\pi e^{-t} \sin(\pi x)$ et $\partial_t f(x, t) = -e^{-t} \cos(\pi x)$
8. $\partial_x z(x, y) = 20(2x + 3y)^9$ et $\partial_y z(x, y) = 30(2x + 3y)^9$
9. $\partial_x f(x, y) = \frac{(ad-bc)y}{(cx+dy)^2}$ et $\partial_y f(x, y) = \frac{(bc-ad)x}{(cx+dy)^2}$
10. $\partial_x F(x, y) = \cos(e^x)$ et $\partial_y F(x, y) = -\cos(e^y)$

On vérifie nos calculs avec le module sympy de python :

```
import sympy as sp
sp.init_printing()

x, y, z, t, a, b, c, d = sp.symbols('x y z t a b c d', real=True)

functions = [
    (y**5 - 3*x*y, (x, y)),
    (x**2 + 3*x*y**2 - 6*y**5, (x, y)),
    (x*sp.cos(sp.exp(x*y)), (x, y)),
    (x/y, (x, y)),
    (x**y, (x, y)),
    (x*sp.cos(x*z) + sp.ln(2 - sp.sin(y + z)**2), (x, y, z)),
    (sp.exp(-t)*sp.cos(sp.pi*x), (x, t)),
    ((2*x + 3*y)**10, (x, y)),
    ((a*x + b*y)/(c*x + d*y), (x, y)),
    (sp.Integral(sp.cos(sp.exp(t)), (t, y, x)), (x, y))
]

for i, (f, vars) in enumerate(functions, 1):
    var_list = ", ".join(sp.latex(v) for v in vars)
    fx_name = f"f_{{{i}}}({var_list})"

    line = f"{fx_name} = {sp.latex(f)}"

    for var in vars:
        deriv = sp.diff(f, var)
        line += f", \\\quad \\\partial_{\\{\\{sp.latex(var)}\\}\\}\\{fx_name\\} = \\{\\{sp.latex(deriv)}\\}"
```



```
print(f"${line}$\n")
```

$$\begin{aligned}
f_1(x, y) &= -3xy + y^5, & \partial_x f_1(x, y) &= -3y, & \partial_y f_1(x, y) &= -3x + 5y^4 \\
f_2(x, y) &= x^2 + 3xy^2 - 6y^5, & \partial_x f_2(x, y) &= 2x + 3y^2, & \partial_y f_2(x, y) &= 6xy - 30y^4 \\
f_3(x, y) &= x \cos(e^{xy}), & \partial_x f_3(x, y) &= -xye^{xy} \sin(e^{xy}) + \cos(e^{xy}), & \partial_y f_3(x, y) &= -x^2 e^{xy} \sin(e^{xy}) \\
f_4(x, y) &= \frac{x}{y}, & \partial_x f_4(x, y) &= \frac{1}{y}, & \partial_y f_4(x, y) &= -\frac{x}{y^2} \\
f_5(x, y) &= x^y, & \partial_x f_5(x, y) &= \frac{x^y}{x}, & \partial_y f_5(x, y) &= x^y \log(x) \\
f_6(x, y, z) &= x \cos(xz) + \log(2 - \sin^2(y+z)), & \partial_x f_6(x, y, z) &= -xz \sin(xz) + \cos(xz), & \partial_y f_6(x, y, z) &= -\frac{2 \sin(y+z) \cos(y+z)}{2 - \sin^2(y+z)}, & \partial_z f_6(x, y, z) &= -x^2 \sin(xz) - \frac{2 \sin(y+z) \cos(y+z)}{2 - \sin^2(y+z)} \\
f_7(x, t) &= e^{-t} \cos(\pi x), & \partial_x f_7(x, t) &= -\pi e^{-t} \sin(\pi x), & \partial_t f_7(x, t) &= -e^{-t} \cos(\pi x) \\
f_8(x, y) &= (2x + 3y)^{10}, & \partial_x f_8(x, y) &= 20(2x + 3y)^9, & \partial_y f_8(x, y) &= 30(2x + 3y)^9 \\
f_9(x, y) &= \frac{ax+by}{cx+dy}, & \partial_x f_9(x, y) &= \frac{a}{cx+dy} - \frac{c(ax+by)}{(cx+dy)^2}, & \partial_y f_9(x, y) &= \frac{b}{cx+dy} - \frac{d(ax+by)}{(cx+dy)^2} \\
f_{10}(x, y) &= \int_y^x \cos(e^t) dt, & \partial_x f_{10}(x, y) &= \cos(e^x), & \partial_y f_{10}(x, y) &= -\cos(e^y)
\end{aligned}$$

Exercice 1.6

Calculer toutes les dérivées partielles des fonctions suivantes :

1. $f(x, y) = 3x^2 + xy - 2y^2$
2. $f(x, y) = 4 - x^2 - 2y^2$
3. $f(x, y) = y^5 - 3xy$
4. $f(x, y) = x^2 + 3xy^2 - 6y^5$
5. $f(x, y) = x \cos(e^{xy})$
6. $f(x, y) = \frac{x}{y}$
7. $f(x, t) = e^{-t} \cos(\pi x)$
8. $f(x, y) = (2x + 3y)^{10}$
9. $f(x, y) = \frac{ax+by}{cx+dy}$
10. $f(x, y) = x^y$

Correction

1. $\partial_x f(x, y) = 6x + y$ (car y est considérée constante) et $\partial_y f(x, y) = x - 4y$ (car x est considérée constante)
2. $\partial_x f(x, y) = -2x$ et $\partial_y f(x, y) = -4y$
3. $\partial_x f(x, y) = -3y$ et $\partial_y f(x, y) = 5y^4 - 3x$
4. $\partial_x f(x, y) = 2x + 3y^2$ et $\partial_y f(x, y) = 6xy - 30y^4$
5. $\partial_x f(x, y) = \cos(e^{xy}) - xye^{xy} \sin(e^{xy})$ et $\partial_y f(x, y) = -x^2 e^{xy} \sin(e^{xy})$
6. $\partial_x f(x, y) = 1/y$ et $\partial_y f(x, y) = -x/y^2$
7. $\partial_x f(x, t) = -\pi e^{-t} \sin(\pi x)$ et $\partial_t f(x, t) = -e^{-t} \cos(\pi x)$
8. $\partial_x f(x, y) = 20(2x + 3y)^9$ et $\partial_y f(x, y) = 30(2x + 3y)^9$
9. $\partial_x f(x, y) = \frac{(ad-bc)y}{(cx+dy)^2}$ et $\partial_y f(x, y) = \frac{(bc-ad)x}{(cx+dy)^2}$
10. $\partial_x f(x, y) = yx^y/x$ et $\partial_y f(x, y) = \ln(x)x^y$ $\triangleq x^y = e^{y \ln(x)}$ donc $x > 0$

Exercice 1.7 (Loi de Fick)

Les lois de diffusion de Fick décrivent la diffusion. Les expériences de Fick portaient sur la mesure des concentrations et des flux de sel, diffusant entre deux réservoirs à travers des tubes d'eau.

La deuxième loi de Fick prédit comment la diffusion fait changer la concentration en fonction du temps. Notons φ la concentration (une fonction qui dépend de l'emplacement x et du temps t) et soit D le coefficient de diffusion (supposé constant). La deuxième loi de Fick postule que, pour tout (t, x) ,

$$\partial_t \varphi = \partial_x (D \partial_x \varphi).$$

Montrer que la fonction suivante est solution de cette équation différentielle :

$$\varphi(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right).$$

Correction

Dans un premier temps, pour simplifier nos calculs, nous allons introduire des constantes auxiliaires : on pose $A \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{4\pi D}}$ et $B = -\frac{1}{4D}$ ainsi

$$\varphi(t, x) = \frac{A}{\sqrt{t}} \exp\left(B \frac{x^2}{t}\right).$$

Il est alors plus simple de calculer les dérivées partielles :

$$\begin{aligned}\partial_t \varphi(t, x) &= \frac{-A}{2t\sqrt{t}} \exp\left(B \frac{x^2}{t}\right) - \frac{A}{\sqrt{t}} B \frac{x^2}{t^2} \exp\left(B \frac{x^2}{t}\right) = -\frac{A}{2} \times \frac{2Bx^2 + t}{t^2\sqrt{t}} \exp\left(B \frac{x^2}{t}\right) \\ \partial_x \varphi(t, x) &= \frac{2ABx}{t\sqrt{t}} \exp\left(B \frac{x^2}{t}\right) \\ \partial_x (\partial_x \varphi(t, x)) &= D \partial_x (\partial_x \varphi(t, x)) = \frac{2ABD(2Bx^2 + t)}{t^2\sqrt{t}} \exp\left(B \frac{x^2}{t}\right)\end{aligned}$$

La relation s'écrit donc

$$\partial_t \varphi(t, x) - D \partial_x (\partial_x \varphi(t, x)) = \left[-\frac{A}{2} \times \frac{2Bx^2 + t}{t^2\sqrt{t}} - \frac{2ABD(2Bx^2 + t)}{t^2\sqrt{t}} \right] \exp\left(B \frac{x^2}{t}\right) = -\frac{A(1 + 4BD)(2Bx^2 + t)}{2t^2\sqrt{t}} \exp\left(B \frac{x^2}{t}\right).$$

En remplaçant B par sa définition on a $(4BD + 1) = 0$ ainsi l'égalité est satisfaite pour tout (t, x) .

Exercice 1.8

Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = \frac{x + y}{1 + x^2 + y^2}$.

1. Déterminer et représenter les courbes de niveau de f .
2. Calculer les dérivées partielles premières de f .
3. Écrire l'équation du plan tangent à la surface définie par f au point $(0, 0)$.

Correction

1. Les courbes de niveau de f sont définies par l'équation $f(x, y) = k$, où k est une constante réelle. Cela revient à résoudre :

$$\frac{x + y}{1 + x^2 + y^2} = k,$$

ce qui donne l'équation implicite

$$x + y = k(1 + x^2 + y^2).$$

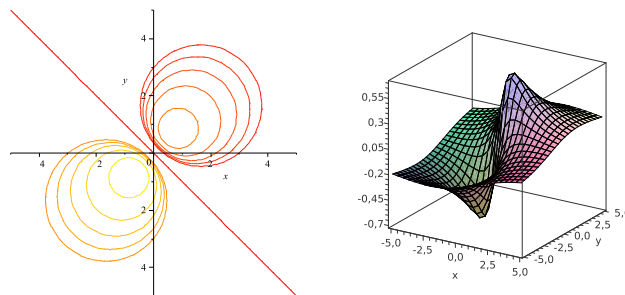
Pour $k = 0$, cette équation devient $x + y = 0$, qui est la droite d'équation $y = -x$.

Pour $k \neq 0$, l'équation peut être réécrite sous la forme :

$$x^2 + y^2 - \frac{1}{k}x - \frac{1}{k}y + 1 = 0.$$

Cette équation représente un cercle¹ pour certaines valeurs de k . En effet, pour $0 < k^2 < \frac{1}{2}$, l'équation correspond à un cercle de centre $(\frac{1}{2k}, \frac{1}{2k})$ et de rayon

$$r = \sqrt{\frac{1}{2k^2} - 1}.$$



1. Le cercle de centre (x_c, y_c) et rayon $r > 0$ a pour équation $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$ soit encore $x^2 + y^2 - 2x_c x - 2y_c y + x_c^2 + y_c^2 - r^2 = 0$.

2. Calculons les dérivées partielles premières de f

$$\partial_x f(x, y) = \frac{(1 + x^2 + y^2) - 2x(x + y)}{(1 + x^2 + y^2)^2} = \frac{1 + y^2 - x^2 - 2xy}{(1 + x^2 + y^2)^2},$$

$$\partial_y f(x, y) = \frac{(1 + x^2 + y^2) - 2y(x + y)}{(1 + x^2 + y^2)^2} = \frac{1 + x^2 - y^2 - 2xy}{(1 + x^2 + y^2)^2}.$$

3. L'équation du plan tangent à la surface définie par f en $(0, 0)$ s'obtient en utilisant l'expression du développement de Taylor au premier ordre. Les dérivées partielles premières en $(0, 0)$ sont

$$\partial_x f(0, 0) = 1, \quad \partial_y f(0, 0) = 1.$$

Ainsi, l'équation du plan tangent en $(0, 0)$ est donnée par

$$z = f(0, 0) + \partial_x f(0, 0) \cdot x + \partial_y f(0, 0) \cdot y = 0 + 1 \cdot x + 1 \cdot y = x + y.$$

```
import sympy as sp

# Définition des symboles
x, y = sp.symbols('x y')

# Définition de la fonction f(x, y)
f = (x + y) / (1 + x**2 + y**2)

# Calcul des dérivées partielles premières
df_dx = sp.diff(f, x).simplify()
df_dy = sp.diff(f, y).simplify()

# Affichage des dérivées partielles premières
print("df/dx = ", df_dx)
print("df/dy = ", df_dy)

# Équation du plan tangent en (0, 0)
x0, y0 = 0, 0
plan_tangent = f.subs({x:x0,y:y0}) + (x-x0)*df_dx.subs({x:x0,y:y0}) + \
    - (y-y0)*df_dy.subs({x:x0,y:y0})

# Affichage de l'équation du plan tangent
print(f"Équation du plan tangent en ({x0}, {y0}) :", plan_tangent)
```

```
df/dx = (x**2 - 2*x*(x + y) + y**2 + 1)/(x**2 + y**2 + 1)**2
df/dy = (x**2 + y**2 - 2*y*(x + y) + 1)/(x**2 + y**2 + 1)**2
Équation du plan tangent en (0, 0) : x + y
```

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D

# Définition de la fonction f(x, y)
f = lambda x,y : (x + y) / (1 + x**2 + y**2)

# Génération des données pour la surface
x = np.linspace(-3, 3, 100)
y = np.linspace(-3, 3, 100)
X, Y = np.meshgrid(x, y)
```

```

Z = f(X, Y)

# Tracé de la surface
fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
ax.plot_surface(X, Y, Z, cmap='viridis')

# Tracé des courbes de niveau
ax.contour(X, Y, Z, 10, offset=0, zdir='z', cmap='viridis')

# Définition des étiquettes des axes
ax.set_xlabel('x')
ax.set_ylabel('y')
ax.set_zlabel('f(x, y)')
ax.set_title('$f(x, y) = \frac{x + y}{1 + x^2 + y^2}$')

plt.show()

```

Exercice 1.9

Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ et (a, b) un point de $\mathbb{R}^2$. On suppose que

$$\partial_x f(a, b) = 0, \quad \partial_y f(a, b) = 0, \quad \partial_{xx} f(a, b) = 1, \quad \partial_{yy} f(a, b) = 2, \quad \partial_{xy} f(a, b) = 3.$$

Le point (a, b) est-il un point critique? Si oui, de quelle nature?

Correction

Le point (a, b) est un point critique de f car les dérivées premières de f s'annulent en ce point.

Pour déterminer la nature du point critique, calculons le déterminant de la matrice hessienne $H_f(a, b)$:

$$H_f(a, b) = \begin{pmatrix} \partial_{xx} f(a, b) & \partial_{xy} f(a, b) \\ \partial_{xy} f(a, b) & \partial_{yy} f(a, b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de cette matrice est:

$$\det(H_f(a, b)) = 1 \times 2 - 3 \times 3 = 2 - 9 = -7.$$

Comme le déterminant de la hessienne est négatif, le point (a, b) est un point selle.

Exercice 1.10

On suppose que $(1, 1)$ est un point critique d'une fonction f dont les dérivées secondes sont continues. Dans chaque cas, que peut-on dire au sujet de f ?

1. $\partial_{xx} f(1, 1) = 4, \partial_{xy} f(1, 1) = 1, \partial_{yy} f(1, 1) = 2$;
2. $\partial_{xx} f(1, 1) = 4, \partial_{xy} f(1, 1) = 3, \partial_{yy} f(1, 1) = 2$.

Correction

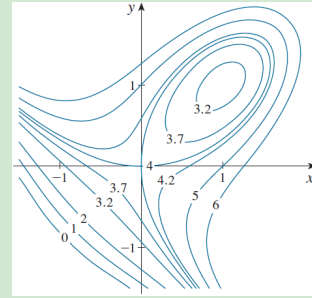
1. D'abord on calcule $\det(H_f(1, 1)) = \partial_{xx} f(1, 1)\partial_{yy} f(1, 1) - (\partial_{xy} f(1, 1))^2 = 7$. Comme $\det(H_f(1, 1)) > 0$ et $\partial_{xx} f(1, 1) > 0$, f a un minimum local en $(1, 1)$.
2. D'abord on calcule $\det(H_f(1, 1)) = \partial_{xx} f(1, 1)\partial_{yy} f(1, 1) - (\partial_{xy} f(1, 1))^2 = -1$. Comme $\det(H_f(1, 1)) < 0$, f a un point-selle en $(1, 1)$.

Exercice 1.11

À partir de la carte des courbes de niveau représentée sur la figure ci-contre, localiser les points critiques de $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ et préciser, pour chacun de ces points, s'il s'agit d'un point-selle, d'un maximum local ou d'un minimum local.

Vérifier ensuite le raisonnement sachant que

$$f(x, y) = 4 + x^3 + y^3 - 3xy.$$

**Correction**

À partir de la carte des courbes de niveau, on peut faire les observations suivantes.

- Au point (1, 1), les courbes de niveau entourent le point de manière ovale, indiquant que les valeurs de f augmentent lorsque l'on s'éloigne du point dans toutes les directions. Cela suggère un minimum local à proximité de (1, 1).
- Au point (0, 0), les courbes de niveau ressemblent à des hyperboles, ce qui suggère un point-selle, car les valeurs de f augmentent dans certaines directions et diminuent dans d'autres.

Vérifions cette analyse à l'aide des dérivées de f .

Points critiques : Calculons les dérivées partielles premières :

$$\partial_x f(x, y) = 3x^2 - 3y, \quad \partial_y f(x, y) = 3y^2 - 3x.$$

Un point critique est une solution du système $\partial_x f(x, y) = 0$ et $\partial_y f(x, y) = 0$. Résolvons ce système

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - y = 0 \\ x^4 - x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - y = 0 \\ x(x^3 - 1) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - y = 0 \\ x = 0 \text{ ou } x = 1 \end{cases}$$

Cela donne les deux points critiques suivants : (1, 1) et (0, 0).

Étude des points critiques : Pour étudier la nature des points critiques, calculons les dérivées secondes

$$\partial_{xx} f(x, y) = 6x, \quad \partial_{xy} f(x, y) = -3, \quad \partial_{yy} f(x, y) = 6y.$$

Le déterminant de la matrice hessienne est donné par

$$\det(H_f(x, y)) = \partial_{xx} f(x, y) \cdot \partial_{yy} f(x, y) - (\partial_{xy} f(x, y))^2 = 36xy - 9.$$

Analyse des points critiques :

- Pour le point critique (1, 1) :

$$\det(H_f(1, 1)) = 36 \times 1 \times 1 - 9 = 36 - 9 = 27 > 0, \quad \partial_{xx} f(1, 1) = 6 > 0.$$

Comme $\det(H_f(1, 1)) > 0$ et $\partial_{xx} f(1, 1) > 0$, le point (1, 1) est un minimum local.

- Pour le point critique (0, 0) :

$$\det(H_f(0, 0)) = 36 \times 0 \times 0 - 9 = -9 < 0.$$

Comme $\det(H_f(0, 0)) < 0$, le point (0, 0) est un point-selle.

```
import sympy as sp
```

```
x, y = sp.symbols('x y', real=True)
```

```
f = 4 + x**3 + y**3 - 3*x*y
```

```
grad_f = [sp.diff(f, var) for var in (x, y)]
```

```
hess_f = [[sp.diff(df, var1) for var1 in (x, y)] for df in grad_f]
```

```
print("Fonction f(x, y) :", f)
```

```
print("Gradient de f(x, y) :", grad_f)
```

```
print("Matrice hessienne de f(x, y) :", hess_f)
```

```

stationary_points = sp.solve(grad_f, (x, y))
print("Points stationnaires :", stationary_points)
print()

# Afficher la nature des points stationnaires
for point in stationary_points:
    hess_matrix_evaluated = [[entry.subs({x: point[0], y: point[1]}) for
        entry in row] for row in hess_f]
    determinant = sp.det(sp.Matrix(hess_matrix_evaluated))
    if determinant < 0:
        nature = 'Point de selle'
    elif determinant > 0:
        if hess_matrix_evaluated[0][0] < 0:
            nature = 'Maximum'
        else:
            nature = 'Minimum'
    else:
        nature = 'Indéterminé'
    print("Point stationnaire :", point)
    print("Matrice hessienne évaluée en le point :", hess_matrix_evaluated)
    print("Déterminant de la matrice hessienne :", determinant)
    print("Nature du point :", nature)
    print()

```

Fonction $f(x, y) : x^3 - 3xy + y^3 + 4$
 Gradient de $f(x, y) : [3x^2 - 3y, -3x + 3y^2]$
 Matrice hessienne de $f(x, y) : [[6x, -3], [-3, 6y]]$
 Points stationnaires : $[(0, 0), (1, 1)]$

Point stationnaire : $(0, 0)$
 Matrice hessienne évaluée en le point : $[[0, -3], [-3, 0]]$
 Déterminant de la matrice hessienne : -9
 Nature du point : Point de selle

Point stationnaire : $(1, 1)$
 Matrice hessienne évaluée en le point : $[[6, -3], [-3, 6]]$
 Déterminant de la matrice hessienne : 27
 Nature du point : Minimum

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

f = lambda x, y : 4 + x**3 + y**3 - 3*x*y

# Création de la grille pour le tracé
x_vals = np.linspace(-2, 2, 400)
y_vals = np.linspace(-2, 2, 400)
X, Y = np.meshgrid(x_vals, y_vals)
Z = f(X, Y)

# Points stationnaires
stationary_points = [(0, 0), (1, 1)]

```

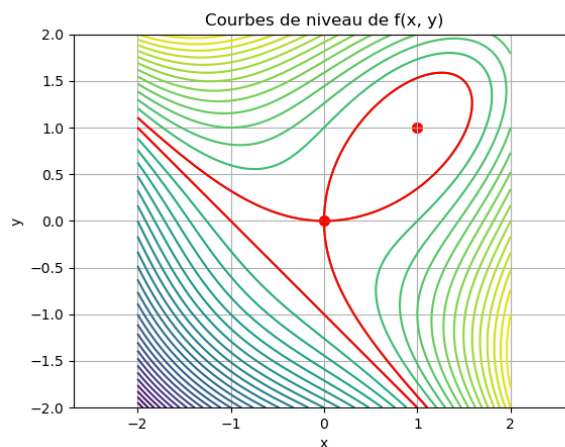
```
# Calculer les valeurs de la fonction en ces points
stationary_values = sorted([f(point[0], point[1]) for point in
    ↪ stationary_points])

# Tracer les courbes de niveau
plt.contour(X, Y, Z, levels=50)
# Ajouter des courbes de niveau spécifiquement pour les valeurs aux points
    ↪ stationnaires
plt.contour(X, Y, Z, levels=stationary_values, colors='red')

plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.title('Courbes de niveau de f(x, y)')
plt.grid(True)
plt.axis('equal')

# Ajouter les points stationnaires
for point in stationary_points:
    plt.scatter(point[0], point[1], color='red', s=50)

plt.savefig('courbes_de_niveau.png')
# plt.show()
```

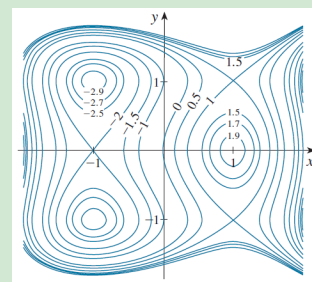


Exercice 1.12

À partir de la carte des courbes de niveau représentée sur la figure ci-contre, localiser les points critiques de $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ et préciser, pour chacun de ces points, s'il s'agit d'un point-selle, d'un maximum local ou d'un minimum local.

Vérifier ensuite cette analyse sachant que

$$f(x, y) = 3x - x^3 - 2y^2 + y^4.$$



Correction

À partir de la figure des courbes de niveau, plusieurs points critiques peuvent être identifiés:

- aux points $(-1, -1)$ et $(-1, 1)$, les courbes de niveau entourent les points. Cela suggère que les valeurs de f augmentent lorsque l'on s'éloigne de ces points dans toutes les directions, ce qui est caractéristique de minima locaux;

- au point $(1, 0)$, les courbes de niveau entourent le point, ce qui suggère que les valeurs de f diminuent lorsque l'on s'éloigne du point dans toutes les directions, ce qui est caractéristique d'un maximum local;
- aux points $(-1, 0)$, $(1, 1)$, et $(1, -1)$, les valeurs de f augmentent dans certaines directions et diminuent dans d'autres, ce qui suggère des points-selles.

Passons maintenant à la vérification analytique de cette analyse en trouvant les points critiques et en déterminant leur nature.

Les points critiques sont les solutions du système

$$\nabla f = \mathbf{0} \rightsquigarrow \begin{cases} 3 - 3x^2 = 0 \\ -4y + 4y^3 = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ y(y^2 - 1) = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} (x-1)(x+1) \\ y(y-1)(y+1) = 0 \end{cases}$$

Ainsi, les points critiques sont: $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, 0)$, $(-1, 1)$, et $(-1, -1)$.

Calculons les dérivées secondes

$$\partial_{xx}f(x, y) = -6x, \quad \partial_{xy}f(x, y) = 0, \quad \partial_{yy}f(x, y) = 12y^2 - 4.$$

Le déterminant de la matrice hessienne $H_f(x, y)$ est donné par

$$\det(H_f(x, y)) = \partial_{xx}f(x, y) \cdot \partial_{yy}f(x, y) - (\partial_{xy}f(x, y))^2 = -72xy^2 + 24x = -6x(12y^2 - 4).$$

Analysons maintenant chaque point critique:

Point critique (x_0, y_0)	$\det(H_f(x_0, y_0))$	$\partial_{xx}f(x_0, y_0)$	Conclusion
$(1, 0)$	$24 > 0$	$-6 < 0$	f a un maximum local en $(1, 0)$
$(1, 1)$	$-48 < 0$		f a un point-selle en $(1, 1)$
$(1, -1)$	$-48 < 0$	$-6 < 0$	f a un point-selle en $(1, -1)$
$(-1, 0)$	$-24 < 0$		f a un point-selle en $(-1, 0)$
$(-1, 1)$	$48 > 0$	$6 > 0$	f a un minimum local en $(-1, 1)$
$(-1, -1)$	$48 > 0$	$6 > 0$	f a un minimum local en $(-1, -1)$

Exercice 1.13

Une montagne a la forme de la surface $z(x, y) = 2xy - 2x^2 - y^2 - 8x + 6y + 4$ (l'unité de mesure est de 100 mètres). Si le niveau de la mer correspond à $z = 0$, quelle est la hauteur de la montagne?

Correction

Il s'agit d'évaluer $z(x, y)$ dans le point de maximum. Cherchons d'abord les points critiques:

$$\nabla z(x, y) = \begin{pmatrix} 2y - 4x - 8 \\ 2x - 2y + 6 \end{pmatrix}$$

et $\nabla z(x, y) = \mathbf{0}$ ssi $(x, y) = (-1, 2)$. On établit la nature du point critique en étudiant le déterminant de la matrice hessienne:

$$\partial_{xx}f(x, y) = -4 < 0, \quad \partial_{yy}f(x, y) = -2, \quad \partial_{xy}f(x, y) = 2,$$

et $\partial_{xx}f(-1, 2)\partial_{yy}f(-1, 2) - (\partial_{xy}f(-1, 2))^2 = 4 > 0$ donc $(-1, 2)$ est un maximum. Comme $z(-1, 2) = 14$, la montagne est haute 1400 mètre.

Exercice 1.14

Si f est une fonction continue d'une seule variable réelle et si f admet deux maxima sur un intervalle alors il existe un minimum compris entre les deux maxima. Le but de cet exercice est de montrer que ce résultat ne s'étend pas en deux dimensions.

Considérons la fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = 4y^2e^x - 2y^4 - e^{4x}$. Montrer que cette fonction admet deux maxima mais aucun autre point critique.

Correction

- f est de classe $\mathcal{C}^2$ dans son domaine de définition, l'ouvert $\mathbb{R}^2$.

- Recherche de points critiques :

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 4y^2e^x - 4e^{4x} = 0 \\ 8ye^x - 8y^3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4e^x(y^2 - e^{3x}) = 0 \\ 8y(e^x - y^2) = 0 \end{cases} \begin{matrix} \nearrow \\ \searrow \end{matrix} \begin{cases} y = 0 \\ -4e^{4x} = 0 \\ e^x = y^2 \\ y^2 = e^{3x} = y^6 \end{cases} \iff (x, y) = (0, \pm 1).$$

On a deux points critiques : $(0, 1)$ et $(0, -1)$.

- Nature des points critiques :

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 4y^2e^x - 16e^{4x} & 8ye^x \\ 8ye^x & 8e^x - 24y^2 \end{pmatrix}, \quad \det(H_f(x, y)) = 32e^x((e^x - 3y^2)(y^2 - 4e^{3x}) - 2y^2e^x).$$

$\det(H_f(0, \pm 1)) = 128 > 0$ et $\partial_{xx}f(0, \pm 1) = -12 < 0$ donc les points $(0, \pm 1)$ sont des maxima.

Exercice 1.15

Déterminer et établir la nature des points critiques des fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définies par

- | | | |
|---|---|---|
| 1. $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + y$ | 2. $f(x, y) = xy - 2x - 2y - x^2 - y^2$ | 3. $f(x, y) = (x - y)(1 - xy)$ |
| 4. $f(x, y) = y^3 + 3x^2y - 6x^2 - 6y^2 + 2$ | 5. $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy + 3$ | 6. $f(x, y) = xy(1 - x - y)$ |
| 7. $f(x, y) = x^3 - 12xy + 8y^3$ | 8. $f(x, y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ | 9. $f(x, y) = e^x \cos(y)$ |
| 10. $f(x, y) = y \cos(x)$ | 11. $f(x, y) = y^2 + xy \ln(x)$ | 12. $f(x, y) = \frac{x^2y}{2} + x^2 + \frac{y^3}{3} - 4y$ |
| 13. $f(x, y) = \frac{x^2y}{2} - x^2 + \frac{y^3}{3} - 4y$ | 14. $f(x, y) = \frac{xy^2}{2} + \frac{x^3}{3} - 4x + y^2$ | 15. $f(x, y) = (x^2 - y^2)e^{(-x^2 - y^2)}$ |
| 16. $f(x, y) = (y^2 - x^2)e^{(-x^2 - y^2)}$ | 17. $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$ | 18. $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4(x - y)^2$ |
| 19. $f(x, y, z) = \frac{x^2}{2} + xyz - z + y$ | 20. $f(x, y) = (x - 1)^2 + 2y^2$ | 21. $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$ |
| 22. $f(x, y) = x^3y^2(6 - x - y)$ | 23. $f(x, y) = e^{x-y}(x^2 - 2y^2)$ | 24. $f(x, y) = \frac{8}{x} + \frac{x}{y} + y$ |
| 25. $f(x, y) = x^2 - \cos(y)$ | 26. $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-(x^2 + y^2)}$ | 27. $f(x, y) = x^3 + y^2 - 6(x^2 - y^2)$ |
| 28. $f(x, y) = (x^2 + y^2 - y^3)e^{-y}$ | | |

Correction

1. $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + y$

- f est de classe $\mathcal{C}^2$ dans son domaine de définition, l'ouvert $\mathbb{R}^2$.
- Recherche de points critiques :

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2x + y = 0 \\ x + 2y + 1 = 0 \end{cases} \iff (x, y) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right).$$

On a un unique point critique : $(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$.

- Nature du point critique :

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \det(H_f(x, y)) = 3.$$

$\det(H_f(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3})) > 0$ et $\partial_{xx}f(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}) > 0$ donc $(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$ est un minimum.

2. $f(x, y) = xy - 2x - 2y - x^2 - y^2$

- f est de classe $\mathcal{C}^2$ dans son domaine de définition, l'ouvert $\mathbb{R}^2$.
- Recherche de points critiques :

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} y - 2 - 2x = 0 \\ x - 2 - 2y = 0 \end{cases} \iff (x, y) = (-2, -2).$$

On a un unique point critique : $(-2, -2)$.

- Nature du point critique :

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \det(H_f(x, y)) = 3.$$

$\det(H_f(-2, -2)) > 0$ et $\partial_{xx}f(-2, -2) < 0$ donc $(-2, -2)$ est un maximum.

3. $f(x, y) = (x - y)(1 - xy)$

- f est de classe $\mathcal{C}^2$ dans son domaine de définition, l'ouvert $\mathbb{R}^2$.
- Recherche de points critiques :

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 1 - 2xy + y^2 = 0 \\ -1 - x^2 + 2xy = 0 \end{cases} \iff (x, y) \in \{(-1, -1), (1, 1)\}.$$

On a deux points critiques : $(-1, -1)$ et $(1, 1)$.

- Nature des points critiques :

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} -2y & -2x + 2y \\ -2x + 2y & 2x \end{pmatrix}, \quad \det(H_f(x, y)) = -4xy - 4(y - x)^2.$$

$\det(H_f(-1, -1)) < 0$ donc $(-1, -1)$ est un point-selle ;

$\det(H_f(1, 1)) < 0$ donc $(1, 1)$ est un point-selle.

4. $f(x, y) = y^3 + 3x^2y - 6x^2 - 6y^2 + 2$

- f est de classe $\mathcal{C}^2$ dans son domaine de définition, l'ouvert $\mathbb{R}^2$.
- Recherche de points critiques :

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 6xy - 12x = 0 \\ 3y^2 + 3x^2 - 12y = 0 \end{cases} \iff (x, y) \in \{(0, 0), (0, 4), (2, 2), (-2, 2)\}.$$

On a quatre points critiques : $(0, 0)$, $(0, 4)$, $(2, 2)$ et $(-2, 2)$.

- Nature des points critiques :

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 6y - 12 & 6x \\ 6x & 6y - 12 \end{pmatrix}, \quad \det(H_f(x, y)) = (6y - 12)^2 - 36x^2 = 36((y - 2)^2 - x^2).$$

$\det(H_f(0, 0)) > 0$ et $\partial_{xx}f(0, 0) < 0$ donc $(0, 0)$ est un maximum ;

$\det(H_f(0, 4)) > 0$ et $\partial_{xx}f(0, 4) > 0$ donc $(0, 4)$ est un minimum ;

$\det(H_f(2, 2)) < 0$ donc $(2, 2)$ est un point-selle ;

$\det(H_f(-2, 2)) < 0$ donc $(-2, 2)$ est un point-selle.

5. $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy + 3$.

- f est de classe $\mathcal{C}^2$ dans son domaine de définition, l'ouvert $\mathbb{R}^2$.
- Recherche de points critiques :

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 3(x^2 - y) = 0 \\ 3(y^2 - x) = 0 \end{cases} \iff (x, y) \in \{(0, 0), (1, 1)\}.$$

On a deux points critiques : $(0, 0)$ et $(1, 1)$.

- Nature des points critiques :

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}, \quad \det(H_f(x, y)) = 36xy - 9.$$

$\det(H_f(0, 0)) = -9 < 0$ donc $(0, 0)$ est un point-selle ;

$\det(H_f(1, 1)) = 27 > 0$ et $\partial_{xx}f(1, 1) = 6 > 0$, donc $(1, 1)$ est un minimum.

6. $f(x, y) = xy(1 - x - y)$

- f est de classe $\mathcal{C}^2$ dans son domaine de définition, l'ouvert $\mathbb{R}^2$.

- Recherche de points critiques :

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} y - 2xy - y^2 = 0 \\ x - x^2 - 2xy = 0 \end{cases} \iff (x, y) \in \left\{ (0, 0), (1, 0), (0, 1), \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \right\}.$$

On a quatre points critiques : $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ et $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

- Nature des points critiques :

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} -2y & 1 - 2x - 2y \\ 1 - 2x - 2y & -2x \end{pmatrix}, \quad \det(H_f(x, y)) = 4xy - (1 - 2x - 2y)^2$$

$\det(H_f(0, 0)) < 0$ donc $(0, 0)$ est un point-selle ;

$\det(H_f(1, 0)) < 0$ donc $(1, 0)$ est un point-selle ;

$\det(H_f(0, 1)) < 0$ donc $(0, 1)$ est un point-selle ;

$\det(H_f(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})) > 0$ et $\partial_{xx}f(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) < 0$ donc $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) < 0$ est un maximum.

7. $f(x, y) = x^3 - 12xy + 8y^3$

- f est de classe $\mathcal{C}^2$ dans son domaine de définition, l'ouvert $\mathbb{R}^2$.
- Recherche de points critiques :

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 3x^2 - 12y = 0 \\ -12x + 24y^2 = 0 \end{cases} \iff (x, y) \in \{ (0, 0), (2, 1) \}.$$

On a deux points critiques : $(0, 0)$, et $(2, 1)$.

- Nature des points critiques :

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & -12 \\ -12 & 48y \end{pmatrix}, \quad \det(H_f(x, y)) = 144(2xy - 1)$$

$\det(H_f(0, 0)) < 0$ donc $(0, 0)$ est un point-selle ;

$\det(H_f(2, 1)) > 0$ et $\partial_{xx}f(2, 1) > 0$ donc $(2, 1)$ est un minimum.

8. $f(x, y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

- f est de classe $\mathcal{C}^2$ dans son domaine de définition, l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus \{ (0, \kappa) \mid \kappa \in \mathbb{R} \} \setminus \{ (\kappa, 0) \mid \kappa \in \mathbb{R} \}$.
- Recherche de points critiques :

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} y - \frac{1}{x^2} = 0 \\ x - \frac{1}{y^2} = 0 \end{cases} \iff (x, y) = (1, 1).$$

On a un unique point critique : $(1, 1)$.

- Nature du point critique :

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{2}{x^3} & \frac{1}{y^2} \\ \frac{1}{y^2} & \frac{2}{y^3} \end{pmatrix}, \quad \det(H_f(x, y)) = \frac{4}{(xy)^3} - 1$$

$\det(H_f(1, 1)) > 0$ et $\partial_{xx}f(1, 1) > 0$ donc $(1, 1)$ est un minimum.

9. $f(x, y) = e^x \cos(y)$

- f est de classe $\mathcal{C}^2$ dans son domaine de définition, l'ouvert $\mathbb{R}^2$.
- Recherche de points critiques :

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} e^x \cos(y) = 0 \\ -e^x \sin(y) = 0 \end{cases} \iff \mathcal{A}(x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Cette fonction n'admet aucun point critique.

10. $f(x, y) = y \cos(x)$

- f est de classe $\mathcal{C}^2$ dans son domaine de définition, l'ouvert $\mathbb{R}^2$.

- Recherche de points critiques:

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -y \sin(x) = 0 \\ \cos(x) = 0 \end{cases} \iff (x, y) = \left(\frac{\pi}{2} + \kappa\pi, 0\right), \quad \kappa \in \mathbb{Z}.$$

On a une infinité de points critiques alignés sur la droite d'équation $y = 0$ et qui ont ordonnée $x = \frac{\pi}{2} + \kappa\pi$ avec $\kappa \in \mathbb{Z}$.

- Nature des points critiques:

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} -y \cos(x) & -\sin(x) \\ -\sin(x) & 0 \end{pmatrix}, \quad \det(H_f(x, y)) = -\sin^2(x)$$

$\det(H_f(\frac{\pi}{2} + \kappa\pi, 0)) < 0$ donc ils sont tous des points-selle.

11. $f(x, y) = y^2 + xy \ln(x)$

- f est de classe $\mathcal{C}^2$ dans son domaine de définition, l'ouvert $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$.
- Recherche de points critiques:

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} y(\ln(x) + 1) = 0 \\ 2y + x \ln(x) = 0 \end{cases} \iff (x, y) \in \left\{ (1, 0); \left(\frac{1}{e}, \frac{1}{2e}\right) \right\}$$

On a deux points critiques: $(1, 0)$ et $(\frac{1}{e}, \frac{1}{2e})$.

- Nature des points critiques:

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{y}{x} & 1 + \ln(x) \\ 1 + \ln(x) & 2 \end{pmatrix}, \quad \det(H_f(x, y)) = 2\frac{y}{x} - (1 + \ln(x))^2$$

$\det(H_f(1, 0)) < 0$ donc $(1, 0)$ est un point-selle;

$\det(H_f(\frac{1}{e}, \frac{1}{2e})) > 0$ et $\partial_{xx}f(\frac{1}{e}, \frac{1}{2e}) > 0$ donc $(\frac{1}{e}, \frac{1}{2e})$ est un minimum.

12. $f(x, y) = \frac{x^2 y}{2} + x^2 + \frac{y^3}{3} - 4y$

- f est de classe $\mathcal{C}^2$ dans son domaine de définition, l'ouvert $\mathbb{R}^2$.
- Recherche de points critiques:

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} xy + 2x = 0 \\ \frac{x^2}{2} + y^2 - 4 = 0 \end{cases} \iff (x, y) \in \{(0, -2), (0, 2)\}.$$

On a deux points critiques: $(0, -2)$ et $(0, 2)$.

- Nature des points critiques:

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} y + 2 & x \\ x & 2y \end{pmatrix}, \quad \det(H_f(x, y)) = 2y(y + 2) - x^2$$

$\det(H_f(0, 2)) > 0$ et $\partial_{xx}f(0, 2) = 4 > 0$ donc $(0, 2)$ est un minimum pour f ;

comme $\det(H_f(0, -2)) = 0$, on ne peut pas conclure en utilisant la matrice hessienne (l'étude du signe de la distance dans ce cas est trop compliquée).

13. $f(x, y) = \frac{x^2 y}{2} - x^2 + \frac{y^3}{3} - 4y$

- f est de classe $\mathcal{C}^2$ dans son domaine de définition, l'ouvert $\mathbb{R}^2$.
- Recherche de points critiques:

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} xy - 2x = 0 \\ \frac{x^2}{2} + y^2 - 4 = 0 \end{cases} \iff (x, y) \in \{(0, -2), (0, 2)\}.$$

On a deux points critiques: $(0, -2)$ et $(0, 2)$.

- Nature des points critiques:

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} y - 2 & x \\ x & 2y \end{pmatrix}, \quad \det(H_f(x, y)) = 2y(y - 2) - x^2$$

$\det(H_f(0, -2)) > 0$ et $\partial_{xx}f(0, -2) < 0$ donc $(0, -2)$ est un maximum pour f ;

comme $\det(H_f(0, 2)) = 0$, on ne peut pas conclure en utilisant la matrice hessienne (l'étude du signe de la distance dans ce cas est trop compliquée).

14. $f(x, y) = \frac{xy^2}{2} + \frac{x^3}{3} - 4x + y^2$

- f est de classe $\mathcal{C}^2$ dans son domaine de définition, l'ouvert $\mathbb{R}^2$.
- Recherche de points critiques :

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \frac{y^2}{2} + x^2 - 4 = 0 \\ xy + 2y = 0 \end{cases} \iff (x, y) \in \{(-2, 0), (2, 0)\}.$$

On a deux points critiques : $(0, -2)$ et $(0, 2)$.

- Nature des points critiques :

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & y \\ y & x+2 \end{pmatrix}, \quad \det(H_f(x, y)) = 2x(x+2) - y$$

$\det(H_f(2, 0)) > 0$ et $\partial_{xx}f(2, 0) = 4 > 0$ donc $(2, 0)$ est un minimum pour f ;

comme $\det(H_f(-2, 0)) = 0$, on ne peut pas conclure en utilisant la matrice hessienne (l'étude du signe de la distance dans ce cas est trop compliquée).

15. $f(x, y) = (x^2 - y^2)e^{(-x^2 - y^2)}$

- f est de classe $\mathcal{C}^2$ dans son domaine de définition, l'ouvert $\mathbb{R}^2$.
- Recherche de points critiques :

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2x(1 - x^2 + y^2)e^{(-x^2 - y^2)} = 0 \\ 2y(-1 - x^2 + y^2)e^{(-x^2 - y^2)} = 0 \end{cases} \iff (x, y) \in \{(0, 0), (0, 1), (0, -1), (1, 0), (-1, 0)\}.$$

On a 5 points critiques : $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(0, -1)$, $(1, 0)$ et $(-1, 0)$.

- Nature des points critiques :

$$\partial_{xx}f(x, y) = 2e^{(-x^2 - y^2)}(1 - 5x^2 + y^2 + 2x^4 - 2x^2y^2),$$

$$\partial_{xy}f(x, y) = 4xy(x^2 - y^2)e^{(-x^2 - y^2)},$$

$$\partial_{yy}f(x, y) = 2e^{(-x^2 - y^2)}(-1 - x^2 + 5y^2 + 2x^2y^2 - 2y^4).$$

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} \partial_{xx}f(x, y) & \partial_{xy}f(x, y) \\ \partial_{xy}f(x, y) & \partial_{yy}f(x, y) \end{pmatrix}, \quad \det(H_f(x, y)) = \partial_{xx}f(x, y)\partial_{yy}f(x, y) - (\partial_{xy}f(x, y))^2$$

On a alors

(x_0, y_0)	$\partial_{xx}f(x_0, y_0)$	$\partial_{xy}f(x_0, y_0)$	$\partial_{yy}f(x_0, y_0)$	$\det(H_f(x_0, y_0))$	
$(0, 0)$	2	0	-2	-4	c'est un point-selle
$(1, 0)$	$-\frac{4}{e}$	0	$-\frac{4}{e}$	$\frac{16}{e^2}$	c'est un maximum
$(-1, 0)$	$-\frac{4}{e}$	0	$-\frac{4}{e}$	$\frac{16}{e^2}$	c'est un maximum
$(0, 1)$	$\frac{4}{e}$	0	$\frac{4}{e}$	$\frac{16}{e^2}$	c'est un minimum
$(0, -1)$	$\frac{4}{e}$	0	$\frac{4}{e}$	$\frac{16}{e^2}$	c'est un minimum

16. $f(x, y) = (y^2 - x^2)e^{(-x^2 - y^2)}$

- f est de classe $\mathcal{C}^2$ dans son domaine de définition, l'ouvert $\mathbb{R}^2$.
- Recherche de points critiques :

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2x(-1 + x^2 - y^2)e^{(-x^2 - y^2)} = 0 \\ 2y(1 + x^2 - y^2)e^{(-x^2 - y^2)} = 0 \end{cases} \iff (x, y) \in \{(0, 0), (0, 1), (0, -1), (1, 0), (-1, 0)\}.$$

On a 5 points critiques : $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(0, -1)$, $(1, 0)$ et $(-1, 0)$.

- Nature des points critiques :

$$\partial_{xx}f(x, y) = -2e^{(-x^2-y^2)}(1 - 5x^2 + y^2 + 2x^4 - 2x^2y^2),$$

$$\partial_{xy}f(x, y) = -4xy(x^2 - y^2)e^{(x^2-y^2)},$$

$$\partial_{yy}f(x, y) = -2e^{(-x^2-y^2)}(-1 - x^2 + 5y^2 + 2x^2y^2 - 2y^4).$$

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} \partial_{xx}f(x, y) & \partial_{xy}f(x, y) \\ \partial_{xy}f(x, y) & \partial_{yy}f(x, y) \end{pmatrix}, \quad \det(H_f(x, y)) = \partial_{xx}f(x, y)\partial_{yy}f(x, y) - (\partial_{xy}f(x, y))^2$$

On a alors

(x_0, y_0)	$\partial_{xx}f(x_0, y_0)$	$\partial_{xy}f(x_0, y_0)$	$\partial_{yy}f(x_0, y_0)$	$\det(H_f(x_0, y_0))$	
$(0, 0)$	-2	0	2	-4	c'est un point-selle
$(1, 0)$	$\frac{4}{e}$	0	$\frac{4}{e}$	$\frac{16}{e^2}$	c'est un minimum
$(-1, 0)$	$\frac{4}{e}$	0	$\frac{4}{e}$	$\frac{16}{e^2}$	c'est un minimum
$(0, 1)$	$-\frac{4}{e}$	0	$-\frac{4}{e}$	$\frac{16}{e^2}$	c'est un maximum
$(0, -1)$	$-\frac{4}{e}$	0	$-\frac{4}{e}$	$\frac{16}{e^2}$	c'est un maximum

17. $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$

- f est de classe $\mathcal{C}^2$ dans son domaine de définition, l'ouvert $\mathbb{R}^2$. Comme la restriction $f(x, 0) = x^4 - 2x^2$ tend vers $+\infty$ pour x qui tend vers $\pm\infty$, il n'y a pas de maximum global sur $\mathbb{R}^2$. Comme $\mathbb{R}^2$ est ouvert, un extrémum relatif de f vérifie la condition nécessaire $\nabla f(x, y) = 0$.
- Recherche de points critiques :

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 4(x^3 - x + y) = 0 \\ 4(y^3 + x - y) = 0 \end{cases} \iff (x, y) \in \left\{ (0, 0), (\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \right\}.$$

On a 3 points critiques : $(0, 0)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ (on note que $f(x, y) = f(-x, -y)$).

- Nature des points critiques :

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4 & 4 \\ 4 & 12y^2 - 4 \end{pmatrix}, \quad \det(H_f(x, y)) = 16((3x^2 - 1)(3y^2 - 1) - 1).$$

$\det(H_f(\sqrt{2}, -\sqrt{2})) = 384 > 0$ et $\partial_{xx}f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = 20 > 0$ donc $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ est un minimum pour f ;

$\det(H_f(-\sqrt{2}, \sqrt{2})) = 384 > 0$ et $\partial_{xx}f(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 20 > 0$ donc $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ est un minimum pour f ;

comme $\det(H_f(0, 0)) = 0$, on ne peut pas conclure en utilisant la matrice hessienne.

Pour connaître la nature du point $(0, 0)$ on étudie le signe de $d(h, k) = f(h, k) - f(0, 0)$ pour h et k voisins de 0 :

$$d(h, k) = h^4 + k^4 - 2(h - k)^2;$$

comme $d(h, 0) = (h^2 - 2)h^2 < 0$ lorsque h est voisin de 0 mais $d(h, h) = 2h^4 > 0$, alors $(0, 0)$ est un point-selle.

Remarquons qu'avec des transformations algébriques, on peut réécrire la fonction sous la forme

$$f(x, y) = (x^2 - 2)^2 + (y^2 - 2)^2 + 2(x + y)^2 - 8 \geq 8 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Comme $f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = f(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = -8$, les points $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ sont des minima globaux.

18. $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4(x - y)^2$

- f est de classe $\mathcal{C}^2$ dans son domaine de définition, l'ouvert $\mathbb{R}^2$. Comme la restriction $f(x, 0) = x^4 - 4x^2$ tend vers $+\infty$ pour x qui tend vers $\pm\infty$, il n'y a pas de maximum global sur $\mathbb{R}^2$. Comme $\mathbb{R}^2$ est ouvert, un extrémum relatif de f vérifie la condition nécessaire $\nabla f(x, y) = 0$.

$$2. \begin{cases} 4x^3 - 4x + 4y = 0 \\ 4y^3 + 4x - 4y = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x^3 + y^3 = 0 \\ y^3 + x - y = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -y \\ (y^2 - 2)y = 0 \end{cases}$$

- Recherche de points critiques :

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 4(x^3 - 2x + 2y) = 0 \\ 4(y^3 + 2x - 2y) = 0 \end{cases} \iff (x, y) \in \{(0, 0), (2, -2), (-2, 2)\}.$$

On a 3 points critiques : ³ $(0, 0)$, $(2, -2)$ et $(-2, 2)$ (on note que $f(x, y) = f(-x, -y)$).

- Nature des points critiques :

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 8 & 8 \\ 8 & 12y^2 - 8 \end{pmatrix}, \quad \det(H_f(x, y)) = 48(3x^2y^2 - 2(x^2 + y^2)).$$

- $\det(H_f(2, -2)) = 1536 > 0$ et $\partial_{xx}f(2, -2) = 40 > 0$ donc $(2, -2)$ est un minimum local pour f ;
- $\det(H_f(-2, 2)) = 1536 > 0$ et $\partial_{xx}f(-2, 2) = 40 > 0$ donc $(-2, 2)$ est un minimum local pour f ;
- comme $\det(H_f(0, 0)) = 0$, on ne peut pas conclure en utilisant la matrice hessienne. Pour connaître la nature du point $(0, 0)$ on étudie le signe de $d(h, k) = f(h, k) - f(0, 0)$ pour h et k voisins de 0 :

$$d(h, k) = h^4 + k^4 - 4(h - k)^2;$$

comme $d(h, 0) = (h^2 - 4)h^2 < 0$ lorsque h est voisin de 0 mais $d(h, h) = 2h^4 > 0$, alors $(0, 0)$ est un point-selle.

Remarquons qu'avec des transformations algébriques, on peut réécrire la fonction sous la forme

$$f(x, y) = (x^2 - 4)^2 + (y^2 - 4)^2 + 4(x + y)^2 - 32 \geq -32 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Comme $f(2, -2) = f(-2, 2) = -32$, les points $(2, -2)$ et $(-2, 2)$ sont des minima globaux.

19. $f(x, y, z) = \frac{x^2}{2} + xyz - z + y$

- f est définie sur $\mathbb{R}^3$ à valeur dans $\mathbb{R}$; comme la restriction $f(0, 0, z) = -z$ tend vers $\pm\infty$ pour z qui tend vers $\mp\infty$, il n'y a pas d'extremum global sur $\mathbb{R}^3$. Comme $\mathbb{R}^3$ est ouvert, un extrémum relatif de f vérifie la condition nécessaire $\nabla f(x, y, z) = 0$.
- Recherche de points critiques :

$$\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x + yz = 0 \\ xz + 1 = 0 \\ xy - 1 = 0 \end{cases} \iff (x, y, z) = (1, 1, -1).$$

Il n'y a qu'un point critique : $(1, 1, -1)$.

- Nature du point critique : on étudie le signe de $\Delta f(h, k, l) \equiv f(1 + h, 1 + k, -1 + l)$ pour h, k et l voisins de 0 (les termes de degré 1 en h, k et l doivent disparaître) :

$$\Delta f(h, k, l) = \frac{h^2 + 1 + 2h}{2} + (1 + h)(1 + k)(-1 + l) - (-1 + l) + (1 + k) - \frac{3}{2} = \frac{h^2}{2} + hkl + hl - hk + kl.$$

Il ne reste que transformer Δf si on pense qu'il s'agit d'un extrémum ou fournir des restrictions qui se contredisent si on pense que ce n'est pas un extrémum. Comme les deux restrictions à deux courbes continues passant par l'origine $\Delta f(h, 0, h) = \frac{3}{2}h^2 > 0$ et $\Delta f(h, h, 0) = -\frac{1}{2}h^2 < 0$ donnent des signes différents, on conclut que ce n'est pas un extrémum.

20. $f(x, y) = (x - 1)^2 + 2y^2$

- f est de classe $\mathcal{C}^2$ dans son domaine de définition, l'ouvert $\mathbb{R}^2$.
- Recherche de points critiques :

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2x - 2 = 0 \\ 4y = 0 \end{cases} \iff (x, y) = (1, 0).$$

On a un seul point critique : $(1, 0)$.

$$3. \begin{cases} 4x^3 - 8x + 8y = 0 \\ 4y^3 + 8x - 8y = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x^3 - 2(x - y) = 0 \\ y^3 + 2(x - y) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x^3 + y^3 = 0 \\ y^3 + 2x - 2y = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -y \\ (y^2 - 4)y = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -y \\ y = 0 \text{ ou } y = 2 \text{ ou } y = -2 \end{cases}$$

- Nature du point critique:

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \det(H_f(x, y)) = 8.$$

$\det(H_f(1, 0)) = 8 > 0$ et $\partial_{xx}f(1, 0) = 2 > 0$ donc $(1, 0)$ est un minimum pour f .

21. $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$

- f est de classe $\mathcal{C}^2$ dans son domaine de définition, l'ouvert $\mathbb{R}^2$.
- Recherche de points critiques:

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2x + y - 2 = 0 \\ x + 2y - 1 = 0 \end{cases} \iff (x, y) = (1, 0).$$

On a un seul point critique: $(1, 0)$.

- Nature du point critique:

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \det(H_f(x, y)) = 7.$$

$\det(H_f(1, 0)) = 7 > 0$ et $\partial_{xx}f(1, 0) = 2 > 0$ donc $(1, 0)$ est un minimum pour f .

22. $f(x, y) = x^3 y^2 (6 - x - y)$

- f est de classe $\mathcal{C}^2$ dans son domaine de définition, l'ouvert $\mathbb{R}^2$.
- Recherche de points critiques:

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 3x^2 y^2 (6 - x - y) - x^3 y^2 = 0 \\ 2x^3 y (6 - x - y) - x^3 y^2 = 0 \end{cases} \iff (x, y) \in \{(3, 2), (t, 0), (0, t) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

On a une infinité de points critiques: les points $(t, 0)$ et $(0, t)$ pour $t \in \mathbb{R}$ sont des points critiques ainsi que le point $(3, 2)$.

- Nature des points critiques:

$$\begin{aligned} \partial_{xx}f(x, y) &= 6xy^2(6 - x - y) - 6x^2y^2, \\ \partial_{xy}f(x, y) &= 6x^2y(6 - x - y) - 3x^2y^2 - 2x^3y, \\ \partial_{yy}f(x, y) &= 2x^3(6 - x - y) - 4x^3y. \end{aligned}$$

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} \partial_{xx}f(x, y) & \partial_{xy}f(x, y) \\ \partial_{xy}f(x, y) & \partial_{yy}f(x, y) \end{pmatrix}, \quad \det(H_f(x, y)) = \partial_{xx}f(x, y)\partial_{yy}f(x, y) - (\partial_{xy}f(x, y))^2$$

$\det(H_f(3, 2)) > 0$ et $\partial_{xx}f(3, 2) < 0$ donc $(3, 2)$ est un maximum pour f .

$\det(H_f(t, 0)) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$: l'étude de la matrice hessienne ne permet pas de conclure pour les points sur l'axe d'équation $y = 0$. Pour connaître la nature de ces points on étudie le signe de $d(h, k) = f(t+h, 0+k) - f(t, 0) = (t+h)^3 k^2 (6 - t - h - k)$ pour h et k proches de 0. On conclut que les points $(t, 0)$ pour $t < 0$ ou $t > 6$ sont des maxima, les points $(t, 0)$ pour $0 < t < 6$ sont des minima et les points $(0, 0)$ et $(6, 0)$ sont des points-selle.

$\det(H_f(0, t)) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$: l'étude de la matrice hessienne ne permet pas de conclure pour les points sur les axes. Pour connaître la nature de ces points on étudie le signe de $d(h, k) = f(0+h, t+k) - f(0, t) = h^3(t+k)^2(6 - t - h - k)$ pour h et k proches de 0. On conclut que les points $(0, t)$ sont des points-selle pour tout $t \in \mathbb{R}$.

23. $f(x, y) = e^{x-y}(x^2 - 2y^2)$

- f est de classe $\mathcal{C}^2$ dans son domaine de définition, l'ouvert $\mathbb{R}^2$.
- Recherche de points critiques:

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} (x^2 - 2y^2 + 2x)e^{x-y} = 0 \\ (-x^2 + 2y^2 - 4y)e^{x-y} = 0 \end{cases} \iff (x, y) \in \{(0, 0), (-4, -2)\}.$$

On a deux points critiques: $(0, 0)$ et $(-4, -2)$.

- Nature des points critiques :

$$\partial_{xx}f(x, y) = e^{x-y}(x^2 - 2y^2 + 4x + 2), \quad \partial_{xy}f(x, y) = e^{x-y}(-x^2 + 2y^2 - 2x - 4y), \quad \partial_{yy}f(x, y) = e^{x-y}(x^2 - 2y^2 + 8y - 4);$$

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} \partial_{xx}f(x, y) & \partial_{xy}f(x, y) \\ \partial_{xy}f(x, y) & \partial_{yy}f(x, y) \end{pmatrix}, \quad \det(H_f(x, y)) = \partial_{xx}f(x, y)\partial_{yy}f(x, y) - (\partial_{xy}f(x, y))^2.$$

On en déduit que

(x_0, y_0)	$\partial_{xx}f(x_0, y_0)$	$\partial_{xy}f(x_0, y_0)$	$\partial_{yy}f(x_0, y_0)$	$\det(H_f(x_0, y_0))$	
$(-4, -2)$	$-6e^{-2}$	$8e^{-2}$	$-12e^{-2}$	$8e^{-4}$	maximum
$(0, 0)$	2	0	-4	-8	point-selle

24. $f(x, y) = \frac{8}{x} + \frac{x}{y} + y$

- f est de classe $\mathcal{C}^2$ dans son domaine de définition, l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \mid xy = 0\}$.
- Recherche de points critiques :

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \frac{1}{y} - \frac{8}{x^2} = 0 \\ 1 - \frac{x}{y^2} = 0 \end{cases} \iff (x, y) = (4, 2).$$

On a un unique point critique : $(4, 2)$.

- Nature du point critique :

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{16}{x^3} & -\frac{1}{y^2} \\ -\frac{1}{y^2} & \frac{2x}{y^3} \end{pmatrix}, \quad \det(H_f(x, y)) = \frac{1}{y^3} \left(\frac{16}{x^2} - \frac{1}{y} \right).$$

$\det(H_f(4, 2)) > 0$ et $\partial_{xx}f(4, 2) > 0$ donc $(4, 2)$ est un minimum pour f .

25. $f(x, y) = x^2 - \cos(y)$

- f est de classe $\mathcal{C}^2$ dans son domaine de définition, l'ouvert $\mathbb{R}^2$.
- Recherche de points critiques :

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2x = 0 \\ \sin(y) = 0 \end{cases} \iff \iff (x, y) \in \{(0, \kappa\pi) \mid \kappa \in \mathbb{Z}\}.$$

On a une infinité de points critiques qui s'écrivent $(0, \kappa\pi)$ avec $\kappa \in \mathbb{Z}$.

- Nature du point critique :

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \cos(y) \end{pmatrix}, \quad \det(H_f(x, y)) = 2\cos(y).$$

$\det(H_f(0, \kappa\pi)) = (-1)^\kappa$ et $\partial_{xx}f(0, \kappa\pi) > 0$ pour tout $\kappa \in \mathbb{Z}$ donc $(0, \kappa\pi)$ est un minimum si κ est pair et un point-selle si κ est impair.

26. $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-(x^2 + y^2)}$.

On peut remarquer que si on passe aux coordonnées polaire on obtient $w(r) \equiv f(r \cos(\vartheta), r \sin(\vartheta)) = r^2 e^{-r^2}$, autrement-dit on obtient une fonction de la seule variable $r > 0$ et on a $w'(r) = 2r(1 - r^2)e^{-r^2}$ qui s'annule pour $r = 1$ et dont l'étude des variations montre qu'il s'agit d'un minimum. Il faut étudier séparément le cas $(x = 0, y = 0)$ car il n'est pas pris en compte lorsqu'on passe aux coordonnées polaire. Si on n'a pas remarqué cette symétrie, on étudie la fonction comme dans les cas précédents :

- f est de classe $\mathcal{C}^2$ dans son domaine de définition, l'ouvert $\mathbb{R}^2$.
- Recherche de points critiques :

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2x(1 - x^2 - y^2)e^{-(x^2 + y^2)} = 0 \\ 2y(1 - x^2 - y^2)e^{-(x^2 + y^2)} = 0 \end{cases}$$

On a une infinité de points critiques : le point $(0, 0)$ et les points (x, y) qui appartiennent au cercle $x^2 + y^2 = 1$.

- Nature du point critique: comme $f(x, y) \geq 0$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $f(x, y) = 0$ ssi $(x, y) \neq (0, 0)$ ou (x, y) est tel que $x^2 + y^2 - 1 = 0$, on en déduit qu'ils sont des minima (le calcul des dérivées secondes porte à des calculs très longues et inutiles dans ce cas).

27. $f(x, y) = x^3 + y^2 - 6(x^2 - y^2)$

- f est de classe $\mathcal{C}^2$ dans son domaine de définition, l'ouvert $\mathbb{R}^2$.
- Recherche de points critiques:

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 3x(x-4) = 0 \\ 3y(y+4) = 0 \end{cases} \iff (x, y) \in \{(0, 0), (0, -4), (4, 0), (4, -4)\}.$$

On a quatre points critiques: $(0, 0)$, $(0, -4)$, $(4, 0)$ et $(4, -4)$.

- Nature des points critiques:

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 6(x-2) & 0 \\ 0 & 6(y+2) \end{pmatrix}, \quad \det(H_f(x, y)) = 36(x-2)(y+2).$$

$\det(H_f(0, 0)) < 0$ donc $(0, 0)$ est un point-selle;

$\det(H_f(0, -4)) > 0$ et $\partial_{xx}f(0, -4) < 0$ donc $(0, -4)$ est un maximum;

$\det(H_f(4, 0)) > 0$ et $\partial_{xx}f(4, 0) > 0$ donc $(4, 0)$ est un minimum;

$\det(H_f(4, -4)) < 0$ donc $(4, -4)$ est un point-selle.

28. $f(x, y) = (x^2 + y^2 - y^3)e^{-y}$

- f est de classe $\mathcal{C}^2$ dans son domaine de définition, l'ouvert $\mathbb{R}^2$.
- Recherche de points critiques:

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2xe^{-y} = 0 \\ (-x^2 + 2y - 4y^2 + y^3)e^{-y} = 0 \end{cases} \iff (x, y) \in \{(0, 0), (0, 2 - \sqrt{2}), (0, 2 + \sqrt{2})\}.$$

On a quatre points critiques: $(0, 0)$, $(0, 2 - \sqrt{2})$ et $(0, 2 + \sqrt{2})$.

- Nature des points critiques:

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2e^{-y} & -2xe^{-y} \\ -2xe^{-y} & (2 + x^2 - 10y + 7y^2 - y^3)e^{-y} \end{pmatrix}, \quad \det(H_f(x, y)) = (4 - 2x^2 - 20y + 14y^2 - 2y^3)e^{-2y}.$$

$\det(H_f(0, 0)) > 0$ et $\partial_{xx}f(0, 0) > 0$ donc $(0, 0)$ est un minimum;

$\det(H_f(0, 2 - \sqrt{2})) < 0$ donc $(0, 2 - \sqrt{2})$ est un point-selle;

$\det(H_f(0, 2 + \sqrt{2})) > 0$ et $\partial_{xx}f(0, 2 + \sqrt{2}) > 0$ donc $(0, 2 + \sqrt{2})$ est un minimum.

Exercice 1.16

La société d'Adèle produit deux types d'ampoules: E17 et E24. Indiquons par x le nombre de milliers d'ampoules de type E17 produites et supposons que la demande pour ce type de lampes est donnée par $p_1 = 50 - x$, où p_1 est le prix de vente en euros. De même, indiquons par y le nombre de milliers d'ampoules de type E24 produites et supposons que la demande pour ce type est donnée par $p_2 = 60 - 2y$, où p_2 est aussi le prix de vente en euros. Les coûts communs de production de ces ampoules est $C = 2xy$ (en milliers d'euros). Par conséquent, le bénéfice de la société d'Adèle (en milliers d'euros) est une fonction de deux variables x et y . Déterminer le profit maximal d'Adèle.

Correction

La fonction profit en milliers d'euros est $p(x, y) = p_1x + p_2y - C(x, y) = 50x - x^2 + 60y - 2y^2 - 2xy$. Pour maximiser le profit, on cherche d'abord les points stationnaires:

$$\nabla p = \mathbf{0} \iff \begin{pmatrix} 50 - 2x - 2y \\ 60 - 4y - 2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x = 20, \\ y = 5. \end{cases}$$

Pour établir la nature de ces points, on étudie la matrice hessienne:

$$\begin{aligned} \partial_{xx}p(x, y) &= -2, & \partial_{xx}p(20, 5) &= -2 < 0, \\ \partial_{xy}p(x, y) &= -2, & \partial_{xy}p(20, 5) &= -2, \\ \partial_{yy}p(x, y) &= -4, & \partial_{yy}p(20, 5) &= -4, \end{aligned}$$

et $\det(H_f(20, 5)) = (-2)(-4) - (-2)^2 = 4 > 0$ donc $(20, 5)$ est un point de maximum pour p et le profit maximal vaut $p(20, 5) = 650$. La société d'Adèle réalise le profit maximal de 650000 euros lorsqu'elle vend 20000 ampoules E17 à 30 euros l'une et 5000 ampoules E24 à 50 euros l'une.

Exercice 1.17

Vous êtes le directeur financier de la firme SANBON & FILS. Cette entreprise a investi 3000 euros pour mettre au point un nouveau parfum. Le coût de la production est de 3 euros par flacon de 100 mL. L'expert consulté par M. SANBON père a établi que si la firme consacre x euros en publicité pour son parfum et que le prix de vente d'un flacon est de y euros, la firme vendra exactement $300 + 6\sqrt{x} - 10y$ pièces. La firme SANBON & FILS fixe évidemment x et y de manière à maximiser son profit. En tant que directeur financier, il vous incombe de déterminer ces valeurs.

Correction

- Revenu de la vente: $y(300 + 6\sqrt{x} - 10y)$
- Coût de production: $3(300 + 6\sqrt{x} - 10y)$
- Coût de développement et de publicité: $3000 + x$
- Profit = (Revenu de la vente) - (Coût de production) - (Coût de développement et de publicité)

Le profit de la firme à maximiser est donc la fonction

$$f: (\mathbb{R}_+^*)^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x, y) = (y - 3)(300 + 6\sqrt{x} - 10y) - x - 3000$$

La condition nécessaire s'écrit

$$\begin{cases} \partial_x f(x, y) = \frac{3(y-3)}{\sqrt{x}} - 1 = 0 \\ \partial_y f(x, y) = 330 + 6\sqrt{x} - 20y = 0 \end{cases} \implies (x_0, y_0) = (164025, 138).$$

La hessienne en ce point est définie négative:

$$\begin{cases} \partial_{xx} f(x, y) = -\frac{3(y-3)}{2\sqrt{x^3}} \\ \partial_{xy} f(x, y) = \frac{3}{\sqrt{x}} \\ \partial_{yy} f(x, y) = \frac{30(y-3)}{\sqrt{x^3}} - \frac{3}{\sqrt{x}} \end{cases} \implies \det(H_f(x_0, y_0)) = -\frac{241}{32805}.$$

Comme $\partial_{xx} f(x_0, y_0) = -20$, on a bien un maximum. La firme SANBON & FILS va donc consacrer 164025 euros à la promotion de son nouveau parfum et vendre le flacon de 100 mL à 138 euros. Elle réalisera de la sorte le profit maximal de $f(164025, 138) = 15225$ euros.

Exercice 1.18 (Une fabrication optimale)

Votre société s'occupe de la fabrication d'une pièce mécanique. Celle-ci dépend de deux paramètres réels x et y (à priori non-contraints) de la façon suivante: le coût unitaire de fabrication d'une pièce est égal à

$$c(x, y) = x^2 + 2y^2$$

tandis que le taux de pièces défectueuses (compris entre 0 et 1) est égal à

$$t(x, y) = \frac{1}{1 + (xy)^2}.$$

On cherche à maximiser la rentabilité totale du processus de fabrication. On prendra pour fonction objectif le coût unitaire moyen d'une pièce non-défectueuse, qui est égal au coût de fabrication d'une pièce divisé par le taux de pièces non-défectueuses, et on tentera de le simplifier autant que possible.

Correction

La fonction à minimiser s'écrit $f(x, y) = \frac{c(x, y)}{1 - t(x, y)} = \frac{x^2 + 2y^2}{1 - \frac{1}{1 + (xy)^2}} = \frac{(x^2 + 2y^2)(1 + x^2 y^2)}{x^2 y^2} = \frac{1}{y^2} + x^2 + \frac{2}{x^2} + 2y^2$. La condition nécessaire s'écrit

$$\begin{cases} \partial_x f(x, y) = 2\frac{x^4 - 2}{x^3} = 0 \\ \partial_y f(x, y) = 2\frac{y^4 - 1}{y^3} = 0 \end{cases} \implies (x_0, y_0) = (\sqrt[4]{2}, 1/\sqrt[4]{2}).$$

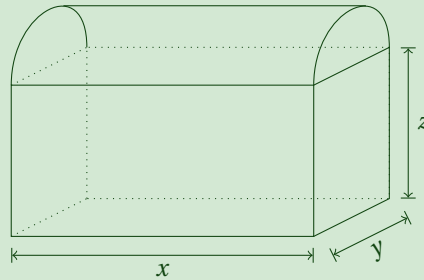
La hessienne en ce point est définie positive :

$$\begin{cases} \partial_{xx}f(x, y) = 2 \frac{x^4+6}{x^4} \\ \partial_{xy}f(x, y) = 0 \\ \partial_{yy}f(x, y) = 2 \frac{2y^4+3}{y^4} \end{cases} \implies \det(H_f(x_0, y_0)) = 4 \frac{2+6}{2} \frac{1+3}{1/2} > 0.$$

Comme $\partial_{xx}f(x_0, y_0) > 0$, on a bien un minimum. En choisissant $(x, y) = (\sqrt[4]{2}, 1/\sqrt[4]{2})$, le coût unitaire moyen d'une pièce non-défectueuse est minimale et égal à $4\sqrt{2}$.

Exercice 1.19

Une boîte a la forme d'un parallélépipède surmonté par un demi-cylindre comme dans la figure ci-dessous



On cherche les valeurs $x, y, z \in \mathbb{R}_+^*$ qui minimisent la surface totale S de la boîte pour un volume V égal à C .

1. Écrire $S(x, y, z)$
2. Écrire $V(x, y, z)$
3. Exprimer $z(x, y)$ comme solution de l'équation $V(x, y, z) = C$
4. Écrire $\tilde{S}(x, y) = S(x, y, z(x, y))$. Calculer et établir la nature des points critiques de $\tilde{S}(x, y)$

Correction

1. $S(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz + \pi\left(\frac{y}{2}\right)^2 + \pi\frac{y}{2}x = \left(1 + \frac{\pi}{2}\right)xy + \frac{\pi}{4}y^2 + 2(x+y)z$
2. $V(x, y, z) = xyz + \frac{1}{2}\pi\left(\frac{y}{2}\right)^2x = xyz + \frac{\pi}{8}xy^2$
3. $V(x, y, z) = C \iff z = \frac{C - \frac{\pi}{8}xy^2}{xy}$ donc $z(x, y) = \frac{C}{xy} - \frac{\pi}{8}y$
4. $\tilde{S}(x, y) = S(x, y, z(x, y)) = \left(1 + \frac{\pi}{2}\right)xy + \frac{\pi}{4}y^2 + 2(x+y)\left(\frac{C}{xy} - \frac{\pi}{8}y\right) = \left(1 + \frac{\pi}{4}\right)xy + \frac{2C}{x} + \frac{2C}{y}$

- Calcul des points critiques :

$$\nabla \tilde{S}(x, y) = \begin{pmatrix} \left(1 + \frac{\pi}{4}\right)y - \frac{2C}{x^2} \\ \left(1 + \frac{\pi}{4}\right)x - \frac{2C}{y^2} \end{pmatrix} \text{ donc } \nabla \tilde{S}(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff (x, y) = \left(\sqrt[3]{\frac{2C}{1 + \frac{\pi}{4}}}, \sqrt[3]{\frac{2C}{1 + \frac{\pi}{4}}}\right)$$

Il existe un seul point critique qui est $\left(\sqrt[3]{\frac{2C}{1 + \frac{\pi}{4}}}, \sqrt[3]{\frac{2C}{1 + \frac{\pi}{4}}}\right)$.

- Nature des points critiques :

$$H_{\tilde{S}}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{4C}{x^3} & 1 + \frac{\pi}{4} \\ 1 + \frac{\pi}{4} & \frac{4C}{y^3} \end{pmatrix} \text{ et } \det(H_{\tilde{S}}(x, y)) = \frac{16C^2}{x^3y^3} - \left(1 + \frac{\pi}{4}\right)^2$$

donc

$$H_{\tilde{S}}\left(\sqrt[3]{\frac{2C}{1 + \frac{\pi}{4}}}, \sqrt[3]{\frac{2C}{1 + \frac{\pi}{4}}}\right) = \begin{pmatrix} 2\left(1 + \frac{\pi}{4}\right) & 1 + \frac{\pi}{4} \\ 1 + \frac{\pi}{4} & 2\left(1 + \frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix} \text{ et } \det\left(H_{\tilde{S}}\left(\sqrt[3]{\frac{2C}{1 + \frac{\pi}{4}}}, \sqrt[3]{\frac{2C}{1 + \frac{\pi}{4}}}\right)\right) = 3\left(1 + \frac{\pi}{4}\right)^2.$$

On conclut que l'unique point critique est bien un minimum et l'on a

$$z\left(\sqrt[3]{\frac{2C}{1 + \frac{\pi}{4}}}, \sqrt[3]{\frac{2C}{1 + \frac{\pi}{4}}}\right) = \frac{C}{\left(\frac{2C}{1 + \frac{\pi}{4}}\right)^{2/3}} - \frac{\pi}{8}\left(\frac{2C}{1 + \frac{\pi}{4}}\right)^{2/3}.$$

```

import sympy as sp

x, y, z, C = sp.symbols('x y z C', positive=True)

S = (1 + sp.pi/2) * x * y + (sp.pi / 4) * y**2 + 2 * (x + y) * z
V = x * y * z + (sp.pi / 8) * x * y**2
z_sol = sp.solve(V - C, z)[0]
S_tilde = S.subs(z, z_sol).simplify()
grad_S_tilde = [sp.diff(S_tilde, var) for var in (x, y)]
H_S_tilde = sp.hessian(S_tilde, (x, y))
det_H_S_tilde = H_S_tilde.det()

x_c, y_c = sp.solve(grad_S_tilde, (x, y), domain=sp.S.Reals)[0]
H_S_tilde_at_critical = H_S_tilde.subs({x: x_c, y: y_c})
det_H_S_tilde_at_critical = det_H_S_tilde.subs({x: x_c, y: y_c}).simplify()

results = {
    'S(x,y,z)': S,
    'V(x,y,z)': V,
    'z(x,y)': z_sol,
    'r'\tilde S(x,y)': S_tilde,
    'r'\nabla \tilde S(x,y)': grad_S_tilde,
    'r'H(x,y)': H_S_tilde,
    'r'\det(H(x,y))': det_H_S_tilde,
    'r'(x_c, y_c)': (x_c, y_c),
    'r'H(x_c,y_c)': H_S_tilde_at_critical,
    'r'\det(H(x_c,y_c))': det_H_S_tilde_at_critical
}

for key, value in results.items():
    print(f"${key}=\n{sp.latex(value)}$\n")

```

$$S(x, y, z) = xy \left(1 + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi y^2}{4} + z(2x + 2y)$$

$$V(x, y, z) = \frac{\pi xy^2}{8} + xyz$$

$$z(x, y) = \frac{C}{xy} - \frac{\pi y}{8}$$

$$\tilde{S}(x, y) = \frac{2C}{y} + \frac{2C}{x} + \frac{\pi xy}{4} + xy$$

$$\nabla \tilde{S}(x, y) = \left[-\frac{2C}{x^2} + \frac{\pi y}{4} + y, -\frac{2C}{y^2} + \frac{\pi x}{4} + x \right]$$

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{4C}{x^3} & \frac{\pi}{4} + 1 \\ \frac{\pi}{4} + 1 & \frac{4C}{y^3} \end{bmatrix}$$

$$\det(H(x, y)) = \frac{256C^2 - 8\pi x^3 y^3 - 16x^3 y^3 - \pi^2 x^3 y^3}{16x^3 y^3}$$

$$(x_c, y_c) = \left(\frac{2\sqrt[3]{C}}{\sqrt[3]{\pi+4}}, \frac{2\sqrt[3]{C}}{\sqrt[3]{\pi+4}} \right)$$

$$H(x_c, y_c) = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{2} + 2 & \frac{\pi}{4} + 1 \\ \frac{\pi}{4} + 1 & \frac{\pi}{2} + 2 \end{bmatrix}$$

$$\det(H(x_c, y_c)) = \frac{3\pi^2}{16} + 3 + \frac{3\pi}{2}$$

Intégrales doubles, coordonnées cartésiennes

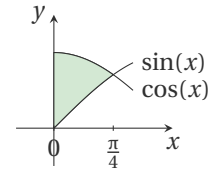
Exercice 1.20

Soit $\mathcal{D}$ la région comprise entre le graphe de la fonction d'équation $y = \sin(x)$ et le graphe de la fonction $y = \cos(x)$ pour x entre 0 et $\frac{\pi}{4}$. Décrire le domaine d'intégration $\mathcal{D}$ en coordonnées cartésiennes et calculer l'intégrale $\iint_{\mathcal{D}} (y+1) dx dy$.

Correction

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}, \sin(x) \leq y \leq \cos(x)\}$$

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{D}} (y+1) \, dx \, dy &= \int_0^{\pi/4} \int_{\sin(x)}^{\cos(x)} (y+1) \, dy \, dx = \int_0^{\pi/4} \left[\frac{y^2}{2} + y \right]_{y=\sin(x)}^{y=\cos(x)} dx \\ &= \int_0^{\pi/4} \left(\frac{\cos^2(x) - \sin^2(x)}{2} + \cos(x) - \sin(x) \right) dx \\ &= \int_0^{\pi/4} \left(\frac{\cos(2x)}{2} + \cos(x) - \sin(x) \right) dx \\ &= \left[\frac{\sin(2x)}{4} + \sin(x) + \cos(x) \right]_{x=0}^{x=\pi/4} = \sqrt{2} - \frac{3}{4}. \end{aligned}$$



```
from sympy import symbols, sin, cos, pi, Integral, simplify, latex, integrate
x, y = symbols('x y')

inner = Integral( (y+1) , (y, sin(x), cos(x)))
inner_eval = inner.doit()
inner_simplified = simplify(inner_eval)

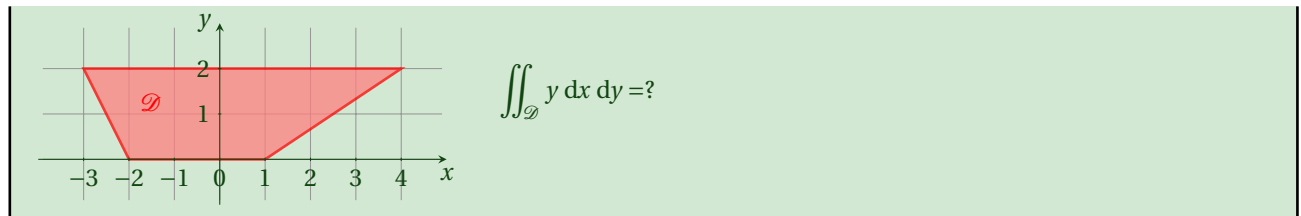
outer = Integral(inner_simplified, (x, 0, pi/4))
outer_eval = outer.doit()
outer_simplified = simplify(outer_eval)

step1 = r"\iint_{\mathcal{D}} (y+1) \, dx \, dy"
step2 = r"\int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_{\sin(x)}^{\cos(x)} (y+1) \, dy \, dx"
step3 = r"\int_0^{\frac{\pi}{4}} " + latex(inner_eval) + r" \, dx"
step4 = r"\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left( " + latex(inner_simplified) + r" \right.
        + \left. \right) \, dx"
step5 = latex(outer_simplified)

latex_align = r"\begin{align*}" + "\n"
latex_align += step1 + r" &= " + step2 + r" \\\n"
latex_align += r"&= " + step3 + r" \\\n"
latex_align += r"&= " + step4 + r" \\\n"
latex_align += r"&= " + step5 + "\n"
latex_align += r"\end{align*}"
print(latex_align)
```

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{D}} (y+1) \, dx \, dy &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_{\sin(x)}^{\cos(x)} (y+1) \, dy \, dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} -\frac{\sin^2(x)}{2} - \sin(x) + \frac{\cos^2(x)}{2} + \cos(x) \, dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\cos(2x)}{2} + \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \right) dx \\ &= -\frac{3}{4} + \sqrt{2} \end{aligned}$$

Exercice 1.21

**Correction**

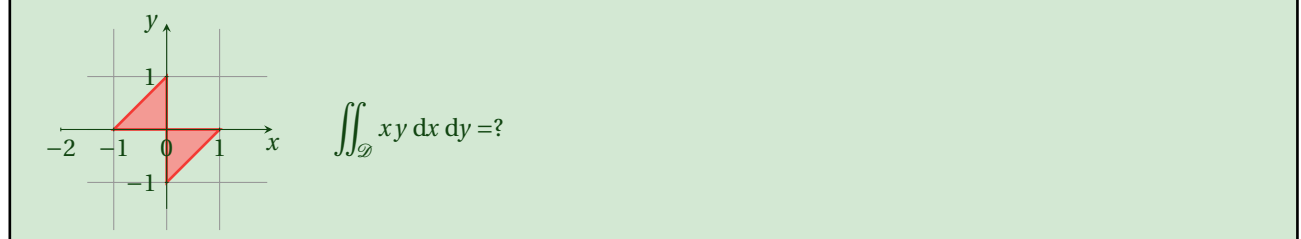
$$\mathcal{D} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 2, -\frac{1}{2}y - 2 \leq x \leq \frac{3}{2}y + 1 \right\},$$

$$\iint_{\mathcal{D}} y \, dy \, dx = \int_0^2 \int_{-\frac{1}{2}y-2}^{\frac{3}{2}y+1} y \, dx \, dy = \int_0^2 [yx]_{x=-\frac{1}{2}y-2}^{x=\frac{3}{2}y+1} dy = \int_0^2 y(2y+3) \, dy = \frac{34}{3}.$$

Exercice 1.22**Correction**

$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 2, \frac{1}{2}y - 2 \leq x \leq 2 \right\} \setminus \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \right\},$$

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} x \, dy \, dx &= \int_0^2 \int_{\frac{y}{2}-2}^2 x \, dx \, dy - \int_0^1 \int_{-1}^1 x \, dx \, dy \\ &= \int_0^2 \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=\frac{y}{2}-2}^{x=2} dy - \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=-1}^{x=1} dy = \int_0^2 -\frac{y^2}{8} + y \, dy - 0 = \left[-\frac{y^3}{24} + \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=2} = \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

Exercice 1.23**Correction**

$$\mathcal{D} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 0, 0 \leq y \leq x+1 \right\} \cup \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, x-1 \leq y \leq 0 \right\}$$

donc

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{D}} y \, dy \, dx &= \int_{-1}^0 \int_0^{x+1} xy \, dy \, dx + \int_0^1 \int_{x-1}^0 xy \, dy \, dx = \int_{-1}^0 \left[x \frac{y^2}{2} \right]_0^{x+1} dx + \int_0^1 \left[x \frac{y^2}{2} \right]_{x-1}^0 dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^0 x^3 + 2x^2 + x \, dx - \frac{1}{2} \int_0^1 x^3 - 2x^2 + x \, dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 - \frac{1}{2} \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = -\frac{1}{12}. \end{aligned}$$

Exercice 1.24 (Distance moyenne parcourue à pied pour rejoindre une porte d'embarquement)

Dans les aéroports, les portes d'embarquements dans un terminal sont souvent alignées. Si on arrive à une porte d'embarquement et on doit rejoindre une autre porte d'embarquement pour une correspondance, quelle proportion de la longueur du terminal doit-on parcourir en moyenne? Une manière de modéliser cette situation est de choisir au hasard deux nombres $x \in [0; 1]$, $y \in [0; 1]$ et de calculer la valeur moyenne de $|x - y|$, i.e. $\int_0^1 \int_0^1 |x - y| dx dy$. Calculer cette intégrale.

Correction

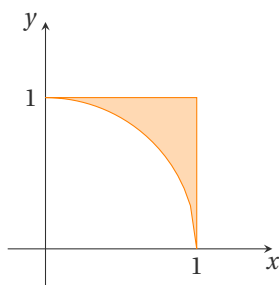
$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 |x - y| dx dy &= \int_0^1 \int_0^x (x - y) dy dx + \int_0^1 \int_x^1 (y - x) dy dx = \int_0^1 \left[xy - \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=x} dx + \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2} - xy \right]_{y=x}^{y=1} dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} \right) dx + \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - x + \frac{x^2}{2} \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - x + x^2 \right) dx = \left[\frac{1}{2}x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Exercice 1.25

Calculer l'intégrale double $\iint_D f(x, y) dx dy$ où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 1 \leq x^2 + y^2\}$ et $f(x, y) = \frac{xy}{1+x^2+y^2}$.

Correction

La partie D de $\mathbb{R}^2$ est l'intersection du carré $[0; 1] \times [0; 1]$ et de l'extérieur du cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon 1. La fonction f est continue sur D .

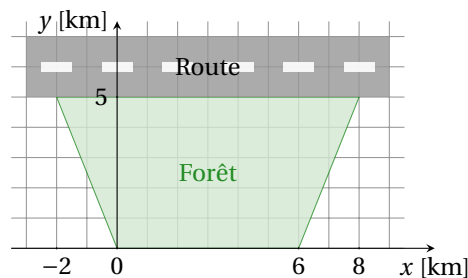


À l'aide du théorème de Fubini (et du dessin pour ne pas se tromper sur les bornes) on peut écrire

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \frac{xy}{1+x^2+y^2} dx dy = \int_0^1 \int_{\sqrt{1-x^2}}^1 \frac{xy}{1+x^2+y^2} dy dx = \int_0^1 \frac{x}{2} \int_{\sqrt{1-x^2}}^1 \frac{2y}{1+x^2+y^2} dy dx \\ &= \int_0^1 \frac{x}{2} [\ln(1+x^2+y^2)]_{\sqrt{1-x^2}}^1 dx = \int_0^1 \frac{x}{2} [\ln(2+x^2) - \ln(2)] dx = \int_0^1 \frac{x}{2} \ln\left(1 + \frac{x^2}{2}\right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \ln(1+u) du = \frac{1}{2} [(1+u) \ln(1+u) - u]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{4} \ln \frac{3}{2} - \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Calcul d'aires et centres de gravité, coordonnées cartésiennes**Exercice 1.26 (Population de lapins)**

Une forêt est à côté d'une route (voir la figure ci-contre). La densité de la population de lapins qui vivent dans la forêt est proportionnelle à la distance de la route. Plus précisément, elle vaut 0 au niveau de la route et vaut 10 lapins par kilomètre carré au côté opposé de la forêt. Estimer la population totale de lapins dans la forêt.



Correction

- La forêt (domaine d'intégration) s'écrit

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \leq x \leq 0, -\frac{5}{2}x \leq y \leq 5 \right\} \cup \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 6, 0 \leq y \leq 5 \right\} \cup \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 6 \leq x \leq 8, \frac{5}{2}x - 15 \leq y \leq 5 \right\}$$

ou encore, ce qui est plus simple,

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 5, -\frac{2}{5}y \leq x \leq \frac{2}{5}(15 + y) \right\}$$

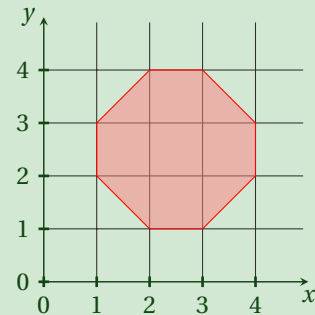
- La densité est une fonction affine de la seule variable y (comme la route est horizontale, la distance ne dépend que de la coordonnées y), i.e. $\delta(y) = my + q$ avec m et q à déterminer. On sait que $\delta(5) = 0$ et $\delta(0) = 10$ donc $\delta(y) = 2(5 - y)$.
- La population totale de lapins qui vivent dans la forêt est

$$\int_0^5 \int_{-\frac{2}{5}y}^{\frac{2}{5}(15+y)} \delta(y) \, dx \, dy = 2 \int_0^5 (5 - y) \int_{-\frac{2}{5}y}^{\frac{2}{5}(15+y)} 1 \, dx \, dy = 2 \int_0^5 (5 - y) \frac{2}{5} (15 + 2y) \, dy = \frac{4}{5} \int_0^5 75 - 5y - 2y^2 \, dy = \frac{550}{3}.$$

Exercice 1.27

Soit $\mathcal{D}$ la plaque homogène représentée dans la figure.
 Sans faire de calculs d'intégrales, en déduire les valeurs de

$$\iint_{\mathcal{D}} 1 \, dx \, dy, \quad \iint_{\mathcal{D}} x \, dx \, dy, \quad \iint_{\mathcal{D}} y \, dx \, dy.$$


Correction

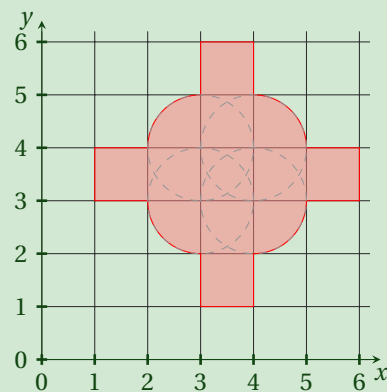
L'aire mesure 7 et le centre de gravité a coordonnées $(5/2, 5/2)$ donc

$$\iint_{\mathcal{D}} 1 \, dx \, dy = 7, \quad \iint_{\mathcal{D}} x \, dx \, dy = 35/2, \quad \iint_{\mathcal{D}} y \, dx \, dy = 35/2.$$

Exercice 1.28

Soit $\mathcal{D}$ la plaque homogène représentée dans la figure.
 Sans faire de calculs d'intégrales, en déduire les valeurs de

$$\iint_{\mathcal{D}} 1 \, dx \, dy, \quad \iint_{\mathcal{D}} x \, dx \, dy, \quad \iint_{\mathcal{D}} y \, dx \, dy.$$

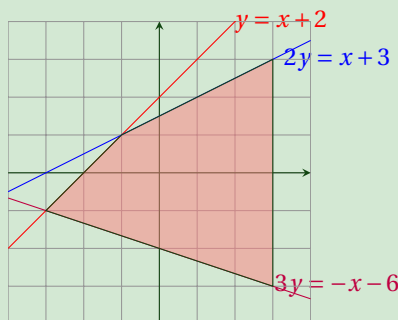

Correction

L'aire mesure $9 + \pi$ et le centre de gravité a coordonnées $(7/2, 7/2)$ donc

$$\iint_{\mathcal{D}} 1 \, dx \, dy = 9 + \pi, \quad \iint_{\mathcal{D}} x \, dx \, dy = (9 + \pi)7/2, \quad \iint_{\mathcal{D}} y \, dx \, dy = (9 + \pi)7/2.$$

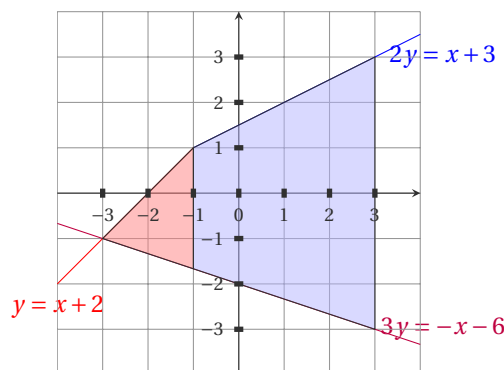
Exercice 1.29

Calculer l'aire de la région coloriée en figure

**Correction**

Soit $\mathcal{D}$ le domaine. Pour calculer l'aire on peut soit utiliser un simple calcul géométrique soit se rappeler que l'aire est donnée par l'intégrale double

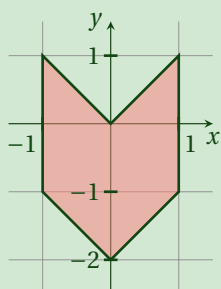
$$\iint_{\mathcal{D}} 1 \, dx \, dy.$$



Pour ce calcul on décompose la région en deux parties et on obtient

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{D}} 1 \, dx \, dy &= \int_{-3}^{-1} \int_{-\frac{1}{3}x-2}^{x+2} 1 \, dy \, dx + \int_{-1}^3 \int_{-\frac{1}{3}x-2}^{\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}} 1 \, dy \, dx \\ &= \int_{-3}^{-1} x+2 + \frac{1}{3}x+2 \, dx + \int_{-1}^3 \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} + \frac{1}{3}x+2 \, dx = \int_{-3}^{-1} \frac{4}{3}x+4 \, dx + \int_{-1}^3 \frac{5}{6}x + \frac{7}{2} \, dx = 20. \end{aligned}$$

On peut le refaire en découpant horizontalement au lieu que verticalement et on peut aussi le refaire avec des intégrales d'une seule variable

Exercice 1.30

Calculer les coordonnées du centre de gravité de la plaque supposée homogène dessinée ci-contre (vous pouvez éviter le calcul d'intégrales, mais justifiez votre raisonnement).

Correction

Pour calculer les coordonnées (x_G, y_G) du centre de gravité on doit calculer d'abord les trois intégrales doubles suivantes :

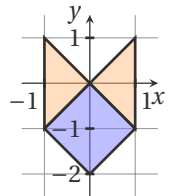
$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{D}} 1 \, dy \, dx &= \int_{-1}^0 \int_{-x-2}^{-x} dy \, dx + \int_0^1 \int_{x-2}^x dy \, dx = \int_{-1}^0 2 \, dx + \int_0^1 2 \, dx = 4, \\ \iint_{\mathcal{D}} x \, dy \, dx &= \int_{-1}^0 \int_{-x-2}^{-x} x \, dy \, dx + \int_0^1 \int_{x-2}^x x \, dy \, dx = \int_{-1}^0 2x \, dx + \int_0^1 2x \, dx = 0, \\ \iint_{\mathcal{D}} y \, dy \, dx &= \int_{-1}^0 \int_{-x-2}^{-x} y \, dy \, dx + \int_0^1 \int_{x-2}^x y \, dy \, dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^0 (-4x - 4) \, dx + \frac{1}{2} \int_0^1 (4x - 4) \, dx \\ &= -2 \int_{-1}^0 (x+1) \, dx + 2 \int_0^1 (x-1) \, dx = -2\end{aligned}$$

et on en déduit que

$$x_G = \frac{\iint_{\mathcal{D}} x \, dy \, dx}{\iint_{\mathcal{D}} 1 \, dy \, dx} = 0, \quad y_G = \frac{\iint_{\mathcal{D}} y \, dy \, dx}{\iint_{\mathcal{D}} 1 \, dy \, dx} = -\frac{1}{2}.$$

En fait, aucune intégrale n'est nécessaire car

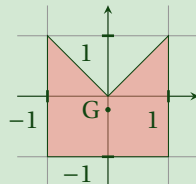
- la première intégrale correspond à l'aire de la figure qu'on peut calculer géométriquement,
- la deuxième intégrale est forcément nulle car le centre de gravité appartient à l'axe des y par symétrie donc $x_G = 0$,
- la troisième intégrale n'est pas nécessaire car pour calculer y_G . Il suffit en effet de découper la plaque comme dans la figure ci-contre : la plaque supérieure a centre de gravité en $(0, 0)$, la plaque inférieure a centre de gravité en $(-1, 0)$ et les deux plaques ont la même aire donc la plaque totale a centre de gravité en $(0, -0,5)$ (ce raisonnement permet en effet de calculer directement x_G et y_G) :



$$y_G = y_{G_{\text{supérieure}}} \frac{\text{Aire supérieure}}{\text{Aire totale}} + y_{G_{\text{inférieure}}} \frac{\text{Aire inférieure}}{\text{Aire totale}} = 0 \frac{1}{2} + (-1) \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

Exercice 1.31

Calculer les coordonnées du centre de gravité G de la plaque supposée homogène dessinée ci-dessous (éviter le calcul d'intégrales lorsqu'il est possible, mais *justifier le raisonnement*) :


Correction

Pour calculer les coordonnées (x_G, y_G) du centre de gravité on doit calculer d'abord les trois intégrales doubles suivantes :

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{D}} 1 \, dy \, dx &= \int_{-1}^0 \int_{-1}^{-x} dy \, dx + \int_0^1 \int_{-1}^x dy \, dx = \int_{-1}^0 (-x+1) \, dx + \int_0^1 (x+1) \, dx = 3, \\ \iint_{\mathcal{D}} x \, dy \, dx &= \int_{-1}^0 \int_{-1}^{-x} x \, dy \, dx + \int_0^1 \int_{-1}^x x \, dy \, dx = \int_{-1}^0 (-x^2+x) \, dx + \int_0^1 (x^2+x) \, dx = 0, \\ \iint_{\mathcal{D}} y \, dy \, dx &= \int_{-1}^0 \int_{-1}^{-x} y \, dy \, dx + \int_0^1 \int_{-1}^x y \, dy \, dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^0 (x^2-1) \, dx + \frac{1}{2} \int_0^1 (x^2-1) \, dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (x^2-1) \, dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_{-1}^1 = -\frac{2}{3}\end{aligned}$$

et on en déduit que

$$x_G = \frac{\iint_{\mathcal{D}} x \, dy \, dx}{\iint_{\mathcal{D}} 1 \, dy \, dx} = 0, \quad y_G = \frac{\iint_{\mathcal{D}} y \, dy \, dx}{\iint_{\mathcal{D}} 1 \, dy \, dx} = -\frac{2}{9}.$$

En fait, aucune des trois intégrales est nécessaire car

- la première intégrale correspond à l'aire de la figure qu'on peut calculer géométriquement,
- la deuxième intégrale est forcément nulle car le centre de gravité appartient à l'axe des y par symétrie donc $x_G = 0$,

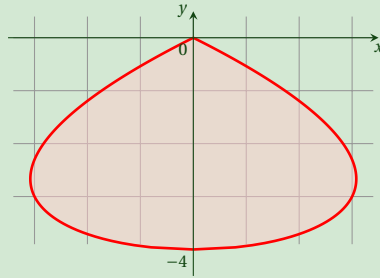
- la troisième intégrale n'est pas nécessaire car pour calculer y_G . Il suffit en effet de découper la plaque en deux (la plaque supérieure correspond aux points d'ordonnée positive, la plaque inférieure aux points d'ordonnée négative). La plaque supérieure a aire 1 et centre de gravité en $(0, 1/3)$, la plaque inférieure a aire 2 centre de gravité en $(0, -1/2)$, donc la plaque totale a aire 3 et centre de gravité en $(0, -2/9)$ car

$$y_G = y_{G_{\text{supérieure}}} \frac{\text{Aire supérieure}}{\text{Aire totale}} + y_{G_{\text{inférieure}}} \frac{\text{Aire inférieure}}{\text{Aire totale}} = \frac{1}{3} \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \frac{2}{3} = -\frac{1}{2}$$

Exercice 1.32 (Aire d'une châtaigne)

Calculer l'aire de

$$\mathcal{D} = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < 0, \quad x^2 < y^4(y+4) \}.$$



Correction

$$\begin{aligned} \text{Aire} &= \iint_{\mathcal{D}} 1 \, dx \, dy = \int_{-4}^0 \int_{-y^2\sqrt{y+4}}^{y^2\sqrt{y+4}} 1 \, dx \, dy = \int_{-4}^0 [x]_{-y^2\sqrt{y+4}}^{y^2\sqrt{y+4}} \, dy = \int_{-4}^0 2y^2\sqrt{y+4} \, dy \\ &= 4 \int_0^2 t^2(t^2-4)^2 \, dt = 4 \int_0^2 t^6 - 8t^4 + 16t^2 \, dt = 4 \left[\frac{t^7}{7} - 8\frac{t^5}{5} + 16\frac{t^3}{3} \right]_0^2 = \frac{2^{12}}{105}. \end{aligned}$$

Exercice 1.33 (Aire d'un cœur)

On se propose de calculer l'aire de l'ensemble $\mathcal{D} = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x^2 - 2|x|(y+1) + (y+1)^2 - 1 \leq 0 \}$.

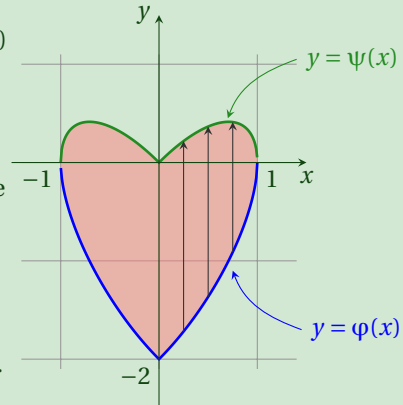
- Déterminer tout d'abord les deux fonctions $y = \varphi(x)$ et $y = \psi(x)$ telles que

$$\mathcal{D} = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1 \text{ et } \varphi(x) \leq y \leq \psi(x) \}.$$

- Par le changement de variable $x = \sin(t)$, montrer qu'une primitive de la fonction $\sqrt{1-x^2}$ sur $[0; 1]$ est

$$\int \sqrt{1-x^2} \, dx = \frac{x\sqrt{1-x^2} + \arcsin(x)}{2}.$$

- En utilisant la symétrie de la figure, calculer l'aire de l'ensemble $\mathcal{D}$.



Correction

- Pour trouver les équations des deux fonctions $y = \varphi(x)$ et $y = \psi(x)$ on remarque que

$$(y+1)^2 - 2|x|(y+1) + (2x^2-1) = 0 \iff (y+1) = |x| \pm \sqrt{|x|^2 - (2x^2-1)} \iff y = -1 + |x| \pm \sqrt{1-x^2}$$

donc $\varphi(x) = -1 + |x| - \sqrt{1-x^2}$ et $\psi(x) = -1 + |x| + \sqrt{1-x^2}$.

- On calcule une primitive de la fonction $\sqrt{1-x^2}$ sur $[0; 1]$ par le changement de variable $x = \sin(t)$:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1-x^2} dx &= \int \sqrt{1-\sin^2(t)} \cos(t) dt = \int \cos^2(t) dt = \sin(t) \cos(t) + \int \sin^2(t) dt \\ &= \sin(t) \cos(t) + \int 1 dt - \int \cos^2(t) dt = \sin(t) \cos(t) + t - \int \cos^2(t) dt = x\sqrt{1-x^2} + \arcsin(x) - \int \sqrt{1-x^2} dx\end{aligned}$$

donc

$$\int \sqrt{1-x^2} dy = \frac{x\sqrt{1-x^2} + \arcsin(x)}{2}.$$

3. En utilisant la symétrie de la figure par rapport à la droite d'équation $x = 0$, on trouve

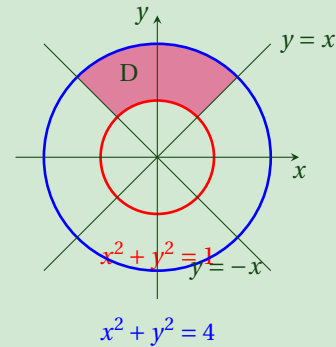
$$\begin{aligned}\text{Aire}(\mathcal{D}) &= \iint_{\mathcal{D}} 1 dx dy = 2 \int_0^1 \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} 1 dx dy = 2 \int_0^1 \psi(x) - \varphi(x) dy \\ &= 4 \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dy = 4 \left[\frac{x\sqrt{1-x^2} + \arcsin(x)}{2} \right]_0^1 = 2 \arcsin(1) = \pi.\end{aligned}$$

Intégrales doubles, coordonnées polaires

Exercice 1.34

Calculer l'intégrale double

$$\iint_D (x^2 + y) dx dy.$$



Correction

La région D s'écrit en coordonnées cartésiennes

$$\begin{aligned}D &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\sqrt{2} \leq x \leq -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ et } -x \leq y \leq \sqrt{4-x^2} \right\} \\ &\cup \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ et } \sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2} \right\} \\ &\cup \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq \sqrt{2} \text{ et } x \leq y \leq \sqrt{4-x^2} \right\}\end{aligned}$$

donc

$$\iint_D (x^2 + y) dx dy = \int_{-\sqrt{2}}^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} \int_{-x}^{\sqrt{4-x^2}} (x^2 + y) dy dx + \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (x^2 + y) dy dx + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{2}} \int_x^{\sqrt{4-x^2}} (x^2 + y) dy dx.$$

C'est un peu compliqué... Si on décrit la région D en coordonnées polaires centrées en $(0;0)$ on obtient

$$D = \left\{ (r, \vartheta) \mid 1 \leq r \leq 2, \frac{\pi}{4} \leq \vartheta \leq \frac{3\pi}{4} \right\}$$

donc

$$\begin{aligned}
\iint_D (x^2 + y) \, dx \, dy &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_1^2 (r^2 \cos^2(\vartheta) + r \sin(\vartheta)) r \, dr \, d\vartheta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_1^2 (r^3 \cos^2(\vartheta) + r^2 \sin(\vartheta)) \, dr \, d\vartheta \\
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_1^2 r^3 \cos^2(\vartheta) \, dr \, d\vartheta + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_1^2 r^2 \sin(\vartheta) \, dr \, d\vartheta = \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos^2(\vartheta) \, d\vartheta \right) \times \left(\int_1^2 r^3 \, dr \right) + \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin(\vartheta) \, d\vartheta \right) \times \left(\int_1^2 r^2 \, dr \right) \\
&= \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{1 + \cos(2\vartheta)}{2} \, d\vartheta \right) \times \left(\int_1^2 r^3 \, dr \right) + \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin(\vartheta) \, d\vartheta \right) \times \left(\int_1^2 r^2 \, dr \right) \\
&= \left[\frac{2\vartheta + \sin(2\vartheta)}{4} \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \times \left[\frac{r^4}{4} \right]_1^2 + [-\cos(\vartheta)]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \times \left[\frac{r^3}{3} \right]_1^2 = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right) \times \frac{15}{4} + \sqrt{2} \times \frac{7}{3} = \frac{15}{16}\pi - \frac{15}{8} + \frac{7}{3}\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Exercice 1.35

Soit $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 4x + y^2 + 2y + 3 \leq 0\}$. Calculer $\iint_{\mathcal{D}} \frac{1}{1 + (x-2)^2 + (y+1)^2} \, dx \, dy$.

Correction

Remarquons que l'équation $x^2 - 4x + y^2 + 2y + 3 = 0$ définit un cercle de centre $(2, -1)$ et rayon $\sqrt{2}$. On passe alors aux coordonnées polaires :

$$\begin{cases} x = 2 + r \cos(\vartheta), \\ y = -1 + r \sin(\vartheta), \\ dx \, dy = r \, dr \, d\vartheta, \end{cases}$$

et on obtient

$$\iint_{\mathcal{D}} \frac{1}{1 + (x-2)^2 + (y+1)^2} \, dx \, dy = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \frac{r}{1 + r^2} \, dr \, d\vartheta = \pi \int_0^{\sqrt{2}} \frac{2r}{1 + r^2} \, dr = \pi [\ln(1 + r^2)]_0^{\sqrt{2}} = \pi \ln(3).$$

Exercice 1.36

Trouver les erreurs :

1. soit $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$, alors

$$\iint_{\mathcal{D}} (x^2 + y^2) \, dx \, dy = \int_0^{2\pi} \int_0^2 r^2 \, dr \, d\vartheta = \left(\int_0^{2\pi} 1 \, d\vartheta \right) \times \left(\int_0^2 r^2 \, dr \right) = \frac{16}{3}\pi;$$

2. soit $\mathcal{D}$ la région délimitée par la droite d'équation $x = 1$, la droite d'équation $y = 0$ et la droite d'équation $y = x$; alors, si on passe aux coordonnées polaires, on a

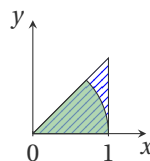
$$\iint_{\mathcal{D}} x \, dx \, dy = \int_0^{\pi/4} \int_0^1 r^2 \cos(\vartheta) \, dr \, d\vartheta.$$

Correction

1. Quand on passe aux coordonnées polaires on a $x = r \cos(\vartheta)$, $y = r \sin(\vartheta)$ et $dx \, dy = r \, dr \, d\vartheta$ donc

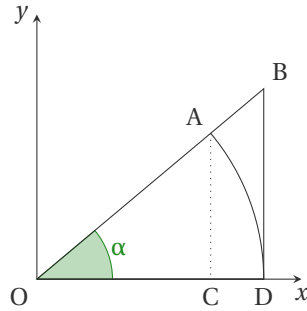
$$\iint_{\mathcal{D}} (x^2 + y^2) \, dx \, dy = \int_0^{2\pi} \int_0^2 r^3 \, dr \, d\vartheta = \left(\int_0^{2\pi} 1 \, d\vartheta \right) \times \left(\int_0^2 r^3 \, dr \right) = 8\pi.$$

2. Le domaine $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$ est un triangle (hachuré dans la figure ci-dessous) tandis que le domaine $\{(r, \vartheta) \in \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi[\mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{4}\}$ (colorié dans la figure ci-dessous) est un huitième du disque unitaire :



Comme les domaines d'intégration sont différents, les deux intégrales sont différentes aussi. Si on utilise les coordonnées polaires pour décrire l'ensemble $\mathcal{D}$ on a

$$\left\{ (r, \vartheta) \in \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi[\mid 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq r \leq \sqrt{1 + \tan^2(\vartheta)} \right\} = \left\{ (r, \vartheta) \in \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi[\mid 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq r \leq \frac{1}{\cos(\vartheta)} \right\}.$$



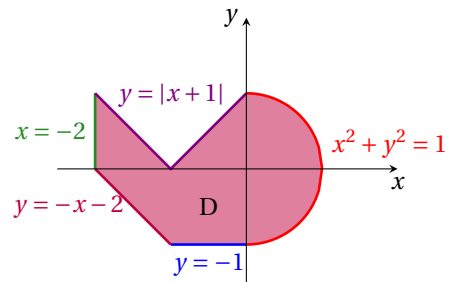
$$\begin{aligned} OA &= OD = R \\ OC &= R \cos(\alpha) \\ BD &= R \tan(\alpha) \\ OB &= R \sqrt{1 + \tan^2(\alpha)} \end{aligned}$$

En effet,

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{D}} x \, dx \, dy &= \int_0^1 \int_0^x x \, dy \, dx = \int_0^1 [xy]_{y=0}^{y=x} \, dx = \int_0^1 x^2 \, dx = \frac{1}{3}; \\ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{1}{\cos(\vartheta)}} r^2 \cos(\vartheta) \, dr \, d\vartheta &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{r^3}{3} \cos(\vartheta) \right]_{r=0}^{r=\frac{1}{\cos(\vartheta)}} d\vartheta = \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2(\vartheta)} \, d\vartheta = \frac{1}{3} [\tan(\vartheta)]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Exercice 1.37 (La baleine)
Calculer l'intégrale double

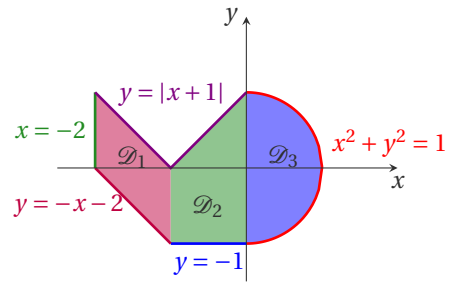
$$\iint_{\mathcal{D}} x^2 y \, dx \, dy.$$



Correction

L'ensemble d'intégration peut être décrit comme la réunion des trois domaines disjoints suivants :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_1 &= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \leq x < -1, -x-2 \leq y < -x-1 \}, \\ \mathcal{D}_2 &= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x < 0, -1 \leq y < x+1 \}, \\ \mathcal{D}_3 &= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1 \} \\ &= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \} \\ &= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq \sqrt{1-y^2} \} \\ &= \left\{ (r, \vartheta) \in \mathbb{R}_+ \times [-\pi; \pi[\mid 0 < r \leq 1, -\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2} \right\}. \end{aligned}$$



Par définition on a

$$\iint_{\mathcal{D}} x^2 y \, dx \, dy = \iint_{\mathcal{D}_1} x^2 y \, dx \, dy + \iint_{\mathcal{D}_2} x^2 y \, dx \, dy + \iint_{\mathcal{D}_3} x^2 y \, dx \, dy.$$

Calculons chaque intégrale :

- $\iint_{\mathcal{D}_1} x^2 y \, dx \, dy :$

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{D}_1} x^2 y \, dx \, dy &= \int_{-2}^{-1} \int_{-x-2}^{-x-1} x^2 y \, dy \, dx = \int_{-2}^{-1} x^2 \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=-x-2}^{y=-x-1} dx = \int_{-2}^{-1} x^2 \left(\frac{(-x-1)^2}{2} - \frac{(-x-2)^2}{2} \right) dx \\ &= - \int_{-2}^{-1} x^3 + \frac{3}{2} x^2 \, dx = - \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{2} \right]_{x=-2}^{x=-1} = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

• $\iint_{\mathcal{D}_2} x^2 y \, dx \, dy$:

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{D}_2} x^2 y \, dx \, dy &= \int_{-1}^0 \int_{-1}^{x+1} x^2 y \, dy \, dx = \int_{-1}^0 x^2 \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=-1}^{y=x+1} dx = \int_{-1}^0 x^2 \left(\frac{(x+1)^2}{2} - \frac{(-1)^2}{2} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^0 x^4 + 2x^3 \, dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{2} \right]_{x=-1}^{x=0} = -\frac{3}{20}\end{aligned}$$

• $\iint_{\mathcal{D}_3} x^2 y \, dx \, dy = 0$ car le domaine est symétrique par rapport à l'axe des abscisses et la fonction à intégrer est impaire par rapport à y . Si on n'a pas remarqué la symétrie, il suffit d'utiliser les coordonnées polaires:

$$\iint_{\mathcal{D}_3} x^2 y \, dx \, dy = \int_0^1 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (r^4 \cos^2(\vartheta) \sin(\vartheta)) \, d\vartheta \, dr = \left(\int_0^1 r^4 \, dr \right) \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(\vartheta) \sin(\vartheta) \, d\vartheta \right) = \left[\frac{r^5}{5} \right]_0^1 \left[-\frac{\cos^3(\vartheta)}{3} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 0$$

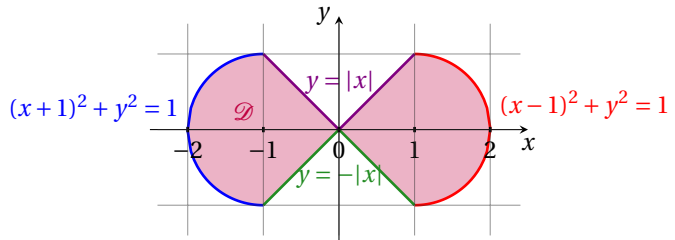
En conclusion,

$$\iint_{\mathcal{D}} x^2 y \, dx \, dy = \frac{1}{4} - \frac{3}{20} + 0 = \frac{1}{10}.$$

Exercice 1.38

Calculer l'intégrale double

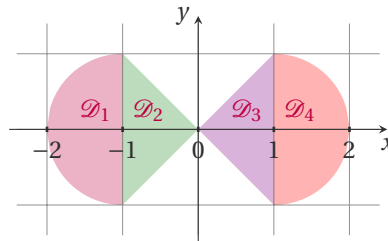
$$\iint_{\mathcal{D}} xy^2 \, dx \, dy.$$



Correction

Il s'agit de la réunion des quatre domaines:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_1 &= \{ (x, y) \mid x \leq -1, (x+1)^2 + y^2 \leq 1 \}, \\ \mathcal{D}_2 &= \{ (x, y) \mid -1 \leq x \leq 0, x \leq y \leq -x \}, \\ \mathcal{D}_3 &= \{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, -x \leq y \leq x \}, \\ \mathcal{D}_4 &= \{ (x, y) \mid x \geq 0, (x-1)^2 + y^2 \leq 1 \}.\end{aligned}$$



Par définition on a

$$\iint_{\mathcal{D}} xy^2 \, dx \, dy = \iint_{\mathcal{D}_1} xy^2 \, dx \, dy + \iint_{\mathcal{D}_2} xy^2 \, dx \, dy + \iint_{\mathcal{D}_3} xy^2 \, dx \, dy + \iint_{\mathcal{D}_4} xy^2 \, dx \, dy.$$

Calculons chaque intégrale:

$$\iint_{\mathcal{D}_1} xy^2 \, dx \, dy = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \int_0^1 r^4 \cos(\vartheta) \sin^2(\vartheta) \, dr \, d\vartheta = \left(\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos(\vartheta) \sin^2(\vartheta) \, d\vartheta \right) \left(\int_0^1 r^4 \, dr \right) = \left[\frac{\sin^3(\vartheta)}{3} \right]_{\vartheta=\pi/2}^{\vartheta=3\pi/2} \left[\frac{r^5}{5} \right]_{r=0}^{r=1} = -\frac{2}{15}$$

$$\iint_{\mathcal{D}_2} xy^2 \, dx \, dy = \int_{-1}^0 \int_x^{-x} xy^2 \, dy \, dx = \int_{-1}^0 x \left[\frac{y^3}{3} \right]_{y=x}^{y=-x} dx = \int_{-1}^0 x \left(\frac{(-x)^3}{3} - \frac{(x)^3}{3} \right) dx = -\frac{2}{3} \int_{-1}^0 x^4 \, dx = -\frac{2}{3} \left[\frac{x^5}{5} \right]_{x=-1}^{x=0} = -\frac{2}{15}$$

$$\iint_{\mathcal{D}_3} xy^2 \, dx \, dy = \int_0^1 \int_{-x}^x xy^2 \, dy \, dx = \int_0^1 x \left[\frac{y^3}{3} \right]_{y=-x}^{y=x} dx = \int_0^1 x \left(\frac{x^3}{3} - \frac{(-x)^3}{3} \right) dx = \frac{2}{3} \int_0^1 x^4 \, dx = \frac{2}{3} \left[\frac{x^5}{5} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{2}{15}$$

$$\iint_{\mathcal{D}_4} xy^2 \, dx \, dy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^1 r^4 \cos(\vartheta) \sin^2(\vartheta) \, dr \, d\vartheta = \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(\vartheta) \sin^2(\vartheta) \, d\vartheta \right) \left(\int_0^1 r^4 \, dr \right) = \left[\frac{\sin^3(\vartheta)}{3} \right]_{\vartheta=-\pi/2}^{\vartheta=\pi/2} \left[\frac{r^5}{5} \right]_{r=0}^{r=1} = \frac{2}{15}$$

En conclusion,

$$\iint_{\mathcal{D}} xy^2 \, dx \, dy = 0.$$

Ce résultat était prévisible car le domaine est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et la fonction à intégrer est impaire par rapport à x .

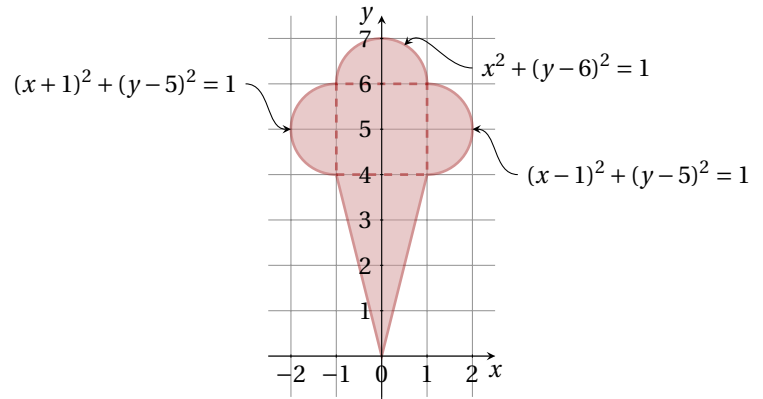
Exercice 1.39

Calculer

$$\iint_{\mathcal{D}} y \, dx \, dy$$

où l'ensemble d'intégration est celui colorié dans la figure ci-contre.

(Le trait discontinue suggère un découpage du domaine d'intégration)



Correction

Méthode 1 On décompose le domaine d'intégration en cinq parties sur lesquelles sera facile de calculer l'intégrale donnée :

$$\iint_{\mathcal{D}} y \, dx \, dy = \iint_{\mathcal{A}} y \, dx \, dy + \iint_{\mathcal{B}} y \, dx \, dy + \iint_{\mathcal{C}} y \, dx \, dy + \iint_{\mathcal{E}} y \, dx \, dy + \iint_{\mathcal{F}} y \, dx \, dy$$

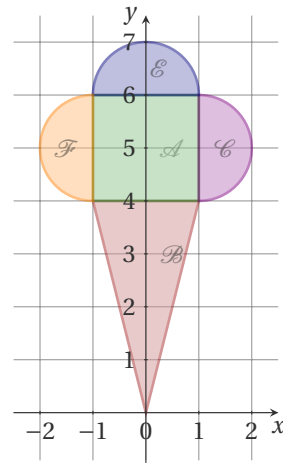
$$\mathcal{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1, 4 \leq y \leq 6\},$$

$$\mathcal{B} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 4, -\frac{y}{4} \leq x \leq \frac{y}{4}\},$$

$$\mathcal{C} = \{(r, t) \in \mathbb{R}_+^* \times [-\pi; \pi[\mid 0 \leq r \leq 1, -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}\}, \text{ avec } x = 1 + r \cos(t), y = 5 + r \sin(t),$$

$$\mathcal{E} = \{(r, t) \in \mathbb{R}_+^* \times [0; 2\pi[\mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq t \leq \pi\}, \text{ avec } x = r \cos(t), y = 6 + r \sin(t),$$

$$\mathcal{F} = \{(r, t) \in \mathbb{R}_+^* \times [0; 2\pi[\mid 0 \leq r \leq 1, \frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{3\pi}{2}\}, \text{ avec } x = -1 + r \cos(t), y = 5 + r \sin(t),$$



$$\iint_{\mathcal{A}} y \, dx \, dy = \int_{-1}^1 \int_4^6 y \, dx \, dy = \left(\int_{-1}^1 1 \, dx \right) \times \left(\int_4^6 y \, dy \right) = 2 \times \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=4}^{y=6} = 20$$

$$\iint_{\mathcal{B}} y \, dx \, dy = \int_{-0}^0 \int_{-y/4}^{y/4} y \, dx \, dy = \int_0^4 [yx]_{x=-y/4}^{x=y/4} \, dy = \frac{1}{2} \int_0^4 y^2 \, dy = \left[\frac{y^3}{6} \right]_{y=0}^{y=4} = \frac{32}{3}$$

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{C}} y \, dx \, dy &= \int_0^1 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r(5 + r \sin(t)) \, dt \, dr = \left(\int_0^1 5r \, dr \right) \times \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1 \, dt \right) + \left(\int_0^1 r^2 \, dr \right) \times \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin(t) \, dt \right) \\ &= \left[\frac{5r^2}{2} \right]_{r=0}^{r=1} \times [t]_{t=-\pi/2}^{t=\pi/2} + \left[\frac{r^3}{3} \right]_{r=0}^{r=1} \times [-\cos(t)]_{t=-\pi/2}^{t=\pi/2} = \frac{5\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{E}} y \, dx \, dy &= \int_0^1 \int_0^{\pi} r(6 + r \sin(t)) \, dt \, dr = \left(\int_0^1 6r \, dr \right) \times \left(\int_0^{\pi} 1 \, dt \right) + \left(\int_0^1 r^2 \, dr \right) \times \left(\int_0^{\pi} \sin(t) \, dt \right) \\ &= \left[\frac{6r^2}{2} \right]_{r=0}^{r=1} \times [t]_{t=0}^{t=\pi} + \left[\frac{r^3}{3} \right]_{r=0}^{r=1} \times [-\cos(t)]_{t=0}^{t=\pi} = 3\pi + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\iint_{\mathcal{F}} y \, dx \, dy = \iint_{\mathcal{C}} y \, dx \, dy.$$

Conclusion :

$$\iint_{\mathcal{D}} y \, dx \, dy = 20 + \frac{34}{3} + 8\pi.$$

Méthode II La fonction et le domaine d'intégration sont symétriques par rapport au plan d'équation $x = 0$, par conséquent il suffit de calculer l'intégrale sur une moitié du domaine d'intégration :

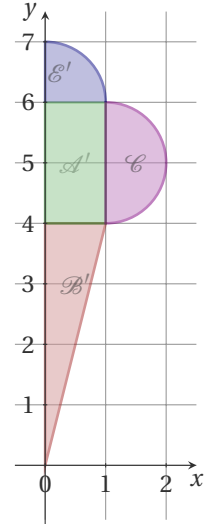
$$\iint_{\mathcal{D}} y \, dx \, dy = 2 \left(\iint_{\mathcal{A}'} y \, dx \, dy + \iint_{\mathcal{B}'} y \, dx \, dy + \iint_{\mathcal{C}} y \, dx \, dy + \iint_{\mathcal{E}'} y \, dx \, dy \right)$$

$$\mathcal{A}' = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 4 \leq y \leq 6 \},$$

$$\mathcal{B}' = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 4x \leq y \leq 4 \},$$

$$\mathcal{C} = \left\{ (r, t) \in \mathbb{R}_+^* \times [-\pi; \pi[\mid 0 \leq r \leq 1, -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2} \right\}, \text{ avec } x = 1 + r \cos(t), y = 5 + r \sin(t),$$

$$\mathcal{E}' = \left\{ (r, t) \in \mathbb{R}_+^* \times [0; 2\pi[\mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \right\}, \text{ avec } x = r \cos(t), y = 6 + r \sin(t),$$



$$\iint_{\mathcal{A}'} y \, dx \, dy = \int_0^1 \int_4^6 y \, dy \, dx = \left(\int_0^1 1 \, dx \right) \times \left(\int_4^6 y \, dy \right) = 1 \times \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=4}^{y=6} = 10$$

$$\iint_{\mathcal{B}'} y \, dx \, dy = \int_0^1 \int_{4x}^4 y \, dy \, dx = \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=4x}^{y=4} dx = 8 \int_0^1 (1 - x^2) \, dx = 8 \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{16}{3}$$

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{C}} y \, dx \, dy &= \int_0^1 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r(5 + r \sin(t)) \, dt \, dr = \left(\int_0^1 5r \, dr \right) \times \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1 \, dt \right) + \left(\int_0^1 r^2 \, dr \right) \times \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin(t) \, dt \right) \\ &= \left[5 \frac{r^2}{2} \right]_{r=0}^{r=1} \times \left[t \right]_{t=-\pi/2}^{t=\pi/2} + \left[\frac{r^3}{3} \right]_{r=0}^{r=1} \times \left[-\cos(t) \right]_{t=-\pi/2}^{t=\pi/2} = \frac{5\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{E}'} y \, dx \, dy &= \int_0^1 \int_0^{\pi/2} r(6 + r \sin(t)) \, dt \, dr = \left(\int_0^1 6r \, dr \right) \times \left(\int_0^{\pi/2} 1 \, dt \right) + \left(\int_0^1 r^2 \, dr \right) \times \left(\int_0^{\pi/2} \sin(t) \, dt \right) \\ &= \left[6 \frac{r^2}{2} \right]_{r=0}^{r=1} \times \left[t \right]_{t=0}^{t=\pi/2} + \left[\frac{r^3}{3} \right]_{r=0}^{r=1} \times \left[-\cos(t) \right]_{t=0}^{t=\pi/2} = \frac{3}{2}\pi + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\iint_{\mathcal{D}} y \, dx \, dy = 2 \left(10 + \frac{17}{3} + 4\pi \right).$$

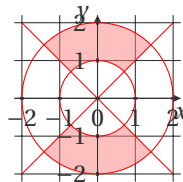
Exercice 1.40

Après avoir représenté graphiquement l'ensemble $\mathcal{A}$, calculer l'intégrale

$$\iint_{\mathcal{A}} \frac{x}{y} \, dx \, dy \quad \text{avec} \quad \mathcal{A} = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, |y| \geq |x| \}.$$

Correction

L'ensemble $\mathcal{A}$ est la partie coloriée dans la figure ci-dessous :



En passant en coordonnées polaires

$$x = r \cos(\vartheta), \quad y = r \sin(\vartheta), \quad dx \, dy = r \, dr \, d\vartheta$$

on obtient

$$\mathcal{A} = \left\{ (r, \vartheta) \in \mathbb{R}_+ \times [0; 2\pi[\mid 1 \leq r \leq 2 \text{ et } \frac{\pi}{4} \leq \vartheta \leq \frac{3\pi}{4} \right\} \cup \left\{ (r, \vartheta) \in \mathbb{R}_+ \times [0; 2\pi[\mid 1 \leq r \leq 2 \text{ et } \frac{5\pi}{4} \leq \vartheta \leq \frac{7\pi}{4} \right\}$$

et donc

$$\iint_{\mathcal{A}} \frac{x}{y} dx dy = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_1^2 \frac{\cos(\vartheta)}{\sin(\vartheta)} r dr d\vartheta + \int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} \int_1^2 \frac{\cos(\vartheta)}{\sin(\vartheta)} r dr d\vartheta = \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\cos(\vartheta)}{\sin(\vartheta)} d\vartheta + \int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} \frac{\cos(\vartheta)}{\sin(\vartheta)} d\vartheta \right) \left(\int_1^2 r dr \right) = 0.$$

car

$$\int \frac{\cos(t)}{\sin(t)} dt = \ln(|\sin(t)|).$$

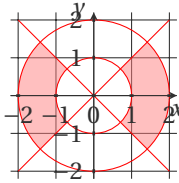
Exercice 1.41

Après avoir représenté graphiquement l'ensemble $\mathcal{A}$, calculer l'intégrale

$$\iint_{\mathcal{A}} \frac{y}{x} dx dy \quad \text{avec} \quad \mathcal{A} = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, |y| \leq |x| \}.$$

Correction

L'ensemble $\mathcal{A}$ est la partie coloriée dans la figure ci-dessous :



En passant en coordonnées polaires

$$x = r \cos(\vartheta), \quad y = r \sin(\vartheta), \quad dx dy = r dr d\vartheta$$

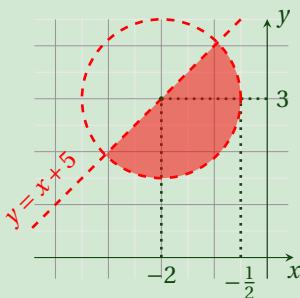
on obtient

$$\iint_{\mathcal{A}} \frac{y}{x} dx dy = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_1^2 \frac{\sin(\vartheta)}{\cos(\vartheta)} r dr d\vartheta + \int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} \int_1^2 \frac{\sin(\vartheta)}{\cos(\vartheta)} r dr d\vartheta = \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sin(\vartheta)}{\cos(\vartheta)} d\vartheta + \int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} \frac{\sin(\vartheta)}{\cos(\vartheta)} d\vartheta \right) \left(\int_1^2 r dr \right) = 0$$

car

$$\int \frac{\sin(t)}{\cos(t)} dt = -\ln(|\cos(t)|).$$

Exercice 1.42



Soit $\mathcal{D}$ la partie coloriée en figure.

- Décrire $\mathcal{D}$ en coordonnées cartésiennes.
- Trouver un changement de variables adéquat pour décrire $\mathcal{D}$ en coordonnées polaires.

• Calculer $\iint_{\mathcal{D}} \frac{x-y}{\sqrt{(x+2)^2 + (y-3)^2}} dx dy.$

Correction

Le domaine d'intégration est le demi cercle de centre $(-2, 3)$ et rayon $r = \frac{3}{2}$ qui se trouve sous la droite d'équation $y = x + 5$, autrement dit

$$\mathcal{D} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+2)^2 + (y-3)^2 < \frac{9}{4}, y < x + 5 \right\}.$$

Avec le changement de variables

$$\begin{cases} x = -2 + r \cos(\phi), \\ y = 3 + r \sin(\phi), \end{cases}$$

on obtient

$$\iint_{\mathcal{D}} \frac{x-y}{\sqrt{(x+2)^2 + (y-3)^2}} dx dy = \iint_{\mathcal{D}} \frac{-2 + r \cos(\phi) - 3 - r \sin(\phi)}{r} r dr d\phi$$

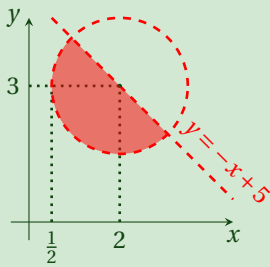
où

$$\mathcal{D} = \left\{ (r, \phi) \in \mathbb{R} \times [\pi/2, 5\pi/2] \mid 0 < r < \frac{3}{2}, \frac{5}{4}\pi < \phi < \frac{9}{4}\pi \right\}.$$

Donc

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{D}} \frac{-2 + r \cos(\phi) - 3 - r \sin(\phi)}{r} r dr d\phi &= \left(\int_0^{\frac{3}{2}} \int_{\frac{5}{4}\pi}^{\frac{9}{4}\pi} -5 + r(\cos(\phi) - \sin(\phi)) d\phi dr \right) \\ &= \left(-5 \int_0^{\frac{3}{2}} \int_{\frac{5}{4}\pi}^{\frac{9}{4}\pi} 1 d\phi dr \right) + \left(\int_0^{\frac{3}{2}} \int_{\frac{5}{4}\pi}^{\frac{9}{4}\pi} r(\cos(\phi) - \sin(\phi)) d\phi dr \right) \\ &= -5 \left(\int_0^{\frac{3}{2}} 1 dr \right) \left(\int_{\frac{5}{4}\pi}^{\frac{9}{4}\pi} 1 d\phi \right) + \left(\int_0^{\frac{3}{2}} r dr \right) \left(\int_{\frac{5}{4}\pi}^{\frac{9}{4}\pi} \cos(\phi) - \sin(\phi) d\phi \right) \\ &= -\frac{15}{2}\pi + \frac{9}{4}\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Exercice 1.43



Soit $\mathcal{D}$ la partie coloriée en figure.

- Décrire $\mathcal{D}$ en coordonnées cartésiennes.
- Trouver un changement de variables adéquat pour décrire $\mathcal{D}$ en coordonnées polaires.
- Calculer $\iint_{\mathcal{D}} \frac{x-y}{(x-2)^2 + (y-3)^2} dx dy$.

Correction

Le domaine d'intégration est le demi cercle de centre $(2, 3)$ et rayon $r = \frac{3}{2}$ qui se trouve sous la droite d'équation $y = -x + 5$, autrement dit

$$\mathcal{D} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-2)^2 + (y-3)^2 < \frac{9}{4}, y < -x + 5 \right\}.$$

Avec le changement de variables

$$\begin{cases} x = 2 + r \cos(\phi), \\ y = 3 + r \sin(\phi), \end{cases}$$

on obtient

$$\iint_{\mathcal{D}} \frac{x-y}{(x-2)^2 + (y-3)^2} dx dy = \iint_{\mathcal{D}} \frac{2 + r \cos(\phi) - 3 - r \sin(\phi)}{r^2} r dr d\phi$$

où

$$\mathcal{D} = \left\{ (r, \phi) \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi] \mid 0 < r < \frac{3}{2}, \frac{3}{4}\pi < \phi < \frac{7}{4}\pi \right\}.$$

Donc

$$\iint_{\mathcal{D}} \frac{2 + r \cos(\phi) - 3 - r \sin(\phi)}{r^2} r dr d\phi = - \iint_{\mathcal{D}} \frac{1}{r} dr d\phi + \iint_{\mathcal{D}} \cos(\phi) - \sin(\phi) dr d\phi = -\pi \int_0^{\frac{3}{2}} \frac{1}{r} dr + \frac{3}{2} \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{7}{4}\pi} \cos(\phi) - \sin(\phi) d\phi = \infty.$$

Calcul d'aires et centres de gravité, coordonnées polaires

Exercice 1.44

Un disque de rayon 5 cm a densité 10 g cm^{-2} dans son centre, densité 0 g cm^{-2} sur le bord et la densité est une fonction linéaire de la distance du centre. Calculer la masse du disque.

Correction

Décrivons le disque en coordonnées polaires centrées dans le centre du disque. Soit ρ la densité : elle ne dépend que de la distance r du centre et l'on a $\rho(0) = 10$, $\rho(5) = 0$ et elle est linéaire donc $\rho(r) = 2(5 - r)$. La masse du disque est donc

$$\int_0^5 \int_0^{2\pi} \rho(r) r \, d\theta \, dr = 2 \int_0^5 \int_0^{2\pi} r(5 - r) \, d\theta \, dr = 2 \left(\int_0^5 r(5 - r) \, dr \right) \left(\int_0^{2\pi} 1 \, d\theta \right) = 4\pi \left[5\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3} \right]_{r=0}^{r=5} = \frac{5^3}{3} 2\pi.$$

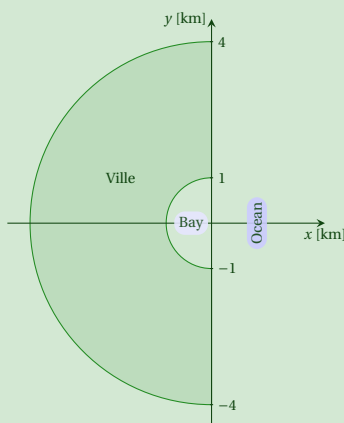
Exercice 1.45

Considérons un disque de métal de rayon 3 cm et prenons un repère centré dans son centre. À la distance r de l'origine, la densité du métal par unité de surface est $\frac{1}{r^2+1}$. Calculer la masse du disque.

Correction

Décrivons le disque en coordonnées polaires centrées dans le centre du disque. La masse du disque est

$$\int_0^3 \int_0^{2\pi} \frac{r}{r^2+1} \, d\theta \, dr = \left(\int_0^3 \frac{r}{r^2+1} \, dr \right) \times \left(\int_0^{2\pi} 1 \, d\theta \right) = \pi \left(\int_0^3 \frac{2r}{r^2+1} \, dr \right) = \pi [\ln(r^2+1)]_{r=0}^{r=3} = \pi \ln(10).$$

Exercice 1.46


Une ville entoure une baie comme dans la figure ci-contre. La densité de population de la ville (en milliers de personnes par kilomètre carré) est $\delta(r, \vartheta)$, où r et ϑ sont les coordonnées polaires et les distances sont mesurées en kilomètres. Plus loin on vit de la baie et plus la densité de population diminue. De même, plus loin on vit de l'océan et plus la densité de population diminue. Laquelle des fonctions suivantes décrit au mieux cette situation ?

1. $\delta(r, \vartheta) = (4 - r)(2 + \cos(\vartheta))$
2. $\delta(r, \vartheta) = (4 - r)(2 + \sin(\vartheta))$
3. $\delta(r, \vartheta) = (4 + r)(2 + \cos(\vartheta))$

En déduire une estimation de la population totale de la ville.

Correction

- La ville (domaine d'intégration) s'écrit

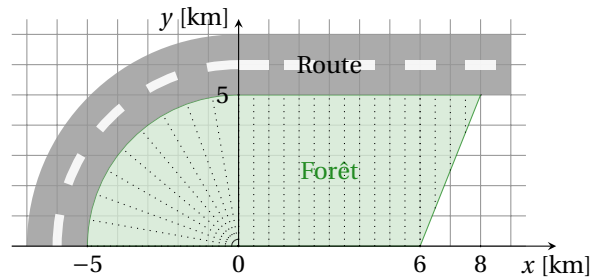
$$\left\{ (r, \vartheta) \in \mathbb{R}_+^* \times [0; 2\pi[\mid 1 \leq r \leq 4, \frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \frac{3\pi}{2} \right\}.$$

- La fonction qui décrit au mieux la densité de population est $\delta(r, \vartheta) = (4 - r)(2 + \cos(\vartheta))$; en effet, pour tout ϑ_0 fixé dans $[\pi/2; 3\pi/2]$, la fonction $f_{\vartheta_0}(r) \equiv \delta(r, \vartheta_0)$ est monotone décroissante et pour tout r_0 fixé dans $[1; 4]$, la fonction $g_{r_0}(\vartheta) \equiv \delta(r_0, \vartheta)$ est monotone décroissante sur $[\pi/2; \pi]$ et monotone croissante sur $[\pi; 3\pi/2]$.
- La population totale qui vit dans la ville est

$$\begin{aligned} \int_1^4 \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \delta(r, \vartheta) r \, dr \, d\vartheta &= \int_1^4 \int_{\pi/2}^{3\pi/2} r(4 - r)(2 + \cos(\vartheta)) \, dr \, d\vartheta = \left(\int_1^4 r(4 - r) \, dr \right) \times \left(\int_{\pi/2}^{3\pi/2} (2 + \cos(\vartheta)) \, d\vartheta \right) \\ &= \left[2r^2 - \frac{r^3}{3} \right]_{r=1}^{r=4} \times \left[2\vartheta + \sin(\vartheta) \right]_{\pi/2}^{\pi/2} = 18(\pi - 1). \end{aligned}$$

Exercice 1.47 (Population de lièvres)

Une forêt est à coté d'une route (voir la figure ci-contre). La densité de la population de lièvres ℓ qui vivent dans la forêt est proportionnelle à la distance de la route. Plus précisément, elle vaut 0 au bord de la route et vaut 10 lièvres par kilomètre carré au coté opposé de la forêt (*i.e.* $\ell(x) = 10$ pour $x = [0; 6]$). Estimer la population totale de lièvres dans la forêt.

**Correction**

- La forêt (domaine d'intégration) s'écrit

$$\left\{ (r, \vartheta) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi] \mid 0 \leq r \leq 5, \frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \pi \right\} \cup \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 5, 0 \leq x \leq \frac{2}{5}(15+y) \right\}$$

- Calcul de la fonction à intégrer :

- pour $x < 0$, la densité est une fonction affine de la seule variable r (comme la route est un arc de cercle, la distance ne dépend que de la coordonnées r), *i.e.* $\ell(r) = mr + q$ avec m et q à déterminer. On sait que $\ell(5) = 0$ et $\ell(0) = 10$ donc $\ell(r) = 2(5 - r)$.
- pour $x > 0$, la densité est une fonction affine de la seule variable y (comme la route est horizontale, la distance ne dépend que de la coordonnées y), *i.e.* $\ell(y) = my + q$ avec m et q à déterminer. On sait que $\ell(5) = 0$ et $\ell(0) = 10$ donc $\ell(y) = 2(5 - y)$.

- La population totale de lapins qui vivent dans la forêt est

$$\begin{aligned} \int_0^5 \left(\int_{\pi/2}^{\pi} \ell(r) r \, d\vartheta \right) dr + \int_0^5 \left(\int_0^{\frac{2}{5}(15+y)} \ell(y) \, dx \right) dy &= \left(\int_0^5 \ell(r) r \, dr \right) \times \left(\int_{\pi/2}^{\pi} d\vartheta \right) + 2 \int_0^5 \left((5-y) \left(\int_0^{\frac{2}{5}(15+y)} 1 \, dx \right) \right) dy \\ &= \frac{\pi}{2} \left(\int_0^5 10r - 2r^2 \, dr \right) + 2 \left(\int_0^5 (5-y) \frac{2}{5}(15+y) \, dy \right) \\ &= \pi \left(\int_0^5 5r - r^2 \, dr \right) + \frac{4}{5} \left(\int_0^5 75 - 5y - 2y^2 \, dy \right) \\ &= \pi \left[5 \frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3} \right]_0^5 + \frac{4}{5} \left[75y - 5 \frac{y^2}{2} - 2 \frac{y^3}{3} \right]_0^5 \\ &= \frac{5^3}{6} \pi + \frac{4}{5} \left[3 \times 5^3 - \frac{5^3}{2} - 2 \frac{5^3}{3} \right] \\ &= \left(\frac{1}{6} \pi + \frac{4}{3} \right) 5^3 = \frac{125}{6} \pi + \frac{550}{3}. \end{aligned}$$

Exercice 1.48

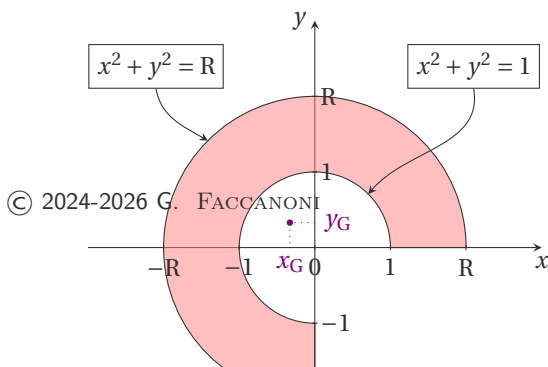
Soit $R > 1$. Après avoir représenté graphiquement la région

$$\mathcal{D} = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq R \} \cup \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq R \},$$

calculer les coordonnées de son centre de gravité en supposant la région $\mathcal{D}$ homogène. À partir de quelle valeur de R le centre de gravité appartient à $\mathcal{D}$?

Correction

On trace d'abord les courbes d'équation $x^2 + y^2 = 1$ et $x^2 + y^2 = R$ avec $R > 1$ et on colore l'ensemble $\mathcal{D}$.



On décrit ensuite $\mathcal{D}$ en coordonnées polaires centrées en $(0, 0)$: on a une bijection de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ dans lui-même définie par $x = r \cos(\vartheta)$, $y = r \sin(\vartheta)$ pour $(r, \vartheta) \in \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi[$, ainsi

$$\mathcal{D} = \left\{ (r, \vartheta) \in \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi[\mid 0 < r \leq R, 0 \leq \vartheta \leq \frac{3\pi}{2} \right\}.$$

On calcule alors

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{D}} 1 \, dx \, dy &= \int_1^R \int_0^{3\pi/2} r \, dr \, d\vartheta = \left(\int_1^R r \, dr \right) \times \left(\int_0^{3\pi/2} 1 \, d\vartheta \right) = \frac{3\pi(R^2 - 1)}{4}; \\ \iint_{\mathcal{D}} x \, dx \, dy &= \int_1^R \int_0^{3\pi/2} r^2 \cos(\vartheta) \, dr \, d\vartheta = \left(\int_1^R r^2 \, dr \right) \times \left(\int_0^{3\pi/2} \cos(\vartheta) \, d\vartheta \right) = -\frac{(R^3 - 1)}{3}; \\ \iint_{\mathcal{D}} y \, dx \, dy &= \int_1^R \int_0^{3\pi/2} r^2 \sin(\vartheta) \, dr \, d\vartheta = \left(\int_1^R r^2 \, dr \right) \times \left(\int_0^{3\pi/2} \sin(\vartheta) \, d\vartheta \right) = \frac{(R^3 - 1)}{3}. \end{aligned}$$

On obtient finalement

$$x_G = \frac{-\frac{(R^3-1)}{3}}{\frac{3\pi(R^2-1)}{4}} = -\frac{4(R^2+R+1)}{9\pi(R+1)}, \quad y_G = \frac{\frac{(R^3-1)}{3}}{\frac{3\pi(R^2-1)}{4}} = \frac{4(R^2+R+1)}{9\pi(R+1)}.$$

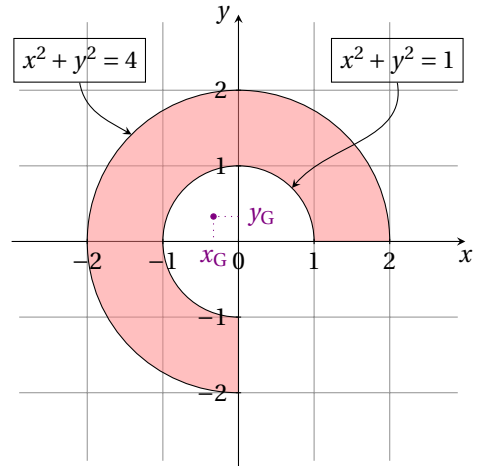
Le centre de gravité appartient à $\mathcal{D}$ si et seulement si $1 \leq x_G^2 + y_G^2 \leq R$:

$$1 \leq \left(-\frac{4(R^2+R+1)}{9\pi(R+1)} \right)^2 + \left(\frac{4(R^2+R+1)}{9\pi(R+1)} \right)^2 \leq 4 \iff \begin{cases} \frac{R^2+R+1}{R+1} \geq \frac{9\pi}{4\sqrt{2}}, \\ \frac{R^2+R+1}{R+1} \leq \frac{9\pi\sqrt{2}}{4}, \end{cases} \iff R > \frac{c + \sqrt{c^2 + 4c}}{2} \approx 4.826617132$$

avec $c \equiv \frac{9\pi}{4\sqrt{2}} - 1$.

Exercice 1.49

Soit $\mathcal{D}$ la région représentée en figure ci-contre. Calculer les coordonnées de son centre de gravité (x_G, y_G) en supposant la région $\mathcal{D}$ homogène.



Correction

Le centre de gravité a coordonnées (x_G, y_G) données par

$$x_G = \frac{\iint_{\mathcal{D}} x \, dx \, dy}{\iint_{\mathcal{D}} 1 \, dx \, dy}, \quad y_G = \frac{\iint_{\mathcal{D}} y \, dx \, dy}{\iint_{\mathcal{D}} 1 \, dx \, dy}.$$

Il convient de passer aux coordonnées polaires et on obtient

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{D}} 1 \, dx \, dy &= \int_0^{3\pi/2} \int_1^2 r \, dr \, d\theta = \left(\int_0^{3\pi/2} d\theta \right) \left(\int_1^2 r \, dr \right) = \frac{9}{4}\pi, \\ \iint_{\mathcal{D}} x \, dx \, dy &= \int_0^{3\pi/2} \int_1^2 r^2 \cos(\theta) \, dr \, d\theta = \left(\int_0^{3\pi/2} \cos(\theta) \, d\theta \right) \left(\int_1^2 r^2 \, dr \right) = -\frac{7}{3}, \\ \iint_{\mathcal{D}} y \, dx \, dy &= \int_0^{3\pi/2} \int_1^2 r^2 \sin(\theta) \, dr \, d\theta = \left(\int_0^{3\pi/2} \sin(\theta) \, d\theta \right) \left(\int_1^2 r^2 \, dr \right) = \frac{7}{3}. \end{aligned}$$

Donc

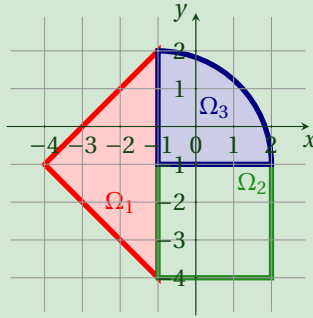
$$x_G = -\frac{28}{27\pi}, \quad y_G = \frac{14}{3} \frac{2}{3\pi} = \frac{28}{27\pi}.$$

Remarquons que seul le calcul explicite de la dernière intégrale est nécessaire car

- $\iint_{\mathcal{D}} 1 \, dx \, dy$ représente l'aire de la plaque que l'on peut calculer géométriquement comme la différence des $3/4$ du cercle de rayon 2 ôtés des $3/4$ du cercle de rayon 1, i.e. $(2^2\pi - \pi)3/4 = 9\pi/4$,
- $x_G = -y_G$ car la droite d'équation $y = -x$ est un axe de symétrie de la plaque.

Exercice 1.50

On se propose de calculer (x_G, y_G) les coordonnées du centre de gravité de la plaque homogène Ω esquissée dans la figure ci-dessous :



1. On décompose la plaque comme union de trois plaques Ω_i comme en figure. Décrire Ω_1 et Ω_2 en variables cartésiennes et Ω_3 en variables polaires (écrire explicitement le changement en variables polaires).
 2. Pour $i = 1, 2, 3$, calculer l'aire de Ω_i . En déduire l'aire de Ω .
 3. Pour $i = 1, 2, 3$, calculer (x_{G_i}, y_{G_i}) les coordonnées du centre de gravité de la plaque Ω_i . En déduire (x_G, y_G) .
- NB Lorsqu'il est possible, éviter le calcul d'intégrales!

Correction

1. Le changement de variables polaires pour Ω_3 est

$$\begin{cases} x = -1 + r \cos(\vartheta), \\ y = -1 + r \sin(\vartheta) \end{cases} \quad \text{avec } (r, \vartheta) \in \mathbb{R}_+^* \times [0; 2\pi[$$

et l'on a

$$\Omega_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-4; -1], y \in [-x-5; x+3]\},$$

$$\Omega_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-1; 2], y \in [-4; -1]\},$$

$$\Omega_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-1; 2], y \in [-1; 2], (x+1)^2 + (y+1)^2 \leq 3^2\} = \{(r, \vartheta) \in \mathbb{R}_+^* \times [0; 2\pi[\mid r \in [0; 3], \vartheta \in [0; \frac{\pi}{2}]\}.$$

2. $\text{Aire}(\Omega) = \text{Aire}(\Omega_1) + \text{Aire}(\Omega_2) + \text{Aire}(\Omega_3) = 9 + 9 + \frac{9}{4}\pi = 9\left(2 + \frac{\pi}{4}\right)$.

3. Pour calculer (x_G, y_G) on calcule (x_{G_i}, y_{G_i}) les coordonnées du centre de gravité de chaque plaque Ω_i :

$$\bullet \quad x_{G_1} = \frac{\iint_{\Omega_1} x \, dx \, dy}{\text{Aire}(\Omega_1)} = -2 \text{ car}$$

$$\iint_{\Omega_1} x \, dx \, dy = \int_{-4}^{-1} \int_{-x-5}^{x+3} x \, dy \, dx = \int_{-4}^{-1} x [y]_{y=-x-5}^{y=x+3} \, dx = \int_{-4}^{-1} x(2x+8) \, dx = \int_{-4}^{-1} 2x^2 + 8x \, dx = \left[\frac{2}{3}x^3 + 4x^2 \right]_{x=-4}^{x=-1} = -18,$$

- $y_{G_1} = -1$ par symétrie de la plaque Ω_1 par rapport à la droite d'équation $y = -1$;
- $x_{G_2} = \frac{1}{2}$ par symétrie de la plaque Ω_2 par rapport à la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$,
- $y_{G_2} = -\frac{5}{2}$ par symétrie de la plaque Ω_2 par rapport à la droite d'équation $y = -\frac{5}{2}$;

$$\bullet \quad x_{G_3} = \frac{\iint_{\Omega_3} x \, dx \, dy}{\text{Aire}(\Omega_3)} = \frac{4}{\pi} - 1 \text{ car}$$

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega_1} x \, dx \, dy &= \int_0^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-1 + r \cos(\vartheta)) r \, d\vartheta \, dr = \int_0^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} -r \, d\vartheta \, dr + \int_0^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \cos(\vartheta) \, d\vartheta \, dr \\ &= -\left(\int_0^3 r \, dr\right) \times \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \, d\vartheta\right) + \left(\int_0^3 r^2 \, dr\right) \times \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\vartheta) \, d\vartheta\right) \\ &= -\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^3 \times \frac{\pi}{2} + \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^3 \times [\sin(\vartheta)]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{9}{4}\pi + 9 = 9\left(1 - \frac{\pi}{4}\right), \end{aligned}$$

$$\bullet \quad y_{G_3} = x_{G_3} \text{ par symétrie de la plaque } \Omega_3 \text{ par rapport à la droite d'équation } y = x.$$

On conclut que

$$(x_G, y_G) = \left(-\frac{\pi}{2+\pi}, \frac{2-\pi}{2+\pi}\right).$$

Exercice 1.51

La valeur moyenne d'une fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sur un domaine $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^2$ est définie par

$$f_{\text{moy}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\text{Aire}(\mathcal{R})} \iint_{\mathcal{R}} f(x, y) \, dx \, dy.$$

1. Une lentille circulaire de rayon 2 cm présente, en tout point situé à r cm de son centre, une épaisseur de $\left(1 - \frac{r^2}{4}\right)$ cm. Déterminer l'épaisseur moyenne de cette lentille.
2. La température (en degrés Celsius) en un point (x, y) d'une plaque plane est modélisée par la fonction $T(x, y) = 5xy + x^2$ où x et y sont exprimés en mètres. Calculer la température moyenne de la portion de la plaque ayant la forme d'un losange, définie par

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } |2x + y| \leq 4 \text{ et } |2x - y| \leq 4\}.$$

Correction

1. L'épaisseur moyenne de la lentille est donné par

$$\frac{\int_0^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{r^2}{4}\right) r \, dr \, d\vartheta}{4\pi} = \frac{2\pi \int_0^2 \left(r - \frac{r^3}{4}\right) \, dr}{4\pi} = \frac{1}{2} \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{16}\right]_0^2 = \frac{1}{2}.$$

2. Le domaine est symétrique par rapport à l'axe des abscisses et $T(x, -y) = -T(x, y)$ donc

$$\iint_{\mathcal{D}} T(x, y) \, dx \, dy = 2 \iint_{\mathcal{D}^+} T(x, y) \, dx \, dy$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^+ &= \mathcal{D} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -4 \leq x \leq 0 \text{ et } 0 \leq y \leq 2x + 4\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 4 \text{ et } 0 \leq y \leq -2x + 4\} \end{aligned}$$

et

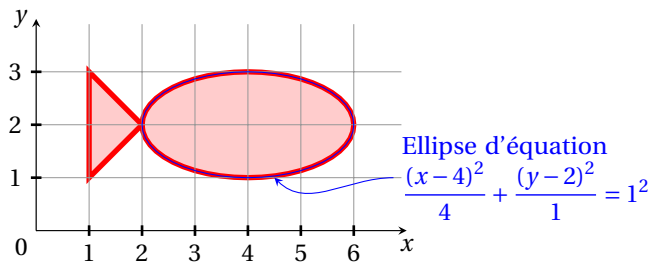
$$\text{Aire}(\mathcal{D}) = 2\text{Aire}(\mathcal{D}^+) = 32 \text{ cm}.$$

Donc la température moyenne de la plaque est donné par

$$\begin{aligned}
 T_{\text{moy}} &= \frac{2 \iint_{\mathcal{D}^+} T(x, y) \, dx \, dy}{32} \\
 &= \frac{1}{16} \left(\int_{-4}^0 \int_0^{2x+4} (5xy + x^2) \, dy \, dx + \int_0^4 \int_0^{-2x+4} (5xy + x^2) \, dy \, dx \right) \\
 &= \frac{1}{16} \left(\int_{-4}^0 \left[5x \frac{y^2}{2} + x^2 y \right]_0^{2x+4} dx + \int_0^4 \left[5x \frac{y^2}{2} + x^2 y \right]_0^{-2x+4} dx \right) \\
 &= \frac{1}{16} \left(\int_{-4}^0 5x \frac{(2x+4)^2}{2} + x^2(2x+4) \, dx + \int_0^4 5x \frac{(-2x+4)^2}{2} + x^2(-2x+4) \, dx \right) \\
 &= \frac{1}{4} \left(\int_{-4}^0 3x^3 + 7x^2 + 2x \, dx + \int_0^4 2x^3 - 9x^2 + 10x \, dx \right) \\
 &= \frac{1}{4} \left(\left[\left(\frac{3}{4}x^2 + \frac{7}{3}x + 1 \right) x^2 \right]_{-4}^0 + \left[\left(\frac{1}{2}x^2 - 3x + 5 \right) x^2 \right]_0^4 \right) = -\frac{16}{3}.
 \end{aligned}$$

Exercice 1.52 (Centre de gravité d'un poisson)

Calculer les coordonnées du centre de gravité G de la plaque $\mathcal{D}$ en figure supposée homogène (éviter le calcul d'intégrales lorsqu'il est possible, mais *justifier le raisonnement*) :



Correction

Tout d'abord remarquons que le corps du poisson est une ellipse d'équation

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{(x-4)^2}{2^2} + \frac{(y-2)^2}{1^2} = 1^2 \right\}.$$

Pour calculer les coordonnées (x_G, y_G) du centre de gravité on doit calculer d'abord les trois intégrales doubles suivantes :

$$\begin{aligned}
 \iint_{\mathcal{D}} 1 \, dy \, dx &= \int_1^2 \int_x^{4-x} 1 \, dy \, dx + \int_0^{2\pi} \int_0^1 2r \, dr \, d\vartheta = \int_1^2 (4-2x) \, dx + \int_0^{2\pi} 1 \, d\vartheta = 1 + 2\pi, \\
 \iint_{\mathcal{D}} x \, dy \, dx &= \int_1^2 \int_x^{4-x} x \, dy \, dx + \int_0^{2\pi} \int_0^1 (4+2r \cos(\vartheta)) 2r \, dr \, d\vartheta = \int_1^2 (4x-2x^2) \, dx + \int_0^{2\pi} \left(4 + \frac{4}{3} \cos(\vartheta) \right) d\vartheta \\
 &= \int_1^2 \left(2x^2 - \frac{2}{3}x^3 \right) dx + \left[4\vartheta + \frac{4}{3} \sin(\vartheta) \right]_0^{2\pi} = \frac{4}{3} + 8\pi, \\
 \iint_{\mathcal{D}} y \, dy \, dx &= \int_1^2 \int_x^{4-x} y \, dy \, dx + \int_0^{2\pi} \int_0^1 (2+r \sin(\vartheta)) 2r \, dr \, d\vartheta = \int_1^2 \left(\frac{(4-x)^2}{2} - \frac{x^2}{2} \right) dx + \int_0^{2\pi} \left(2 + \frac{2}{3} \sin(\vartheta) \right) d\vartheta \\
 &= \int_1^2 (8-4x) \, dx + \left[2\vartheta - \frac{2}{3} \cos(\vartheta) \right]_0^{2\pi} = 2 + 4\pi
 \end{aligned}$$

et on en déduit que

$$x_G = \frac{\iint_{\mathcal{D}} x \, dy \, dx}{\iint_{\mathcal{D}} 1 \, dy \, dx} = \frac{\frac{4}{3} + 8\pi}{1 + 2\pi}, \quad y_G = \frac{\iint_{\mathcal{D}} y \, dy \, dx}{\iint_{\mathcal{D}} 1 \, dy \, dx} = \frac{2 + 4\pi}{1 + 2\pi} = 2.$$

En fait, aucune des trois intégrales est nécessaire car on peut les calculer géométriquement comme suit (cf. figure 1.3)

- $\iint_{\mathcal{D}} 1 \, dy \, dx = \text{Aire}(\mathcal{D}) = \text{Aire}(\mathcal{T}) + \text{Aire}(\mathcal{E}) = 1 + 2\pi$,
- $x_G = \frac{\text{Aire}(\mathcal{T})}{\text{Aire}(\mathcal{D})} x_{G_{\mathcal{T}}} + \frac{\text{Aire}(\mathcal{E})}{\text{Aire}(\mathcal{D})} x_{G_{\mathcal{E}}} = \frac{4/3 + 8\pi}{1 + 2\pi}$
- $y_G = 2$ car la droite d'équation $y = 2$ est un axe de symétrie pour la plaque.

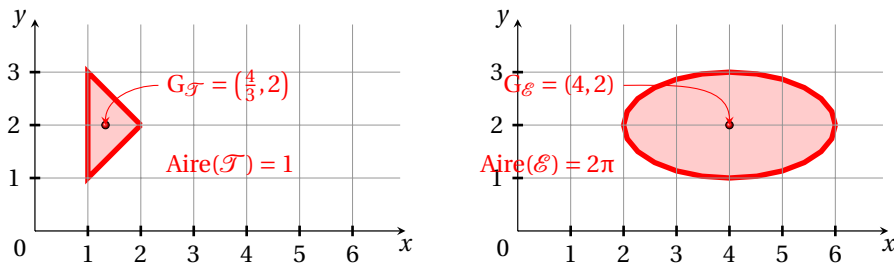


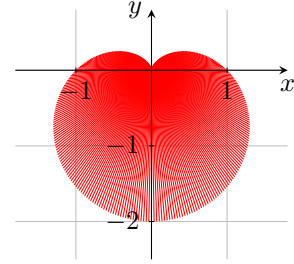
FIGURE 1.3. – Exercice 1.52

Exercice 1.53 (Aire de la cardioïde)

L'équation de la cardioïde est paramétrée par φ comme suit: $(x = r(\varphi) \cos(\varphi), y = r(\varphi) \sin(\varphi))$ où $r(\varphi) = 1 - \sin(\varphi)$ et $\varphi \in [-\pi; \pi]$. Considérons le domaine délimité par cette courbe, *i.e.* l'ensemble décrit en coordonnées polaires par

$$\{(r, \varphi) \mid -\pi \leq \varphi \leq \pi, \quad 0 \leq r \leq 1 - \sin(\varphi)\}$$

Calculer l'aire de cette ensemble. Calculer ensuite son centre de gravité en la considérant une plaque homogène de densité surfacique de masse 1.

**Correction**

Rappelons d'abord que

$$\begin{aligned} \cos^2(t) &= \frac{1+\cos(2t)}{2} \implies \int \cos^2(t) dt = \int \frac{1+\cos(2t)}{2} dt = \frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4} + C, \\ \sin^2(t) &= \frac{1-\cos(2t)}{2} \implies \int \sin^2(t) dt = \int \frac{1-\cos(2t)}{2} dt = \frac{t}{2} - \frac{\sin(2t)}{4} + C, \end{aligned}$$

et que

$$\int \cos(\varphi) \sin^n(\varphi) d\varphi = \frac{\sin^{n+1}(\varphi)}{n+1}, \quad \int \sin(\varphi) \cos^n(\varphi) d\varphi = -\frac{\cos^{n+1}(\varphi)}{n+1}, \quad n \geq 0.$$

On peut alors calculer la surface de la cardioïde :

$$\begin{aligned} \text{Aire} &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{1-\sin(\varphi)} r dr d\varphi = \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^{1-\sin(\varphi)} d\varphi = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1-\sin(\varphi))^2}{2} d\varphi \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} d\varphi + \int_{-\pi}^{\pi} -2\sin(\varphi) d\varphi + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2(\varphi)}{2} d\varphi \\ &= \pi + 0 + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-\cos(2\varphi)}{4} d\varphi = \pi + \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{3}{2}\pi. \end{aligned}$$

Pour calculer le centre de gravité on doit calculer les intégrales

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{1-\sin(\varphi)} r \cos(\varphi) r dr d\varphi, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{1-\sin(\varphi)} r \sin(\varphi) r dr d\varphi.$$

On a

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{1-\sin(\varphi)} r \cos(\varphi) r dr d\varphi &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\varphi) \left(\int_0^{1-\sin(\varphi)} r^2 dr \right) d\varphi = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\varphi) \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^{1-\sin(\varphi)} d\varphi \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\varphi) \frac{(1-\sin(\varphi))^3}{3} d\varphi = \frac{1}{3} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\varphi) (1 - 3\sin(\varphi) + 3\sin^2(\varphi) - \sin^3(\varphi)) d\varphi = 0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{1-\sin(\varphi)} r \sin(\varphi) r \, dr \, d\varphi &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin(\varphi) \left(\int_0^{1-\sin(\varphi)} r^2 \, dr \right) d\varphi = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(\varphi) \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^{1-\sin(\varphi)} d\varphi \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin(\varphi) \frac{(1-\sin(\varphi))^3}{3} d\varphi = \frac{1}{3} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(\varphi) - 3\sin^2(\varphi) + 3\sin^3(\varphi) - \sin^4(\varphi) d\varphi = \\ &= \frac{1}{3} \left(0 - 3\pi + 0 - \frac{3}{4}\pi \right) = -\frac{5}{4}\pi \end{aligned}$$

car

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(\varphi) \, d\varphi &= [\cos(\varphi)]_{-\pi}^{\pi} = 0, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(\varphi) \, d\varphi &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-\cos(2\varphi)}{2} d\varphi = \left[\frac{\varphi}{2} - \frac{\sin(2\varphi)}{4} \right]_{-\pi}^{\pi} = \pi, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin^3(\varphi) \, d\varphi &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin(\varphi)(1-\cos^2(\varphi)) d\varphi = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(\varphi) d\varphi - \int_{-\pi}^{\pi} \sin(\varphi)\cos^2(\varphi) d\varphi = \left[-\cos(\varphi) + \frac{\cos^3 \varphi}{3} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin^4 \varphi \, d\varphi &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1-\cos(2\varphi)}{2} \right)^2 d\varphi = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{4} d\varphi - \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(2\varphi) d\varphi + \frac{1}{4} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(2\varphi) d\varphi = \frac{\pi}{2} + 0 + \frac{1}{4} \left[\varphi + \frac{\sin(2\varphi)}{2} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{3}{4}\pi. \end{aligned}$$

On obtient les coordonnées du centre de gravité

$$x_G = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{1-\sin(\varphi)} r \cos(\varphi) r \, dr \, d\varphi}{\text{Aire}} = \frac{0}{\frac{3}{2}\pi} = 0, \quad y_G = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{1-\sin(\varphi)} r \cos(\varphi) r \, dr \, d\varphi}{\text{Aire}} = \frac{-\frac{5}{4}\pi}{\frac{3}{2}\pi} = -\frac{5}{6}.$$

Exercice 1.54 (Aire des trèfles de HABENICHT)

Calculer l'aire de la région définie en coordonnées polaires par

$$\mathcal{D} = \{(r, \phi) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi] : r \leq 1 + \cos(k\phi) + \sin^2(k\phi), \, k \in \mathbb{N}^*\}.$$

Suggestion : utiliser les formules de duplication $\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1 = 1 - 2\sin^2(\theta)$ et calculer au préalable les intégrales suivantes

$$\int_0^{2k\pi} 1 \, d\alpha, \quad \int_0^{2k\pi} \cos(\alpha) \, d\alpha, \quad \int_0^{2k\pi} \cos^2(\alpha) \, d\alpha, \quad \int_0^{2k\pi} \cos(\alpha) \sin^2(\alpha) \, d\alpha, \quad \int_0^{2k\pi} \sin^2(\alpha) \, d\alpha, \quad \int_0^{2k\pi} \sin^4(\alpha) \, d\alpha.$$

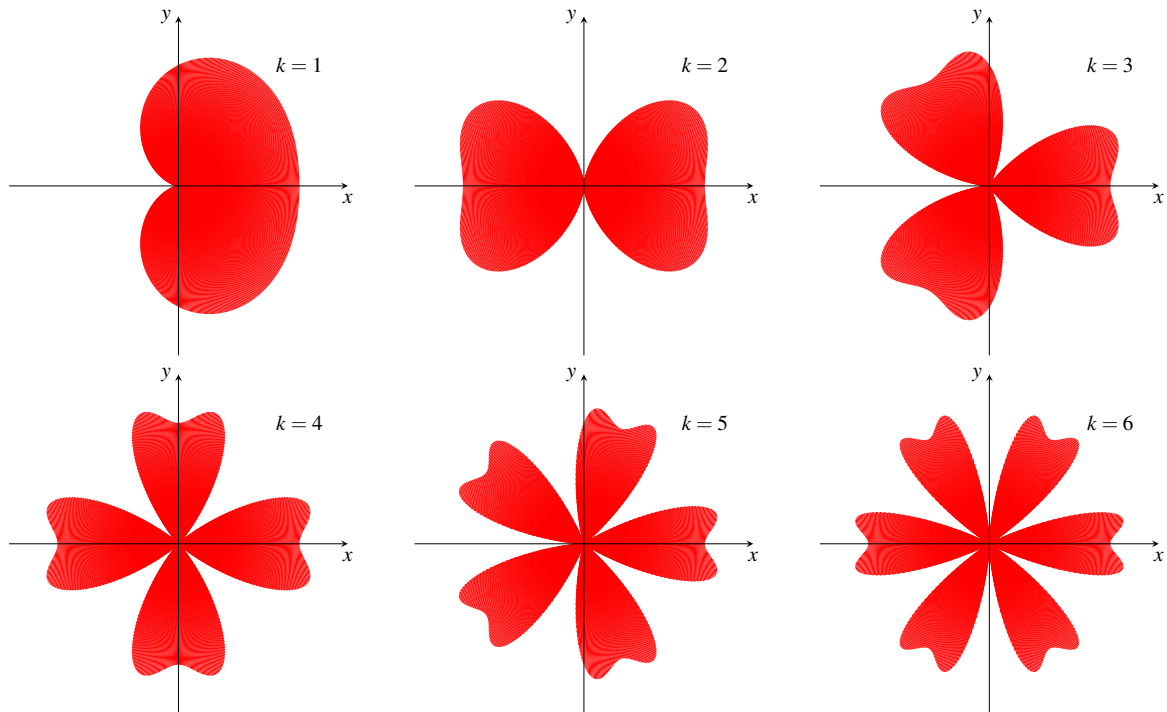
Correction

On a

$$\begin{aligned} \int_0^{2k\pi} 1 \, d\alpha &= [\alpha]_0^{2k\pi} = 2k\pi, & \int_0^{2k\pi} \cos(\alpha) \, d\alpha &= [\sin(\alpha)]_0^{2k\pi} = 0, \\ \int_0^{2k\pi} \cos^2(\alpha) \, d\alpha &= \frac{1}{4} [\sin(2\alpha) + 2\alpha]_0^{2k\pi} = k\pi, & \int_0^{2k\pi} \cos(\alpha) \sin^2(\alpha) \, d\alpha &= \left[\frac{\sin^3(\alpha)}{3} \right]_0^{2k\pi} = 0, \\ \int_0^{8\pi} \sin^2(\alpha) \, d\alpha &= \frac{1}{4} [2\alpha - \sin(2\alpha)]_0^{2k\pi} = k\pi, & \int_0^{2k\pi} \sin^4(\alpha) \, d\alpha &= \frac{1}{32} [24\alpha - 8\sin(2\alpha) + \sin(4\alpha)]_0^{2k\pi} = \frac{3}{4}k\pi. \end{aligned}$$

L'aire est donnée, en coordonnées polaires, par

$$\begin{aligned}
 \iint_{\mathcal{D}} r \, dr \, d\theta &= \int_0^{2\pi} \int_0^{1+\cos(k\phi)+\sin^2(k\phi)} r \, dr \, d\phi \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^{1+\cos(k\phi)+\sin^2(k\phi)} d\phi \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1+\cos(k\phi)+\sin^2(k\phi))^2 d\phi \\
 &= \frac{1}{2k} \int_0^{2k\pi} (1+\cos(\alpha)+\sin^2(\alpha))^2 d\alpha \\
 &= \frac{1}{2k} \int_0^{2k\pi} 1 + \cos^2(\alpha) + \sin^4(\alpha) + 2\cos(\alpha) + 2\sin^2(\alpha) + 2\cos(\alpha)\sin^2(\alpha) d\alpha \\
 &= \frac{1}{2k} \left[\int_0^{2k\pi} 1 d\alpha + \int_0^{2k\pi} \cos^2(\alpha) d\alpha + \int_0^{2k\pi} \sin^4(\alpha) d\alpha + 2 \int_0^{2k\pi} \cos(\alpha) d\alpha + 2 \int_0^{2k\pi} \sin^2(\alpha) d\alpha + 2 \int_0^{2k\pi} \cos(\alpha)\sin^2(\alpha) d\alpha \right] \\
 &= \frac{1}{2k} \left[2k\pi + k\pi + \frac{3}{4}k\pi + 0 + 2k\pi + 0 \right] = \frac{23}{8}\pi.
 \end{aligned}$$



CHAPITRE 2

Interpolation

Étant donné $(n + 1)$ points de $\mathbb{R}^2$, i.e. $n + 1$ couples $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^n$, le problème consiste à trouver une fonction $\varphi = \varphi(x)$ telle que $\varphi(x_i) = y_i$. On dit alors que φ interpole l'ensemble de valeurs $\{y_i\}_{i=0}^n$ aux nœuds $\{x_i\}_{i=0}^n$. Les quantités y_i représentent les valeurs aux nœuds x_i d'une fonction f connue analytiquement ou de données expérimentales. Dans le premier cas, l'approximation a pour but de remplacer f par une fonction plus simple (en vue par exemple d'un calcul numérique d'intégrale ou de dérivée). Dans le second cas, le but est d'avoir une représentation synthétique de données expérimentales (dont le nombre peut être très élevé).

La fonction φ appartient généralement à un espace vectoriel de dimension finie; l'interpolation consiste donc à trouver ses coordonnées par rapport à une base choisie. On peut également considérer des interpolations composites ou « par morceaux » (ou encore des interpolations par fonctions *splines*) si φ est composée de polynômes définis sur des sous-intervalles dans l'espace vectoriel par morceaux.

On parle d'*interpolation polynomiale* quand φ est un polynôme, et d'*interpolation de Fourier* lorsque φ est une série de Fourier.

Dans ce chapitre

2.1	Interpolation polynomiale	89
2.1.1	Bases canonique, de LAGRANGE, de NEWTON de $\mathbb{R}_n[x]$ et coordonnées du polynôme d'interpolation	89
2.1.2	■ Fonctions prédéfinies en Python	93
2.1.3	Les défauts de l'interpolation polynomiale	94
2.1.4	Interpolation polynomiale composite: splines	96
2.1.5	Splines avec SciPy	97
2.1.6	Deux exemples complets	97
2.2	Généralisation: l'interpolation dans un espace vectoriel quelconque	100
2.2.1	Cas particulier: l'interpolation Trigonométrique et FFT	101
2.3	Exercices	105
2.3.1	Révisions: espaces vectoriels et bases dans $\mathbb{R}_n[x]$	105
2.3.2	Interpolation polynomiale	111
2.3.3	Interpolation trigonométrique	127

2.1. Interpolation polynomiale

Supposons que l'on veuille chercher un polynôme $p_n \in \mathbb{R}_n[x]$, $n \geq 0$ (c'est-à-dire un polynôme de degré au plus n) qui, pour des valeurs $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ distinctes données (appelés nœuds d'interpolation), prenne les valeurs $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$ respectivement, c'est-à-dire

$$p_n(x_i) = y_i \quad \text{pour } 0 \leq i \leq n. \quad (2.1)$$

Si un tel polynôme existe, il est appelé *polynôme d'interpolation* ou *polynôme interpolant*.

2.1.1. Bases canonique, de Lagrange, de Newton de $\mathbb{R}_n[x]$ et coordonnées du polynôme d'interpolation

Base canonique. Une manière apparemment simple de résoudre ce problème est d'écrire le polynôme dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$:

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n,$$

où $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ sont des coefficients qui devront être déterminés. Les $(n+1)$ relations (2.1) s'écrivent alors

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + \dots + a_n x_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_n x_1^n = y_1 \\ \dots \\ a_0 + a_1 x_n + \dots + a_n x_n^n = y_n \end{cases}$$

Puisque les valeurs x_i et y_i sont connues, ces relations forment un système linéaire de $(n+1)$ équations en les $(n+1)$ inconnues $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ qu'on peut mettre sous la forme matricielle

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Ainsi, le problème consistant à chercher le polynôme p_n satisfaisant (2.1) peut se réduire à résoudre le système linéaire (2.2) (cette matrice s'appelle matrice de VANDERMONDE).

Étant donné $n+1$ points distincts $x_0, \dots, x_n$ et $n+1$ valeurs correspondantes $y_0, \dots, y_n$, il existe un unique polynôme $p_n \in \mathbb{R}_n[x]$ tel que $p_n(x_i) = y_i$, pour $i = 0, \dots, n$ qu'on peut écrire sous la forme

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i \quad \text{avec} \quad \begin{pmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Base de Lagrange. Malheureusement, résoudre un système linéaire de $(n+1)$ équations à $(n+1)$ inconnues n'est pas une tâche triviale. Cette méthode pour trouver le polynôme p_n n'est donc pas une bonne méthode en pratique. On se demande alors s'il existe une autre base $\{L_0, L_1, L_2, \dots, L_n\}$ de $\mathbb{R}_n[x]$ telle que le polynôme p_n s'écrit

$$p_n(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x) + \dots + y_n L_n(x),$$

autrement dit s'il existe une base telle que les coordonnées du polynôme dans cette base ne sont rien d'autre que les valeurs connues $y_0, y_1, \dots, y_n$. Pour trouver une telle base, commençons par imposer le passage du polynôme par les $n+1$ points donnés : les $(n+1)$ relations (2.1) imposent la condition

$$L_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{pour } 0 \leq i, j \leq n,$$

ce qui donne

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}.$$

Il est facile de vérifier que

- $L_i(x) \in \mathbb{R}_n[x]$ car le numérateur de $L_i(x)$ est un produit de n termes $(x - x_j)$ avec $i \neq j$ et est donc un polynôme de degré n et le dénominateur de $L_i(x)$ est une constante,
- $L_i(x_j) = 0$ si $i \neq j$, $0 \leq i \leq n$,
- $L_i(x_i) = 1$.

De plus, les polynômes $L_0, L_1, L_2, \dots, L_n$ sont linéairement indépendants car si l'équation $\sum_{i=0}^n \alpha_i L_i(x) = 0$ doit être satisfaite pour tout $x \in \mathbb{R}$ alors en particulier elle doit être satisfaite pour $x = x_j$ pour tout $j = 0, 1, \dots, n$ et puisque $\sum_{i=0}^n \alpha_i L_i(x_j) = \alpha_j$, on conclut que tous les α_j sont nuls. Par conséquent, la famille $\{L_0, L_1, L_2, \dots, L_n\}$ forme une base de $\mathbb{R}_n[x]$.

Il est important de remarquer que nous avons construit explicitement une solution du problème (2.1) et ceci pour n'importe quelles valeurs $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$ données. Ceci montre que le système linéaire (2.2) a toujours une unique solution.

Étant donné $n + 1$ points distincts $x_0, \dots, x_n$ et $n + 1$ valeurs correspondantes $y_0, \dots, y_n$, il existe un unique polynôme $p_n \in \mathbb{R}_n[x]$ tel que $p_n(x_i) = y_i$, pour $i = 0, \dots, n$ qu'on peut écrire sous la forme

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i L_i(x) \quad \text{où} \quad L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Cette relation est appelée formule d'interpolation de LAGRANGE et les polynômes L_i sont les polynômes caractéristiques (de LAGRANGE).

```
import sympy as sp
x = sp.symbols('x')
n = 2 # degré
p = sp.polys.specialpolys.interpolating_poly(n+1, x, X='x', Y='y')
print(f"\\[ p(x) = {sp.latex(p)} \\]")
```

$$p(x) = \frac{y_0(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + \frac{y_1(x-x_0)(x-x_2)}{(-x_0+x_1)(x_1-x_2)} + \frac{y_2(x-x_0)(x-x_1)}{(-x_0+x_2)(-x_1+x_2)}$$

Base de Newton. Cependant, cette méthode n'est pas encore la plus efficace d'un point de vue pratique. En effet, pour calculer le polynôme d'interpolation d'un ensemble de $n + 1$ points on doit calculer les $n + 1$ polynômes $\{L_0, L_1, L_2, \dots, L_n\}$. Si ensuite on ajoute un point d'interpolation, on doit calculer les $n + 2$ polynômes $\{\tilde{L}_0, \tilde{L}_1, \tilde{L}_2, \dots, \tilde{L}_{n+1}\}$ qui diffèrent tous des $n + 1$ calculés précédemment. La méthode de NEWTON est basée sur le choix d'une autre base de sorte à ce que l'ajout d'un point comporte juste l'ajout d'une fonction de base.

Considérons la famille de polynômes $\{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ où ¹

$$\begin{aligned} \omega_0(x) &= 1, \\ \omega_k(x) &= \prod_{i=0}^{k-1} (x - x_i) = (x - x_{k-1})\omega_{k-1}(x), \quad \forall k = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que

- $\omega_k(x) \in \mathbb{R}_n[x]$,
- la famille $\{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ est génératrice de $\mathbb{R}_n[x]$
- la famille $\{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ est libre.

Par conséquent, la famille $\{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ forme une base de $\mathbb{R}_n[x]$.

Si on choisit comme base de $\mathbb{R}_n[x]$ la famille $\{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$, le problème du calcul du polynôme d'interpolation p_n est alors ramené au calcul des coefficients $\{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ tels que

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n \alpha_i \omega_i(x).$$

Si on a calculé les $n + 1$ coefficients $\{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ et on ajoute un point d'interpolation, il n'y a plus à calculer que le coefficient α_{n+1} car la nouvelle base est déduite de l'autre base en ajoutant simplement le polynôme ω_{n+1} .

Pour calculer tous les coefficients on introduit la notion de *différence divisée*: soit $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^n$ un ensemble de $n + 1$ points distincts.

- La différence divisée d'ordre 1 de x_{i-1} et x_i est

$$f[x_{i-1}, x_i] \equiv \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}.$$

- La différence divisée d'ordre n des $n + 1$ points $x_0, \dots, x_n$ est définie par récurrence en utilisant deux différences divisées d'ordre $n - 1$ comme suit:

$$f[x_0, \dots, x_n] \equiv \frac{f[x_1, \dots, x_n] - f[x_0, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

1. Notons que le dernier point x_n n'intervient pas dans la construction de cette base.

Pour expliciter le processus récursif, les différences divisées peuvent être calculées en les disposant de la manière suivante dans un tableau :

i	x_i	y_i	$f[x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-3}, x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-4}, x_{i-3}, x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$	...
0	x_0	y_0					
1	x_1	y_1	$f[x_0, x_1]$				
2	x_2	y_2	$f[x_1, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_2]$			
3	x_3	y_3	$f[x_2, x_3]$	$f[x_1, x_2, x_3]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$		
4	x_4	y_4	$f[x_3, x_4]$	$f[x_2, x_3, x_4]$	$f[x_1, x_2, x_3, x_4]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Soit $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^n$ un ensemble de $n+1$ points distincts. Le polynôme d'interpolation p_n sous la forme de NEWTON est donné par

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n \omega_i(x) f[x_0, \dots, x_i]$$

où

$$\omega_0(x) = 1,$$

$$\omega_k(x) = \prod_{i=1}^{k-1} (x - x_i) = (x - x_{k-1}) \omega_{k-1}(x), \quad \forall k = 1, \dots, n;$$

$$f[x_k] = y_k, \quad \forall k = 0, \dots, n,$$

$$f[x_0, \dots, x_k] \equiv \frac{f[x_1, \dots, x_k] - f[x_0, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}, \quad \forall k = 1, \dots, n.$$

Notation réduite : dans la suite on notera

$$f_{i-1,i} = f[x_{i-1}, x_i] = \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \quad f_{0,\dots,n} = f[x_0, \dots, x_n] = \frac{f_{1,\dots,n} - f_{0,\dots,n-1}}{x_n - x_0}.$$

i	x_i	y_i	$f_{i-1,i}$	$f_{i-2,i-1,i}$	$f_{i-3,i-2,i-1,i}$	$f_{i-4,i-3,i-2,i-1,i}$	...
0	x_0	y_0					
1	x_1	y_1	$f_{01} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$				
2	x_2	y_2	$f_{12} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	$f_{012} = \frac{f_{12} - f_{01}}{x_2 - x_0}$			
3	x_3	y_3	$f_{23} = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$	$f_{123} = \frac{f_{23} - f_{12}}{x_3 - x_1}$	$f_{0123} = \frac{f_{123} - f_{012}}{x_3 - x_0}$		
4	x_4	y_4	$f_{34} = \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3}$	$f_{234} = \frac{f_{34} - f_{23}}{x_4 - x_2}$	$f_{1234} = \frac{f_{234} - f_{123}}{x_4 - x_1}$	$f_{01234} = \frac{f_{1234} - f_{0123}}{x_4 - x_0}$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Soit $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^n$ un ensemble de $n+1$ points distincts. Le polynôme d'interpolation p_n sous la forme de NEWTON est donné par

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n \omega_i(x) f_{0,\dots,i} = y_0 \omega_0(x) + f_{01} \omega_1(x) + f_{012} \omega_2(x) + \dots + f_{012\dots n} \omega_n(x)$$

où

$$\omega_0(x) = 1,$$

$$\omega_k(x) = \prod_{i=1}^{k-1} (x - x_i) = (x - x_{k-1}) \omega_{k-1}(x), \quad \forall k = 1, \dots, n;$$

$$f_k = y_k, \quad \forall k = 0, \dots, n,$$

$$f_{0,\dots,k} \equiv \frac{f_{1,\dots,k} - f_{0,\dots,k-1}}{x_k - x_0}, \quad \forall k = 1, \dots, n.$$

Comme le montre la définition des différences divisées, des points supplémentaires peuvent être ajoutés pour créer un nouveau polynôme d'interpolation sans recalculer les coefficients. De plus, si un point est modifié, il est inutile de recalculer l'ensemble des coefficients. Autre avantage, si les x_i sont équirépartis, le calcul des différences divisées devient nettement plus rapide. Par conséquent, l'interpolation polynomiale dans une base de NEWTON est privilégiée par rapport à une interpolation dans la base de LAGRANGE pour des raisons pratiques.

```
import sympy as sp

def divided_diff(xx, yy):
    n = len(yy)
    if n == 1:
        return yy[0]
    else:
        return (divided_diff(xx[1:], yy[1:]) - divided_diff(xx[:-1],
            yy[:-1])) / sp.S(xx[-1] - xx[0])

def newton_interpolation(x, xx, yy):
    n = len(xx)
    p = 0
    for i in range(n):
        p += divided_diff(xx[:i+1], yy[:i+1]) * sp.prod([x - xx[j] for j
            in range(i)])
    return p

x = sp.symbols('x')

for n in range(3):
    x_data = sp.symbols('x:'+str(n+1))
    y_data = sp.symbols('y:'+str(n+1))
    p = newton_interpolation(x, x_data, y_data)
    print("Nombre de points :", n+1, "Polynôme de Newton p(x) = ", p)
```

```
Nombre de points : 1 Polynôme de Newton p(x) = y0
Nombre de points : 2 Polynôme de Newton p(x) = y0 + (x - x0)*(-y0 + y1)/(-x0 + x1)
Nombre de points : 3 Polynôme de Newton p(x) = y0 + (x - x0)*(x - x1)*((-y1 + y2)/(-x1
    - + x2) - (-y0 + y1)/(-x0 + x1))/(-x0 + x2) + (x - x0)*(-y0 + y1)/(-x0 + x1)
```

2.1.2. Fonctions prédéfinies en Python

- Avec numpy (calcul numérique):

```
p_coeff = numpy.polyfit(xx_p, yy_p, deg=len(xx_p)-1)
numpy.polyval(p_coeff, xx_eval)
```

- Avec sympy (calcul formel):

```
p = sympy.interpolate(list(zip(xx_p, yy_p)), x) # canonique
p = sp.polys.specialpolys.interpolating_poly(n, x, X=xx_p, Y=yy_p) #
    ↳ Lagrange
[p.subs({x: val}) for val in xx_eval]
```

Exemple:

```

# Given data to interpolate
xx_p = [0, 1, 2]
yy_p = [3, 2, 7]
# Given data to evaluate the function
xx_eval = [1/2, 3/2]

# NumPy Polynomial interpolation using numpy.polyfit and numpy.polyval
import numpy as np
p = np.polyfit(xx_p, yy_p, deg=len(xx_p)-1)
B = np.polyval(p, xx_eval)
print("Evaluation with NumPy Polynomial Interpolation:", B)

# SymPy interpolation
import sympy as sp
x = sp.Symbol('x')
polynomial = sp.interpolate(list(zip(xx_p, yy_p)), x) # canonique
print("Polynome dans la base canonique : ", polynomial)
p = sp.polys.specialpolys.interpolating_poly(n+1, x, X=xx_p, Y=yy_p) #
    ↪ Lagrange
print("Polynome dans la base de Lagrange : ", p)
xx_eval = [sp.Rational(1,2), sp.Rational(3,2)]
y_eval = [polynomial.subs({x: val}) for val in xx_eval]
print("Evaluation with SymPy Polynomial Interpolation:", y_eval)

```

```
Evaluation with NumPy Polynomial Interpolation: [1.75 3.75]
```

```
Polynome dans la base canonique : 3*x**2 - 4*x + 3
```

```
Polynome dans la base de Lagrange : -2*x*(x - 2) + 7*x*(x - 1)/2 + 3*(x - 2)*(x - 1)/2
```

```
Evaluation with SymPy Polynomial Interpolation: [7/4, 15/4]
```

2.1.3. Les défauts de l'interpolation polynomiale

Malheureusement les polynômes d'interpolation ne forment pas une suite convergente vers une fonction analytique f .

Si $y_i = f(x_i)$ pour $i = 1, 2, \dots, n$, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ étant une fonction donnée de classe $\mathcal{C}^n(I)$ où I est le plus petit intervalle contenant les nœuds distincts $\{x_i\}_{i=0}^n$, alors il existe $\xi \in I$ tel que l'erreur d'interpolation au point $x \in I$ est donnée par

$$E_{n-1}(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) - p_{n-1}(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \omega_n(x)$$

avec $p_{n-1} \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ le polynôme d'interpolation.

Dans le cas d'une distribution uniforme de nœuds, i.e. quand $x_i = x_{i-1} + h$ avec $i = 1, 2, \dots, n$ et $h > 0$ et x_0 donnés, on a

$$|\omega_n(x)| \leq (n-1)! \frac{h^n}{4}$$

et donc

$$\max_{x \in I} |E_{n-1}(x)| \leq \frac{\max_{x \in I} |f^{(n)}(x)|}{4n} h^n.$$

Malheureusement, **on ne peut pas déduire de cette relation que l'erreur tend vers 0 quand n tend vers l'infini**, bien que $h^n/(4n)$ tend effectivement vers 0. En fait, il existe des fonctions f pour lesquelles $\max_{x \in I} |E_{n-1}(x)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$. Ce résultat frappant indique qu'**en augmentant le degré n du polynôme d'interpolation, on n'obtient pas nécessairement une meilleure reconstruction de f .**

Ce phénomène est bien illustré par la fonction de RUNGE de l'exemple ci-dessous.

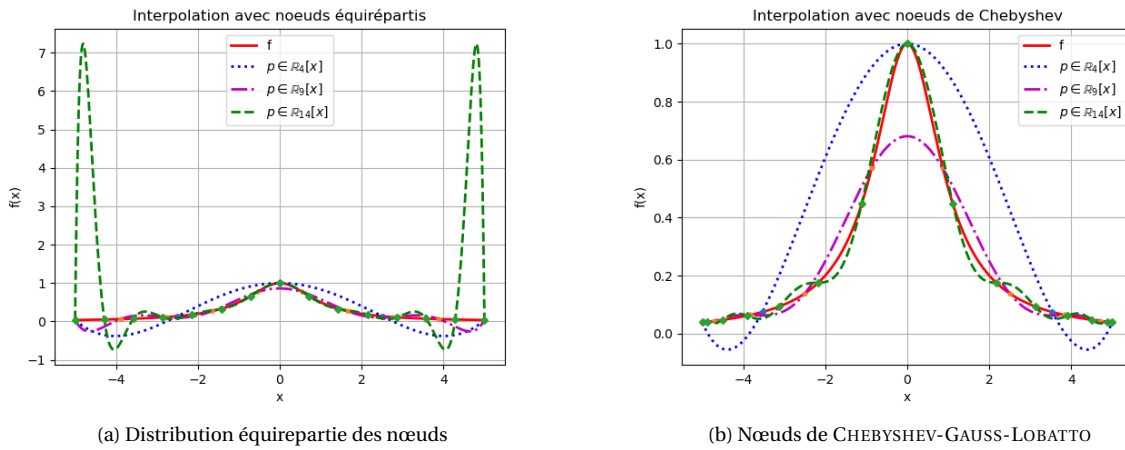


FIGURE 2.1. – Interpolation de LAGRANGE, exemple de RUNGE

EXEMPLE

Soit la fonction $f: [-5, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. La fonction f est infiniment dérivable sur $[-5, 5]$ et $|f^{(n)}(\pm 5)|$ devient très rapidement grand lorsque n tend vers l'infini. Si on considère une distribution uniforme des nœuds on voit que l'erreur tend vers l'infini quand n tend vers l'infini. Ceci est lié au fait que la quantité $\max_{x \in [-5, 5]} |f^{(n)}(x)|$ tend plus vite vers l'infini que $\frac{h^n}{4n}$ tend vers zéro. La figure 2.1a montre ses polynômes interpolants de degrés 3, 5 et 10 pour une distribution équirepartie des nœuds. Cette absence de convergence est également mise en évidence par les fortes oscillations observées sur le graphe du polynôme d'interpolation (absentes sur le graphe de f), particulièrement au voisinage des extrémités de l'intervalle. Ce comportement est connu sous le nom de *phénomène de RUNGE*.

On peut éviter le phénomène de RUNGE en choisissant correctement la distribution des nœuds d'interpolation. Sur un intervalle $[a, b]$, on peut par exemple considérer les nœuds de CHEBYSHEV-GAUSS-LOBATTO (voir figure 2.1b)

$$x_i = \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{\pi}{n-1}(i-1)\right), \quad \text{pour } i = 0, \dots, n$$

Pour cette distribution particulière de nœuds, il est possible de montrer que, si f est dérivable sur $[a, b]$, alors p_n converge vers f quand $n \rightarrow +\infty$ pour tout $x \in [a, b]$. Les nœuds de CHEBYSHEV-GAUSS-LOBATTO, qui sont les abscisses des nœuds équirepartis sur le demi-cercle unité, se trouvent à l'intérieur de $[a, b]$ et sont regroupés près des extrémités de l'intervalle.

Les courbes des figures 2.1a et 2.1b peuvent être obtenues par les instructions suivantes :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from numpy.polynomial.polynomial import Polynomial

# Fonction de Runge
f = lambda x: 1 / (1 + x**2)

# Points d'affichage
x = np.linspace(-5, 5, 500)
y = f(x)

# Nombre de points pour l'interpolation
n_points = [5, 10, 15]

# Styles et labels pour les courbes
line_styles = ['b:', 'm-.', 'g--']

# Styles pour les points d'interpolation
marker_styles = ['o', '*', 'D']
```

```

# Labels pour les courbes
labels = [f"$p \in \mathbb{R}_{\{n-1\}}[x]" for n in n_points]

# Fonction d'interpolation et d'affichage
def interpolate_and_plot(nodes_func, n_points, line_styles, marker_styles,
    ↪ labels, title, filename):
    # Fonction de Runge
    plt.plot(x, f(x), 'r-', linewidth=2, label="f")
    # Interpolations
    for n, style, mark, label in zip(n_points, line_styles, marker_styles,
    ↪ labels):
        # Calcul des nœuds et des valeurs interpolées
        x_n = nodes_func(n)
        y_n = f(x_n)
        p_n = Polynomial.fit(x_n, y_n, n-1)
        y_interp = p_n(x)
        # Tracer la courbe interpolée et les points
        plt.plot(x, y_interp, style, linewidth=2, label=label)
        plt.plot(x_n, y_n, mark, markersize=4)

    plt.legend()
    plt.title(title)
    plt.xlabel("x")
    plt.ylabel("f(x)")
    plt.grid(True)
    plt.savefig(filename)
    # plt.show()

# Nœuds équirépartis
plt.figure()
nodes_equir = lambda n: np.linspace(-5, 5, n)
interpolate_and_plot(nodes_equir, n_points, line_styles, marker_styles,
    ↪ labels, "Interpolation avec nœuds équirépartis",
    ↪ "Images/runge_lagrange.png")

# Nœuds de Chebyshev
plt.figure()
nodes_cheb = lambda n: -5 * np.cos(np.pi * np.arange(n) / (n-1))
interpolate_and_plot(nodes_cheb, n_points, line_styles, marker_styles,
    ↪ labels, "Interpolation avec nœuds de Chebyshev",
    ↪ "Images/runge_lagrangeTGL.png")

```

2.1.4. Interpolation polynomiale composite : splines

On a mis en évidence le fait que, quand les nœuds d'interpolation sont équirépartis, on ne peut pas garantir la convergence uniforme du polynôme interpolatoire de LAGRANGE vers f . L'interpolation de LAGRANGE de bas degré est cependant suffisamment précise quand elle est utilisée sur des intervalles assez petits, y compris avec des nœuds équirépartis (ce qui est commode en pratique). Il est donc naturel d'introduire une partition de $[a; b]$ en n sous-intervalles $[x_i, x_{i+1}]$, tels que $[a; b] = \cup_{0 \leq i \leq n-1} [x_i, x_{i+1}]$ et d'utiliser l'interpolation de LAGRANGE sur chaque sous-intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ en utilisant m nœuds équirépartis avec m petit (généralement $m = 1$ ou 3).

Évidemment tout polynôme de degré k est une spline, mais en pratique une spline est constituée de polynômes différents sur chaque sous-intervalle. Il peut donc y avoir des discontinuités de la dérivée k -ième aux nœuds internes $x_1, \dots, x_{n-1}$. Ici nous allons considérer seulement le cas $m = 1$, *i.e.* des splines linéaires : étant donné une distribution (non nécessairement uniforme) de nœuds $x_0 < x_1 < \dots < x_n$, on approche f par une fonction continue qui, sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, est définie par le segment joignant les deux points $(x_i, f(x_i))$ et $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$. Cette fonction est appelée interpolation linéaire par morceaux (ou *spline* linéaire).

Définition 2.1 (Splines linéaires)

Étant donné $n + 1$ points distincts $x_0, \dots, x_n$ de $[a; b]$ avec $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, la fonction $\ell: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une spline linéaire relative aux nœuds $\{x_i\}$ si

$$\begin{cases} \ell(x)|_{[x_i; x_{i+1}]} \in \mathbb{R}_1, & i = 1, 1, \dots, n-1, \\ \ell \in \mathcal{C}^0([a; b]). \end{cases}$$

Autrement dit, dans chaque sous-intervalle $[x_i; x_{i+1}]$, la fonction $\ell: [x_i; x_{i+1}] \rightarrow \mathbb{R}$ est le segment qui connecte le point (x_i, y_i) au point (x_{i+1}, y_{i+1}) ; elle s'écrit donc

$$\ell(x)|_{[x_i; x_{i+1}]} = y_i + \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i)$$

Il est intéressant de noter que la commande `plot(x, y)`, utilisée pour afficher le graphe d'une fonction f sur un intervalle donné $[a, b]$, remplace en fait la fonction par une interpolée linéaire par morceaux, les points d'interpolation étant les composantes du vecteur x .

Le principale défaut de cette interpolation par morceaux est que ℓ n'est que continue. Or, dans des nombreuses applications, il est préférable d'utiliser des fonctions ayant au moins une dérivée continue. On peut construire pour cela une fonction s_3 comme l'interpolation d'HERMITE des points $(x_i, f(x_i), f'(x_i))$ et $(x_{i+1}, f(x_{i+1}), f'(x_{i+1}))$ sur chaque $[x_i; x_{i+1}]$ pour $i = 1, 1, \dots, n-1$.

TO DO interpolation d'Hermite, splines cubiques

2.1.5. Splines avec SciPy

to do

<https://docs.scipy.org/doc/scipy/tutorial/interpolate/1D.html#tutorial-interpolate-1dsection>

2.1.6. Deux exemples complets

EXEMPLE

On se propose de calculer le polynôme d'interpolation de l'ensemble de points $\{(-1, 1), (0, 0), (1, 1)\}$. On cherche donc $p_2 \in \mathbb{R}_2[x]$ tel que $p_2(x_i) = y_i$ pour $i = 0, \dots, 2$. On calculera enfin la spline linéaire associée aux mêmes points.

Sympy.

```
# Given data to interpolate
xx_p = [-1, 0, 1]
yy_p = [1, 0, 1]

import sympy as sp
x = sp.Symbol('x')
polynomial = sp.interpolate(list(zip(xx_p, yy_p)), x)
print(f"p(x) = {polynomial}")
xx_eval = [sp.Rational(i,2) for i in range(-3,4)] # To evaluate the
    ↪ function
print( *[f"p({x_val})={polynomial.subs({x:x_val})}" for x_val in
    ↪ xx_eval] )
```

```
p(x) = x**2
p(-3/2)=9/4 p(-1)=1 p(-1/2)=1/4 p(0)=0 p(1/2)=1/4 p(1)=1 p(3/2)=9/4
```

Numpy.

```
# Given data to interpolate
xx_p = [-1, 0, 1]
yy_p = [1, 0, 1]

import numpy as np
```

```
p = np.polyfit(xx_p, yy_p, deg=len(xx_p)-1)
xx_eval = np.linspace(-1.5,1.5,7) # To evaluate the function
B = np.polyval(p, xx_eval)
print( *[f" p({x})={b:.2f}" for x,b in zip(xx_eval,B)] )
```

$p(-1.5)=2.25$ $p(-1.0)=1.00$ $p(-0.5)=0.25$ $p(0.0)=-0.00$ $p(0.5)=0.25$ $p(1.0)=1.00$
 $\hookrightarrow p(1.5)=2.25$

Méthode directe. Si on écrit $p_2(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$, on cherche $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ tels que

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

En résolvant ce système linéaire par la méthode du pivot de Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right)$$

on trouve $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = 0$ et $\alpha_2 = 1$ ainsi $p_2(x) = x^2$.

Méthode de Lagrange. On a

$$p_2(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x) = \frac{x(x-1)}{(-1-0)(-1-1)} + \frac{(x-(-1))(x-0)}{(1-(-1))(1-0)} = \frac{1}{2}x(x-1) + \frac{1}{2}(x+1)x = x^2$$

Méthode de Newton. On commence par construire le tableau des différences divisées :

i	x_i	y_i	$f[x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$
0	-1	1		
1	0	0	-1	
2	1	1	1	1

On a alors

$$\begin{aligned} p_2(x) &= \sum_{i=0}^2 \omega_i(x) f[x_0, \dots, x_i] \\ &= \omega_0(x) f[x_0] + \omega_1(x) f[x_0, x_1] + \omega_2(x) f[x_0, x_1, x_2] \\ &= \omega_0(x) - \omega_1(x) + \omega_2(x) \\ &= 1 - (x+1) + x(x+1) = x^2. \end{aligned}$$

Méthode astucieuse. $x=0$ est une racine du polynôme, il s'écrit alors comme $p(x) = xR(x)$ avec $R \in \mathbb{R}_1[x]$, autrement dit $p(x) = x(ax+b)$. Comme $p(-1) = p(1)$, le polynôme est pair, donc $b=0$. Enfin, comme $p(1) = 1$, on conclut que $a=1$.

Spline linéaire.

$$s_1(x) = \begin{cases} -x & \text{si } -1 \leq x \leq 0, \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

EXEMPLE

1. On se propose de calculer le polynôme d'interpolation de la fonction $f(x) = \sin(x)$ en les 3 points $x_i = \frac{\pi}{2}i$ avec $i = 0, 1, 2$. On cherche donc $p_2 \in \mathbb{R}_2[x]$ tel que $p_2(x_i) = \sin(x_i)$ pour $i = 0, \dots, 2$. Calculer ensuite la spline linéaire associée aux mêmes points.
 2. Maintenant on veut calculer le polynôme d'interpolation de la même fonction en les 4 points $x_i = \frac{\pi}{2}i$ avec $i = 0, 1, 2, 3$, i.e. on a juste ajouté le point $x = 3\pi/2$. On cherche donc $p_3 \in \mathbb{R}_3[x]$ tel que $p_3(x_i) = \sin(x_i)$ pour $i = 0, \dots, 3$.
1. On commence par le cas où on interpole f en 3 points.

Méthode directe. Si on écrit $p_2(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$, on cherche $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ tels que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{\pi}{2} & \frac{\pi^2}{4} \\ 1 & \pi & \pi^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En résolvant ce système linéaire² on trouve $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = \frac{4}{\pi}$ et $\alpha_2 = -\frac{4}{\pi^2}$ ainsi $p_2(x) = \frac{4}{\pi}x - \frac{4}{\pi^2}x^2 = \frac{4}{\pi^2}x(\pi - x)$.

Méthode de Lagrange. On a

$$p_2(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x) = \frac{x(x-\pi)}{\frac{\pi}{2}(\frac{\pi}{2}-\pi)} = -\frac{4}{\pi^2}x(x-\pi).$$

Méthode de Newton. On commence par construire le tableau des différences divisées :

i	x_i	y_i	$f[x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$
0	0	0		
1	$\frac{\pi}{2}$	1	$\frac{2}{\pi}$	
2	π	0	$-\frac{2}{\pi}$	$-\frac{4}{\pi^2}$

On a alors

$$\begin{aligned} p_2(x) &= \sum_{i=0}^2 \omega_i(x) f[x_0, \dots, x_i] \\ &= \omega_0(x) f[x_0] + \omega_1(x) f[x_0, x_1] + \omega_2(x) f[x_0, x_1, x_2] \\ &= \frac{2}{\pi} \omega_1(x) - \frac{4}{\pi^2} \omega_2(x) \\ &= \frac{2}{\pi} x - \frac{4}{\pi^2} x \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \\ &= -\frac{4}{\pi^2} x(x - \pi). \end{aligned}$$

Spline linéaire.

$$s_1(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}x & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ -\frac{2}{\pi}(x - \pi) & \text{si } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

2. Maintenant on veut calculer le polynôme d'interpolation de la même fonction en un point de plus.

Méthode directe. Si on écrit $p_3(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3$, on cherche $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tels que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{\pi}{2} & \frac{\pi^2}{4} & \frac{\pi^3}{8} \\ 1 & \pi & \pi^2 & \pi^3 \\ 1 & \frac{3\pi}{2} & \frac{9\pi^2}{4} & \frac{27\pi^3}{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

En résolvant ce système linéaire on trouve $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = \frac{16}{3\pi}$, $\alpha_2 = -\frac{8}{\pi^2}$ et $\alpha_3 = \frac{8}{3\pi^3}$.

Méthode de Lagrange. On a

$$\begin{aligned} p_3(x) &= y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x) + y_3 L_3(x) = \frac{x(x-\pi)(x-\frac{3\pi}{2})}{\frac{\pi}{2}(\frac{\pi}{2}-\pi)(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{2})} - \frac{x(x-\frac{\pi}{2})(x-\pi)}{\frac{3\pi}{2}(\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{2})(\frac{3\pi}{2}-\pi)} \\ &= \frac{4}{\pi^3} x(x-\pi) \left(x - \frac{3\pi}{2} \right) - \frac{4}{3\pi^3} x \left(x - \frac{\pi}{2} \right) (x - \pi). \end{aligned}$$

2. Par la méthode du pivot de Gauss on obtient

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{\pi}{2} & \frac{\pi^2}{4} & 1 \\ 1 & \pi & \pi^2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\pi}{2} & \frac{\pi^2}{4} & 1 \\ 0 & \pi & \pi^2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\pi}{2} & \frac{\pi^2}{4} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{\pi^2}{2} & -2 \end{array} \right)$$

Méthode de Newton. Il suffit de calculer une différence divisée en plus, *i.e.* ajouter une ligne au tableau :

i	x_i	y_i	$f[x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-3}, x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$
0	0	0			
1	$\frac{\pi}{2}$	1	$\frac{2}{\pi}$		
2	π	0	$-\frac{2}{\pi}$	$-\frac{4}{\pi^2}$	
3	$\frac{3\pi}{2}$	-1	$-\frac{2}{\pi}$	0	$\frac{8}{3\pi^3}$

On a alors

$$\begin{aligned}
 p_3(x) &= \sum_{i=0}^3 \omega_i(x) f[x_0, \dots, x_i] \\
 &= p_2(x) + \omega_3(x) f[x_0, x_1, x_2, x_3] \\
 &= -\frac{4}{\pi^2} x(x - \pi) + \frac{8}{3\pi^3} \omega_3(x) \\
 &= -\frac{4}{\pi^2} x(x - \pi) + \frac{8}{3\pi^3} x \left(x - \frac{\pi}{2} \right) (x - \pi) \\
 &= \frac{8}{3\pi^3} x(x^2 - 3\pi x + 2\pi^2).
 \end{aligned}$$

Spline linéaire.

$$s_1(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} x & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ -\frac{2}{\pi} (x - \pi) & \text{si } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \\ -\frac{2}{\pi} (x - \pi) & \text{si } \pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2}. \end{cases}$$

Remarque

Si n est petit il est souvent plus simple de calculer directement les coefficients $a_0, a_1, \dots, a_n$ en résolvant le système linéaire (2.2).

2.2. Généralisation : l'interpolation dans un espace vectoriel quelconque

Une généralisation de l'interpolation polynomiale consiste à chercher la fonction interpolant les $n + 1$ points donnés non pas dans $\mathbb{R}_n[x]$ mais dans un autre espace vectoriel $\mathcal{V}$ engendré par $n + 1$ fonctions libres $\{\varphi_j, j = 0, \dots, n\}$. On peut considérer par exemple des fonctions trigonométriques $\varphi_j(x) = \cos(jx)$, des fonctions exponentielles $\varphi_j(x) = e^{jx}$ etc. Le choix des fonctions $\{\varphi_j\}$ est en pratique dicté par la forme supposée de la loi décrivant les données.

On considère donc un ensemble de $(n + 1)$ points $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^n$ et on cherche une fonction $f(x) = \sum_{j=0}^n a_j \varphi_j(x)$ telle que $f(x_i) = y_i$ où $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ sont des coefficients qui devront être déterminés. Les $(n + 1)$ relations s'écrivent alors

$$\begin{cases} a_0 \varphi_0(x_0) + a_1 \varphi_1(x_0) + \dots + a_n \varphi_n(x_0) = y_0 \\ a_0 \varphi_0(x_1) + a_1 \varphi_1(x_1) + \dots + a_n \varphi_n(x_1) = y_1 \\ \dots \\ a_0 \varphi_0(x_n) + a_1 \varphi_1(x_n) + \dots + a_n \varphi_n(x_n) = y_n \end{cases}$$

Puisque les valeurs x_i et y_i sont connues, ces relations forment un système linéaire de $(n + 1)$ équations en les $(n + 1)$ inconnues $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ qu'on peut mettre sous la forme matricielle

$$\begin{pmatrix} \varphi_0(x_0) & \varphi_1(x_0) & \dots & \varphi_n(x_0) \\ \varphi_0(x_1) & \varphi_1(x_1) & \dots & \varphi_n(x_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_0(x_n) & \varphi_1(x_n) & \dots & \varphi_n(x_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Ainsi, le problème consistant à chercher la fonction f peut se réduire à résoudre le système linéaire (2.3).

Étant donné $n + 1$ points distincts $x_0, \dots, x_n$ et $n + 1$ valeurs correspondantes $y_0, \dots, y_n$, il existe une unique fonction f de l'espace vectoriel $\mathcal{V}$ de base $\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)\}$ telle que $f(x_i) = y_i$, pour $i = 0, \dots, n$ qu'on peut écrire sous la forme

$$f(x) = \sum_{i=0}^n a_i \varphi_i(x) \quad \text{avec} \quad \begin{pmatrix} \varphi_0(x_0) & \varphi_1(x_0) & \dots & \varphi_n(x_0) \\ \varphi_0(x_1) & \varphi_1(x_1) & \dots & \varphi_n(x_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_0(x_n) & \varphi_1(x_n) & \dots & \varphi_n(x_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

EXEMPLE

On se propose d'interpoler la fonction $f: [0; 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x(x - 2\pi)e^{-x}$ en les points $\{x_0 = 0, x_1 = \pi\}$ dans l'espace vectoriel engendré par les 2 fonctions libres $\{\varphi_0, \varphi_1\}$ définies par $\varphi_j(x) = \cos(jx)$.

On cherche donc a_0 et a_1 tels que $g(x) = a_0 + a_1 \cos(x)$ vérifie $g(0) = 0$ et $g(\pi) = -\pi^2 e^{-\pi}$. On doit ainsi résoudre le système linéaire de deux équations en les deux inconnues a_0 et a_1 suivant :

$$\begin{pmatrix} 1 & \cos(0) \\ 1 & \cos(\pi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\pi^2 e^{-\pi} \end{pmatrix} \quad i.e. \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\pi^2 e^{-\pi} \end{pmatrix}.$$

On trouve $a_0 = -\frac{\pi^2 e^{-\pi}}{2} = -a_1$ et

$$g(x) = \frac{\pi^2 e^{-\pi}}{2} (-1 + \cos(x)).$$

Deux cas particuliers :

- si $\varphi_j(x) = x^j$ on retrouve le cas du fitting polynomial,
- si $\varphi_j(x) = \cos(jx)$ ou $\phi_j(x) = \sin(jx)$ on parle d'interpolation trigonométrique et il n'est pas nécessaire de calculer les coefficients en résolvant le système linéaire (2.3), il existe une méthode plus rapide : FFT.

2.2.1. Cas particulier : l'interpolation Trigonométrique et FFT

On veut approcher une fonction **périodique** $f: [0; 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, i.e. satisfaisant $f(0) = f(2\pi)$, par un polynôme trigonométrique $\tilde{f}$, i.e. une combinaison linéaire de sinus et de cosinus, qui interpole f aux $n + 1$ nœuds équidistants $x_j = jh \in [0; 2\pi[$ avec $j = 0, \dots, n$ et $h = \frac{2\pi}{n+1}$. On remarque que le point 2π est omis car redondant avec le point $x = 0$ étant donné que $f(0) = f(2\pi)$.

La fonction d'interpolation trigonométrique $\tilde{f}$ peut s'écrire comme

$$\tilde{f}(x) = a_0 + \sum_{k=1}^K a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

dont les inconnues sont le coefficient complexes a_0 et les $2K$ coefficients a_k et b_k . On peut remarquer que $\tilde{f}$ s'apparente à une série de FOURIER tronquée, i.e. au lieu de sommer jusqu'à l'infini on tronque la somme à l'entier K .

Rappels :

$$\begin{cases} \cos(kx) = \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2}, \\ \sin(kx) = \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i} = -i \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2}, \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} e^{ikx} = \cos(kx) + i \sin(kx), \\ e^{-ikx} = \cos(kx) - i \sin(kx). \end{cases}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x) &= a_0 + \sum_{k=1}^K a_k \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} - i b_k \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2} \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^K \underbrace{\frac{a_k - i b_k}{2}}_{c_k} e^{ikx} + \underbrace{\frac{a_k + i b_k}{2}}_{c_{-k}} e^{i(-k)x} = \sum_{k=-K}^K c_k e^{ikx} \end{aligned}$$

les inconnues sont maintenant les $2K + 1$ coefficients $c_k \in \mathbb{C}$ et l'on a les relations

$$\begin{cases} c_0 = a_0, \\ c_k = \frac{a_k - i b_k}{2}, \quad k = 1, \dots, K \\ c_{-k} = \overline{c_k} = \frac{a_k + i b_k}{2}, \quad k = 1, \dots, K \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} a_0 = c_0, \\ a_k = c_k + c_{-k}, \quad k = 1, \dots, K \\ b_k = i(c_k - c_{-k}), \quad k = 1, \dots, K. \end{cases}$$

Une autre écriture souvent utilisée se base sur l'écriture exponentielle des coefficients c_k : pour tout k , $c_k \in \mathbb{C}$ peut s'écrire comme $c_k = \frac{1}{2} r_k e^{i\varphi_k}$ ainsi $c_{-k} = \overline{c_k} = \frac{1}{2} r_k e^{-i\varphi_k}$ et on trouve

$$a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) = c_k e^{ikx} + \overline{c_k} e^{-ikx} = \frac{1}{2} r_k e^{i\varphi_k} e^{ikx} + \frac{1}{2} r_k e^{-i\varphi_k} e^{-ikx} = \frac{1}{2} r_k \left(e^{i(\varphi_k + kx)} + e^{-i(\varphi_k + kx)} \right) = r_k \cos(kx + \varphi_k).$$

Ainsi les inconnues sont maintenant le coefficient a_0 et les $2K$ couples "amplitude, phase" $(r_k, \varphi_k) \in \mathbb{R}$:

$$\tilde{f}(x) = a_0 + \sum_{k=1}^K r_k \cos(kx + \varphi_k)$$

En écrivant les $n+1$ conditions d'interpolation aux nœuds x_j on trouve

$$f(x_j) = \tilde{f}(x_j) = \sum_{k=-K}^K c_k e^{ikx_j}.$$

Quand n est pair, on pose $K = n/2$ ainsi nous avons $n+1$ conditions d'interpolation et $2K+1 = n+1$ inconnues; quand n est impair, on pose $K = (n+1)/2$ ainsi nous avons $n+1$ conditions d'interpolation et $2K+1 = n+2$ inconnues, pour fermer le système on ajoute alors la condition $c_K = 0$. Pour uniformiser la notation dans ces deux cas, nous pouvons écrire $M = n/2$ et

$$\tilde{f}(x) = \sum_{k=-(M+\mu)}^M c_k e^{ikx}, \quad \mu = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair,} \\ 1 & \text{si } n \text{ est impair,} \end{cases}$$

et les $n+1$ conditions d'interpolation aux nœuds $x_j = jh$ donnent les $n+1$ conditions

$$f(x_j) = \tilde{f}(x_j) = \sum_{k=-(M+\mu)}^M c_k e^{ikjh}.$$

Pour calculer les $n+1$ inconnues $\{c_k\}_{k=-M-\mu}^M$, on multiplie cette équation par e^{-imjh} où $m = -M-\mu, \dots, M$ et on somme sur j :

$$\sum_{j=0}^n \left(f(x_j) e^{-imjh} \right) = \sum_{j=0}^n \left(\sum_{k=-(M+\mu)}^M c_k e^{i(k-m)jh} \right).$$

En échangeant l'ordre de sommation on obtient

$$\sum_{j=0}^n \left(f(x_j) e^{-imjh} \right) = \sum_{k=-(M+\mu)}^M \left(c_k \left(\sum_{j=0}^n e^{i(k-m)jh} \right) \right).$$

On se rappelle que $\sum_{j=0}^n q^j = (n+1)$ si $q = 1$ et $\sum_{j=0}^n q^j = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ si $q \neq 1$, ainsi en prenant $q = e^{i(k-m)h}$ on a

$$\sum_{j=0}^n (e^{i(k-m)h})^j = (n+1) \delta_{km}$$

car $\sum_{j=0}^n (e^{i(k-m)h})^j = n+1$ si $k = m$ et si $k \neq m$ alors

$$\sum_{j=0}^n (e^{i(k-m)h})^j = \frac{1 - (e^{i(k-m)h})^{n+1}}{1 - (e^{i(k-m)h})} = \frac{1 - e^{i(k-m)(n+1)h}}{1 - (e^{i(k-m)h})} = \frac{1 - e^{i(k-m)2\pi}}{1 - (e^{i(k-m)h})} = \frac{1 - \cos((k-m)2\pi) - i \sin((k-m)2\pi)}{1 - (e^{i(k-m)h})} = 0.$$

Donc

$$\sum_{j=0}^n \left(f(x_j) e^{-imjh} \right) = (n+1) \sum_{k=-(M+\mu)}^M \delta_{km} c_k$$

i.e. seul le terme $k = m$ est à prendre en considération

$$\sum_{j=0}^n \left(f(x_j) e^{-imjh} \right) = (n+1) c_m \quad m = -M-\mu, \dots, M.$$

Soit $\{(x_j = jh, f(x_j))\}_{j=0}^n$ un ensemble de $n+1$ points avec $h = 2\pi/(n+1)$ et $f: [0; 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction périodique. Le polynôme trigonométrique d'interpolation $\tilde{f}$ est donné par

$$\tilde{f}(x) = \sum_{k=-(M+\mu)}^M c_k e^{-ikx}, \quad (M, \mu) = \begin{cases} (n/2, 0) & \text{si } n \text{ est pair,} \\ ((n-1)/2, 1) & \text{si } n \text{ est impair,} \end{cases}$$

et, pour $k = -(M+\mu) \dots M$,

$$c_k = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n f(x_j) e^{ikx_j}.$$

De manière équivalente on peut écrire

$$\tilde{f}(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{M+\mu} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx), \quad (M, \mu) = \begin{cases} (n/2, 0) & \text{si } n \text{ est pair,} \\ ((n-1)/2, 1) & \text{si } n \text{ est impair,} \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n f(x_j) \\ a_k = \frac{2}{n+1} \sum_{j=0}^n f(x_j) \cos(kx_j), & k = 1, \dots, M+\mu, \\ b_k = \frac{2}{n+1} \sum_{j=0}^n f(x_j) \sin(kx_j), & k = 1, \dots, M+\mu, \\ a_{M+\mu} = i b_{M+\mu} & \text{si } \mu = 1. \end{cases}$$

Il est intéressant de noter que l'expression de c_k est une approximation de l'intégrale $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx$ par la méthode des rectangles à gauche composite. De la même manière, les coefficients a_k et b_k sont des approximations des intégrales $\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) dx$ et $\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) dx$ respectivement. Vu que ces intégrales définissent précisément les coefficients de FOURIER, on déduit que nos sommes sont des approximations des coefficients de FOURIER et on parle alors d'une transformation de FOURIER discrète. Le calcul des coefficients c_k peut ainsi être effectué en utilisant la transformation de Fourier rapide (FFT).

Notons que si f est une fonction à valeurs réelles, alors $c_{-k} = \overline{c_k}$ et donc $\tilde{f}$ aussi est une fonction à valeurs réelles.

EXEMPLE

Considérons la fonction $f: [0; 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x(x-2\pi)e^{-x}$. On a bien $f(0) = f(2\pi)$.

- On se propose de calculer $\tilde{f}(x)$ lorsque $n = 1$. On a $x_j = jh$ avec $j = 0, 1$ et $h = \pi$. On interpole alors les deux points $\{(0, f(0)), (\pi, f(\pi))\} = \{(0, 0), (\pi, -\pi^2 e^{-\pi})\}$.

Méthode directe On cherche a_0 et a_1 tels que $\tilde{f}(x) = a_0 + a_1 \cos(x)$ vérifie $\tilde{f}(0) = 0$ et $\tilde{f}(\pi) = -\pi^2 e^{-\pi}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & \cos(0) \\ 1 & \cos(\pi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\pi^2 e^{-\pi} \end{pmatrix} \quad i.e. \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\pi^2 e^{-\pi} \end{pmatrix}$$

$$\text{ainsi } a_0 = -\frac{\pi^2 e^{-\pi}}{2} = -a_1 \text{ et}$$

$$\tilde{f}(x) = \frac{\pi^2 e^{-\pi}}{2} (-1 + \cos(x)).$$

Méthode "Fourier" n étant impair, $M = (n-1)/2 = 0$ et $\mu = 1$ et

$$\tilde{f}(x) = \sum_{k=-1}^0 c_k e^{ikx} = c_{-1} e^{-ix} + c_0$$

On doit alors calculer les deux coefficients de FOURIER c_{-1} et c_0 :

$$c_{-1} = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^1 f(x_j) e^{-ix_j} = \frac{1}{2} (f(x_0) e^{-ix_0} + f(x_1) e^{-ix_1}) = \frac{1}{2} (-\pi^2 e^{-\pi} e^{-i\pi}) = \frac{\pi^2 e^{-\pi}}{2}$$

$$c_0 = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^1 f(x_j) = \frac{1}{2} (f(x_0) + f(x_1)) = \frac{1}{2} (-\pi^2 e^{-\pi}) = -\frac{\pi^2 e^{-\pi}}{2}$$

ainsi

$$\tilde{f}(x) = \frac{\pi^2 e^{-\pi}}{2} (e^{-ix} - 1).$$

Lien entre les deux solutions $b_1 = 0$ (il n'y a pas de $\sin(x)$ dans la base choisie) donc $c_0 = a_0$, $c_1 = \frac{a_1 - ib_1}{2} = \frac{a_1}{2}$, $c_{-1} = \frac{a_1 - ib_1}{2} = \frac{a_1}{2}$ et $\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ ainsi on a bien

$$\tilde{f}(x) = \frac{\pi^2 e^{-\pi}}{2} (-1 + \cos(x)) = \frac{\pi^2 e^{-\pi}}{2} (e^{-ix} - 1).$$

- On se propose de calculer $\tilde{f}(x)$ lorsque $n = 2$. On a $x_j = jh$ avec $j = 0, 1, 2$ et $h = \frac{2\pi}{3}$. On interpole alors les trois points $\{(0, f(0)), (\frac{2\pi}{3}, f(\frac{2\pi}{3})), (\frac{4\pi}{3}, f(\frac{4\pi}{3}))\} = \{(0, 0), (\frac{2\pi}{3}, -\frac{8\pi^2}{9} e^{-\frac{2\pi}{3}}), (\frac{4\pi}{3}, -\frac{8\pi^2}{9} e^{-\frac{4\pi}{3}})\}$.
 n étant pair, $M = n/2 = 1$ et $\mu = 0$ et

$$\tilde{f}(x) = \sum_{k=-1}^1 c_k e^{ikx} = c_{-1} e^{-ix} + c_0 + c_1 e^{ix}$$

On doit alors calculer les trois coefficients de FOURIER c_{-1} , c_0 et c_1 :

$$\begin{aligned} c_{-1} &= \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^2 f(x_j) e^{-ix_j} = \frac{1}{3} (f(x_0) e^{-ix_0} + f(x_1) e^{-ix_1} + f(x_2) e^{-ix_2}) = \frac{1}{3} \left(-\frac{8\pi^2}{9} e^{-(i+1)\frac{2\pi}{3}} - \frac{8\pi^2}{9} e^{-(i+1)\frac{4\pi}{3}} \right) \\ &= -\frac{8\pi^2}{27} \left(e^{-(i+1)\frac{2\pi}{3}} + e^{-(i+1)\frac{4\pi}{3}} \right) = -\frac{8\pi^2}{27} e^{-(i+1)\frac{2\pi}{3}} \left(1 + e^{-(i+1)\frac{2\pi}{3}} \right) \\ c_0 &= \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^2 f(x_j) = \frac{1}{3} (f(x_0) + f(x_1) + f(x_2)) = \frac{1}{3} \left(-\frac{8\pi^2}{9} e^{-\frac{2\pi}{3}} - \frac{8\pi^2}{9} e^{-\frac{4\pi}{3}} \right) = -\frac{8\pi^2}{27} e^{-\frac{2\pi}{3}} \left(1 + e^{-\frac{2\pi}{3}} \right) \\ c_1 &= \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^2 f(x_j) e^{ix_j} = \frac{1}{3} (f(x_0) e^{ix_0} + f(x_1) e^{ix_1} + f(x_2) e^{ix_2}) = \frac{1}{3} \left(-\frac{8\pi^2}{9} e^{(i-1)\frac{2\pi}{3}} - \frac{8\pi^2}{9} e^{(i-1)\frac{4\pi}{3}} \right) \\ &= -\frac{8\pi^2}{27} \left(e^{(i-1)\frac{2\pi}{3}} + e^{(i-1)\frac{4\pi}{3}} \right) = -\frac{8\pi^2}{27} e^{(i-1)\frac{2\pi}{3}} \left(1 + e^{(i-1)\frac{2\pi}{3}} \right) \end{aligned}$$

ainsi

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x) &= -\frac{8\pi^2}{27} e^{-(i+1)\frac{2\pi}{3}} \left(1 + e^{-(i+1)\frac{2\pi}{3}} \right) e^{-ix} - \frac{8\pi^2}{27} e^{-\frac{2\pi}{3}} \left(1 + e^{-\frac{2\pi}{3}} \right) - \frac{8\pi^2}{27} e^{(i-1)\frac{2\pi}{3}} \left(1 + e^{(i-1)\frac{2\pi}{3}} \right) e^{ix} \\ &= -\frac{8\pi^2}{27} e^{-\frac{2\pi}{3}} \left[e^{-i\frac{2\pi}{3}} \left(1 + e^{-(i+1)\frac{2\pi}{3}} \right) e^{-ix} + \left(1 + e^{-\frac{2\pi}{3}} \right) + e^{i\frac{2\pi}{3}} \left(1 + e^{(i-1)\frac{2\pi}{3}} \right) e^{ix} \right] \\ &= -\frac{8\pi^2}{27} e^{-\frac{2\pi}{3}} \left[e^{-i(\frac{2\pi}{3} + x)} \left(1 + e^{-(i+1)\frac{2\pi}{3}} \right) + \left(1 + e^{-\frac{2\pi}{3}} \right) + e^{i(\frac{2\pi}{3} + x)} \left(1 + e^{(i-1)\frac{2\pi}{3}} \right) \right]. \end{aligned}$$

TO DO: Passer à une fonction périodique sur un autre intervalle. Expliquer la transformation de Fourier, la transformation de Fourier discrète (= série?) et l'algorithme de transformation de Fourier rapide (FFT) et les liens avec l'interpolation. Passer à une fonction non périodique et/ou non continue. Illustrer la convergence uniforme en opposition à celle non uniforme de l'interpolation polynomiale.

2.3. Exercices

2.3.1. Révisions : espaces vectoriels et bases dans $\mathbb{R}_n[x]$

Exercice 2.1

Démontrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_2[x]$:

1. $F = \{a + bx + cx^2 \in \mathbb{R}_2[x] \mid a + b + 2c = 0\}$,
2. $F = \{p \in \mathbb{R}_2[x] \mid p(1) = 0\}$,
3. $F = \{p \in \mathbb{R}_2[x] \mid p'(1) = 0\}$.

Correction

On montre que $F = \text{Vect}\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p\}$ où $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p$ sont des éléments de $\mathbb{R}_2[x]$.

1. $F = \{a + bx + cx^2 \in \mathbb{R}_2[x] \mid a + b + 2c = 0\}$:

$$\begin{aligned} F &= \{a + bx + cx^2 \in \mathbb{R}_2[x] \mid a + b + 2c = 0\} \\ &= \{a + (-2c - a)x + cx^2 \mid a, c \in \mathbb{R}\} \\ &= \{a(1 - x) + c(-2x + x^2) \mid a, c \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{Vect}\{1 - x, -2x + x^2\}. \end{aligned}$$

(On peut également en déduire que $\{1 - x, -2x + x^2\}$ est une famille génératrice de F .)

2. $F = \{p \in \mathbb{R}_2[x] \mid p(1) = 0\}$

$$\begin{aligned} F &= \{a + bx + cx^2 \in \mathbb{R}_2[x] \mid a + b + c = 0\} \\ &= \{a + bx + (-a - b)x^2 \mid a, b \in \mathbb{R}\} \\ &= \{a(1 - x^2) + b(x - x^2) \mid a, b \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{Vect}\{1 - x^2, x - x^2\}. \end{aligned}$$

(On peut également en déduire que $\{1 - x^2, x - x^2\}$ est une famille génératrice de F .)

3. $F = \{p \in \mathbb{R}_2[x] \mid p'(1) = 0\}$

$$\begin{aligned} F &= \{a + bx + cx^2 \in \mathbb{R}_2[x] \mid b + 2c = 0\} \\ &= \{a - 2cx + cx^2 \mid a, c \in \mathbb{R}\} \\ &= \{a + c(-2x + x^2) \mid a, c \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{Vect}\{1, -2x + x^2\}. \end{aligned}$$

(On peut également en déduire que $\{1, -2x + x^2\}$ est une famille génératrice de F .)

Exercice 2.2

Prouver que les familles suivantes sont libres :

1. $\mathcal{C} = \{1, t, t^2\} \subset \mathbb{R}_2[t]$
2. $\mathcal{D} = \{1, t, t(t-1), t(t-1)(t-2)\} \subset \mathbb{R}_3[t]$

Correction

1. C'est la base canonique de $\mathbb{R}_3[t]$ donc la famille est libre.
2. $\alpha + \beta t + \gamma t(t-1) + \delta t(t-1)(t-2) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ ssi $\alpha + (\beta - \gamma + 2\delta)t + (\gamma - 3\delta)t^2 + \delta t^3 = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ ssi $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$ donc la famille est libre.

Exercice 2.3

Soient $p_0(x) = x + 1$, $p_1(x) = x^2 + x$ et $p_2(x) = 2x^2 + 1$ trois polynômes de $\mathbb{R}_2[x]$. Démontrer que $\text{Vect}\{p_0, p_1, p_2\} = \mathbb{R}_2[x]$.

Correction

Méthode 1 : pour prouver l'égalité de deux ensembles A et B, on peut démontrer que $A \subset B$ et que $B \subset A$. Pour démontrer que $A \subset B$, on considère un élément quelconque de A et on démontre qu'il appartient à B.

- Comme $p_0, p_1, p_2 \in \mathbb{R}_2[x]$ qui est un espace vectoriel, toute combinaison linéaire de ces trois polynômes est encore un élément de $\mathbb{R}_2[x]$, par conséquent $\text{Vect}\{p_0, p_1, p_2\} \subset \mathbb{R}_2[x]$.
- $\mathbb{R}_2[x] \subset \text{Vect}\{p_0, p_1, p_2\}$ ssi pour tout $q \in \mathbb{R}_2[x]$ il existe des réels $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ tels que $q = \lambda_0 \cdot p_0 + \lambda_1 \cdot p_1 + \lambda_2 \cdot p_2$:

$$\begin{aligned} q(x) = a + bx + cx^2 \in \text{Vect}\{p_0, p_1, p_2\} \\ \iff \exists (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } q = \lambda_0 \cdot p_0 + \lambda_1 \cdot p_1 + \lambda_2 \cdot p_2 \\ \iff \exists (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } a + bx + cx^2 = \lambda_0(x+1) + \lambda_1(x^2+x) + \lambda_2(2x^2+1) \\ \iff \exists (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } a + bx + cx^2 = (\lambda_0 + \lambda_2) + (\lambda_0 + \lambda_1)x + (\lambda_1 + 2\lambda_2)x^2 \\ \iff \exists (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } \begin{cases} \lambda_0 + \lambda_2 = a, \\ \lambda_0 + \lambda_1 = b, \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = c. \end{cases} \end{aligned}$$

Comme $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$, le système est de Cramer et on peut conclure que $\mathbb{R}_2[x] \subset \text{Vect}\{p_0, p_1, p_2\}$. Après résolution du système linéaire on trouve $q = bp_0 + (-a+b+c)p_1 + (a-b)p_2$.

Méthode 2 : comme $\text{card}(\{p_0, p_1, p_2\}) = 3 = \dim(\mathbb{R}_2[x])$, il suffit de prouver que la famille $\{p_0, p_1, p_2\}$ est libre, i.e. " $\lambda_0 \cdot p_0 + \lambda_1 \cdot p_1 + \lambda_2 \cdot p_2 = 0 \implies \lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = 0$ ":

$$\begin{aligned} \lambda_0 \cdot p_0 + \lambda_1 \cdot p_1 + \lambda_2 \cdot p_2 = 0 \\ \iff \lambda_0(x+1) + \lambda_1(x^2+x) + \lambda_2(2x^2+1) = 0 \\ \iff (\lambda_0 + \lambda_2) + (\lambda_0 + \lambda_1)x + (\lambda_1 + 2\lambda_2)x^2 = 0 \\ \iff \begin{cases} \lambda_0 + \lambda_2 = 0, \\ \lambda_0 + \lambda_1 = 0, \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Comme $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$, le système admet l'unique solution nulle et on peut conclure que $\text{Vect}\{p_0, p_1, p_2\} = \mathbb{R}_2[x]$.

Exercice 2.4

Étudier si la famille

$$\mathcal{F} = \{p_0(x) = x^3 + x^2, p_1(x) = x^2 + x, p_2(x) = x + 1, p_3(x) = x^3 + 1\}$$

de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[x]$ est libre. Si la famille est liée, trouver une relation entre les vecteurs de cette famille.

Correction

On dit qu'une famille $\mathcal{F} = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p\}$ est libre lorsque

$$\sum_{i=1}^p a_i \cdot \mathbf{u}_i = \mathbf{0}_E \implies a_i = 0 \forall i.$$

Ici

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n a_i \cdot \mathbf{u}_i = \mathbf{0}_E &\iff a_0 p_0 + a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3 = 0 \iff (a_2 + a_3) + (a_1 + a_2)x + (a_0 + a_1)x^2 + (a_0 + a_3)x^3 = 0 \\ &\iff \begin{cases} a_2 + a_3 = 0, \\ a_1 + a_2 = 0, \\ a_0 + a_1 = 0, \\ a_0 + a_3 = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} a_0 = \kappa, \\ a_1 = -\kappa, \\ a_2 = \kappa, \\ a_3 = -\kappa, \end{cases} \text{ pour tout } \kappa \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

donc la famille est liée. De plus, en prenant par exemple $\kappa = 1$ on a $p_3 = p_0 - p_1 + p_2$.

Exercice 2.5

Considérons l'ensemble

$$F = \{a + ax^2 + bx^4 \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[x]$.
2. Donner une base de F et sa dimension.

Correction

1. F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[x]$ car

$$F = \{a + ax^2 + bx^4 \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\} = \{a(1 + x^2) + bx^4 \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}\{1 + x^2, x^4\}.$$

2. Les deux polynômes $p(x) = 1 + x^2$ et $q(x) = x^4$ constituent une famille génératrice de F . On vérifie aisément que cette famille est libre donc elle est une base de F . Comme $\text{card}(\{p, q\}) = 2$, alors $\dim(F) = 2$.

Exercice 2.6

Considérons l'ensemble

$$F = \{p \in \mathbb{R}_3[x] \mid p(0) = p(1) = 0\}.$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[x]$.
2. Donner une base de F et sa dimension.

Correction

1. F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[x]$ car

$$F = \{x(x-1)(ax+b) \mid a, b \in \mathbb{R}\} = \left\{a\left(x^2(x-1)\right) + b\left(x(x-1)\right) \mid a, b \in \mathbb{R}\right\} = \text{Vect}\{x^2(x-1), x(x-1)\}.$$

Si on n'a pas remarqué que 0 et 1 sont racines des polynômes de F , il suffit de remarquer que

$$\begin{aligned} F &= \{p \in \mathbb{R}_3[x] \mid p(0) = p(1) = 0\} \\ &= \{a + bx + cx^2 + dx^3 \in \mathbb{R}_3[x] \mid a = 0 \text{ et } a + b + c + d = 0\} \\ &= \{bx + cx^2 + (-b - c)x^3 \mid b, c \in \mathbb{R}\} \\ &= \{b(x - x^3) + c(x^2 - x^3) \mid b, c \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{Vect}\{x - x^3, x^2 - x^3\}. \end{aligned}$$

Par conséquent F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[x]$.

2. Les deux polynômes $p(x) = x - x^3$ et $q(x) = x^2 - x^3$ constituent une famille génératrice de F . On montre que la famille $\mathcal{F} = \{x - x^3, x^2 - x^3\}$ est une base de l'espace vectoriel F ; en effet

$$\alpha(x - x^3) + \beta(x^2 - x^3) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha x + \beta x^2 + (-\alpha - \beta)x^3 = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha = \beta = 0.$$

Comme $\text{card}(\mathcal{F}) = 2$, alors $\dim(F) = 2$.

Exercice 2.7

Soit $\mathbb{R}_3[t]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus 3. Soit $U = \{p \in \mathbb{R}_3[t] \mid p(-1) = 0\}$. Montrer que U est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[t]$ et en donner une base.

Correction

On montre que $U = \text{Vect}\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p\}$ où $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p$ sont des éléments de $\mathbb{R}_3[x]$. En effet

$$\begin{aligned} U &= \{a + bx + cx^2 + dx^3 \in \mathbb{R}_3[x] \mid a - b + c - d = 0\} \\ &= \{a + bx + cx^2 + (a - b + c)x^3 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\} \\ &= \{a(1 + x^3) + b(x - x^3) + c(x^2 + x^3) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{Vect}\{1 + x^3, x - x^3, x^2 + x^3\}. \end{aligned}$$

Par conséquent U est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[x]$.

(On peut également en déduire que $\{1 + x^3, x - x^3, x^2 + x^3\}$ est une famille génératrice de U)

Exercice 2.8

Démontrer que l'ensemble

$$F = \{ p \in \mathbb{R}_3[x] \mid p(0) = p'(1) = 0 \}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[x]$ et en donner une base.**Correction**On montre que $F = \text{Vect} \{ \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p \}$ où $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p$ sont des éléments de $\mathbb{R}_3[x]$. En effet

$$\begin{aligned} F &= \{ p \in \mathbb{R}_3[x] \mid p(0) = p'(1) = 0 \} \\ &= \{ a + bx + cx^2 + dx^3 \in \mathbb{R}_3[x] \mid a = 0 \text{ et } b + 2c + 3d = 0 \} \\ &= \left\{ bx + cx^2 + \frac{-b-2c}{3}x^3 \mid b, c \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \{ b(x - x^3/3) + c(x^2 - 2x^3/3) \mid b, c \in \mathbb{R} \} \\ &= \text{Vect} \left\{ x - \frac{1}{3}x^3, x^2 - \frac{2}{3}x^3 \right\}. \end{aligned}$$

Par conséquent F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[x]$.On montre que la famille $\mathcal{F} = \{ x - \frac{1}{3}x^3, x^2 - \frac{2}{3}x^3 \}$ est une base de l'espace vectoriel F ; en effet

$$\alpha(x - x^3/3) + \beta(x^2 - 2x^3/3) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha x + \beta x^2 + (-\alpha - 2\beta)x^3/3 = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha = \beta = 0.$$

Exercice 2.9

Trouver une base de l'espace engendré par les polynômes dans les deux familles suivantes

1. $W = \{ 1 + 2x + 3x^2, x + 2x^2, 1 + 2x + 4x^2, 1 + x \}$
2. $W = \{ 2 + 2x^2, 2 + x - x^2, 3 + x + x^2, 3 + x + 3x^2 \}$

Correction

1. Notons

$$w_1(x) = 1 + 2x + 3x^2, \quad w_2(x) = x + 2x^2, \quad w_3(x) = 1 + 2x + 4x^2, \quad w_4(x) = 1 + x.$$

 W est une famille non libre si et seulement si

$$\begin{aligned} \exists (a, b, c, d) \neq (0, 0, 0, 0) \mid aw_1(x) + bw_2(x) + cw_3(x) + dw_4(x) &= 0 \Longleftrightarrow \\ \exists (a, b, c, d) \neq (0, 0, 0, 0) \mid (a + c + d) + (2a + b + 2c + d)x + (3a + 2b + 4c)x^2 &= 0 \Longleftrightarrow \\ \begin{cases} a + c + d = 0, \\ 2a + b + 2c + d = 0, \\ 3a + 2b + 4c = 0 \end{cases} &\Longleftrightarrow \begin{cases} a + c + d = 0, \\ b - d = 0, \\ 2b + c - 3d = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a + c + d = 0, \\ b - d = 0, \\ c - d = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \\ (a, b, c, d) &= (-2\kappa, \kappa, \kappa, \kappa), \kappa \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Autrement dit $w_4 = 2w_1 - w_2 - w_3$. On a alors

$$\text{Vect} \{ w_1, w_2, w_3, w_4 \} = \text{Vect} \{ w_1, w_2, w_3 \}.$$

Vérifions si la famille $\{ w_1, w_2, w_3 \}$ est libre: on dit qu'une famille $\mathcal{F} = \{ \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p \}$ est libre lorsque

$$\sum_{i=1}^p a_i \cdot \mathbf{u}_i = \mathbf{0}_E \quad \Longrightarrow \quad a_i = 0 \quad \forall i.$$

Ici

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 a_i \cdot \mathbf{u}_i = \mathbf{0}_E &\Longleftrightarrow aw_1 + bw_2 + cw_3 = 0 \\ &\Longleftrightarrow (a + c) + (2a + b + 2c)x + (3a + 2b + 4c)x^2 = 0 \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} a + c = 0, \\ 2a + b + 2c = 0, \\ 3a + 2b + 4c = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow a = b = c = 0 \end{aligned}$$

donc la famille est libre. Par conséquent $\{ w_1, w_2, w_3 \}$ est une base de l'espace $\text{Vect}(W)$.

2. Notons

$$w_1(x) = 2 + 2x^2, \quad w_2(x) = 2 + x - x^2, \quad w_3(x) = 3 + x + x^2, \quad w_4(x) = 3 + x + 3x^2.$$

W est une famille non libre si et seulement si

$$\begin{aligned} \exists(a, b, c, d) \neq (0, 0, 0, 0) \mid aw_1(x) + bw_2(x) + cw_3(x) + dw_4(x) = 0 &\iff \\ \exists(a, b, c, d) \neq (0, 0, 0, 0) \mid (2a + 2b + 3c + 3d) + (b + c + d)x + (2a - b + c + 3d)x^2 = 0 &\iff \\ \begin{cases} 2a + 2b + 3c + 3d = 0, \\ b + c + d = 0, \\ 2a - b + c + 3d = 0, \end{cases} &\iff \begin{cases} 2a + 2b + 3c + 3d = 0, \\ b + c + d = 0, \\ b + 4c + 6d = 0, \end{cases} &\iff \begin{cases} 2a + 2b + 3c + 3d = 0, \\ b + c + d = 0, \\ 3c + 5d = 0, \end{cases} &\iff \\ (a, b, c, d) = (\kappa, 2\kappa, -5\kappa, 3\kappa), \kappa \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Autrement dit $3w_4 = -w_1 - 2w_2 + 5w_3$. On a alors

$$\text{Vect}\{w_1, w_2, w_3, w_4\} = \text{Vect}\{w_1, w_2, w_3\}.$$

Vérifions si la famille $\{w_1, w_2, w_3\}$ est libre: on dit qu'une famille $\mathcal{F} = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p\}$ est libre lorsque

$$\sum_{i=1}^p a_i \cdot \mathbf{u}_i = \mathbf{0}_E \implies a_i = 0 \forall i.$$

Ici

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 a_i \cdot \mathbf{u}_i = \mathbf{0}_E &\iff aw_1 + bw_2 + cw_3 = 0 \\ &\iff (2a + 2b + 3c) + (b + c)x + (2a - b + c)x^2 = 0 \\ &\iff \begin{cases} 2a + 2b + 3c = 0, \\ b + c = 0, \\ b + 4c = 0, \end{cases} \iff a = b = c = 0 \end{aligned}$$

donc la famille est libre. Par conséquent $\{w_1, w_2, w_3\}$ est une base de l'espace $\text{Vect}(W)$.

Exercice 2.10

Soit

$$\begin{aligned} q_0(x) &= 1 + x + x^2 + x^3, \\ q_1(x) &= x + x^2 + x^3, \\ q_2(x) &= x^2 + x^3, \\ q_3(x) &= x^3, \end{aligned}$$

quatre polynômes de $\mathbb{R}_3[x]$.

1. Démontrer que l'ensemble $\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$ est une base de $\mathbb{R}_3[x]$ qu'on notera $\mathcal{B}$.
2. Notons $\mathcal{C} = \{c_0, c_1, c_2, c_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[x]$. Calculer $\text{coord}(c_i, \mathcal{B})$ et $\text{coord}(q_i, \mathcal{C})$.
3. Exprimer le polynôme $a + bx + cx^2 + dx^3$ dans la base $\mathcal{B}$.

Correction

1. Pour montrer que l'ensemble $\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$ est une base de $\mathbb{R}_3[x]$ il faut montrer qu'il s'agit d'une famille libre et génératrice de $\mathbb{R}_3[x]$. On dit qu'une famille $\mathcal{F} = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p\}$ est libre lorsque

$$\sum_{i=1}^p a_i \cdot \mathbf{u}_i = \mathbf{0}_E \implies a_i = 0 \forall i = 1, \dots, p.$$

Ici

$$\sum_{i=0}^n a_i \cdot \mathbf{u}_i = \mathbf{0}_E \iff a_0 q_0 + a_1 q_1 + a_2 q_2 + a_3 q_3 = 0$$

$$\iff a_0 + (a_0 + a_1)x + (a_0 + a_1 + a_2)x^2 + (a_0 + a_1 + a_2 + a_3)x^3 = 0 \iff \begin{cases} a_0 = 0, \\ a_1 = 0, \\ a_2 = 0, \\ a_3 = 0, \end{cases}$$

donc la famille est libre. Comme $\text{card}(\text{Vect}\{q_0, q_1, q_2, q_3\}) = 4$ et $\dim(\mathbb{R}_4[x]) = 4$, alors $\mathcal{B} = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$ est une base de $\mathbb{R}_3[x]$.

2. Soit $\mathcal{C} = \{c_0(x) = 1, c_1(x) = x, c_2(x) = x^2, c_3(x) = x^3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[x]$. Calculons les coordonnées de q_j dans la base $\mathcal{C}$:

$$\begin{aligned} q_0(x) &= 1 \cdot c_0(x) + 1 \cdot c_1(x) + 1 \cdot c_2(x) + 1 \cdot c_3(x) && \implies \text{coord}(q_0, \mathcal{C}) = (1, 1, 1, 1) \\ q_1(x) &= 0 \cdot c_0(x) + 1 \cdot c_1(x) + 1 \cdot c_2(x) + 1 \cdot c_3(x) && \implies \text{coord}(q_1, \mathcal{C}) = (0, 1, 1, 1) \\ q_2(x) &= 0 \cdot c_0(x) + 0 \cdot c_1(x) + 1 \cdot c_2(x) + 1 \cdot c_3(x) && \implies \text{coord}(q_2, \mathcal{C}) = (0, 0, 1, 1) \\ q_3(x) &= 0 \cdot c_0(x) + 0 \cdot c_1(x) + 0 \cdot c_2(x) + 1 \cdot c_3(x) && \implies \text{coord}(q_3, \mathcal{C}) = (0, 0, 0, 1) \end{aligned}$$

En résolvant le système linéaire (ici c'est très facile car il s'agit d'un système triangulaire), on obtient

$$\begin{cases} q_0 = c_0 + c_1 + c_2 + c_3, \\ q_1 = c_1 + c_2 + c_3, \\ q_2 = c_2 + c_3, \\ q_3 = c_3, \end{cases} \iff \begin{cases} c_0 = q_0 - q_1, \\ c_1 = q_1 - q_2, \\ c_2 = q_2 - q_3, \\ c_3 = q_3, \end{cases}$$

Cela signifie que

$$\begin{aligned} c_0(x) &= 1 \cdot q_0(x) - 1 \cdot q_1(x) + 0 \cdot q_2(x) + 0 \cdot q_3(x) && i.e. \text{ coord}(c_0, \mathcal{B}) = (1, -1, 0, 0), \\ c_1(x) &= 0 \cdot q_0(x) + 1 \cdot q_1(x) - 1 \cdot q_2(x) + 0 \cdot q_3(x) && i.e. \text{ coord}(c_1, \mathcal{B}) = (0, 1, -1, 0), \\ c_2(x) &= 0 \cdot q_0(x) + 0 \cdot q_1(x) + 1 \cdot q_2(x) - 1 \cdot q_3(x) && i.e. \text{ coord}(c_2, \mathcal{B}) = (0, 0, 1, -1), \\ c_3(x) &= 0 \cdot q_0(x) + 0 \cdot q_1(x) + 0 \cdot q_2(x) + 1 \cdot q_3(x) && i.e. \text{ coord}(c_3, \mathcal{B}) = (0, 0, 0, 1). \end{aligned}$$

3. Soit le polynôme $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$; dans la base $\mathcal{C}$ il a coordonnées (a, b, c, d) , donc

$$p(x) = ac_0 + bc_1 + cc_2 + dc_3 = a(q_0 - q_1) + b(q_1 - q_2) + c(q_2 - q_3) + d(q_3) = aq_0 + (b - a)q_1 + (c - b)q_2 + (d - c)q_3.$$

Par conséquent, dans la base $\mathcal{B}$ le polynôme $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$ a coordonnées

$$\text{coord}(p, \mathcal{B}) = (a, b - a, c - b, d - c).$$

Exercice 2.11

Soit $\mathbb{R}_3[t]$ l'espace des polynômes de degré au plus 3 et considérons l'ensemble

$$V = \{p \in \mathbb{R}_3[t] \mid p(0) + p(2) = 0, p(1) = 3p(-1)\}.$$

1. Montrer que V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[t]$.
2. Déterminer une base et la dimension de V .
3. Montrer que le polynôme $p(t) = 2 + 2t - t^3$ est dans V et trouver les composantes de p dans la base de V calculée auparavant.

Correction

1. On montre que $V = \text{Vect}\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p\}$ où $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p$ sont des éléments de $\mathbb{R}_3[t]$. En effet

$$\begin{aligned} V &= \{p \in \mathbb{R}_3[t] \mid p(0) + p(2) = 0, p(1) = 3p(-1)\} \\ &= \{a + bt + ct^2 + dt^3 \in \mathbb{R}_3[t] \mid 2a + 2b + 4c + 8d = 0 \text{ et } a + b + c + d = 3a - 3b + 3c - 3d\} \\ &= \left\{ \left(-\frac{5}{3}c - 2d \right) + \left(-\frac{1}{3}c - 2d \right)t + ct^2 + dt^3 \mid c, d \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \left(-\frac{5}{3} - \frac{1}{3}t + t^2 \right)c + (-2 - 2t + t^3)d \mid c, d \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \text{Vect} \left\{ q_1(t) = -\frac{5}{3} - \frac{1}{3}t + t^2; q_2(t) = -2 - 2t + t^3 \right\}. \end{aligned}$$

Par conséquent V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[t]$.

2. La famille $\mathcal{V} = \{q_1, q_2\}$ est génératrice de l'espace vectoriel V . De plus,

$$\alpha q_1 + \beta q_2 = 0_{\mathbb{R}_3[t]} \iff \alpha q_1(t) + \beta q_2(t) = 0 \forall t \in \mathbb{R} \iff \alpha = \beta = 0$$

donc elle est aussi libre donc elle est une base de V et $\dim(V) = 2$.

3. Si $p(t) = 2 + 2t - t^3$ on a $p(0) + p(2) = (2) + (2 + 4 - 8) = 0$ et $p(1) - 3p(-1) = (2 + 2 - 1) - 3(2 - 2 + 1) = 0$ donc $p \in V$ et $\text{coord}(p, \mathcal{V}) = (0, -1)$.

2.3.2. Interpolation polynomiale**Exercice 2.12 (Interpolation avec Numpy (calcul approché))**

Les fonctions `polyfit` et `polyval` du module `numpy` permettent de calculer les coefficients du polynôme d'interpolation d'un ensemble de points et de l'évaluer sur un (autre) ensemble de points.

Les utiliser pour interpoler l'ensemble de points $\{(-2, 4), (0, 0), (1, 1)\}$. Évaluer le polynôme ainsi obtenu en -1 , en 0 et en 2 .

Correction

Le seul polynôme de degré au plus 2 qui interpole l'ensemble de points $\{(-2, 4), (0, 0), (1, 1)\}$ est la parabole d'équation $p(x) = x^2$ et lorsqu'on évalue p en -1 , en 0 et en 2 on trouve respectivement 1 , 0 et 4 . Voici comment faire avec `numpy`:

```
from numpy import polyfit, polyval

# Calcul des coefficients du polynôme d'interpolation
xx = [-2, 0, 1]
yy = [4, 0, 1]
alpha = polyfit(x=xx, y=yy, deg=len(xx)-1)

# Évaluation du polynôme d'interpolation
x_vals = [-1, 0, 2]
y_vals = polyval(alpha, x_vals)
print(y_vals)
```

```
[1.00000000e+00 6.29173796e-16 4.00000000e+00]
```

Exercice 2.13 (Interpolation avec SymPy (calcul formel))

La fonction `interpolate` du module `sympy` permet de calculer le polynôme d'interpolation d'un ensemble de points et de l'évaluer sur un (autre) ensemble de points.

Utilisez-la pour interpoler l'ensemble de points $\{(-2, 4), (0, 0), (1, 1)\}$. Évaluez le polynôme ainsi obtenu en -1 ,

en 0 et en 2.

Correction

Le seul polynôme de degré au plus 2 qui interpole l'ensemble de points $\{(-2, 4), (0, 0), (1, 1)\}$ est la parabole d'équation $p(x) = x^2$. Lorsqu'on évalue p en -1 , en 0 et en 2, on trouve respectivement 1, 0 et 4. Voici comment faire avec SymPy:

```
from sympy import symbols, interpolate
x = symbols('x')

# Polynôme d'interpolation
points = [(-2, 4), (0, 0), (1, 1)]
polynome = interpolate(points, x)
print(polynome)

# Évaluation du polynôme aux points souhaités
x_vals = [-1, 0, 2]
y_vals = [polynome.subs({x:val}) for val in x_vals]
print(y_vals)
```

```
x**2
[1, 0, 4]
```

Exercice 2.14

Construire le polynôme P qui interpole les points $(0, 2)$, $(1, 1)$, $(2, 2)$ et $(3, 3)$.

Correction

On cherche un polynôme de degré au plus 3 tel que $P(0) = 2$, $P(1) = 1$, $P(2) = 2$ et $P(3) = 3$. Construire P signifie trouver ses coordonnées dans une base de $\mathbb{R}_3[x]$. On considère des méthodes qui sont basées sur des choix différents de bases de $\mathbb{R}_3[x]$:

- Avec sympy

```
import sympy as sp
x = sp.symbols('x')

points = [(0, 2), (1, 1), (2, 2), (3, 3)]
xx_p, yy_p = zip(*points)
n = len(points)-1

# Base canonique
polynomial = sp.interpolate(points, x)
print("Polynome dans la base canonique : $", sp.latex(polynomial),
      "\r" "$\\")

# Base de Lagrange
p = sp.polys.specialpolys.interpolating_poly(n+1, x, X=xx_p, Y=yy_p)
print("Polynome dans la base de Lagrange : $", sp.latex(p), r"$\\")

# Base de Newton
def divided_diff(xx, yy):
    n = len(yy)
    if n == 1:
```

```

        return yy[0]
    else:
        return (divided_diff(xx[1:], yy[1:]) - divided_diff(xx[:-1],
            - yy[:-1])) / sp.S(xx[-1] - xx[0])

def newton_interpolation(x, xx, yy):
    n = len(xx)
    p = 0
    for i in range(n):
        p += divided_diff(xx[:i+1], yy[:i+1]) * sp.prod([x - xx[j] for j
            - in range(i)])
    return p

p = newton_interpolation(x, xx_p, yy_p)
print("Polynôme de Newton : $", sp.latex(p), "$")

```

Polynôme dans la base canonique: $-\frac{x^3}{3} + 2x^2 - \frac{8x}{3} + 2$

Polynôme dans la base de Lagrange: $\frac{x(x-3)(x-2)}{2} - x(x-3)(x-1) + \frac{x(x-2)(x-1)}{2} - \frac{(x-3)(x-2)(x-1)}{3}$

Polynôme de Newton: $-\frac{x(x-2)(x-1)}{3} + x(x-1) - x + 2$

- Avec numpy

```

from numpy import polyfit

# Définir les points
points = [(0, 2), (1, 1), (2, 2), (3, 3)]
xx, yy = zip(*points) # Séparer les x et y

# Calculer les coefficients du polynôme d'interpolation
coeffs = polyfit(xx, yy, deg=len(points)-1)
print(coeffs)

```

```
[-0.33333333  2.         -2.66666667  2.         ]
```

- Méthode astucieuse

On remarque que les points (1, 1), (2, 2) et (3, 3) sont alignés, ainsi le polynôme $Q(x) = x$ de $\mathbb{R}_2[x]$ interpole ces points.

Introduisons le polynôme $D(x) = P(x) - Q(x)$ de $\mathbb{R}_3[x]$. Par construction, ce polynôme s'annule en $x = 1$, $x = 2$ et $x = 3$, donc $D(x) = \lambda(x-1)(x-2)(x-3)$. De plus, $D(0) = P(0) - Q(0) = 2$ mais aussi $D(0) = -6\lambda$ donc $\lambda = -1/3$ et on conclut que

$$P(x) = D(x) + Q(x) = -\frac{1}{3}(x-1)(x-2)(x-3) + x.$$

- Méthode directe (naïve)

On considère $\mathcal{C} = \{1, x, x^2, x^3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[x]$ et on cherche $(a_0, a_1, a_2, a_3) = \text{coord}(P, \mathcal{C})$, i.e. a_0, a_1, a_2, a_3 tels que $P(x) = \sum_{i=0}^3 a_i x^i$.

Il s'agit de trouver les 4 coefficients a_0, a_1, a_2 et a_3 solution du système linéaire

$$\begin{cases} P(0) = 2 \\ P(1) = 1 \\ P(2) = 2 \\ P(3) = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0^2 + a_3 \cdot 0^3 = 2 \\ a_0 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1^2 + a_3 \cdot 1^3 = 1 \\ a_0 + a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 2^2 + a_3 \cdot 2^3 = 2 \\ a_0 + a_1 \cdot 3 + a_2 \cdot 3^2 + a_3 \cdot 3^3 = 3 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

On peut utiliser la méthode de GAUSS-JORDAN :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & | & 2 \\ 1 & 3 & 9 & 27 & | & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & | & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 8 & | & 0 \\ 0 & 3 & 9 & 27 & | & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - 0L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 3L_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & | & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 24 & | & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - 0L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3/2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 3L_3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & | & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & | & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - 0L_4 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_4/3 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_4}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & -8/3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & | & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & | & -2 \end{pmatrix}$$

donc $a_3 = -\frac{1}{3}$, $a_2 = 2$, $a_1 = -\frac{8}{3}$ et $a_0 = 2$ et on trouve $P(x) = 2 - \frac{8}{3}x + 2x^2 - \frac{1}{3}x^3$.

Remarque: dans ce cas particulier, le système s'écrit

$$\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_0 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1^2 + a_3 \cdot 1^3 = 1 \\ a_0 + a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 2^2 + a_3 \cdot 2^3 = 2 \\ a_0 + a_1 \cdot 3 + a_2 \cdot 3^2 + a_3 \cdot 3^3 = 3 \end{cases}$$

ainsi on peut déjà poser $a_0 = 2$ et résoudre le système linéaire réduit suivant:

$$\begin{cases} a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1^2 + a_3 \cdot 1^3 = -1 \\ a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 2^2 + a_3 \cdot 2^3 = 0 \\ a_1 \cdot 3 + a_2 \cdot 3^2 + a_3 \cdot 3^3 = 1 \end{cases}$$

On peut utiliser la méthode de GAUSS-JORDAN:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & -1 \\ 2 & 4 & 8 & | & 0 \\ 3 & 9 & 27 & | & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & -1 \\ 0 & 2 & 6 & | & 2 \\ 0 & 6 & 24 & | & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 6L_2 \\ L_2 \leftarrow L_2/2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & | & -2 \\ 0 & 1 & 3 & | & 1 \\ 0 & 0 & 6 & | & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{L_1 \leftarrow L_1 + 2L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3 \\ L_3 \leftarrow L_3/6}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -8/3 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1/3 \end{pmatrix}$$

donc $a_3 = -\frac{1}{3}$, $a_2 = 2$, $a_1 = -\frac{8}{3}$ et $a_0 = 2$ et on trouve $P(x) = 2 - \frac{8}{3}x + 2x^2 - \frac{1}{3}x^3$.

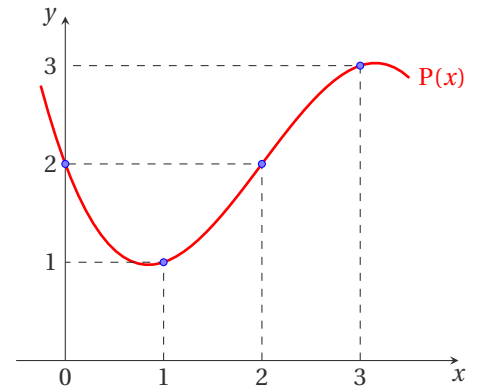
• Méthode de Lagrange

On considère $\mathcal{L} = \{L_0, L_1, L_2, L_3\}$ une base de $\mathbb{R}_3[x]$ telle que $\text{coord}(P, \mathcal{L}) = (y_0, y_1, y_2, y_3)$, i.e. $P(x) = \sum_{i=0}^3 y_i L_i(x)$.
On a

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

donc

$$\begin{aligned} P(x) &= y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} \\ &\quad + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + y_3 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \\ &= 2 \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)} + \frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(1-0)(1-2)(1-3)} \\ &\quad + 2 \frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{(2-0)(2-1)(2-3)} + 3 \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(3-0)(3-1)(3-2)} = \\ &= \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{-3} + \frac{x(x-2)(x-3)}{2} \\ &\quad - x(x-1)(x-3) + \frac{x(x-1)(x-2)}{2} = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - \frac{8}{3}x + 2. \end{aligned}$$



• Méthode de Newton

On considère $\mathcal{N} = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ une base de $\mathbb{R}_3[x]$ telle que $\text{coord}(P, \mathcal{N}) = (y_0, f[x_0, x_1], f[x_0, x_1, x_2], f[x_0, x_1, x_2, x_3])$, i.e. $P(x) = \sum_{i=0}^3 f[x_0, \dots, x_i] \omega_i(x)$.

La base de Newton est définie récursivement comme suit :

$$\omega_0(x) = 1; \quad \text{pour } k = 1, \dots, n \quad \omega_k(x) = \omega_{k-1}(x)(x - x_{k-1}).$$

Les coordonnées sont les valeurs encadrées dans le tableau des différences divisées ci-dessous :

i	x_i	y_i	$f[x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-3}, x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$
0	0	2			
1	1	1	-1		
2	2	2	1	1	
3	3	3	1	0	$-\frac{1}{3}$

On a alors

$$\begin{aligned}
 P_3(x) &= \sum_{i=1}^3 f[x_0, \dots, x_i] \omega_i(x) \\
 &= y_0 \omega_0(x) + f[x_0, x_1] \omega_1(x) + f[x_0, x_1, x_2] \omega_2(x) + f[x_0, x_1, x_2, x_3] \omega_3(x) \\
 &= 2 \omega_0(x) - \omega_1(x) + \omega_2(x) - \frac{1}{3} \omega_3(x) \\
 &= 2 - x + x(x-1) - \frac{1}{3} x(x-1)(x-2) \\
 &= -\frac{1}{3} x^3 + 2x^2 - \frac{8}{3} x + 2.
 \end{aligned}$$

Remarque : on réordonne les points comme suit : (1, 1), (2, 2), (3, 3) et (0, 2).

i	x_i	y_i	$f[x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-3}, x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$
0	1	1			
1	2	2	1		
2	3	3	1	0	
3	0	2	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$

On a alors

$$\begin{aligned}
 P_3(x) &= \sum_{i=1}^3 f[x_0, \dots, x_i] \omega_i(x) \\
 &= y_0 \omega_0(x) + f[x_0, x_1] \omega_1(x) + f[x_0, x_1, x_2] \omega_2(x) + f[x_0, x_1, x_2, x_3] \omega_3(x) \\
 &= \omega_0(x) + \omega_1(x) - \frac{1}{3} \omega_3(x) \\
 &= 1 + (x-1) - \frac{1}{3} (x-1)(x-2)(x-3) \\
 &= x - \frac{1}{3} (x-1)(x-2)(x-3).
 \end{aligned}$$

On remarque que les points (1, 1), (2, 2) et (3, 3) sont alignés, ainsi le polynôme $Q(x) = x$ de $\mathbb{R}_2[x]$ interpole ces points.

Partage d'un message secret : comment envoyer un message secret avec plusieurs espions sans pour autant que ceux-ci ne connaissent le contenu du message envoyé ?

Imaginons que l'on désire envoyer un message secret. Par codage, on peut remplacer ce message par un nombre, appelons-le n .

Considérons un polynôme $P(X) = a_k X^k + \dots + a_1 X + n$ de degré k dont le terme indépendant vaut exactement n , autrement dit $P(0) = n$. Un corollaire du théorème fondamental de l'algèbre stipule que le polynôme P est complètement caractérisé par les valeurs qu'il prend en $k+1$ points, par exemple en $X = 1, 2, \dots, k+1$.

On engage alors au moins $k+1$ espions (mieux en engager un peu plus au cas où certains seraient capturés par les «ennemis»). On donne au i -ème espion le nombre $P(i)$. Les espions se dispersent (par exemple, pour passer les lignes ennemies). Une fois qu'au moins $k+1$ espions sont arrivés à destination, il est aisé de reconstituer le polynôme et ainsi

retrouver la valeur secrète n (on a un système d'au moins $k + 1$ équations linéaires pour retrouver les $k + 1$ coefficients de P).

Si un espion est capturé et qu'il parle, les ennemis auront à leur disposition un des $P(i)$ mais cela ne leur permet nullement de retrouver n .

De même, si un espion étaient en fait un agent double, connaître $P(i)$ seul ne sert à rien.

Source: <http://michelrigo.wordpress.com/2010/01/30/partage-de-secrets-et-tfa/>

Exercice 2.15

Calculer le message secret n si $k = 2$ et on envoie 4 espions avec les messages suivants :

Espion	1	2	3	4
Message	45	50	57	66

Correction

On doit interpoler l'ensemble $\{(1, 45), (2, 50), (3, 57), (4, 66)\}$ constitué de 4 points. Cependant on nous dit de chercher un polynôme de degré au plus 2 (et non pas 3 comme on pourrait s'y attendre). Cela signifie qu'ils ont envoyé un espion de plus en cas de "perte". Donc, pour nos calculs, on utilisera seulement 3 points parmi les 4 données et on vérifiera à posteriori que le polynôme obtenu interpole aussi le point négligé.

On choisit par exemple d'interpoler l'ensemble $\{(1, 45), (2, 50), (3, 57)\}$: on cherche un polynôme de degré au plus 2 tel que $P(1) = 45$, $P(2) = 50$, $P(3) = 57$ et $P(4) = 66$. Construire P signifie trouver ses coordonnées dans une base de $\mathbb{R}_2[x]$. On considère trois méthodes qui sont basées sur trois choix différents de bases de $\mathbb{R}_2[x]$:

• Méthode directe (naïve)

On considère $\mathcal{C} = \{1, x, x^2\}$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$ et on cherche $(a, b, c) = \text{coord}(P, \mathcal{C})$, i.e. a, b, c tels que $P(x) = a + bx + cx^2$. (le message secret est $P(0) = a$).

Il s'agit de trouver les 3 coefficients a, b, c solution du système linéaire

$$\begin{cases} P(1) = 45, \\ P(2) = 50, \\ P(3) = 57, \\ P(4) = 66 \end{cases} \quad \text{i.e.} \quad \begin{cases} a + b + c = 45 \\ a + 2b + 2^2c = 50 \\ a + 3b + 3^2c = 57 \\ a + 4b + 4^2c = 66 \end{cases}$$

Puisqu'on a envoyé un espion de trop, on a 4 équations et 3 inconnues : le système est sur-déterminé.

Négligeons pour le moment la dernière équation et résolvons avec Gauss

$$\begin{cases} a + b + c = 45 \\ a + 2b + 4c = 50 \\ a + 3b + 9c = 57 \end{cases} \xrightarrow[\text{Étape } j=1]{\begin{smallmatrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{smallmatrix}} \begin{cases} a + b + c = 45 \\ b + 3c = 5 \\ 2b + 8c = 12 \end{cases} \xrightarrow[\text{Étape } j=2]{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2} \begin{cases} a + b + c = 45 \\ b + 3c = 5 \\ 2c = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 1 \\ b = 5 - 3c = 2 \\ a = 45 - b - c = 42 \end{cases}$$

Vérifions si la dernière équation est bien satisfaite :

$$42 + 2 \times 4 + 1 \times 4^2 = 66.$$

Le polynôme recherché est ainsi $P(x) = 42 + 2x + x^2$ et le message secret est donc $P(0) = a = 42$.

- **Méthode de Lagrange** Puisqu'on a envoyé un espion de trop, négligeons pour l'instant le point $(4, 66)$. On construit la base de Lagrange de $\mathbb{R}_2[x]$ telle que $(45, 50, 57) = \text{coord}(P, \mathcal{L})$, i.e. 45, 50, 57 tels que $P(x) = 45L_0(x) + 50L_1(x) + 57L_2(x)$. On a

$$\begin{aligned} P(x) &= y_0L_0(x) + y_1L_1(x) + y_2L_2(x) \\ &= 45 \frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} + 50 \frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)} + 57 \frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)} \\ &= \frac{45}{2}(x-2)(x-3) - 50(x-1)(x-3) + \frac{57}{2}(x-1)(x-2). \end{aligned}$$

Bien sur $P(4) = 66$ (un espion était redondant) et le message secret est donc

$$P(0) = \frac{45}{2} \times 6 - 50 \times 3 + \frac{57}{2} \times 2 = 135 - 150 + 57 = 42.$$

Méthode de Newton. Puisqu'on a envoyé un espion de trop, négligeons pour l'instant le point (4, 66).

On commence par construire le tableau des différences divisées :

i	x_i	y_i	$f[x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$
0	1	45		
1	2	50	5	
2	3	57	7	1

On a alors

$$\begin{aligned}
 P(x) &= \sum_{i=1}^2 \omega_i(x) f[x_0, \dots, x_i] \\
 &= \omega_0(x) f[x_0] + \omega_1(x) f[x_0, x_1] + \omega_2(x) f[x_0, x_1, x_2] \\
 &= 45\omega_0(x) + 5\omega_1(x) + \omega_2(x) \\
 &= 45 + 5(x-1) + (x-1)(x-2).
 \end{aligned}$$

Bien sur $P(4) = 45 + 5 \times 3 + 3 \times 2 = 66$ (un espion était redondant) et le message secret est donc

$$P(0) = 45 - 5 + 2 = 42.$$

Exercice 2.16

1. Calculer le polynôme d'interpolation de la fonction $f(x) = \cos(x)$ en les 3 points $x_i = \frac{\pi}{2}i$ avec $i = 0, \dots, 2$.
2. Calculer ensuite le polynôme d'interpolation de la même fonction en les 4 points $x_i = \frac{\pi}{2}i$ avec $i = 0, \dots, 3$, i.e. en ajoutant le point $x_3 = 3\pi/2$.

Correction

1. On cherche $p_2 \in \mathbb{R}_2[x]$ tel que $p_2(x_i) = \cos(x_i)$ pour $i = 0, \dots, 2$. On peut choisir l'une des quatre méthodes ci-dessous (on préférera la méthode de NEWTON car elle permet de réutiliser les calculs de cette question pour répondre à la question suivante).

Méthode directe (naïve). Si on écrit $p_2(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$, on cherche $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ tels que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{\pi}{2} & \frac{\pi^2}{4} \\ 1 & \pi & \pi^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

En résolvant ce système linéaire on trouve $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = -\frac{2}{\pi}$ et $\alpha_2 = 0$:

```

import sympy as sp

x = sp.Symbol('x', real=True)
alpha_0 = sp.Symbol(r'\alpha_0', real=True)
alpha_1 = sp.Symbol(r'\alpha_1', real=True)
alpha_2 = sp.Symbol(r'\alpha_2', real=True)

p = sp.Poly(alpha_0 + alpha_1*x + alpha_2*x**2, x)

xx = [0, sp.pi/2, sp.pi]
yy = [sp.cos(x) for x in xx]
Eqs = [ sp.Eq(p.subs(x,xx[i]),yy[i]) for i in range(3)]

sol = sp.solve(Eqs, [alpha_0, alpha_1, alpha_2])
print(sol)

```

```
{\alpha_0: 1, \alpha_1: -2/pi, \alpha_2: 0}
```

Méthode astucieuse. Le polynôme p_2 s'annule en $\frac{\pi}{2}$, ceci signifie qu'il existe un polynôme $R(x)$ tel que

$$p_2(x) = R(x) \left(x - \frac{\pi}{2} \right).$$

Puisque $p_2(x)$ a degré 2, le polynôme $R(x)$ qu'on a mis en facteur a degré 1, autrement dit R est de la forme $ax + b$. On cherche alors a et b tels que

$$\begin{cases} R(0) = \frac{p_2(0)}{(0-\frac{\pi}{2})}, \\ R(\pi) = \frac{p_2(\pi)}{(\pi-\frac{\pi}{2})}. \end{cases} \iff \begin{cases} b = \frac{1}{(0-\frac{\pi}{2})}, \\ a\pi + b = \frac{-1}{(\pi-\frac{\pi}{2})}. \end{cases} \iff \begin{cases} b = -\frac{2}{\pi}, \\ a = 0. \end{cases}$$

Ainsi

$$p_2(x) = R(x) \left(x - \frac{\pi}{2} \right) = -\frac{2}{\pi} \left(x - \frac{\pi}{2} \right) = -\frac{2}{\pi}x + 1.$$

Méthode de Lagrange. On a

$$p_2(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x) = 1 \frac{(x - \frac{\pi}{2})(x - \pi)}{(0 - \frac{\pi}{2})(0 - \pi)} - 1 \frac{(x - 0)(x - \frac{\pi}{2})}{(\pi - 0)(\pi - \frac{\pi}{2})} = 1 - \frac{2}{\pi}x.$$

Méthode de Newton. On commence par construire le tableau des différences divisées:

i	x_i	y_i	$f[x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$
0	0	1		
1	$\frac{\pi}{2}$	0	$-\frac{2}{\pi}$	
2	π	-1	$-\frac{2}{\pi}$	0

On a alors

$$\begin{aligned} p_2(x) &= \sum_{i=1}^2 \omega_i(x) f[x_0, \dots, x_i] \\ &= \omega_0(x) f[x_0] + \omega_1(x) f[x_0, x_1] + \omega_2(x) f[x_0, x_1, x_2] \\ &= \omega_0(x) - \frac{2}{\pi} \omega_1(x) \\ &= 1 - \frac{2}{\pi}x. \end{aligned}$$

2. On cherche donc $p_3 \in \mathbb{R}_3[x]$ tel que $p_3(x_i) = \sin(x_i)$ pour $i = 0, \dots, 3$. On peut choisir l'une des quatre méthodes ci-dessous (on préférera la méthode de NEWTON car elle permet d'utiliser les calculs précédents).

Méthode directe. Si on écrit $p_3(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3$, on cherche $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tels que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{\pi}{2} & \frac{\pi^2}{4} & \frac{\pi^3}{8} \\ 1 & \pi & \pi^2 & \pi^3 \\ 1 & \frac{3\pi}{2} & \frac{9\pi^2}{4} & \frac{27\pi^3}{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En résolvant ce système linéaire on trouve $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = -\frac{2}{3\pi}$, $\alpha_2 = -\frac{4}{\pi^2}$ et $\alpha_3 = \frac{8}{3\pi^3}$:

```
import sympy as sp

x = sp.Symbol('x', real=True)
alpha_0 = sp.Symbol(r'\alpha_0', real=True)
alpha_1 = sp.Symbol(r'\alpha_1', real=True)
alpha_2 = sp.Symbol(r'\alpha_2', real=True)
alpha_3 = sp.Symbol(r'\alpha_3', real=True)

p = sp.Poly(alpha_0 + alpha_1*x + alpha_2*x**2 + alpha_3*x**3, x)

xx = [0, sp.pi/2, sp.pi, 3*sp.pi/2]
yy = [sp.cos(x) for x in xx]
Eqs = [ sp.Eq(p.subs(x,xx[i]),yy[i]) for i in range(4)]
```

```
sol = sp.solve(Eqs, [alpha_0, alpha_1, alpha_2, alpha_3])
print(sol)
```

```
{\alpha_0: 1, \alpha_1: -2/(3*pi), \alpha_2: -4/pi**2, \alpha_3: 8/(3*pi**3)}
```

Méthode astucieuse. Le polynôme p_3 s'annule en $\frac{\pi}{2}$ et en $\frac{3\pi}{2}$, ceci signifie qu'il existe un polynôme $R(x)$ tel que

$$p_3(x) = R(x) \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \left(x - \frac{3\pi}{2} \right).$$

Puisque $p_3(x)$ a degré 3, le polynôme $R(x)$ qu'on a mis en facteur a degré 1, autrement dit R est de la forme $ax + b$. On cherche alors a et b tels que

$$\begin{cases} R(0) = \frac{p_3(0)}{(0-\frac{\pi}{2})(0-\frac{3\pi}{2})}, \\ R(\pi) = \frac{p_3(\pi)}{(\pi-\frac{\pi}{2})(\pi-\frac{3\pi}{2})}. \end{cases} \iff \begin{cases} b = \frac{1}{(0-\frac{\pi}{2})(0-\frac{3\pi}{2})}, \\ a\pi + b = \frac{-1}{(\pi-\frac{\pi}{2})(\pi-\frac{3\pi}{2})}. \end{cases} \iff \begin{cases} b = \frac{4}{3\pi^2}, \\ a = \frac{8}{3\pi^3}. \end{cases}$$

Ainsi

$$p_3(x) = R(x) \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \left(x - \frac{3\pi}{2} \right) = \left(\frac{8}{3\pi^3}x + \frac{4}{3\pi^2} \right) \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \left(x - \frac{3\pi}{2} \right) = 1 - \frac{2}{3\pi}x - \frac{4}{\pi^2}x^2 + \frac{8}{3\pi^3}x^3.$$

Méthode de Lagrange. On a

$$\begin{aligned} p_3(x) &= y_0L_0(x) + y_1L_1(x) + y_2L_2(x) + y_3L_3(x) = 1 \frac{(x-\frac{\pi}{2})(x-\pi)(x-\frac{3\pi}{2})}{(0-\frac{\pi}{2})(0-\pi)(0-\frac{3\pi}{2})} - 1 \frac{(x-0)(x-\frac{\pi}{2})(x-\frac{3\pi}{2})}{(\pi-0)(\pi-\frac{\pi}{2})(\pi-\frac{3\pi}{2})} \\ &= \frac{4}{3\pi^3} \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \left(x - \frac{3\pi}{2} \right) (-x + \pi + 3x) = 1 - \frac{2}{3\pi}x - \frac{4}{\pi^2}x^2 + \frac{8}{3\pi^3}x^3. \end{aligned}$$

Méthode de Newton. Il suffit de calculer une différence divisée en plus, *i.e.* ajouter une ligne au tableau précédant :

i	x_i	y_i	$f[x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-3}, x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$
0	0	1			
1	$\frac{\pi}{2}$	0	$-\frac{2}{\pi}$		
2	π	-1	$-\frac{2}{\pi}$	0	
3	$\frac{3\pi}{2}$	0	$\frac{2}{\pi}$	$\frac{4}{\pi^2}$	$\frac{8}{3\pi^3}$

On a alors

$$\begin{aligned} p_3(x) &= \sum_{i=1}^3 \omega_i(x) f[x_0, \dots, x_i] \\ &= p_2(x) + \omega_3(x) f[x_0, x_1, x_2, x_3] \\ &= 1 - \frac{2}{\pi}x + \frac{8}{3\pi^3}\omega_3(x) \\ &= 1 - \frac{2}{\pi}x + \frac{8}{3\pi^3}x \left(x - \frac{\pi}{2} \right) (x - \pi) \\ &= 1 - \frac{2}{3\pi}x - \frac{4}{\pi^2}x^2 + \frac{8}{3\pi^3}x^3. \end{aligned}$$

Exercice 2.17

1. Construire le polynôme P qui interpole les points $(-1, 2)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$ et $(2, 3)$.
2. Soit Q le polynôme qui interpole les points $(-1, 2)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$. Montrer qu'il existe un réel λ tel que :

$$Q(x) - P(x) = \lambda(x+1)x(x-1).$$

Correction

1. Dans la base de LAGRANGE le polynôme d'interpolation de degré $n = 3$ s'écrit

$$\begin{aligned} P(x) &= y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} \\ &\quad + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + y_3 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \\ &= \frac{x(x-1)(x-2)}{-3} + \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{2} - (x+1)x(x-2) + \frac{(x+1)x(x-1)}{2} = \\ &= -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + \frac{1}{3}x + 1. \end{aligned}$$

2. Par construction

$$Q(-1) = P(-1),$$

$$Q(0) = P(0),$$

$$Q(1) = P(1),$$

donc le polynôme $Q(x) - P(x)$ s'annule en -1 , en 0 et en 1 , ceci signifie qu'il existe un polynôme $R(x)$ tel que

$$Q(x) - P(x) = R(x)(x+1)x(x-1).$$

Puisque $P(x)$ a degré 3 et $Q(x)$ a degré 2, le polynôme $Q(x) - P(x)$ a degré 3, donc le polynôme $R(x)$ qu'on a mis en facteur a degré 0 (*i.e.* $R(x)$ est une constante).

Si on n'a pas remarqué ça, on peut tout de même faire tous les calculs : dans ce cas $n = 2$ donc on a

$$\begin{aligned} Q(x) &= y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \\ &= x(x-1) - (x+1)(x-1) + (x+1)x \\ &= x^2 + 1. \end{aligned}$$

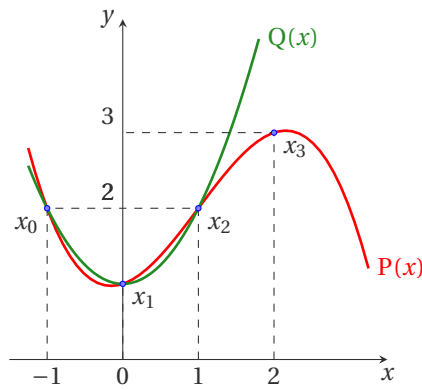
Ainsi

$$\begin{aligned} Q(x) - P(x) &= y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \left[1 - \frac{x-x_3}{x_0-x_3} \right] + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} \left[1 - \frac{x-x_3}{x_1-x_3} \right] \\ &\quad + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \left[1 - \frac{x-x_3}{x_2-x_3} \right] - y_3 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \\ &= -y_0 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} - y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} \\ &\quad - y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} - y_3 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \\ &= - \left[\frac{y_0}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} + \frac{y_1}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{y_2}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + \frac{y_3}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \right] (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \\ &= \frac{(x+1)x(x-1)}{3} \end{aligned}$$

et $\lambda = \frac{1}{3}$. Sinon directement

$$Q(x) - P(x) = x^2 + 1 + \frac{1}{3}x^3 - x^2 + \frac{1}{3}x - 1 = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}x = \frac{(x+1)x(x-1)}{3} = \lambda x(x+1)(x-1)$$

avec $\lambda = \frac{1}{3}$.

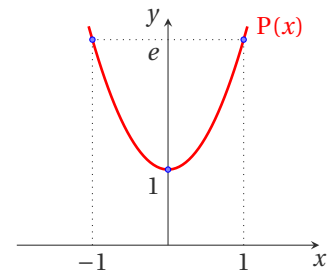
**Exercice 2.18**

1. Construire le polynôme P qui interpole les trois points $(-1, e)$, $(0, 1)$ et $(1, e)$.
2. Sans faire de calculs, donner l'expression du polynôme Q qui interpole les trois points $(-1, -1)$, $(0, 0)$ et $(1, -1)$.
3. Trouver le polynôme de l'espace vectoriel $\text{Vec}[1, x, x^2]$ qui interpole les trois points $(-1, -1)$, $(0, 0)$ et $(1, -1)$.

Correction

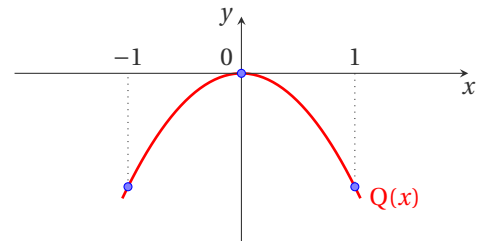
1. Dans la base de LAGRANGE le polynôme d'interpolation de degré $n = 2$ s'écrit

$$\begin{aligned} P(x) &= y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \\ &= e \frac{x(x-1)}{2} - (x+1)(x-1) + e \frac{(x+1)x}{2} = \\ &= (e-1)x^2 + 1. \end{aligned}$$



2. Il suffit de changer les coefficients y_i dans l'expression précédente:

$$Q(x) = -\frac{x(x-1)}{2} - \frac{(x+1)x}{2} = -x^2.$$



3. Il s'agit de trouver un polynôme $p(x)$ qui soit combinaison linéaire des deux polynômes assignés (i.e. $p(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2$) et qui interpole les trois points $(-1, -1)$, $(0, 0)$ et $(1, -1)$:

$$\begin{cases} p(-1) = -1, \\ p(0) = 0, \\ p(1) = -1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - \beta + \gamma = -1, \\ \alpha = 0, \\ \alpha + \beta + \gamma = -1, \end{cases}$$

d'où $\alpha = 0$, $\beta = 0$ et $\gamma = -1$. Le polynôme cherché est donc le polynôme $p(x) = -x^2$. En fait, il suffisait de remarquer que le polynôme $Q \in \text{Vec}[1, x, x^2]$ pour conclure que le polynôme p cherché est Q lui-même.

Exercice 2.19

1. Construire le polynôme P qui interpole les points $(-1, 1)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$ et $(2, 3)$.

2. Soit Q le polynôme qui interpole les points $(-1, 1)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$. Montrer qu'il existe un réel λ tel que :

$$Q(x) - P(x) = \lambda(x+1)x(x-1).$$

Correction

1. Dans la base de LAGRANGE le polynôme d'interpolation de degré $n = 3$ s'écrit

$$\begin{aligned} P(x) &= y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} \\ &\quad + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + y_3 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \\ &= \frac{x(x-1)(x-2)}{-6} + \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{2} - (x+1)x(x-2) + \frac{(x+1)x(x-1)}{2} = \\ &= -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x + 1. \end{aligned}$$

2. Par construction

$$Q(-1) = P(-1),$$

$$Q(0) = P(0),$$

$$Q(1) = P(1),$$

donc le polynôme $Q(x) - P(x)$ s'annule en -1 , en 0 et en 1 , ceci signifie qu'il existe un polynôme $R(x)$ tel que

$$Q(x) - P(x) = R(x)(x+1)x(x-1).$$

Puisque $P(x)$ a degré 3 et $Q(x)$ a degré 2, le polynôme $Q(x) - P(x)$ a degré 3, donc le polynôme $R(x)$ qu'on a mis en facteur a degré 0 (i.e. $R(x)$ est une constante).

Si on n'a pas remarqué ça, on peut tout de même faire tous les calculs : dans ce cas $n = 2$ donc on a

$$\begin{aligned} Q(x) &= y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \\ &= \frac{x(x-1)}{2} - (x+1)(x-1) + (x+1)x \\ &= \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1. \end{aligned}$$

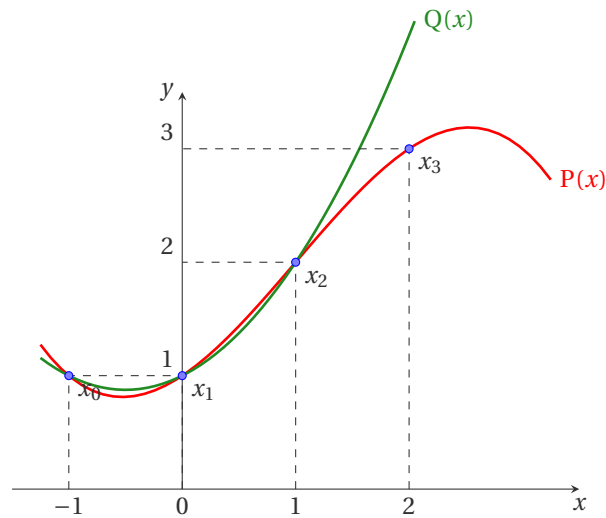
Ainsi

$$\begin{aligned} Q(x) - P(x) &= y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \left[1 - \frac{x-x_3}{x_0-x_3} \right] + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} \left[1 - \frac{x-x_3}{x_1-x_3} \right] \\ &\quad + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \left[1 - \frac{x-x_3}{x_2-x_3} \right] - y_3 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \\ &= -y_0 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} - y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} \\ &\quad - y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} - y_3 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \\ &= - \left[\frac{y_0}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} + \frac{y_1}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{y_2}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + \frac{y_3}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \right] (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) = \frac{(x+1)x(x-1)}{6} \end{aligned}$$

et $\lambda = \frac{1}{6}$. Sinon directement

$$Q(x) - P(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x - 1 = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{6}x = \frac{1}{6}x(x^2 - 1) = \lambda x(x+1)(x-1)$$

avec $\lambda = \frac{1}{6}$.

**Exercice 2.20**

1. Construire le polynôme P qui interpole les trois points $(-1, \alpha)$, $(0, \beta)$ et $(1, \alpha)$ où α et β sont des réels.
2. Si $\alpha = \beta$, donner le degré de P .
3. Montrer que P est pair. Peut-on avoir P de degré 1 ?

Correction

1. Dans la base de LAGRANGE le polynôme d'interpolation de degré $n = 2$ s'écrit

$$\begin{aligned}
 P(x) &= y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} + \\
 &= \alpha \frac{x(x-1)}{2} + \beta \frac{(x+1)(x-1)}{-1} + \alpha \frac{(x+1)x}{2} = \\
 &= \frac{\alpha}{2} x(x-1) - \beta(x+1)(x-1) + \frac{\alpha}{2} x(x+1) \\
 &= (\alpha - \beta)x^2 + \beta.
 \end{aligned}$$

Sinon, dans la base de NEWTON, on commence par construire le tableau des différences divisées :

i	x_i	y_i	$f[x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$
0	-1	α		
1	0	β	$(\beta - \alpha)$	
2	1	α	$(\alpha - \beta)$	$(\alpha - \beta)$

On a alors

$$\begin{aligned}
 p_2(x) &= \sum_{i=0}^2 \omega_i(x) f[x_0, \dots, x_i] \\
 &= \omega_0(x) f[x_0] + \omega_1(x) f[x_0, x_1] + \omega_2(x) f[x_0, x_1, x_2] \\
 &= \alpha \omega_0(x) + (\beta - \alpha) \omega_1(x) + (\alpha - \beta) \omega_2(x) \\
 &= \alpha + (\beta - \alpha)(x+1) + (\alpha - \beta)x(x+1) = (\alpha - \beta)x^2 + \beta.
 \end{aligned}$$

2. Si $\alpha = \beta$, $P(x) = \alpha$ qui est un polynôme de degré 0.
3. $P(-x) = P(x)$ donc P est pair. Donc P ne peut pas être de degré 1 car un polynôme de degré 1 est de la forme $a_0 + a_1 x$ qui ne peut pas être pair.

Exercice 2.21

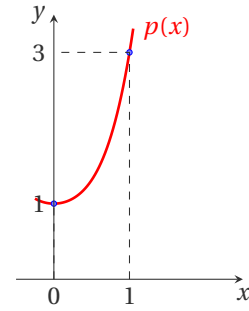
Trouver le polynôme de l'espace vectoriel $\text{Vec}\{1 + x^2, x^4\}$ qui interpole les points $(0, 1)$ et $(1, 3)$.

Correction

Il s'agit de trouver un polynôme $p(x)$ qui soit combinaison linéaire des deux polynômes assignés (i.e. $p(x) = \alpha(1 + x^2) + \beta(x^4)$) et qui interpole les deux points $(0, 1)$ et $(1, 3)$:

$$\begin{cases} p(0) = 1, \\ p(1) = 3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha(1 + 0^2) + \beta(0^4) = 1, \\ \alpha(1 + 1^2) + \beta(1^4) = 3, \end{cases}$$

d'où $\alpha = 1$ et $\beta = 1$. Le polynôme cherché est donc le polynôme $p(x) = 1 + x^2 + x^4$.

**Exercice 2.22**

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = 1 + x^3$.

1. Calculer le polynôme $p_0 \in \mathbb{R}_0[x]$ qui interpole f au point d'abscisse $x_0 = 0$.
2. Calculer le polynôme $p_1 \in \mathbb{R}_1[x]$ qui interpole f aux points d'abscisse $\{x_0 = 0, x_1 = 1\}$.
3. Calculer le polynôme $p_2 \in \mathbb{R}_2[x]$ qui interpole f aux points d'abscisse $\{x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2\}$.
4. Calculer le polynôme $p_3 \in \mathbb{R}_3[x]$ qui interpole f aux points d'abscisse $\{x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3\}$.
5. Pour $n > 3$, calculer les polynômes $p_n \in \mathbb{R}_n[x]$ qui interpolent f aux points d'abscisse $\{x_0 = 0, x_1 = 1, \dots, x_n = n\}$.

Correction

1. On interpole l'ensemble $\{(0, 1)\}$ donc $p_0(x) = 1$.
2. On interpole l'ensemble $\{(0, 1), (1, 2)\}$ donc $p_1(x) = 1 + x$.
3. On interpole l'ensemble $\{(0, 1), (1, 2), (2, 9)\}$ donc $p_2(x) = 1 - 2x + 3x^2$.
4. $f \in \mathbb{R}_3[x]$ et comme il existe un seul polynôme de degré au plus 3 qui interpole quatre points ce polynôme coïncide forcément avec f donc $p_3 \equiv f$.
5. $f \in \mathbb{R}_n[x]$ pour tout $n \geq 3$ et comme il existe un seul polynôme de degré au plus 3 qui interpole quatre points ce polynôme coïncide forcément avec f donc $p_n \equiv f$ pour $n \geq 3$.

Exercice 2.23

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = 1 + x^2$.

1. Calculer le polynôme de $\mathbb{R}_0[x]$ qui interpole f au point 0.
2. Calculer le polynôme de $\mathbb{R}_1[x]$ qui interpole f aux points $\{0, 2\}$.
3. Calculer le polynôme de $\mathbb{R}_9[x]$ qui interpole f aux points $\{0, 2, \dots, 2i, \dots, 18\}_{0 \leq i \leq 9}$.

Correction

1. On interpole l'ensemble de points $\{(0, 1)\}$ donc $p_0(x) = 1$.
2. On interpole l'ensemble de points $\{(0, 1), (2, 5)\}$ donc $p_1(x) = 1 + 2x$.
3. $f \in \mathbb{R}_n[x]$ pour tout $n \geq 2$ et comme il existe un seul polynôme de degré au plus 2 qui interpole trois points ce polynôme coïncide forcément avec f donc $p_n \equiv f$ pour $n \geq 2$.

Exercice 2.24

1. Calculer le polynôme qui interpole les points $(0, 3), (1, 2), (2, 4), (3, -2)$.
2. Calculer le polynôme qui interpole les points $(0, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 6), (5, 7), (6, 8), (7, 9)$ (pas de calculs inutiles!).
3. Calculer le polynôme qui interpole les points $(0, 2), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)$ en le cherchant sous la forme $p(x) = x + q(x)$ (pas de calculs inutiles!).

4. Donner l'expression du polynôme $p \in \mathbb{R}_3[x]$ dont la dérivée k -ème vérifie $p^{(k)}(1) = 3$ pour $k = 0, 1, 2, 3$. Est-il unique dans $\mathbb{R}_3[x]$? Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $f^{(k)}(1) = 3$. Quelle estimation de $f(x) - p(x)$ a-t-on?

Correction

1. Dans la base de LAGRANGE le polynôme d'interpolation de degré $n = 3$ s'écrit

$$\begin{aligned} P(x) &= y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} \\ &\quad + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + y_3 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \\ &= 3 \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)} + 2 \frac{x(x-2)(x-3)}{(1-0)(1-2)(1-3)} \\ &\quad + 4 \frac{x(x-1)(x-3)}{(2-0)(2-1)(2-3)} - 2 \frac{x(x-1)(x-2)}{(3-0)(3-1)(3-2)} \\ &= 3 - \frac{37}{6}x + 7x^2 - \frac{11}{6}x^3. \end{aligned}$$

2. $p(x) = x + 2$: en effet, on voit que les points sont alignés le long de la droite d'équation $y = x + 2$.
3. $p \in \mathbb{R}_4[x]$ et interpole les points $(0, 2), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)$ donc $p(0) = 2, p(1) = 1, p(2) = 2, p(3) = 3$ et $p(4) = 4$.
- Première méthode. On cherche le polynôme $q \in \mathbb{R}_4[x]$ tel que $q(x) = p(x) - x$, autrement dit le polynôme $q \in \mathbb{R}_4[x]$ qui interpole les points $(0, 2-0), (1, 1-1), (2, 2-2), (3, 3-3), (4, 4-4)$. Donc le polynôme q s'annule en $x = 1, x = 2, x = 3$ et $x = 4$, ceci signifie qu'il existe un polynôme R tel que

$$q(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)R(x).$$

Comme $q \in \mathbb{R}_4[x]$ alors R est une constante qu'on peut calculer en imposant $q(0) = 2$ et l'on obtient

$$q(x) = \frac{1}{12}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4).$$

- Deuxième méthode. Notons $x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 4, x_4 = 0$. On considère $\mathcal{N} = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n-1}\}$ une base de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$ telle que $\text{coord}(p, \mathcal{N}) = (y_0, f[x_0, x_1], f[x_0, x_1, x_2], \dots, f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}])$, i.e. $p(x) = \sum_{i=0}^{n-1} f[x_0, \dots, x_i] \omega_i(x)$. La base de NEWTON est définie récursivement comme suit:

$$\omega_0(x) = 0; \quad \omega_1(x) = x - x_0; \quad \text{pour } k = 2, \dots, n \quad \omega_k(x) = \omega_{k-1}(x)(x - x_{k-1}).$$

Le polynôme d'interpolation de degré n sur l'ensemble des $n+1$ points $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n$ dans la base de NEWTON s'écrit

$$\begin{aligned} p_n(x) &= \sum_{i=0}^n \omega_i(x) f[x_0, \dots, x_i] \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \omega_i(x) f[x_0, \dots, x_i] + \omega_4(x) f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] \\ &= p_{n-1}(x) + \omega_4(x) f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] \end{aligned}$$

où p_{n-1} est le polynôme d'interpolation de degré $n-1$ sur l'ensemble des n points $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^{n-1}$.

Dans notre cas, on voit que les points $\{x_0, x_1, x_2, x_3\}$ sont alignés le long de la droite d'équation $y = x$ donc $p_{n-1}(x) = x$ et $q(x) = \omega_4(x) f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$ avec $\omega_4(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$. On doit donc calculer le coefficient $f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$ sachant que $q(0) = 2$, ce qui donne $f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] = 1/12$.

On conclut que

$$p(x) = x + \frac{1}{12}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{5}{6}x^3 + \frac{35}{12}x^2 - \frac{19}{6}x + 2.$$

4. Soit $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ un polynôme de $\mathbb{R}_3[x]$. On cherche les quatre coefficients a_i tels que $p^{(k)}(1) = 3$ pour $k = 0, 1, 2, 3$:

$$\begin{cases} p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3, \\ p'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2, \\ p''(x) = 2a_2 + 6a_3x, \\ p'''(x) = 6a_3, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 3 = p(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3, \\ 3 = p'(1) = a_1 + 2a_2 + 3a_3, \\ 3 = p''(1) = 2a_2 + 6a_3, \\ 3 = p'''(1) = 6a_3, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a_3 = 1/2, \\ a_2 = 0, \\ a_1 = 3/2, \\ a_0 = 1. \end{cases}$$

et ce polynôme est unique.

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $f^{(k)}(1) = 3$. Alors la fonction $g(x) \equiv f(x) - p(x)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $g^{(k)}(1) = 0$ pour $k = 0, 1, 2, 3$ (i.e. $x = 1$ est un zéro de multiplicité 4 pour g). Écrivons le développement de TAYLOR avec le reste de LAGRANGE de g en $x = 1$ à l'ordre 3 :

$$g(x) = \sum_{k=0}^3 \frac{g^{(k)}(1)}{k!} (x-1)^k + \frac{g^{(4)}(\xi)}{4!} (x-1)^4 = \frac{g^{(4)}(\xi)}{4!} (x-1)^4$$

où ξ est entre x et 1. Le polynôme p étant de degré 3, on obtient

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} (x-1)^4.$$

Exercice 2.25

Pour calculer le zéro d'une fonction $y = f(x)$ inversible sur un intervalle $[a; b]$ on peut utiliser l'interpolation : après avoir évalué f sur une discrétisation x_i de $[a; b]$, on interpole l'ensemble $\{(y_i, x_i)\}_{i=0}^n$ et on obtient un polynôme $x = p(y)$ tel que

$$f(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = p(0).$$

Utiliser cette méthode pour évaluer l'unique racine α de la fonction $f(x) = e^x - 2$ dans l'intervalle $[0; 1]$ avec trois points d'interpolation.

Correction

Calculons d'abord les valeurs à interpoler

i	x_i	y_i
0	0	-1
1	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{e} - 2$
2	1	$e - 2$

Le polynôme d'interpolation de LAGRANGE de degré n sur l'ensemble des $n + 1$ points $\{(y_i, x_i)\}_{i=0}^n$ s'écrit

$$p_n(y) = \sum_{i=0}^n \left(x_i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{y - y_j}{y_i - y_j} \right).$$

Ici $n = 2$ donc on a

$$\begin{aligned} p(y) &= x_0 \frac{(y - y_1)(y - y_2)}{(y_0 - y_1)(y_0 - y_2)} + x_1 \frac{(y - y_0)(y - y_2)}{(y_1 - y_0)(y_1 - y_2)} + x_2 \frac{(y - y_0)(y - y_1)}{(y_2 - y_0)(y_2 - y_1)} \\ &= \frac{1}{2} \frac{(y + 1)(y - e + 2)}{(\sqrt{e} - 2 + 1)(\sqrt{e} - 2 - e + 2)} + \frac{(y + 1)(y - \sqrt{e} + 2)}{(e - 2 + 1)(e - 2 - \sqrt{e} + 2)}. \end{aligned}$$

Par conséquent une approximation de la racine de f est $p(0) = \frac{1}{2} \frac{-e+2}{(\sqrt{e}-2+1)(\sqrt{e}-2-e+2)} + \frac{-\sqrt{e}+2}{(e-2+1)(e-2-\sqrt{e}+2)} \approx 0.7087486785$.

Remarque : comme il n'y a que trois points d'interpolation, on pourrait calculer directement le polynôme interpolateur de f plutôt que de sa fonction réciproque et chercher les zéros de ce polynôme directement car il s'agit d'un polynôme de degré 2. Cependant cette idée ne peut pas être généralisée au cas de plus de trois points d'interpolation car on ne connaît pas de formule générale pour le calcul des zéros d'un polynôme de degré $n \geq 3$.

Exercice 2.26 (Les limites de l'interpolation linéaire)

Cet exercice vise à montrer les limites de l'interpolation linéaire directe pour des fonctions qui varient rapidement, et à introduire une approche améliorée en utilisant le logarithme de la fonction.

La fonction Gamma, notée $\Gamma(x)$, est une généralisation de la fonction factorielle aux nombres réels et complexes. Pour $x > 0$, elle est définie par l'intégrale

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Pour les entiers positifs n , la fonction Gamma est reliée à la factorielle par la relation suivante

$$\Gamma(n) = (n-1)!.$$

On cherche à approcher la valeur de $\Gamma(10.3)$ en utilisant $\Gamma(10) = 9!$ et $\Gamma(11) = 10!$.

1. **Interpolation linéaire directe:** calculez l'approximation de $\Gamma(10.3)$ en utilisant l'interpolation linéaire sachant que $9! = 362880$ et $10! = 3628800$. Comparez cette approximation avec la valeur exacte $\Gamma(10.3) \approx 716430.69$. Quelle est l'erreur relative dans ce cas?
2. **Interpolation via le logarithme de la fonction Gamma:** appliquez l'interpolation linéaire au logarithme de la fonction Gamma. Sachant que $\log(9!) \approx 12.8018$ et $\log(10!) \approx 15.1044$, effectuez l'interpolation linéaire de $\{(x_i, \ln(\Gamma(x_i)))\}_i$. Comparez cette approximation avec la valeur exacte. Quelle est l'erreur relative dans ce cas?
3. **Propriétés convexes de la fonction Gamma:** la fonction $\log(\Gamma(x))$ est convexe (d'après le théorème de Bohr-Mollerup). Expliquez pourquoi l'interpolation linéaire appliquée à $\log(\Gamma(x))$ donne une approximation supérieure ou égale à la vraie valeur de $\Gamma(x)$.

Source: <https://www.johndcook.com/blog/2024/08/08/interpolating-gamma/>

Correction

1. Interpolation linéaire directe:

$$\Gamma(10.3) \approx 0.7 \times 9! + 0.3 \times 10! = 0.7 \times 362880 + 0.3 \times 3628800 = 1342656.0.$$

Comme $\Gamma(10.3) \approx 716430.69$, le pourcentage d'erreur de cette approximation est 87.41%

2. Interpolation via le logarithme de la fonction Gamma:

$$\log(\Gamma(10.3)) \approx 0.7 \times \ln(9!) + 0.3 \times \ln(10!) = 0.7 \times \ln(362880) + 0.3 \times \ln(3628800) = 13.492603007979682$$

d'où

$$\Gamma(10.3) \approx 724040.7888559059$$

Comme $\Gamma(10.3) \approx 716430.69$, le pourcentage d'erreur de cette approximation est 1.06%

3. **Propriétés convexes de la fonction Gamma:** le théorème de Bohr-Mollerup affirme que la fonction $\ln(\Gamma(x))$ est convexe pour $x > 0$. Cela signifie que la courbe de $\ln(\Gamma(x))$ est toujours au-dessus de toute droite joignant deux points de la courbe. Lorsque l'on applique l'interpolation linéaire à $\ln(\Gamma(x))$, on obtient une droite reliant $\ln(\Gamma(10))$ et $\ln(\Gamma(11))$. En raison de la convexité de $\ln(\Gamma(x))$, cette droite se trouve toujours au-dessus de la vraie courbe de $\ln(\Gamma(x))$, sauf aux points d'interpolation eux-mêmes (10 et 11). Cela garantit que l'interpolation linéaire de $\ln(\Gamma(x))$ fournit une approximation qui est une borne supérieure de la vraie valeur. En prenant l'exponentielle de l'approximation obtenue par interpolation de $\ln(\Gamma(x))$, on obtient une approximation de $\Gamma(x)$ qui est également supérieure à la valeur exacte de $\Gamma(x)$. Ainsi, l'interpolation linéaire de $\ln(\Gamma(x))$ donne non seulement une approximation plus précise que l'interpolation directe de $\Gamma(x)$, mais fournit également une borne supérieure à $\Gamma(10.3)$.

2.3.3. Interpolation trigonométrique

Exercice 2.27

Considérons la fonction $f: [0; 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x(x - 2\pi)e^{-x}$. Calculer $\tilde{f}(x)$ lorsque $n = 9$ et comparer graphiquement les fonctions f et $\tilde{f}$.

Correction

On commence par définir la fonction f et calculer les valeurs de f aux nœuds $x_j = j\pi/5$, $j = 0, \dots, 9$ à l'aide des instructions suivantes

```
import numpy as np

f = lambda x : x * (x - 2 * np.pi) * np.exp(-x)

# Points d'interpolation
n = 9 # n+1 points
Px = 2 * np.pi / (n + 1) * np.arange(n + 1)
```

```
Py = f(Px)
```

On calcule alors le vecteur des coefficients de FOURIER :

```
if n % 2 == 0:
    M = n // 2
    mu = 0
else:
    M = (n - 1) // 2
    mu = 1

c = np.zeros(2 * M + mu + 1, dtype=complex) # Initialiser le tableau des
    ↪ coefficients

# Calcul des coefficients de Fourier
for k in range(-M - mu, M + 1):
    index = k + M + mu # Shift index to avoid negative or zero indices
    c[index] = 1 / (n + 1) * np.sum(f(Px) * np.exp(-1j * k * Px))
```

On peut comparer notre calcul avec celui effectué par Numpy grâce à la FFT et vérifier que la norme de l'erreur est nulle :

```
# Calcul des coefficients de Fourier avec fft
C = np.fft.fftshift(np.fft.fft(f(Px))) / (n + 1)

# Calcul de la norme de la différence entre les deux jeux de coefficients
norm_diff = np.linalg.norm(c - C)

print("Coefficients de Fourier calculés manuellement :", c)
print("Coefficients de Fourier calculés avec fft :", C)
print("Norme de la différence :", norm_diff)
```

```
Coefficients de Fourier calculés manuellement : [ 0.08700969-3.94939161e-18j
    ↪ 0.09258466-2.13981536e-02j
    0.10984941-6.00797260e-02j  0.12680548-1.62109852e-01j
    -0.04672819-4.20011892e-01j -0.65203241+0.00000000e+00j
    -0.04672819+4.20011892e-01j  0.12680548+1.62109852e-01j
    0.10984941+6.00797260e-02j  0.09258466+2.13981536e-02j]
Coefficients de Fourier calculés avec fft : [ 0.08700969+0.j          0.09258466-0.02139815j
    ↪ 0.10984941-0.06007973j
    0.12680548-0.16210985j -0.04672819-0.42001189j -0.65203241+0.j
    -0.04672819+0.42001189j  0.12680548+0.16210985j  0.10984941+0.06007973j
    0.09258466+0.02139815j]
Norme de la différence : 1.75242991822e-16
```

Pour comparer graphiquement f et son interpolée, on doit calculer f et $\tilde{f}$ sur $[0; 2\pi]$ en S points :

```
import matplotlib.pyplot as plt

# Nombre de points pour l'évaluation
S = 100
x = 2 * np.pi / S * np.arange(S)

# Valeur exacte de la fonction
fx = f(x)
```

```

# ?????????????????
# tilde_f calculée par interpft (équivalent en Python)
z = np.fft.fftshift(np.fft.ifft(np.fft.fftshift(Py), S)).real

# tilde_f calculée par notre formule
ftildex = np.zeros(S, dtype=complex)
for s in range(S):
    ftildex[s] = np.sum(c * np.exp(1j * np.arange(-M - mu, M + 1) * x[s]))

# Afficher les résultats
plt.plot(x, fx, 'r-', linewidth=2, label='Exact $f(x)$')
plt.plot(x, ftildex.real, 'b:', linewidth=2, label='$\\tilde{f}(x)$ par notre
    - formule')
plt.plot(x, z, 'm.', linewidth=2, label='$\\tilde{f}(x)$ par interpft')
plt.plot(Px, Py, 'o', label='Points d\'interpolation')
plt.xlabel('$x$')
plt.ylabel('$y$')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()

```

TO DO: il est intéressant de vérifier numériquement qu'en augmentant n l'approximation $\tilde{f}$ converge vers f tandis qu'avec l'interpolation polynomiale ceci n'est pas vrai.

Approximation au sens des moindres carrés

Nous avons déjà observé que, lorsque n est grand, le polynôme d'interpolation de $\mathbb{R}_n[x]$ ne fournit pas toujours une bonne approximation d'une fonction donnée. De plus, si les données sont entachées d'erreurs de mesure, l'interpolation peut devenir instable. Une première solution consiste à recourir à l'interpolation composite (par morceaux linéaires, ou encore à l'aide de splines). Toutefois, ces méthodes ne sont pas adaptées à l'extrapolation, c'est-à-dire à la prédiction de nouvelles valeurs en dehors de l'intervalle contenant les nœuds d'interpolation.

Pour répondre à cette difficulté, nous introduisons la méthode des moindres carrés.

On associe à chaque donnée (x_i, y_i) un point du plan, de sorte qu'un échantillon de $n + 1$ données corresponde à un nuage de $n + 1$ points. Si par exemple ce nuage présente une forme globalement allongée, il est naturel d'essayer de tracer une droite «passant au milieu» des points. Cette droite, appelée *droite de régression linéaire*, fournit une représentation simple de la dépendance linéaire entre les deux variables.

La méthode des moindres carrés permet de déterminer rigoureusement la «meilleure» droite ajustant ce nuage de points, au sens d'une minimisation d'erreur. Cette idée s'étend naturellement au cas d'une approximation par des polynômes, et plus généralement par des fonctions appartenant à un espace vectoriel adapté.

Dans l'ensemble de ce chapitre, nous considérerons un nuage de $n + 1$ points $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^n$.

Dans ce chapitre

3.1	<i>Fitting</i> par une relation affine	131
3.1.1	<i>Fitting</i> linéaire après transformations	135
3.2	<i>Fitting</i> polynomiale	137
3.3	<i>Fitting</i> dans un espace vectoriel quelconque	140
3.4	Résumé	143
3.5	Exercices	149

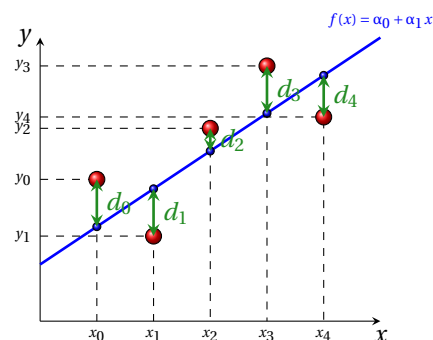
3.1. *Fitting* par une relation affine

Supposons que deux grandeurs x et y sont approximativement liées par une relation affine, c'est-à-dire $y \approx \alpha_0 + \alpha_1 x$. Autrement dit, lorsque les données sont représentées dans un plan cartésien, les points ne sont pas exactement alignés mais semblent se répartir autour d'une droite, avec des écarts dus à des erreurs de mesure ou à des fluctuations expérimentales.

Nous cherchons alors à déterminer les coefficients α_0 et α_1 de sorte que la droite d'équation $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x$ s'ajuste *au mieux* aux points observés. Par « ajuster au mieux », on entend minimiser la somme des carrés des écarts verticaux entre les points (x_i, y_i) et la droite $f(x)$. Pour formaliser cela, introduisons

$$d_i(\alpha_0, \alpha_1) \stackrel{\text{def}}{=} y_i - (\alpha_0 + \alpha_1 x_i),$$

c'est-à-dire l'écart vertical du point (x_i, y_i) à la droite d'équation $f(x)$.



La méthode des moindres carrés consiste donc à choisir α_0 et α_1 de façon à rendre minimale la somme des carrés de ces écarts. On définit ainsi la **fonction d'erreur quadratique** :

$$\mathcal{E}(\alpha_0, \alpha_1) = \sum_{i=0}^n d_i^2(\alpha_0, \alpha_1) = \sum_{i=0}^n \left(y_i - (\alpha_0 + \alpha_1 x_i) \right)^2.$$

On remarque que $\mathcal{E}(\alpha_0, \alpha_1) \geq 0$ pour tout $(\alpha_0, \alpha_1) \in \mathbb{R}^2$.

- Si tous les points sont parfaitement alignés, il existe (α_0, α_1) tel que $\mathcal{E}(\alpha_0, \alpha_1) = 0$ (cas d'une interpolation).
- Dans le cas général, on cherche les paramètres qui rendent $\mathcal{E}$ aussi petit que possible.

Le problème se ramène donc à la minimisation d'une fonction de deux variables. Pour identifier le minimum, on calcule le gradient de $\mathcal{E}$ et on cherche les points stationnaires, c'est-à-dire les couples (α_0, α_1) vérifiant

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \alpha_0} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \alpha_1} = 0.$$

EXEMPLE

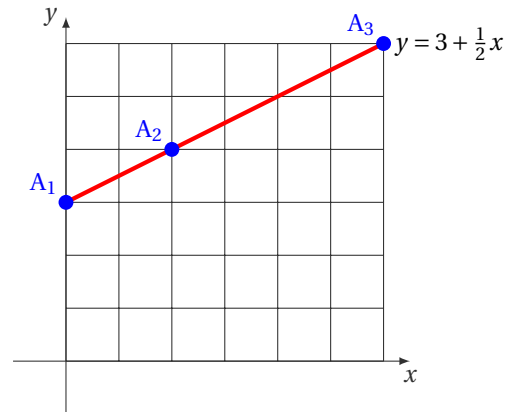
Considérons d'abord les trois points $A_1 = (0, 3)$, $A_2 = (2, 4)$ et $A_3 = (6, 6)$. La fonction $\mathcal{E}(\alpha_0, \alpha_1)$ s'écrit

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\alpha_0, \alpha_1) &= (3 - \alpha_0)^2 + (4 - (\alpha_0 + 2\alpha_1))^2 + (6 - (\alpha_0 + 6\alpha_1))^2 \\ &= 40\alpha_1^2 + 16\alpha_1\alpha_0 - 88\alpha_1 + 3\alpha_0^2 - 26\alpha_0 + 61. \end{aligned}$$

On en déduit

$$\nabla \mathcal{E}(\alpha_0, \alpha_1) = \begin{pmatrix} 16\alpha_1 + 6\alpha_0 - 26 \\ 80\alpha_1 + 16\alpha_0 - 88 \end{pmatrix}.$$

La condition $\nabla \mathcal{E}(\alpha_0, \alpha_1) = \mathbf{0}$ donne $\alpha_1 = \frac{1}{2}$ et $\alpha_0 = 3$. De plus, $\mathcal{E}(3, \frac{1}{2}) = 0$, ce qui signifie que les trois points sont parfaitement alignés : on a retrouvé la droite d'interpolation.



EXEMPLE

Considérons maintenant les 5 points

$$A_1 = (4, 1), \quad A_2 = (7, 3), \quad A_3 = (8, 3), \quad A_4 = (10, 6), \quad A_5 = (12, 7).$$

Ces points sont approximativement alignés. On cherche la droite de meilleure approximation $y = \alpha_0 + \alpha_1 x$. Quelle ordonnée peut-on extrapoler pour le point d'abscisse $x = 6$?

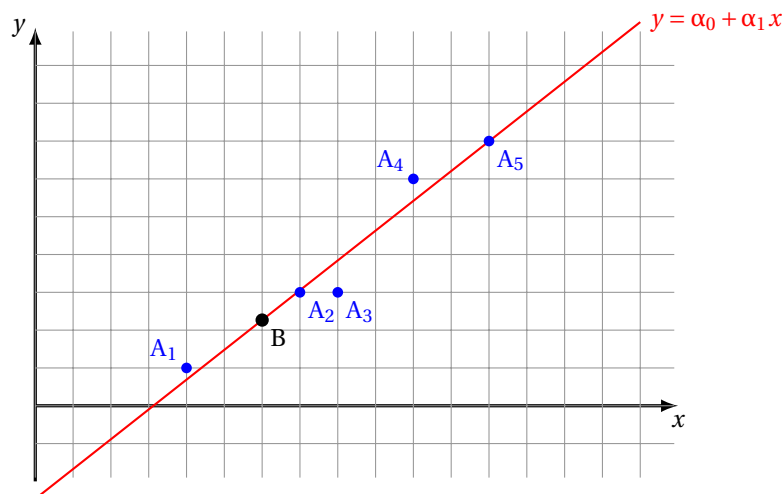
En minimisant $\mathcal{E}$, on obtient

$$\nabla \mathcal{E}(\alpha_0, \alpha_1) = \begin{pmatrix} 82\alpha_1 + 10\alpha_0 - 40 \\ 746\alpha_1 + 82\alpha_0 - 386 \end{pmatrix}.$$

La condition $\nabla \mathcal{E} = \mathbf{0}$ donne $\alpha_1 = \frac{145}{184} \approx 0.788$ et $\alpha_0 = -\frac{453}{184} \approx -2.462$.

Comme $\mathcal{E}(-\frac{453}{184}, \frac{145}{184}) = \frac{211}{184} > 0$, les points ne sont pas parfaitement alignés. Pour extrapoler à $x = 6$ (le point B de la figure ci-dessus), on obtient

$$y = \alpha_0 + 6\alpha_1 = \frac{417}{184} \approx 2.27.$$



De façon générale, on cherche à déterminer la droite $y = \alpha_0 + \alpha_1 x$ minimisant l'erreur quadratique $\mathcal{E}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par

$$\mathcal{E}(\alpha_0, \alpha_1) = \sum_{i=0}^n (y_i - (\alpha_0 + \alpha_1 x_i))^2$$

Un calcul direct donne

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \alpha_0}(\alpha_0, \alpha_1) = -2 \left(\sum_{i=0}^n (y_i - \alpha_0 - \alpha_1 x_i) \right), \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \alpha_1}(\alpha_0, \alpha_1) = -2 \left(\sum_{i=0}^n x_i (y_i - \alpha_0 - \alpha_1 x_i) \right).$$

Les conditions du minimum s'écrivent alors

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \alpha_0}(\alpha_0, \alpha_1) = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \alpha_1}(\alpha_0, \alpha_1) = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} \sum_{i=0}^n (y_i - \alpha_0 - \alpha_1 x_i) = 0, \\ \sum_{i=0}^n x_i (y_i - \alpha_0 - \alpha_1 x_i) = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \sum_{i=0}^n y_i - \alpha_0 \sum_{i=0}^n 1 - \alpha_1 \sum_{i=0}^n x_i = 0, \\ \sum_{i=0}^n x_i y_i - \alpha_0 \sum_{i=0}^n x_i - \alpha_1 \sum_{i=0}^n x_i^2 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} (n+1)\alpha_0 + \left(\sum_{i=0}^n x_i\right)\alpha_1 = \sum_{i=0}^n y_i, \\ \left(\sum_{i=0}^n x_i\right)\alpha_0 + \left(\sum_{i=0}^n x_i^2\right)\alpha_1 = \sum_{i=0}^n y_i x_i \end{cases} &\iff \underbrace{\begin{bmatrix} (n+1) & \sum_{i=0}^n x_i \\ \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 \end{bmatrix}}_{\mathbb{F}} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \sum_{i=0}^n y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i y_i \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} \end{aligned}$$

C'est le **système des moindres carrés**, qui admet une unique solution. Comme $\mathcal{E}$ est convexe, cette solution correspond bien à un minimum. La droite $y = \alpha_0 + \alpha_1 x$ obtenue est appelée *droite de régression de y par rapport à x*.

EXEMPLE

Pour les 5 points $\{(1, 1), (2, 2), (3, 1), (4, 2), (5, 3)\}$, le système est

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} (n+1) & \sum_{i=0}^n x_i \\ \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i y_i \end{pmatrix} \\ \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 4+1 & 1+2+3+4+5 \\ 1^2+2^2+3^2+4^2+5^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1+2+1+2+3 \\ 1 \times 1 + 2 \times 2 + 3 \times 1 + 4 \times 2 + 5 \times 3 \end{pmatrix} \\ &\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 5 & 15 \\ 15 & 55 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 31 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On en déduit $\alpha_0 = \frac{3}{5} = 0.6$ et $\alpha_1 = \frac{2}{5} = 0.4$.

```
import sympy as sp

# Données
xp = [1, 2, 3, 4, 5]
yp = [1, 2, 1, 2, 3]
n = len(xp)

# Système
A = sp.Matrix([[n, sum(xp)], [sum(xp), sum([x ** 2 for x in xp])]])
b = sp.Matrix([sum(yp), sum([x * y for x, y in zip(xp, yp)])])
alpha0, alpha1 = A.inv() * b

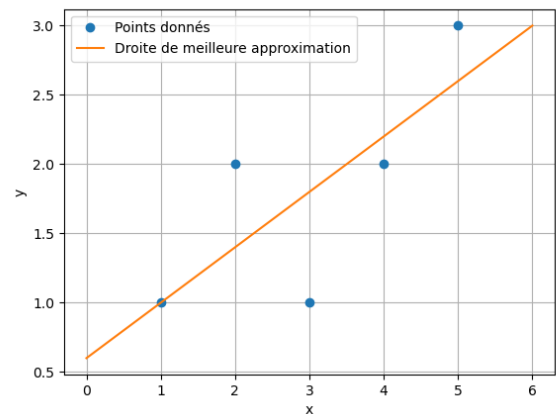
f = lambda t: alpha0 + alpha1 * t
erreur = sum([(y - f(x)) ** 2 for x, y in zip(xp, yp)])

# Affichage
print(f"alpha_0 = {alpha0}")
print(f"alpha_1 = {alpha1}")
print(f"Erreur = {erreur}")

# Graphes
import numpy as np
```

```
import matplotlib.pyplot as plt
xx = np.linspace(0, 6, 100)
yy = [f(t) for t in xx]
plt.figure()
plt.plot(xp, yp, 'o', label='Points donnés')
plt.plot(xx, yy, label='Droite de meilleure approximation')
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.savefig('approximation_lineaire.png')
# plt.show()
```

```
alpha_0 = 3/5
alpha_1 = 2/5
Erreur = 6/5
```



Remarque

Notons que l'élément $(\mathbb{F})_{kj} = \sum_{i=0}^n x_i^{k+j}$ est le produit scalaire du vecteur $\mathbf{x} = (x_0^k, \dots, x_n^k)$ avec le vecteur $\mathbf{x}^j = (x_0^j, \dots, x_n^j)$ et que l'élément $b_k = \sum_{i=0}^n x_i^k y_i$ est le produit scalaire du vecteur $\mathbf{x}^k = (x_0^k, \dots, x_n^k)$ avec le vecteur colonne $\mathbf{y} = (y_0, \dots, y_n)$; on peut alors écrire $\mathbb{F} = \mathbb{A}^T \mathbb{A}$ et $\mathbf{b} = \mathbb{A}^T \mathbf{y}$ avec $(\mathbb{A})_{ik} = x_i^k$ avec $i = 0, \dots, n$ et $k = 0, 1$:

$$\mathbb{A} \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix}}_{(n+1) \times (m+1)}.$$

En effet,

$$\mathbb{A}^T \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_0 & x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n+1 & \sum_{i=0}^n x_i \\ \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 \end{pmatrix} \quad \mathbb{A}^T \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_0 & x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i y_i \end{pmatrix}$$

Remarque

Si l'on divise chaque équation du système par $n+1$, on obtient

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n x_i \\ \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n x_i & \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n y_i \\ \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n x_i y_i \end{bmatrix}.$$

En introduisant les notations classiques de statistique descriptive

- $\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n x_i$ (moyenne de $\mathbf{x} = (x_0, \dots, x_n)$),

- $\bar{y} = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n y_i$ (moyenne de $\mathbf{y} = (y_0, \dots, y_n)$),
- $V(\mathbf{x}) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n (x_i - \bar{x})^2$ (variance de $\mathbf{x}$),
- $C(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$ (covariance de $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$),

le système devient

$$\begin{bmatrix} 1 & \bar{x} \\ \bar{x} & V(\mathbf{x}) + (\bar{x})^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{y} \\ C(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \bar{x}\bar{y} \end{bmatrix}.$$

La résolution conduit aux formules explicites :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{C(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{V(\mathbf{x})}, & \text{coefficient directeur (pente),} \\ \alpha_0 &= \bar{y} - \alpha_1 \bar{x}, & \text{ordonnée à l'origine.} \end{aligned}$$

Ainsi, la droite de régression s'écrit

$$y = \alpha_1 (x - \bar{x}) + \bar{y},$$

et elle passe toujours par le *point moyen* $(\bar{x}, \bar{y})$.

Remarque

L'expression $\alpha_1 = \frac{C(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{V(\mathbf{x})}$ peut être sujette à des erreurs d'arrondi (*roundoff*) lorsque $C(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ et $V(\mathbf{x})$ sont très petits. On préfère alors la formule numériquement plus stable :

$$\alpha_1 = \frac{\sum_{i=0}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=0}^n (x_i - \bar{x})^2}.$$

3.1.1. Fitting linéaire après transformations

Même si la relation entre deux quantités n'est pas linéaire, il est parfois possible d'appliquer une transformation pour trouver une relation linéaire.

Fitting linéaire après transformation d'un exponentiel Soit $a > 0$ et considérons la fonction $f(x) = ae^{kx}$: elle est non-linéaire mais si on prend son logarithme on obtient $\ln(f(x)) = \ln(a) + kx$ qui est linéaire et a la forme $\alpha_0 + \alpha_1 x$ avec $\alpha_1 = k$ et $\alpha_0 = \ln(a)$. On peut alors calculer l'équation de la droite de régression sur l'ensemble $\{(x_i, \ln(y_i))\}_{i=0}^n$ et obtenir ainsi k et $\ln(a)$.¹

Fitting linéaire après transformation d'une puissance Soit $a > 0$ et considérons la fonction $f(x) = ax^k$: elle est non-linéaire mais si on prend son logarithme on obtient $\ln(f(x)) = \ln(a) + k \ln(x)$ qui est linéaire et a la forme $\alpha_0 + \alpha_1 x$ avec $\alpha_1 = k$ et $\alpha_0 = \ln(a)$. On peut alors calculer l'équation de la droite de régression sur l'ensemble $\{(\ln(x_i), \ln(y_i))\}_{i=0}^n$ et obtenir ainsi k et $\ln(a)$.² On verra dans la prochaine section comment travailler directement avec la fonction polynomiale f .

EXEMPLE (FITTING LINÉAIRE APRÈS TRANSFORMATION)

On mesure plusieurs fois la pression P et le volume V d'un gaz de masse donnée. On obtient ainsi $n+1$ mesures $\{P_i, V_i\}_{i=0}^n$. Selon la thermodynamique, ces quantités sont liées par une relation du type $PV^\gamma = C$ où γ et C sont deux constantes à calculer. On a $\ln(PV^\gamma) = \ln(C)$ ainsi $\ln(P) + \gamma \ln(V) = \ln(C)$. Si on pose $x = \ln(V)$ et $y = \ln(P)$, on a une relation de la forme $y = \alpha_1 x + \alpha_0$ avec $\alpha_1 = -\gamma$ et $\alpha_0 = \ln(C)$. On peut alors calculer l'équation de la droite de régression sur l'ensemble $\{(\ln(V_i), \ln(P_i))\}_{i=0}^n$ et obtenir ainsi $\gamma = -\alpha_1$ et $C = e^{\alpha_0}$.

EXEMPLE

Soit les 5 points $\{(1, 1), (2, 2), (3, 1), (4, 2), (5, 3)\}$ (donc $n = 4$). On cherche la fonction de meilleure approximation de la forme $y = Ae^{Bx}$. Si on calcule le logarithme de cette fonction on trouve $\ln(y) = \ln(A) + Bx$. On peut alors calculer la droite de meilleur approximation sur l'ensemble $\{(1, \ln(1)), (2, \ln(2)), (3, \ln(1)), (4, \ln(2)), (5, \ln(3))\}$ et obtenir ainsi B et $\ln(A)$. Notons $\alpha_0 = \ln(A)$ et $\alpha_1 = B$, il s'agit de chercher α_0 et α_1 solution du système linéaire

1. Ceci n'est pas équivalent à faire un fitting sur l'ensemble initial $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^n$. En effet, si on note $d_i = y_i - ae^{kx_i}$ et $D_i = \ln(y_i) - (kx_i + \ln(a))$, lorsqu'on calcule la droite de régression sur l'ensemble $\{(x_i, \ln(y_i))\}_{i=0}^n$ on minimise D_i et non d_i .

2. À nouveau, ceci n'est pas équivalent à faire un fitting sur l'ensemble initial $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^n$. En effet, si on note $d_i = y_i - ax_i^k$ et $D_i = \ln(y_i) - (k \ln(x_i) + \ln(a))$, lorsqu'on calcule la droite de régression sur l'ensemble $\{(\ln(x_i), \ln(y_i))\}_{i=0}^n$ on minimise D_i et non d_i .

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} (n+1) & \sum_{i=0}^n x_i \\ \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n \ln(y_i) \\ \sum_{i=0}^n x_i \ln(y_i) \end{pmatrix} \\
\Rightarrow \begin{pmatrix} 4+1 & 1+2+3+4+5 \\ 1+2+3+4+5 & 1^2+2^2+3^2+4^2+5^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \ln(1) + \ln(2) + \ln(1) + \ln(2) + \ln(3) \\ 1 \times \ln(1) + 2 \times \ln(2) + 3 \times \ln(1) + 4 \times \ln(2) + 5 \times \ln(3) \end{pmatrix} \\
&\Rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 15 \\ 15 & 55 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\ln(2) + \ln(3) \\ 6\ln(2) + 5\ln(3) \end{pmatrix} \\
&\Rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 15 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\ln(2) + \ln(3) \\ 2\ln(3) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Donc $\alpha_1 = \frac{\ln(3)}{5}$ et $\alpha_0 = \frac{\ln(4) - \ln(9)}{5}$ et enfin $B = \alpha_1$ et $A = e^{\alpha_0}$.

```

import sympy as sp

# Données
xp = [1, 2, 3, 4, 5]
yp = [1, 2, 1, 2, 3]
log_yp = [sp.log(y) for y in yp]
n = len(xp)

# Système
A = sp.Matrix([[n, sum(xp)], [sum(xp), sum([x ** 2 for x in xp])]])
b = sp.Matrix([sum(log_yp), sum([x * y for x, y in zip(xp, log_yp)])])
alpha0, alpha1 = A.inv() * b
A_val = sp.exp(alpha0)
B_val = alpha1

# Affichage des résultats
print(f"{A = }, {b = }")
print(f"alpha_0 = {alpha0} ainsi A = {A_val}")
print(f"alpha_1 = {alpha1} ainsi B = {B_val}")

# Graphes
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

xx = np.linspace(0, 6, 100)
f = lambda t: float(A_val) * np.exp(float(B_val) * t)
yy = f(xx)

plt.figure()
plt.plot(xp, yp, 'o', label='Points donnés')
plt.plot(xx, yy, label='Courbe de meilleure approximation')
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.savefig('approximation_exp.png')
# plt.show()

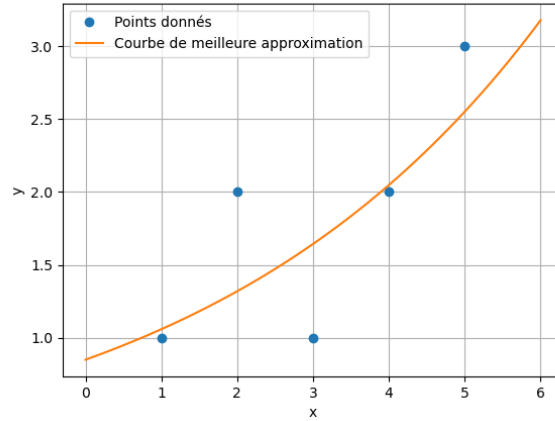
```

```

A = Matrix([
[ 5, 15],
[15, 55]]), b = Matrix([
[ log(3) + 2*log(2)],
[6*log(2) + 5*log(3)]]
alpha_0 = -2*log(3)/5 + 2*log(2)/5 ainsi A = 2**(2/5)*3**(3/5)/3

```

$\alpha_1 = \log(3)/5$ ainsi $B = \log(3)/5$



3.2. Fitting polynomiale

On considère un ensemble de $(n + 1)$ points expérimentaux $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^n$ et on suppose que les deux grandeurs x et y sont liées, au moins approximativement, par une relation polynomiale, c'est-à-dire de la forme

$$y \approx \sum_{j=0}^m a_j x^j,$$

pour certaines constantes a_j .

L'objectif est de déterminer les $m + 1$ coefficients a_j de manière à ce que le polynôme

$$f(x) = \sum_{j=0}^m a_j x^j$$

s'ajuste le mieux possible aux points observés.

Pour chaque i , on définit l'écart vertical entre le point (x_i, y_i) et le polynôme :

$$d_i(a_0, \dots, a_m) = y_i - \sum_{j=0}^m a_j x_i^j.$$

La méthode des moindres carrés consiste à choisir les coefficients a_j qui minimisent la somme des carrés de ces écarts, c'est-à-dire la fonction $\mathcal{E} : \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par

$$\mathcal{E}(a_0, \dots, a_m) = \sum_{i=0}^n (y_i - f(x_i))^2 = \sum_{i=0}^n \left(y_i - \sum_{j=0}^m a_j x_i^j \right)^2 = \sum_{i=0}^n (y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2 - \dots - a_m x_i^m)^2.$$

Pour minimiser $\mathcal{E}$, on calcule ses points stationnaires, c'est-à-dire les solutions de

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a_j}(a_0, \dots, a_m) = 0, \quad j = 0, \dots, m.$$

Un calcul direct donne

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a_j}(a_0, \dots, a_m) = -2 \sum_{i=0}^n x_i^j \left(y_i - \sum_{k=0}^m a_k x_i^k \right) = -2 \sum_{i=0}^n x_i^j (y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2 - \dots - a_m x_i^m), \quad j = 0, \dots, m.$$

Ainsi, les coefficients a_j vérifient le système linéaire $\mathbb{F}\mathbf{a} = \mathbf{b}$ de $(m+1)$ équations en les $(m+1)$ inconnues $a_0, a_1, a_2, \dots, a_m$ suivant

$$\mathbb{F} = \begin{bmatrix} n+1 & \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 & \dots & \sum_{i=0}^n x_i^m \\ \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 & \sum_{i=0}^n x_i^3 & \dots & \sum_{i=0}^n x_i^{m+1} \\ \sum_{i=0}^n x_i^2 & \sum_{i=0}^n x_i^3 & \sum_{i=0}^n x_i^4 & \dots & \sum_{i=0}^n x_i^{m+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=0}^n x_i^m & \sum_{i=0}^n x_i^{m+1} & \sum_{i=0}^n x_i^{m+2} & \dots & \sum_{i=0}^n x_i^{2m} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^n y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i^2 y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^n x_i^m y_i \end{bmatrix}.$$

ATTENTION

Lorsque $m \geq n$, le polynôme de meilleure approximation coïncide avec le polynôme d'interpolation de $\mathbb{R}_n[x]$.

EXEMPLE

Considérons les 5 points $\{(1, 1), (2, 2), (3, 1), (4, 2), (5, 3)\}$ (donc $n = 4$). On cherche la parabole de meilleure approximation $y = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$. Les coefficients $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)^T$ sont solution du système

$$\mathbb{F}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{b},$$

avec

$$\mathbb{F} = \begin{pmatrix} (n+1) & \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 \\ \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 & \sum_{i=0}^n x_i^3 \\ \sum_{i=0}^n x_i^2 & \sum_{i=0}^n x_i^3 & \sum_{i=0}^n x_i^4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i^2 y_i \end{pmatrix}.$$

En explicitant les sommes, on obtient

$$\begin{pmatrix} 4+1 & 1+2+3+4+5 & 1^2+2^2+3^2+4^2+5^2 \\ 1+2+3+4+5 & 1^2+2^2+3^2+4^2+5^2 & 1^3+2^3+3^3+4^3+5^3 \\ 1^2+2^2+3^2+4^2+5^2 & 1^3+2^3+3^3+4^3+5^3 & 1^4+2^4+3^4+4^4+5^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2+1+2+3 \\ 1 \times 1 + 2 \times 2 + 3 \times 1 + 4 \times 2 + 5 \times 3 \\ 1^2 \times 1 + 2^2 \times 2 + 3^2 \times 1 + 4^2 \times 2 + 5^2 \times 3 \end{pmatrix}$$

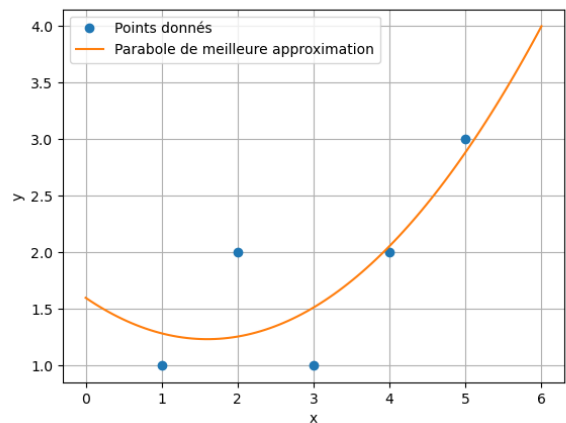
$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 5 & 15 & 55 \\ 15 & 55 & 225 \\ 55 & 225 & 979 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 31 \\ 125 \end{pmatrix}$$

La résolution donne

$$\alpha_0 = \frac{8}{5} = 1.6, \quad \alpha_1 = -\frac{16}{35} \approx -0.457, \quad \alpha_2 = \frac{1}{7} \approx 0.143.$$

Ainsi, la parabole de meilleure approximation est

$$y \approx 1.6 - 0.457x + 0.143x^2.$$



```
import sympy as sp
```

```
# Données
```

```
xp = [1, 2, 3, 4, 5]
```

```
yp = [1, 2, 1, 2, 3]
```

```
n = len(xp)
```

```
# Système
```

```

g = lambda xp, q : sum([x ** q for x in xp])
A = sp.Matrix([[g(xp,0), g(xp,1), g(xp,2)], [g(xp,1), g(xp,2), g(xp,3)],
               [g(xp,2), g(xp,3), g(xp,4)]])
h = lambda xp, yp, q : sum([x ** q * y for x,y in zip(xp,yp)])
b = sp.Matrix([h(xp,yp,0), h(xp,yp,1), h(xp,yp,2)])
alpha0, alpha1, alpha2 = A.inv() * b

# Affichage des résultats
print(f"alpha_0 = {alpha0}")
print(f"alpha_1 = {alpha1}")
print(f"alpha_2 = {alpha2}")

# Graphes
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

xx = np.linspace(0, 6, 100)
f = lambda t: alpha0+alpha1*t+alpha2*t**2
yy = f(xx)

plt.figure()
plt.plot(xp, yp, 'o', label='Points donnés')
plt.plot(xx, yy, label='Parabole de meilleure approximation')
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.savefig('approximation_parabole.png')
# plt.show()

```

```

alpha_0 = 8/5
alpha_1 = -16/35
alpha_2 = 1/7

```

Remarque

On observe que

- les coefficients de $\mathbb{F}$ sont des produits scalaires de vecteurs de la forme $(x_0^k, \dots, x_n^k)$,
- les composantes de $\mathbf{b}$ sont des produits scalaires de ces vecteurs avec $\mathbf{y} = (y_0, \dots, y_n)$.

On peut alors écrire

$$\mathbb{F} = \mathbb{A}^T \mathbb{A}, \quad \mathbf{b} = \mathbb{A}^T \mathbf{y}, \quad \text{où } \mathbb{A} \stackrel{\text{def}}{=} (x_i^k)_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^m \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^m \end{pmatrix}.$$

La matrice $\mathbb{A}$ est une *matrice de Vandermonde tronquée*. Pour $m = n$, on retrouve la matrice de Vandermonde complète et le système est celui de l'interpolation polynomiale.

ATTENTION

Le système des moindres carrés est en général *mal conditionné* : plus le degré m augmente, plus la matrice $\mathbb{F}$ devient sensible aux erreurs numériques. C'est pourquoi, en pratique, on limite l'approximation polynomiale à des degrés modestes (par exemple $m \leq 5$) et l'on préfère recourir à des *polynômes orthogonaux* (Legendre, Chebyshev) qui conduisent à des systèmes mieux conditionnés.

Remarque (Lien avec les moments statistiques)

On remarque que les coefficients de la matrice $\mathbb{F}$ et du vecteur $\mathbf{b}$ sont des *moments empiriques* de la variable x (et du couple (x, y)). Par exemple :

$$M_k(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n x_i^k, \quad M_{k,1}(x, y) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n x_i^k y_i.$$

Ainsi, la matrice $\mathbb{F}$ est essentiellement une matrice de *moments* $(M_{j+k}(x))_{0 \leq j, k \leq m}$ et $\mathbf{b}$ contient les moments mixtes $(M_{j,1}(x, y))_{0 \leq j \leq m}$.

La variance et la covariance utilisées dans le cas affine ($m = 1$) apparaissent alors comme des cas particuliers de ces moments d'ordre 2 et des moments croisés entre x et y .

3.3. Fitting dans un espace vectoriel quelconque

La méthode des moindres carrés ne se limite pas aux polynômes. On peut considérer un espace vectoriel $\mathcal{V}$ engendré par une famille de $m+1$ fonctions indépendantes

$$\{\phi_j, j = 0, \dots, m\}.$$

Par exemple, on peut choisir des fonctions trigonométriques $\phi_j(x) = \cos(jx)$, des fonctions exponentielles $\phi_j(x) = e^{jx}$, etc. Le choix de la famille $\{\phi_j\}$ est généralement guidé par la nature supposée de la relation entre x et y .

Considérons un ensemble de données $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^n$. Nous supposons que y peut être approché par une combinaison linéaire des éléments de cette famille :

$$y(x) \approx \sum_{j=0}^m a_j \phi_j(x),$$

où les coefficients a_j sont à déterminer. Pour chaque i , l'erreur d'approximation est

$$d_i(a_0, \dots, a_m) = y_i - \sum_{j=0}^m a_j \phi_j(x_i).$$

La méthode des moindres carrés consiste à minimiser la fonction $\mathcal{E} : \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par

$$\mathcal{E}(a_0, \dots, a_m) = \sum_{i=0}^n d_i(a_0, \dots, a_m)^2 = \sum_{i=0}^n \left(y_i - \sum_{j=0}^m a_j \phi_j(x_i) \right)^2 = \sum_{i=0}^n (y_i - a_0 \phi_0(x_i) - a_1 \phi_1(x_i) - a_2 \phi_2(x_i) \cdots - a_m \phi_m(x_i))^2.$$

Un point stationnaire de $\mathcal{E}$ satisfait

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a_k} = 0, \quad k = 0, \dots, m.$$

Puisque

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a_0}(a_0, a_1, \dots, a_m) &= -2 \sum_{i=0}^n \left(\phi_0(x_i) \left(y_i - \sum_{j=0}^m a_j \phi_j(x_i) \right) \right) = -2 \sum_{i=0}^n (\phi_0(x_i) (y_i - a_0 \phi_0(x_i) - a_1 \phi_1(x_i) - a_2 \phi_2(x_i) \cdots - a_m \phi_m(x_i))), \\ \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a_1}(a_0, a_1, \dots, a_m) &= -2 \sum_{i=0}^n \left(\phi_1(x_i) \left(y_i - \sum_{j=0}^m a_j \phi_j(x_i) \right) \right) = -2 \sum_{i=0}^n (\phi_1(x_i) (y_i - a_0 \phi_0(x_i) - a_1 \phi_1(x_i) - a_2 \phi_2(x_i) \cdots - a_m \phi_m(x_i))), \\ &\vdots \\ \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a_m}(a_0, a_1, \dots, a_m) &= -2 \sum_{i=0}^n \left(\phi_m(x_i) \left(y_i - \sum_{j=0}^m a_j \phi_j(x_i) \right) \right) = -2 \sum_{i=0}^n (\phi_m(x_i) (y_i - a_0 \phi_0(x_i) - a_1 \phi_1(x_i) - a_2 \phi_2(x_i) \cdots - a_m \phi_m(x_i))), \end{aligned}$$

on obtient alors le système linéaire de $(m+1)$ équations en les $(m+1)$ inconnues $a_0, a_1, \dots, a_m$ suivant

$$\sum_{j=0}^m a_j \underbrace{\left(\sum_{i=0}^n \phi_k(x_i) \phi_j(x_i) \right)}_{\Phi_{kj}} = \sum_{i=0}^n \phi_k(x_i) y_i, \quad k = 0, \dots, m.$$

Autrement dit

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \Phi_{00} & \Phi_{01} & \dots & \Phi_{0m} \\ \Phi_{01} & \Phi_{11} & \dots & \Phi_{1m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Phi_{0m} & \Phi_{1m} & \dots & \Phi_{mm} \end{pmatrix}}_{\mathbb{F}} \underbrace{\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}}_{\mathbf{a}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n \Phi_0(x_i) y_i \\ \sum_{i=0}^n \Phi_1(x_i) y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^n \Phi_m(x_i) y_i \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}}.$$

On retrouve le cas polynômial pour $\phi_j(x) = x^j$, puisque alors $\Phi_{kj} = \sum_{i=0}^n x_i^{k+j}$.

Remarque

La matrice $\mathbb{F}$ est en fait une *matrice de Gram* associée au produit scalaire discret

$$\langle f, g \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^n f(x_i) g(x_i).$$

Ainsi $\Phi_{kj} = \langle \phi_k, \phi_j \rangle$ et $\mathbf{b}_j = \langle y, \phi_j \rangle$.

En particulier, si la famille $(\phi_j)_{j=0}^m$ est *orthogonale* pour ce produit scalaire, alors le système $\mathbb{F}\mathbf{a} = \mathbf{b}$ est diagonal et les coefficients se calculent indépendamment :

$$a_j = \frac{\langle y, \phi_j \rangle}{\langle \phi_j, \phi_j \rangle}, \quad j = 0, \dots, m.$$

C'est notamment le cas pour les fonctions trigonométriques

$$\phi_0(x) = 1, \quad \phi_{2k-1}(x) = \cos(kx), \quad \phi_{2k}(x) = \sin(kx),$$

qui conduisent au développement en série de Fourier discrète.

EXEMPLE

Considérons les 5 points

$$\left\{ (0, 1), \left(\frac{\pi}{2}, 2\right), (\pi, 1), \left(\frac{3\pi}{2}, 2\right), (2\pi, 3) \right\}.$$

On cherche la meilleure approximation dans l'espace engendré par

$$\{\phi_0(x) = 1, \phi_1(x) = \cos(x)\},$$

c'est-à-dire de la forme

$$y(x) = \alpha_0 + \alpha_1 \cos(x).$$

Le système s'écrit

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n \phi_0(x_i) \phi_0(x_i) & \sum_{i=0}^n \phi_0(x_i) \phi_1(x_i) \\ \sum_{i=0}^n \phi_1(x_i) \phi_0(x_i) & \sum_{i=0}^n \phi_1(x_i) \phi_1(x_i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n \phi_0(x_i) y_i \\ \sum_{i=0}^n \phi_1(x_i) y_i \end{pmatrix}.$$

En remplaçant $\phi_0(x) = 1$ et $\phi_1(x) = \cos(x)$:

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n 1 & \sum_{i=0}^n \cos(x_i) \\ \sum_{i=0}^n \cos(x_i) & \sum_{i=0}^n \cos^2(x_i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n y_i \\ \sum_{i=0}^n \cos(x_i) y_i \end{pmatrix}.$$

Or, pour les $x_i = \{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\}$ on a

$$\cos(x_i) = \{1, 0, -1, 0, 1\}, \quad \cos^2(x_i) = \{1, 0, 1, 0, 1\},$$

ainsi

$$\sum_{i=0}^n 1 = 5, \quad \sum_{i=0}^n \cos(x_i) = 1, \quad \sum_{i=0}^n \cos^2(x_i) = 3,$$

et

$$\sum_{i=0}^n y_i = 9, \quad \sum_{i=0}^n \cos(x_i) y_i = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 3.$$

On obtient donc

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

La résolution donne

$$\alpha_0 = \frac{12}{7}, \quad \alpha_1 = \frac{3}{7}.$$

```

import sympy as sp

# Données
xp = [0, sp.pi/2, sp.pi, sp.pi*3/2, 2*sp.pi]
yp = [1,      2,      1,      2,      3]
n = len(xp)

# Base
Phi = [lambda x : 1, lambda x : sp.cos(x)]

# Système
g = lambda xp, i,j: sum([Phi[i](x) * Phi[j](x) for x in xp])
A = sp.Matrix([[g(xp,0,0), g(xp,0,1)], [g(xp,1,0), g(xp,1,1)]])
h = lambda xp, yp, i : sum([Phi[i](x) * y for x, y in zip(xp, yp)])
b = sp.Matrix([h(xp, yp, 0), h(xp, yp, 1)])
alpha0, alpha1 = A.inv() * b

# Affichage des résultats
print(f"alpha_0 = {alpha0}")
print(f"alpha_1 = {alpha1}")

# Graphes
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

xx = np.linspace(0, 2*np.pi, 100)
# Base
Phi = [lambda x : 1, lambda x : np.cos(x)]
f = lambda t: alpha0*Phi[0](t)+alpha1*Phi[1](t)
yy = f(xx)

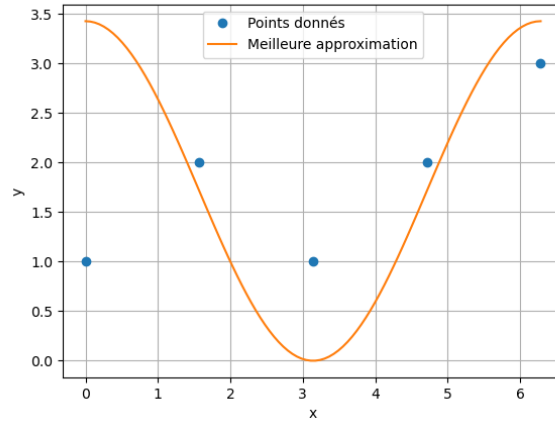
plt.figure()
plt.plot(xp, yp, 'o', label='Points donnés')
plt.plot(xx, yy, label='Meilleure approximation')
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.savefig('approximation_cos.png')
# plt.show()

```

```

alpha_0 = 12/7
alpha_1 = 3/7

```



Remarque

Notons que l'élément Φ_{kj} n'est rien d'autre que le produit scalaire discret du vecteur

$$(\phi_k(x_0), \phi_k(x_1), \dots, \phi_k(x_n))$$

avec le vecteur

$$(\phi_j(x_0), \phi_j(x_1), \dots, \phi_j(x_n)).$$

De même, l'élément $b_k = \sum_{i=0}^n \phi_k(x_i) y_i$ est le produit scalaire du vecteur

$$(\phi_k(x_0), \phi_k(x_1), \dots, \phi_k(x_n))$$

avec le vecteur colonne $\mathbf{y} = (y_0, y_1, \dots, y_n)^T$.

On peut alors écrire de manière compacte

$$\mathbb{F} = \mathbb{A}^T \mathbb{A}, \quad \mathbf{b} = \mathbb{A}^T \mathbf{y},$$

où la matrice rectangulaire $(n+1) \times (m+1)$ est définie par

$$\mathbb{A} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \phi_0(x_0) & \phi_1(x_0) & \dots & \phi_m(x_0) \\ \phi_0(x_1) & \phi_1(x_1) & \dots & \phi_m(x_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi_0(x_n) & \phi_1(x_n) & \dots & \phi_m(x_n) \end{pmatrix}.$$

Ainsi, le problème des moindres carrés s'écrit sous forme matricielle comme

$$\min_{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{m+1}} \|\mathbb{A}\mathbf{a} - \mathbf{y}\|_2^2,$$

dont les équations sont

$$\mathbb{A}^T \mathbb{A} \mathbf{a} = \mathbb{A}^T \mathbf{y}.$$

Dans la pratique, il est déconseillé de résoudre directement ces équations (problèmes de conditionnement). On préfère utiliser une factorisation $\mathbb{A} = \mathbb{Q}\mathbb{R}$ (décomposition QR) ou une décomposition en valeurs singulières (SVD), qui sont plus stables numériquement.

Enfin, si $n = m$ et que $\mathbb{A}$ est inversible, le problème se réduit à l'interpolation directe : on résout alors exactement le système carré $\mathbb{A}\mathbf{a} = \mathbf{y}$.

3.4. Résumé

Lorsqu'un chercheur met au point une expérience (parce qu'il soupçonne un lien entre deux grandeurs x et y), il obtient des données sous la forme de points $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^n$, généralement affectées par des erreurs de mesure. En représentant ces données, l'objectif est de trouver une fonction f qui s'ajuste le mieux possible aux points observés.

On note

$$d_i \stackrel{\text{def}}{=} y_i - f(x_i)$$

l'écart vertical du point (x_i, y_i) par rapport à la fonction f . La **méthode des moindres carrés** consiste à chercher f dans un espace vectoriel $\mathcal{V}$ choisi, de sorte que la *somme des carrés des écarts* soit minimale :

$$\min_{f \in \mathcal{V}} \mathcal{E}_f, \quad \mathcal{E}_f = \sum_{i=0}^n (y_i - f(x_i))^2.$$

On suppose que $\mathcal{V}$ est de dimension $m+1$, engendré par les fonctions de base $(\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_m)$. Alors toute fonction $f \in \mathcal{V}$ s'écrit

$$f(x) = \sum_{j=0}^m a_j \phi_j(x),$$

et l'erreur devient

$$\mathcal{E}(a_0, \dots, a_m) = \sum_{i=0}^n \left(y_i - \sum_{j=0}^m a_j \phi_j(x_i) \right)^2.$$

Le gradient de $\mathcal{E}$ s'annule en un vecteur $a = (a_0, \dots, a_m)^T$ qui satisfait le **système** :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n \phi_0(x_i) \phi_0(x_i) & \cdots & \sum_{i=0}^n \phi_0(x_i) \phi_m(x_i) \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{i=0}^n \phi_m(x_i) \phi_0(x_i) & \cdots & \sum_{i=0}^n \phi_m(x_i) \phi_m(x_i) \end{pmatrix}}_{\mathbb{F}} \underbrace{\begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}}_{\mathbf{a}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n \phi_0(x_i) y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^n \phi_m(x_i) y_i \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}}.$$

Notons que, si $n = m$, il s'agit d'une interpolation.

Cas particuliers :

- Si $\phi_j(x) = x^j$, on obtient la **régression polynomiale**.
 - $m = 1$: droite de regression $f = a_0 + a_1 x$. a_0 et a_1 sont alors solution du système linéaire

$$\begin{bmatrix} (n+1) & \sum_{i=0}^n x_i \\ \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^n y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i y_i \end{bmatrix}$$

et la droite passe par le point moyen $(\bar{x}, \bar{y})$.

- $m > 1$: régression polynomiale de degré m , avec matrice $\mathbb{F}_{jk} = \sum_{i=0}^n x_i^{j+k}$.
- Si $\phi_j(x) = e^{jx}$, $\phi_j(x) = \cos(jx)$, ou d'autres choix (ex. $\phi_j(x) = x^{-j}$), on obtient des régressions adaptées à la situation.

EXEMPLE

Considérons l'ensemble de 3 points ($n = 2$)

$$\{(-2, 4), (0, 0), (1, 1)\}.$$

On cherche la fonction de meilleure approximation f dans différents espaces vectoriels.

1. **Régression linéaire polynomiale** ($m = 1$) $f(x) = a_0 + a_1 x$, avec $\phi_j(x) = x^j$ ($j = 0, 1$). Le système est

$$\begin{pmatrix} (n+1) & \sum_{i=0}^n x_i \\ \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n y_i \\ \sum_{i=0}^n y_i x_i \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \end{pmatrix},$$

d'où

$$a_0 = \frac{9}{7}, \quad a_1 = -\frac{8}{7}, \quad f(x) = \frac{9}{7} - \frac{8}{7}x.$$

2. **Régression quadratique polynomiale** ($m = 2$) $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, avec $\phi_j(x) = x^j$ ($j = 0, 1, 2$). Le système est

$$\begin{pmatrix} (n+1) & \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 \\ \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 & \sum_{i=0}^n x_i^3 \\ \sum_{i=0}^n x_i^2 & \sum_{i=0}^n x_i^3 & \sum_{i=0}^n x_i^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n y_i \\ \sum_{i=0}^n y_i x_i \\ \sum_{i=0}^n y_i x_i^2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ -1 & 5 & -7 \\ 5 & -7 & 17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 17 \end{pmatrix}.$$

On trouve $a_0 = a_1 = 0$, $a_2 = 1$, donc $f(x) = x^2$. Ici, l'erreur est nulle car $m = n$, on retrouve exactement le polynôme d'interpolation.

3. **Régression exponentielle** ($m = 1$) $f(x) = a_0 + a_1 e^x$, avec $\phi_j(x) = e^{jx}$ ($j = 0, 1$). On obtient

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n \phi_0(x_i)\phi_0(x_i) & \sum_{i=0}^n \phi_0(x_i)\phi_1(x_i) \\ \sum_{i=0}^n \phi_0(x_i)\phi_1(x_i) & \sum_{i=0}^n \phi_1(x_i)\phi_1(x_i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n \phi_0(x_i)y_i \\ \sum_{i=0}^n \phi_1(x_i)y_i \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 3 & e^{-2} + 1 + e \\ e^{-2} + 1 + e & e^{-4} + 1 + e^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4e^{-2} + e \end{pmatrix}.$$

Numériquement: $a_0 \approx 2.842$, $a_1 \approx -0.915$.

4. **Régression exponentielle quadratique** ($m = 2$) $f(x) = a_0 + a_1 e^x + a_2 e^{2x}$. Le système conduit à

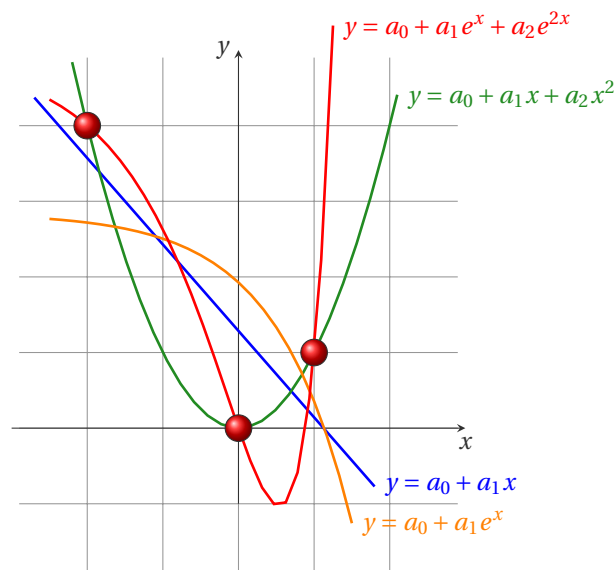
$$\begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n \phi_0(x_i)\phi_0(x_i) & \sum_{i=0}^n \phi_0(x_i)\phi_1(x_i) & \sum_{i=0}^n \phi_0(x_i)\phi_2(x_i) \\ \sum_{i=0}^n \phi_1(x_i)\phi_0(x_i) & \sum_{i=0}^n \phi_1(x_i)\phi_1(x_i) & \sum_{i=0}^n \phi_1(x_i)\phi_2(x_i) \\ \sum_{i=0}^n \phi_2(x_i)\phi_0(x_i) & \sum_{i=0}^n \phi_2(x_i)\phi_1(x_i) & \sum_{i=0}^n \phi_2(x_i)\phi_2(x_i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n \phi_0(x_i)y_i \\ \sum_{i=0}^n \phi_1(x_i)y_i \\ \sum_{i=0}^n \phi_2(x_i)y_i \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 3 & e^{-2} + 1 + e & e^{-4} + 1 + e^2 \\ e^{-2} + 1 + e & e^{-4} + 1 + e^2 & e^{-6} + 1 + e^3 \\ e^{-4} + 1 + e^2 & e^{-6} + 1 + e^3 & e^{-8} + 1 + e^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4e^{-2} + e \\ 4e^{-4} + e^2 \end{pmatrix},$$

soit numériquement

$$a_0 \approx 4.899, \quad a_1 \approx -6.915, \quad a_2 \approx 2.016.$$

Ici, l'erreur est nulle car $m = n$, on retrouve exactement la fonction d'interpolation.



```
import sympy as sp

def exemple(x_data, y_data, m, phi):
    n = len(x_data) # attention ici n = nb de points

    # La fonction dont on cherche les coordonnées dans la base choisie
    # =====

    coeffs = sp.symbols(f'a_0:{m+1}')
    x = sp.symbols('x')
    f = lambda coeffs: sum( coeffs[j] * phi(x, j) for j in range(m+1) )

    # Fonction d'erreur (somme des carrés des écarts)
    # =====
    error = lambda coeffs: sum((y_data[i] - f(coeffs).subs(x, x_data[i]))**2
    ↪   for i in range(n))

    # Calcul des dérivées partielles (pour minimiser l'erreur)
    # =====
    gradient = [sp.diff(error(coeffs), c) for c in coeffs]
```

```

# Résolution du système linéaire
# =====
solution = sp.solve(gradient, coeffs)

# Affichage des résultats en LaTeX
latex_output = f"Les coefficients estimés sont : \n"
latex_output += "\["
for c in coeffs:
    latex_output += f"{c} = {sp.latex(solution[c])} \approx "
    latex_output += f"{solution[c].evalf():.3f} \\\quad "
latex_output += "\]"
print(latex_output)

# Définition des données
x_data = [-2, 0, 1]
y_data = [4, 0, 1]

# (m, phi(x, j))
TESTS = [ (1, lambda x, j : x**j),
          (2, lambda x, j : x**j),
          (1, lambda x, j : sp.exp(j*x)),
          (2, lambda x, j : sp.exp(j*x))]

for i, test in enumerate(TESTS):
    print("Test", i+1)
    exemple(x_data, y_data, test[0], test[1])

```

Test 1 Les coefficients estimés sont:

$$a_0 = \frac{9}{7} \approx 1.286 \quad a_1 = -\frac{8}{7} \approx -1.143$$

Test 2 Les coefficients estimés sont:

$$a_0 = 0 \approx 0.000 \quad a_1 = 0 \approx 0.000 \quad a_2 = 1 \approx 1.000$$

Test 3 Les coefficients estimés sont:

$$a_0 = \frac{-e-1+3e^2+8e^3+3e^4+4e^5}{-2e-2+2e^3+2e^5} \approx 2.842 \quad a_1 = \frac{-7e^3-2e^4-7e^2}{-2e-2+2e^3+2e^5} \approx -0.915$$

Test 4 Les coefficients estimés sont:

$$a_0 = \frac{1+e+4e^5}{-e^3-e^2+1+e^5} \approx 4.899 \quad a_1 = \frac{-4e^4-e^2-1}{-e^3-e+1+e^4} \approx -6.915 \quad a_2 = \frac{e^2+e^3+4e^4}{-e^3-e^2+1+e^5} \approx 2.016$$

EXEMPLE

Considérons l'ensemble de 3 points

$$\{(1, 2), (2, 0), (3, -1)\}, \quad n = 2.$$

On se propose de calculer les fonctions de meilleure approximation avec $f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x}$ et $f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2}$.

1. $f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x}$: cela correspond à $m = 1$ avec $\phi_0(x) = 1$, $\phi_1(x) = \frac{1}{x}$.

On cherche a_0, a_1 qui minimisent

$$\mathcal{E}(a_0, a_1) = \sum_{i=0}^2 \left(y_i - a_0 - a_1 \frac{1}{x_i} \right)^2.$$

Les équations donnent

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n \phi_0(x_i) \phi_0(x_i) & \sum_{i=0}^n \phi_0(x_i) \phi_1(x_i) \\ \sum_{i=0}^n \phi_1(x_i) \phi_0(x_i) & \sum_{i=0}^n \phi_1(x_i) \phi_1(x_i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n \phi_0(x_i) y_i \\ \sum_{i=0}^n \phi_1(x_i) y_i \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \sum 1 & \sum \frac{1}{x_i} \\ \sum \frac{1}{x_i} & \sum \frac{1}{x_i^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum \frac{y_i}{x_i} \end{pmatrix}.$$

En remplaçant par les données :

$$\begin{pmatrix} 3 & \frac{11}{6} \\ \frac{11}{6} & \frac{49}{36} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix}.$$

La solution est

$$a_0 \approx -4.231, \quad a_1 \approx 6.923 \quad \rightsquigarrow \quad f(x) \approx -4.23 + \frac{6.92}{x}.$$

2. $f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2}$: cela correspond à $m = 2$ avec $\phi_0(x) = 1$, $\phi_1(x) = \frac{1}{x}$ et $\phi_2(x) = \frac{1}{x^2}$.

On cherche a_0 , a_1 et a_2 qui minimisent l'erreur quadratique

$$\mathcal{E}(a_0, a_1, a_2) = \sum_{i=0}^2 \left(y_i - a_0 - a_1 \frac{1}{x_i} - a_2 \frac{1}{x_i^2} \right)^2.$$

Cela impose la résolution du système linéaire

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n \phi_0(x_i)\phi_0(x_i) & \sum_{i=0}^n \phi_0(x_i)\phi_1(x_i) & \sum_{i=0}^n \phi_0(x_i)\phi_2(x_i) \\ \sum_{i=0}^n \phi_1(x_i)\phi_0(x_i) & \sum_{i=0}^n \phi_1(x_i)\phi_1(x_i) & \sum_{i=0}^n \phi_1(x_i)\phi_2(x_i) \\ \sum_{i=0}^n \phi_2(x_i)\phi_0(x_i) & \sum_{i=0}^n \phi_2(x_i)\phi_1(x_i) & \sum_{i=0}^n \phi_2(x_i)\phi_2(x_i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n \phi_0(x_i)y_i \\ \sum_{i=0}^n \phi_1(x_i)y_i \\ \sum_{i=0}^n \phi_2(x_i)y_i \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n 1 & \sum_{i=0}^n \frac{1}{x_i} & \sum_{i=0}^n \frac{1}{x_i^2} \\ \sum_{i=0}^n \frac{1}{x_i} & \sum_{i=0}^n \frac{1}{x_i^2} & \sum_{i=0}^n \frac{1}{x_i^3} \\ \sum_{i=0}^n \frac{1}{x_i^2} & \sum_{i=0}^n \frac{1}{x_i^3} & \sum_{i=0}^n \frac{1}{x_i^4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n y_i \\ \sum_{i=0}^n \frac{1}{x_i} y_i \\ \sum_{i=0}^n \frac{1}{x_i^2} y_i \end{pmatrix}$$

En remplaçant par les données :

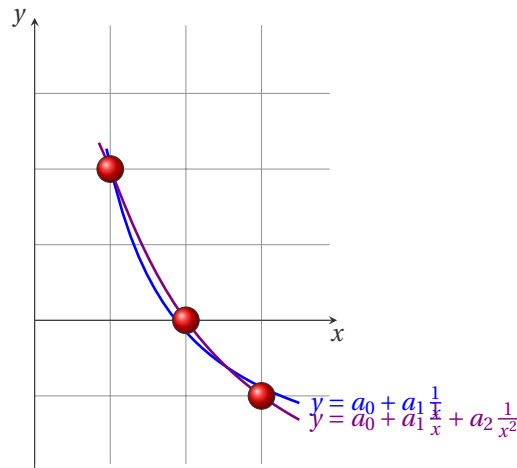
$$\begin{pmatrix} 3 & \frac{11}{6} & \frac{49}{36} \\ \frac{11}{6} & \frac{49}{36} & \frac{251}{1296} \\ \frac{49}{36} & \frac{251}{1296} & \frac{216}{1393} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{5}{3} \\ \frac{17}{9} \end{pmatrix}.$$

Donc

$$a_0 = -\frac{7}{2}, \quad a_1 = \frac{17}{2}, \quad a_2 = -3,$$

i.e. $f(x) = -\frac{7}{2} + \frac{17}{2x} - \frac{3}{x^2}$.

Ici l'erreur est nulle car $m = n$, on retrouve exactement la fonction d'interpolation.



```
import sympy as sp

def exemple(x_data, y_data, m, phi):
    n = len(x_data) # attention ici n = nb de points

    # La fonction dont on cherche les coordonnées dans la base choisie
    # =====

    coeffs = sp.symbols(f'a_0:{m+1}')
```

```

x = sp.symbols('x')
f = lambda coeffs: sum( coeffs[j] * phi(x,j) for j in range(m+1) )

# Fonction d'erreur (somme des carrés des écarts)
# =====
error = lambda coeffs: sum((y_data[i] - f(coeffs).subs(x, x_data[i]))**2
    ↪ for i in range(n))

# Calcul des dérivées partielles (pour minimiser l'erreur)
# =====
gradient = [sp.diff(error(coeffs), c) for c in coeffs]

# Résolution du système linéaire
# =====
solution = sp.solve(gradient, coeffs)

# Affichage des résultats en LaTeX
latex_output = f"Les coefficients estimés sont : \n"
latex_output += "\["
for c in coeffs:
    latex_output += f"{c} = {sp.latex(solution[c])} \\approx "
    ↪ {solution[c].evalf():.3f}\\quad "
latex_output += "\]"
print(latex_output)

# Définition des données
x_data = [1, 2, 3]
y_data = [2, 0, -1]

# (m, phi(x, j))
TESTS = [ (1, lambda x, j : x**(-j)),
          (2, lambda x, j : x**(-j))]

for i, test in enumerate(TESTS):
    print("Test", i+1)
    exemple(x_data, y_data, test[0], test[1])

```

Test 1 Les coefficients estimés sont:

$$a_0 = -\frac{61}{26} \approx -2.346 \quad a_1 = \frac{57}{13} \approx 4.385$$

Test 2 Les coefficients estimés sont:

$$a_0 = -\frac{7}{2} \approx -3.500 \quad a_1 = \frac{17}{2} \approx 8.500 \quad a_2 = -3 \approx -3.000$$

3.5. Exercices

Exercice 3.1 (Fitting trigonométrique)

On considère un ensemble de points expérimentaux $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^n$ et on suppose que les deux grandeurs x et y sont liées, au moins approximativement, par une relation de la forme $y = a \sin(\frac{\pi}{2}x) + b \cos(\frac{\pi}{2}x)$. On souhaite alors trouver les constantes a et b pour que la courbe d'équation $y = a \sin(\frac{\pi}{2}x) + b \cos(\frac{\pi}{2}x)$ s'ajuste le mieux possible aux points observés (on parle de *courbe de meilleure approximation*).

Soit $d_i = y_i - (a \sin(\frac{\pi}{2}x_i) + b \cos(\frac{\pi}{2}x_i))$ l'écart vertical du point (x_i, y_i) par rapport à la courbe. La méthode de régression (ou des moindres carrés) est celle qui choisit a et b de sorte que la somme des carrés de ces déviations soit minimale. Pour cela, on doit minimiser la fonction $\mathcal{E}$ définie par

$$\begin{aligned}\mathcal{E} : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ (a, b) &\mapsto \mathcal{E}(a, b) = \sum_{i=0}^n d_i^2.\end{aligned}$$

Écrire et résoudre le système linéaire qui permet de calculer a et b .

Correction

Pour minimiser $\mathcal{E}$ on cherche ses points stationnaires. Puisque

$$\mathcal{E}(a, b) = \sum_{i=0}^n \left(y_i - \left(a \sin\left(\frac{\pi}{2}x_i\right) + b \cos\left(\frac{\pi}{2}x_i\right) \right) \right)^2$$

calculons tout d'abord les deux dérivées partielles

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a}(a, b) &= -2 \left(\sum_{i=0}^n (y_i - (a \sin(\frac{\pi}{2}x_i) + b \cos(\frac{\pi}{2}x_i))) \sin(\frac{\pi}{2}x_i) \right), \\ \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial b}(a, b) &= -2 \left(\sum_{i=0}^n (y_i - (a \sin(\frac{\pi}{2}x_i) + b \cos(\frac{\pi}{2}x_i))) \cos(\frac{\pi}{2}x_i) \right),\end{aligned}$$

et cherchons quand elles s'annulent en même temps. On obtient

$$\begin{aligned}\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a}(a, b) = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial b}(a, b) = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} \sum_{i=0}^n (y_i - (a \sin(\frac{\pi}{2}x_i) + b \cos(\frac{\pi}{2}x_i))) \sin(\frac{\pi}{2}x_i) = 0 \\ \sum_{i=0}^n (y_i - (a \sin(\frac{\pi}{2}x_i) + b \cos(\frac{\pi}{2}x_i))) \cos(\frac{\pi}{2}x_i) = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \sum_{i=0}^n ((a \sin(\frac{\pi}{2}x_i) + b \cos(\frac{\pi}{2}x_i))) \sin(\frac{\pi}{2}x_i) = \sum_{i=0}^n y_i \sin(\frac{\pi}{2}x_i) \\ \sum_{i=0}^n ((a \sin(\frac{\pi}{2}x_i) + b \cos(\frac{\pi}{2}x_i))) \cos(\frac{\pi}{2}x_i) = \sum_{i=0}^n y_i \cos(\frac{\pi}{2}x_i) \end{cases} \\ &\iff \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^n \sin^2(\frac{\pi}{2}x_i) & \sum_{i=0}^n \sin(\frac{\pi}{2}x_i) \cos(\frac{\pi}{2}x_i) \\ \sum_{i=0}^n \sin(\frac{\pi}{2}x_i) \cos(\frac{\pi}{2}x_i) & \sum_{i=0}^n \cos^2(\frac{\pi}{2}x_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^n y_i \sin(\frac{\pi}{2}x_i) \\ \sum_{i=0}^n y_i \cos(\frac{\pi}{2}x_i) \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Si on note

$$U \equiv \sum_{i=0}^n \sin^2\left(\frac{\pi}{2}x_i\right), \quad V \equiv \sum_{i=0}^n \sin\left(\frac{\pi}{2}x_i\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}x_i\right), \quad W \equiv \sum_{i=0}^n \cos^2\left(\frac{\pi}{2}x_i\right), \quad P \equiv \sum_{i=0}^n y_i \sin\left(\frac{\pi}{2}x_i\right), \quad Q \equiv \sum_{i=0}^n y_i \cos\left(\frac{\pi}{2}x_i\right),$$

on doit résoudre le système linéaire

$$\begin{pmatrix} U & V \\ V & W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$$

dont la solution est

$$a = \frac{WP - VQ}{UW - V^2}, \quad b = \frac{UQ - VP}{UW - V^2}.$$

Exercice 3.2 (Fitting linéaire avec deux variables)

La méthode de régression s'étend facilement à des données qui dépendent de deux ou plusieurs variables. On considère un ensemble de points expérimentaux $\{(x_i, y_i, z_i)\}_{i=0}^n$ et on suppose que les trois grandeurs x , y et z sont liées, au moins approximativement, par une relation affine de la forme $z = a + bx + cy$. On souhaite alors trouver les constantes a , b et c pour que le plan d'équation $z = a + bx + cy$ s'ajuste le mieux possible aux points observés (on parle de *plan de meilleure approximation*).

Soit $d_i = z_i - (a + bx_i + cy_i)$ l'écart vertical du point (x_i, y_i, z_i) par rapport au plan. La méthode de régression (ou des moindres carrés) est celle qui choisit a , b et c de sorte que la somme des carrés de ces déviations soit minimale. Pour cela, on doit minimiser la fonction $\mathcal{E}$ définie par

$$\mathcal{E}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_+$$

$$(a, b, c) \mapsto \mathcal{E}(a, b, c) = \sum_{i=0}^n d_i^2.$$

1. Écrire le système linéaire qui permet de calculer a , b et c
2. Calculer l'équation du plan de meilleure approximation pour l'ensemble $\{(x_i, y_i, z_i)\}_{i=0}^5$ où

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0	0	1	2	2	2
y_i	0	1	0	0	1	2
z_i	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1

On utilisera la méthode du pivot de GAUSS pour la résolution du système linéaire.

Correction

1. Pour minimiser $\mathcal{E}$ on cherche ses points stationnaires. Puisque

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a}(a, b, c) &= -2 \left(\sum_{i=0}^n (z_i - (a + bx_i + cy_i)) \right), \\ \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial b}(a, b, c) &= -2 \left(\sum_{i=0}^n (z_i - (a + bx_i + cy_i)) x_i \right), \\ \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial c}(a, b, c) &= -2 \left(\sum_{i=0}^n (z_i - (a + bx_i + cy_i)) y_i \right), \end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a}(a, b, c) = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial b}(a, b, c) = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial c}(a, b, c) = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} \sum_{i=0}^n (z_i - (a + bx_i + cy_i)) = 0 \\ \sum_{i=0}^n (z_i - (a + bx_i + cy_i)) x_i = 0 \\ \sum_{i=0}^n (z_i - (a + bx_i + cy_i)) y_i = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \sum_{i=0}^n (a + bx_i + cy_i) = \sum_{i=0}^n z_i \\ \sum_{i=0}^n (ax_i + bx_i^2 + cy_i x_i) = \sum_{i=0}^n z_i x_i \\ \sum_{i=0}^n (ay_i + bx_i y_i + cy_i^2) = \sum_{i=0}^n z_i y_i \end{cases} \\ &\iff \begin{pmatrix} (n+1) & \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 & \sum_{i=0}^n x_i y_i \\ \sum_{i=0}^n y_i & \sum_{i=0}^n x_i y_i & \sum_{i=0}^n y_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n z_i \\ \sum_{i=0}^n z_i x_i \\ \sum_{i=0}^n z_i y_i \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2. Dans notre cas,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n x_i &= 7 & \sum_{i=0}^n y_i &= 4 & \sum_{i=0}^n z_i &= \frac{11}{2} \\ \sum_{i=0}^n x_i y_i &= 6 & \sum_{i=0}^n x_i z_i &= \frac{7}{2} & \sum_{i=0}^n y_i z_i &= \frac{9}{2} \\ n+1 &= 6 & \sum_{i=0}^n x_i^2 &= 13 & \sum_{i=0}^n y_i^2 &= 6 \end{aligned}$$

donc on a le système linéaire

$$\begin{pmatrix} 6 & 7 & 4 \\ 7 & 13 & 6 \\ 4 & 6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{2} \\ \frac{7}{2} \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix}$$

qu'on peut résoudre par la méthode de GAUSS

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 7 & 4 & \frac{11}{2} \\ 7 & 13 & 6 & \frac{7}{2} \\ 4 & 6 & 6 & \frac{9}{2} \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{7}{6}L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \frac{2}{3}L_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 7 & 4 & \frac{11}{2} \\ 0 & \frac{29}{6} & \frac{4}{3} & -\frac{35}{12} \\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{10}{3} & \frac{5}{6} \end{array} \right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{8}{29}L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 7 & 4 & \frac{11}{2} \\ 0 & \frac{29}{6} & \frac{4}{3} & -\frac{35}{12} \\ 0 & 0 & \frac{86}{29} & \frac{95}{58} \end{array} \right)$$

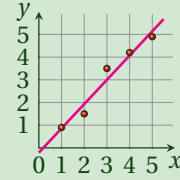
dont la solution est

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{123}{86} \\ -\frac{85}{86} \\ \frac{95}{172} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1.430232557 \\ -0.7558139503 \\ 0.5523255766 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3.3 (Fitting linéaire)

Calculer la droite de meilleur approximation de l'ensemble de points suivant :

x	1	2	3	4	5
y	0.9	1.5	3.5	4.2	4.9



Correction

Nous avons 5 points, ainsi $n = 4$.

Il s'agit de chercher a_0 et a_1 qui minimisent l'erreur $\mathcal{E}(a_0, a_1) = \sum_{i=0}^n (y_i - (a_0 + a_1 x_i))^2$. Cela impose la résolution du système linéaire

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n x_i^0 & \sum_{i=0}^n x_i^1 \\ \sum_{i=0}^n x_i^1 & \sum_{i=0}^n x_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n y_i \\ \sum_{i=0}^n y_i x_i \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 15 \\ 15 & 55 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15.0 \\ 55.7 \end{bmatrix}$$

Donc $a_0 \approx -0.21$ et $a_1 \approx 1.07$.

Exercice 3.4 (Fitting parabolique)

À partir des données

x	1.0	2.5	3.5	4.0	1.1	1.8	2.2	3.7
y	6.008	15.722	27.130	33.772	5.257	9.549	11.098	28.828

on veut calculer la droite et la parabole de régression et comparer les erreurs des chaque régression.

Correction

Nous avons 8 points donc $n = 7$.

1. La droite de régression a équation $y = a_0 + a_1 x$ avec a_0, a_1 solution du système linéaire

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=0}^7 x_i^0 & \sum_{i=0}^7 x_i^1 \\ \sum_{i=0}^7 x_i^1 & \sum_{i=0}^7 x_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^7 y_i \\ \sum_{i=0}^7 y_i x_i \end{pmatrix} \quad i.e. \quad \begin{bmatrix} 8.0 & 19.8 \\ 19.8 & 58.48 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 137.364 \\ 429.4061 \end{bmatrix}$$

et on obtient

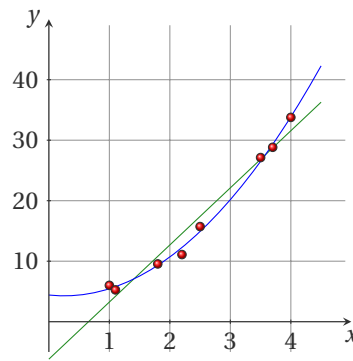
$$\begin{cases} a_0 \approx -6.1899, \\ a_1 \approx 9.43854. \end{cases}$$

2. La parabole de régression a équation $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ avec a_0, a_1, a_2 solution du système linéaire

$$\begin{pmatrix} 8 & \sum_{i=0}^7 x_i & \sum_{i=0}^7 x_i^2 \\ \sum_{i=0}^7 x_i & \sum_{i=0}^7 x_i^2 & \sum_{i=0}^7 x_i^3 \\ \sum_{i=0}^7 x_i^2 & \sum_{i=0}^7 x_i^3 & \sum_{i=0}^7 x_i^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^7 y_i \\ \sum_{i=0}^7 y_i x_i \\ \sum_{i=0}^7 y_i x_i^2 \end{pmatrix} \quad i.e. \quad \begin{bmatrix} 8.0 & 19.8 & 58.48 \\ 19.8 & 58.48 & 191.964 \\ 58.48 & 191.964 & 668.9284 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 137.364 \\ 429.4061 \\ 1462.63437 \end{bmatrix}$$

et on obtient

$$\begin{cases} a_0 \approx 4.40567, \\ a_1 \approx -1.0689, \\ a_2 \approx 2.10812. \end{cases}$$



```
# Définition des données
x_data = [1.0, 2.5, 3.5, 4.0, 1.1, 1.8, 2.2, 3.7]
y_data = [6.008, 15.722, 27.130, 33.772, 5.257, 9.549, 11.098, 28.828]

# Variables pour les coefficients de la droite
alpha_0, alpha_1, alpha_2 = sp.symbols(r'\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2')

# Fonction d'erreur (somme des carrés des écarts)
error = sum((y - (alpha_0 + alpha_1 * x))**2 for x, y in zip(x_data, y_data))

# Calcul des dérivées partielles et égalisation à zéro
grad_alpha_0 = sp.diff(error, alpha_0)
grad_alpha_1 = sp.diff(error, alpha_1)

# Résolution du système d'équations
solution = sp.solve((grad_alpha_0, grad_alpha_1), (alpha_0, alpha_1))

latex_output = f"Les coefficients de la droite d'ajustement sont : \n"
latex_output += f"$\\alpha_0 = {sp.latex(solution[alpha_0])}, \\quad"
latex_output += f"$\\alpha_1 = {sp.latex(solution[alpha_1])}$" + "\n\n"
print(latex_output)

# Fonction d'erreur (somme des carrés des écarts)
error = sum((y - (alpha_0 + alpha_1 * x + alpha_2 * x**2))**2 for x, y in
    zip(x_data, y_data))

# Calcul des dérivées partielles et égalisation à zéro
grad_alpha_0 = sp.diff(error, alpha_0)
grad_alpha_1 = sp.diff(error, alpha_1)
grad_alpha_2 = sp.diff(error, alpha_2)

# Résolution du système d'équations
solution = sp.solve((grad_alpha_0, grad_alpha_1, grad_alpha_2), (alpha_0,
    alpha_1, alpha_2))

latex_output = f"Les coefficients de la parabole d'ajustement sont : \n"
latex_output += f"$\\alpha_0 = {sp.latex(solution[alpha_0])}, \\quad"
latex_output += f"$\\alpha_1 = {sp.latex(solution[alpha_1])}, \\quad \\alpha_2 = "
latex_output += f"{sp.latex(solution[alpha_2])}$"
print(latex_output)
```

Les coefficients de la droite d'ajustement sont: $\alpha_0 = -6.18989525065963$, $\alpha_1 = 9.43854353562005$

Les coefficients de la parabole d'ajustement sont: $\alpha_0 = 4.40567376946054$, $\alpha_1 = -1.06889613092542$, $\alpha_2 = 2.1081182154008$

Exercice 3.5 (Fitting parabolique)

Le tableau ci-dessous donne la conductivité thermique k du sodium pour différentes valeurs de la température. On veut calculer la parabole de meilleur approximation.

T (°C)	79	190	357	524	690
k	1.00	0.932	0.839	0.759	0.693

Correction

La parabole de régression a équation $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$ avec a_0, a_1, a_2 solution du système linéaire

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=0}^4 x_i & \sum_{i=0}^4 x_i^2 & \sum_{i=0}^4 x_i^3 \\ \sum_{i=0}^4 x_i^2 & \sum_{i=0}^4 x_i^3 & \sum_{i=0}^4 x_i^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^4 y_i \\ \sum_{i=0}^4 y_i x_i \\ \sum_{i=0}^4 y_i x_i^2 \end{pmatrix} \quad i.e. \quad \begin{bmatrix} 5 & 1840 & 920466 \\ 1840 & 920466 & 525238156 \\ 920466 & 525238156 & 319648597458 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.223 \\ 1431.489 \\ 685156.395 \end{bmatrix}$$

et on obtient

$$\begin{cases} a_0 = 1.05258944046584, \\ a_1 = -0.000680740001043015, \\ a_2 = 2.30985609017547 \cdot 10^{-7}. \end{cases}$$

```
# Définition des données
x_data = [79 , 190 , 357 , 524 , 690]
y_data = [1.00 , 0.932 , 0.839 , 0.759 , 0.693]

# Variables pour les coefficients de la droite
alpha_0, alpha_1, alpha_2 = sp.symbols(r'\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2')

# Fonction d'erreur (somme des carrés des écarts)
error = sum((y - (alpha_0 + alpha_1 * x + alpha_2 * x**2))**2 for x, y in
    zip(x_data, y_data))

# Calcul des dérivées partielles et égalisation à zéro
grad_alpha_0 = sp.diff(error, alpha_0)
grad_alpha_1 = sp.diff(error, alpha_1)
grad_alpha_2 = sp.diff(error, alpha_2)

# Résolution du système d'équations
solution = sp.solve((grad_alpha_0, grad_alpha_1, grad_alpha_2), (alpha_0,
    alpha_1, alpha_2))

# Affichage des résultats en LaTeX
latex_output = f"Les coefficients de la parabole d'ajustement sont : \n"
latex_output += f"$\\alpha_0 = {sp.latex(solution[alpha_0])}, \\quad"
    f"$\\alpha_1 = {sp.latex(solution[alpha_1])}, \\quad \\alpha_2 ="
    f"{sp.latex(solution[alpha_2])}$"
print(latex_output)
```

Les coefficients de la parabole d'ajustement sont: $\alpha_0 = 1.05258944046584$, $\alpha_1 = -0.000680740001043022$, $\alpha_2 = 2.30985609017557 \cdot 10^{-7}$

Exercice 3.6 (Fitting polynomial)

La viscosité cinématique μ de l'eau varie en fonction de la température comme dans le tableau suivant:

T (°C)	0	21.1	37.8	54.4	71.1	87.8	100
$\mu (10^{-3} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1})$	1.79	1.13	0.696	0.519	0.338	0.321	0.296

On veut évaluer les valeurs $\mu(10^\circ)$, $\mu(30^\circ)$, $\mu(60^\circ)$, $\mu(90^\circ)$ par le polynôme de meilleur approximation de degré 3.

Correction

On a la famille de points $\{(T_i, \mu_i)\}_{i=0}^6$. Le polynôme de meilleur approximation de degré 3 s'écrit

$$r(T) = a_0 + a_1 T + a_2 T^2 + a_3 T^3$$

où a_0, a_1, a_2, a_3 sont solution du système linéaire

$$\begin{pmatrix} 6 & \sum_{i=0}^6 T_i & \sum_{i=0}^6 T_i^2 & \sum_{i=0}^6 T_i^3 \\ \sum_{i=0}^6 T_i & \sum_{i=0}^6 T_i^2 & \sum_{i=0}^6 T_i^3 & \sum_{i=0}^6 T_i^4 \\ \sum_{i=0}^6 T_i^2 & \sum_{i=0}^6 T_i^3 & \sum_{i=0}^6 T_i^4 & \sum_{i=0}^6 T_i^5 \\ \sum_{i=0}^6 T_i^3 & \sum_{i=0}^6 T_i^4 & \sum_{i=0}^6 T_i^5 & \sum_{i=0}^6 T_i^6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^6 \mu_i \\ \sum_{i=0}^6 \mu_i T_i \\ \sum_{i=0}^6 \mu_i T_i^2 \\ \sum_{i=0}^6 \mu_i T_i^3 \end{pmatrix}$$

i.e.

$$\begin{bmatrix} 7.0 & 372.2 & 27597.46 & 2260654.85 \\ 372.2 & 27597.46 & 2260654.85 & 195978969.589 \\ 27597.46 & 2260654.85 & 195978969.589 & 17592371724.1956 \\ 2260654.85 & 195978969.589 & 17592371724.1956 & 1616216676927.38 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.09 \\ 160.201 \\ 10176.6664 \\ 766509.794788 \end{bmatrix}$$

et on obtient

$$\begin{cases} a_0 = 1.7957089455664152, \\ a_1 = -0.039321279744794845, \\ a_2 = 0.0003285691641953032, \\ a_3 = -8.458861661547231e-07. \end{cases}$$

On a alors

$$r(10^\circ) = 1.4345071783718424 \quad r(30^\circ) = 0.8889438745121652 \quad r(60^\circ) = 0.4365697400923958 \quad r(90^\circ) = 0.301552983390042$$

Exercice 3.7

Considérons $n = 10$ points $P_i = (x_i, y_i)$ avec $x_i = (i-1)/(n-1)$, $i = 1, \dots, n$ et $y_i = 2x_i + 1 + \epsilon_i$ avec $\epsilon_i \in]0; 0.01[$ généré aléatoirement avec une distribution normale. Comparer l'interpolation et le fitting linéaire sur ce jeu de points.

Correction

to do

Exercice 3.8 (Fitting non polynomial)

Considérons l'ensemble de points $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^n$ ainsi construit : $x_i \in [-1; 1]$ tous distincts et $y_i = (x_i - 1)x_i(x_i + 1) + r_i$ où $r_i \in [-0.6; 0.6]$ peut être considéré comme un bruit aléatoire associé au signal $(x_i - 1)x_i(x_i + 1)$. On cherche une fonction d'équation $y = \sum_{j=0}^m a_j \phi_j(x_i)$ qui approche au mieux cet ensemble de points. Pour cela, on doit minimiser la fonction $\mathcal{E} : \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par

$$\mathcal{E}(a_0, a_1, \dots, a_m) = \sum_{i=0}^n \left(y_i - \sum_{j=0}^m a_j \phi_j(x_i) \right)^2.$$

Il faut alors fixer m et résoudre le système linéaire $A^T A \mathbf{a} = A^T \mathbf{y}$ de $(m+1)$ équations en les $(m+1)$ inconnues $a_0, a_1, \dots, a_m$ avec $\mathbf{y} = (y_0, y_1, \dots, y_n)$ et

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{\begin{pmatrix} \phi_0(x_0) & \phi_1(x_0) & \dots & \phi_m(x_0) \\ \phi_0(x_1) & \phi_1(x_1) & \dots & \phi_m(x_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi_0(x_n) & \phi_1(x_n) & \dots & \phi_m(x_n) \end{pmatrix}}_{n \times m}.$$

Choisissons les fonctions ϕ_j de la forme $\phi_j(x) = \sin(j\pi x)$, $j = 0, \dots, m$. Soit $n = 20$ et $m = 2$. Comparer sur un graphe la fonction $y = (x - 1)x(x + 1)$ (le signal souhaité), les points (le signal bruité) et la fonction de meilleure approximation (le signal lissé). Estimer l'erreur entre le signal souhaité et le signal lissé. Répéter le même exercice pour $n = 20$ et $m = 8$, puis $n = 200$ et $n = 8$.

Correction

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Définir la fonction de base (le signal sans bruit)
def signal(x):
    return (x - 1) * x * (x + 1)

# Générer les données bruitées
def generate_noisy_data(n):
    x_data = np.linspace(-1, 1, n)
    noise = np.random.uniform(-0.6, 0.6, n)
    y_data = signal(x_data) + noise
    return x_data, y_data

# Les fonctions  $\phi_j(x) = \sin(j * \pi * x)$ 
phi_j = lambda x, j : np.sin(j * np.pi * x)

# Construire la matrice A de taille (n, m+1)
def construct_A(x_data, m):
    A = np.zeros((len(x_data), m + 1))
    for i, x in enumerate(x_data):
        for j in range(m + 1):
            A[i, j] = phi_j(x, j)
    return A

# Résoudre le système linéaire pour obtenir les coefficients  $a_0, a_1, \dots, a_m$ 
def fit_least_squares(x_data, y_data, m):
    A = construct_A(x_data, m)
    ATA = A.T @ A
    ATy = A.T @ y_data
    try:
        a = np.linalg.solve(ATA, ATy) # Résoudre le système linéaire
    except np.linalg.LinAlgError:
        a = np.linalg.pinv(ATA) @ ATy # Utiliser le pseudo-inverse si la
        # matrice est singulière
    return a

# Construire la fonction de meilleure approximation
def approximate_function(x, a):
    m = len(a) - 1
    return sum(a[j] * phi_j(x, j) for j in range(m + 1))

# Calculer l'erreur
def calculate_error(y_true, y_approx):
    return np.sqrt(np.mean((y_true - y_approx) ** 2))

# Fonction pour tracer les résultats
def plot_results(x_data, y_data, x_exact, y_exact, y_approx, title):
    plt.figure(figsize=(10, 6))
```

```

plt.plot(x_exact, y_exact, label='Signal exact', color='green',
         linewidth=2)
plt.scatter(x_data, y_data, label='Points bruités', color='red', s=30)
plt.plot(x_exact, y_approx, label='Signal lissé (approximation)',
         color='blue', linestyle='--', linewidth=2)
plt.title(title)
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()

# Paramètres
m_values = [2, 8] # Degré du polynôme à tester
n_values = [20, 200] # Nombre de points à tester

# Résolution pour chaque combinaison de m et n
for m in m_values:
    for n in n_values:
        # Génération des données
        x_data, y_data = generate_noisy_data(n)

        # Résolution du problème d'ajustement
        a = fit_least_squares(x_data, y_data, m)

        # Calcul de la fonction approximée sur un ensemble de points denses
        x_exact = np.linspace(-1, 1, 1000)
        y_exact = signal(x_exact)
        y_approx = [approximate_function(x, a) for x in x_exact]

        # Estimation de l'erreur
        error = calculate_error(y_exact, y_approx)

        # Affichage des résultats
        title = f"n = {n}, m = {m}, Erreur = {error:.4f}"
        plot_results(x_data, y_data, x_exact, y_exact, y_approx, title)

```

Exercice 3.9

L'espérance de vie dans un pays a évolué dans le temps selon le tableau suivant :

Année	1975	1980	1985	1990
Espérance	72,8	74,2	75,2	76,4

Utiliser l'interpolation polynomiale pour estimer l'espérance de vie en 1977, 1983 et 1988. La comparer avec une interpolation linéaire par morceaux et avec un fitting polynomiale avec $m = 1, 2$ (avec $m = 3$ on retrouve le polynôme d'interpolation).

Correction

Si on choisit de poser $x_0 = 0$ pour l'année 1975, $x_1 = 5$ pour l'année 1980 etc., on construit

- $p_1 \in \mathbb{R}_1[x]$ la droite de meilleure approximation (fitting $m = 1$)
- $p_2 \in \mathbb{R}_2[x]$ la parabole de meilleure approximation (fitting $m = 2$)
- $p_3 \in \mathbb{R}_3[x]$ le polynôme d'interpolation ($n = 3$)
- s_1 la spline linéaire

et on évalue ces fonctions en $x = 2, 8$ et 13 (notons que seuls p_3 et s_1 interpolent les données) :

to do

On obtient les estimations suivantes :

Année	1977	1983	1988
Espérance p_1	73.352	74.768	75.948
Espérance p_2	73.354	74.830	75.950
Espérance p_3	73.446	74.810	75.858
Espérance s_1	73.360	74.800	75.920

Exercice 3.10 (Fitting linéaire après transformation)

L'évolution de la concentration c d'un médicament dans le sang en fonction du temps t est décrite par la fonction $f(t) = Ate^{Bt}$. En utilisant les mesures suivantes et une transformation adéquate de f estimer A et B par régression linéaire :

t	1	2	3	4	5	6	7	8
c	8.0	12.3	15.5	16.8	17.1	15.8	15.2	14.0

Correction

On a $\ln(f(t)) = \ln(A) + \ln(t) + Bt$ ainsi $\ln(f(t)) - \ln(t) = \ln(A) + Bt$ qui a la forme $\alpha_0 + \alpha_1 t$ avec $\alpha_1 = B$ et $\alpha_0 = \ln(A)$. On peut alors calculer l'équation de la droite de régression sur l'ensemble $\{(t_i, y_i = \ln(c_i) - \ln(t_i))\}_{i=0}^n$ et obtenir ainsi B et $\ln(A)$.

$$\begin{pmatrix} 8 & \sum_{i=0}^7 t_i \\ \sum_{i=0}^7 t_i & \sum_{i=0}^7 t_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^7 \ln(c_i) - \ln(t_i) \\ \sum_{i=0}^7 t_i (\ln(c_i) - \ln(t_i)) \end{pmatrix}$$

Donc $\alpha_0 \simeq 2.281$ et $\alpha_1 \simeq -0.215$ et enfin $B = \alpha_1$ et $A = e^{\alpha_0}$.

```
import sympy as sp
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def exemple(x_data,y_data,m,phi):
    n = len(x_data)
    coeffs = sp.symbols(f'a_0:{m+1}')
    x = sp.symbols('x')
    f_expr = sum(coeffs[j] * phi(x,j) for j in range(m+1))
    error = sum((y_data[i] - f_expr.subs(x, x_data[i]))**2 for i in range(n))
    gradient = [sp.diff(error, c) for c in coeffs]
    solution = sp.solve(gradient, coeffs)

    # Affichage des résultats en LaTeX
    latex_output = "Les coefficients estimés sont : \n"
    latex_output += "\\["
    for c in coeffs:
        latex_output += f"{sp.latex(c)} \\approx "
        latex_output += f"{solution[c].evalf():.3f}\\quad "
    latex_output += "\\]"
    print(latex_output)

    return f_expr.subs(solution) # retourne f(x) ajusté

# Données
x_data = list(range(1,9))
y_data = [8, 123/sp.S(10), 155/sp.S(10), 168/sp.S(10),
          171/sp.S(10), 158/sp.S(10), 152/sp.S(10), 14]

# Transformation : z = ln(y) - ln(x)
x_data_modif = x_data
y_data_modif = [sp.ln(yi)-sp.ln(xi) for xi,yi in zip(x_data,y_data)]
```

```

# Ajustement
m = 1
phi = lambda x,j : x**j
f_expr = exemple(x_data_modif,y_data_modif,m,phi)

# Sympy -> Numpy
x = sp.symbols('x')
z_num = sp.lambdify(x, f_expr, "numpy")           # fonction ajustée en
↳ z(x)
y_num = lambda xx: xx * np.exp(z_num(xx))        # transformation inverse
↳ -> y(x)

# --- Plot 1 : espace transformé (x, ln(y)-ln(x)) ---
x_data_arr = np.array(x_data_modif, dtype=float)
y_data_arr = np.array([float(val) for val in y_data_modif])

plt.figure(figsize=(12,5))

plt.subplot(1,2,1)
plt.scatter(x_data_arr, y_data_arr, color='red', label='Données
↳ transformées')
x_fit = np.linspace(min(x_data_arr), max(x_data_arr), 200)
plt.plot(x_fit, z_num(x_fit), color='blue', label='Fitting (z(x))')
plt.xlabel("x")
plt.ylabel("ln(y) - ln(x)")
plt.legend()
plt.grid(True, alpha=0.3)
plt.title("Régression en espace transformé")

# --- Plot 2 : espace original (x, y) ---
plt.subplot(1,2,2)
plt.scatter(x_data, [float(val) for val in y_data], color='red',
↳ label='Données originales')
x_fit = np.linspace(min(x_data_arr), max(x_data_arr), 200)
plt.plot(x_fit, y_num(x_fit), color='green', label='Fitting reconstruit
↳ (y(x))')
plt.xlabel("x")
plt.ylabel("y")
plt.legend()
plt.grid(True, alpha=0.3)
plt.title("Courbe ajustée en coordonnées originales")

plt.tight_layout()
#plt.show()

```

Les coefficients estimés sont:

$$a_0 \approx 2.281 \quad a_1 \approx -0.215$$

CHAPITRE 4

Initiation aux réseaux de neurones

Dans ce chapitre

4.1	Perceptron: fonction paramétrique	160
4.1.1	Fonctions d'activation usuelles	161
4.1.2	Interprétation géométrique d'un perceptron avec la fonction de Heaviside	162
4.1.3	Exemple d'un perceptron avec la fonction sigmoïde	166
4.1.4	Opérations logiques: OR (OU), AND (ET), XOR (OU exclusif)	167
4.2	Réseau de neurones	169
4.3	Calcul des poids d'un réseau de neurones	177
4.3.1	Rétropropagation, apprentissage et test	178
4.4	Application ①: l'approximation au sens des moindres carrées par un réseau de neurones	180
4.4.1	Un exemple complet: régression affine avec un réseau de neurones	183
4.5	Application ② : Physics-Informed Neural Network (PINN)	192
4.5.1	Solution exacte discrète vs solution approchée	193
4.5.2	Un schéma classique: le schéma d'Euler explicite	194
4.5.3	Approximation par un réseau de neurones	195
4.5.4	Comparaison Euler explicite vs PINN sur un exemple	196

Dans le chapitre précédent, nous avons présenté le principe de l'approximation par les moindres carrés dans un espace vectoriel de dimension finie quelconque. L'idée consiste à construire une fonction f , appartenant à cet espace vectoriel, qui approche au mieux un ensemble de points $\mathcal{A} = \{(x_i, y_i)\}$ appelé *ensemble d'entraînement*. Deux ingrédients sont essentiels :

- la fonction f appartient à l'espace vectoriel et est donc entièrement déterminée par ses coordonnées dans une base choisie de cet espace. Pour fixer f , il suffit donc de déterminer ses coordonnées (ou *poids*) ;
- pour fixer la meilleure fonction, on définit l'erreur quadratique comme la somme des carrés des écarts verticaux entre $f(x_i)$ et y_i et l'on cherche les coordonnées/poids qui minimisent cette erreur.

Ce qui est remarquable, c'est que, puisque f est une combinaison linéaire des éléments de la base de l'espace vectoriel, et grâce à la définition choisie de l'erreur, le calcul des poids se ramène à la résolution d'un système linéaire.

Une fois la fonction déterminée, on peut l'utiliser pour prédire la sortie y associée à une nouvelle donnée x qui ne faisait pas partie de l'ensemble d'entraînement. Cette étape correspond à la *phase de test*.

Dans ce chapitre, nous allons généraliser cette idée. La fonction f ne sera plus simplement une combinaison linéaire d'éléments d'une base, mais une fonction obtenue par composition de combinaisons linéaires d'autres fonctions, elles-mêmes construites de manière analogue.

Dans ce nouveau cadre, la minimisation de l'erreur quadratique ne conduit plus, en général, à un simple système linéaire. Il arrive d'ailleurs que l'on utilise d'autres mesures d'erreur. On n'a alors plus la garantie d'existence ni d'unicité de la solution. Cependant, la richesse des types de fonctions que l'on peut employer pour l'approximation ouvre des perspectives très intéressantes, malgré ces limitations.

Pour formaliser de telles fonctions, nous introduirons d'abord le langage des *réseaux de neurones*, qui permet de définir ces fonctions (à l'aide de poids quelconques). Nous verrons ensuite comment déterminer ces poids en résolvant, à partir de l'ensemble d'entraînement, un système en général non linéaire.

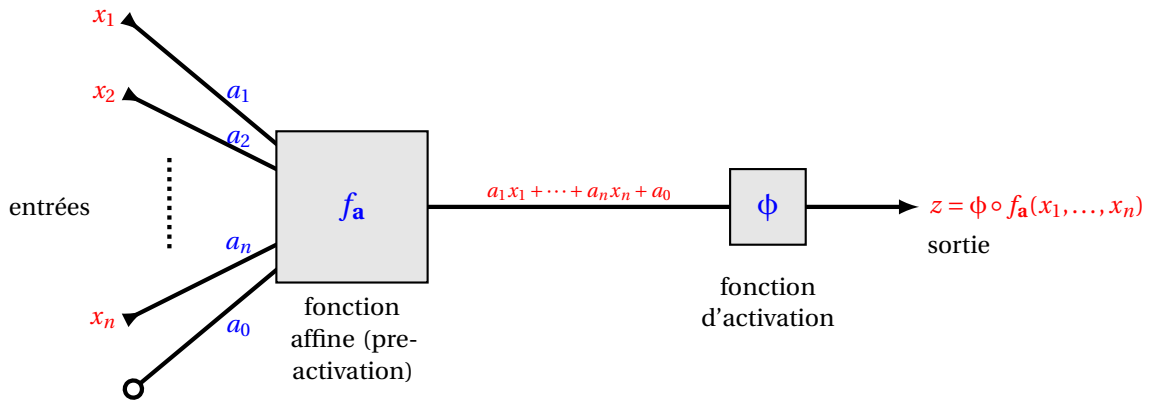
Cette stratégie fait partie des méthodes de *réseaux de neurones supervisés*, car on utilise les couples entrée/sortie de $\mathcal{A}$ pour calibrer les poids, exactement comme dans la méthode de régression. Nous verrons enfin, dans la dernière section, un exemple de *réseau de neurones non supervisé*, où la sortie y n'est pas connue. Dans ce cas, le calibrage des poids est intrinsèque à la définition de l'erreur : en effet, les y_i n'interviennent dans l'apprentissage supervisé qu'à travers la définition de l'erreur ; si l'on définit une erreur différemment, on n'a alors plus besoin des y_i .

4.1. Perceptron : fonction paramétrique

Un perceptron¹ affine prend des valeurs en entrée, effectue un calcul obtenu par la composition d'une fonction d'activation ϕ avec une fonction affine $f_{\mathbf{a}}$, et renvoie une valeur en sortie. Ses composants sont :

- **Données en entrée:** $(x_1, x_2, \dots, x_n)$
- **Fonction affine:** $(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto f_{\mathbf{a}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i x_i$, définie par ses poids $\mathbf{a} \stackrel{\text{def}}{=} (a_0, a_1, \dots, a_n)$
- **Fonction d'activation:** $y \mapsto \phi(y)$

Ainsi, un perceptron affine à n variables et de fonction d'activation ϕ est défini par $n+1$ coefficients réels $\mathbf{a} \stackrel{\text{def}}{=} (a_0, a_1, \dots, a_n)$ et la fonction $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $F \stackrel{\text{def}}{=} \phi \circ f_{\mathbf{a}}$, c'est-à-dire $F(x_1, \dots, x_n) = \phi(f_{\mathbf{a}}(x_1, \dots, x_n))$.



- **Partie affine.** Le perceptron est caractérisé par $n+1$ poids $\mathbf{a} \stackrel{\text{def}}{=} (a_0, a_1, \dots, a_n)$:
 - les **coefficients** $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$;
 - le **biais** $a_0 \in \mathbb{R}$.

Ils définissent la fonction affine (dite pre-activation)

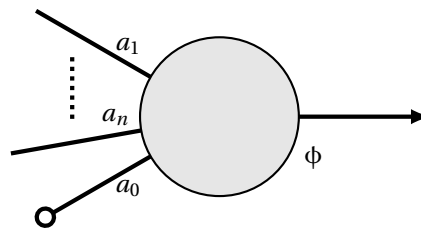
$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto f_{\mathbf{a}}(x_1, \dots, x_n) \stackrel{\text{def}}{=} a_0 + \sum_{i=1}^n a_i x_i = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n + a_0.$$

Si $a_0 = 0$, $f_{\mathbf{a}}$ est une fonction linéaire (et on parle de perceptron linéaire).

- **Fonction d'activation.** La fonction affine $f_{\mathbf{a}}$ est ensuite composée avec une fonction d'activation $\phi: y \mapsto \phi(y)$.
- **Composition.** La sortie est donc donnée par

$$z = F(x_1, \dots, x_n) = \phi(f_{\mathbf{a}}(x_1, \dots, x_n)) = \phi(a_0 + \sum_{i=1}^n a_i x_i) = \phi(a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n + a_0).$$

- **Neurone.** Un perceptron est généralement représenté de manière plus condensée sous la forme d'un **neurone**, avec des poids associés aux arêtes d'entrée. L'arête terminée par un rond indique qu'elle correspond au biais (cela ne correspond pas à une entrée). On précise en indice la fonction d'activation ϕ .

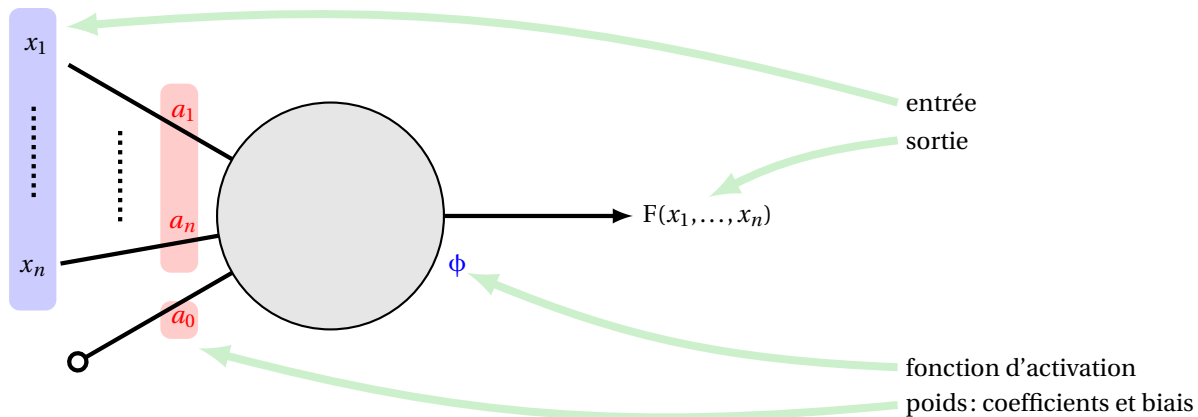


Résumons le vocabulaire utilisé ainsi que les termes anglais correspondants :

- Le **perceptron linéaire** a un biais qui vaut 0, tandis que le **perceptron affine** a un biais quelconque ;
- Les **poids** (*weights*) ou **paramètres** sont les **coefficients** $a_1, \dots, a_n$, auxquels s'ajoute le **biais** (*bias*) a_0 ;
- Un perceptron est défini par ses poids et sa fonction d'activation ;

1. Le perceptron, premier modèle de neurone artificiel, a été introduit en 1957 par le psychologue Frank Rosenblatt (1928-1971). En 1969, Marvin Minsky fait paraître avec un psychologue, Seymour Papert, un ouvrage intitulé Perceptrons, pour mettre en évidence les limitations des procédures d'apprentissage en général et du perceptron en particulier. Ils démontrent que les réseaux monocouches ne réalisent que des fonctions très élémentaires dites linéairement séparables.

- Chaque perceptron définit une fonction F qui est la composée d'une **fonction affine** f_a et d'une **fonction d'activation** ϕ ; la fonction d'activation la plus utilisée dans ces notes est la fonction marche de Heaviside (*step function*);
- Un perceptron est utilisé pour une **évaluation** : pour une **entrée** (*input*) $X \stackrel{\text{def}}{=} (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on calcule la **sortie** (*output*) $F(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$ (valant 0 ou 1 dans le cas de la fonction marche de Heaviside).

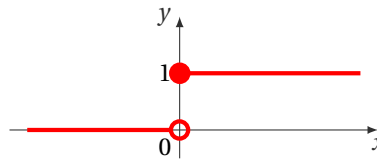


4.1.1. Fonctions d'activation usuelles

Les fonctions d'activation sont des fonctions $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Généralement on utilise l'une des suivantes.

Fonction marche de Heaviside. C'est la fonction "marche d'escalier" définie par la formule suivante :

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

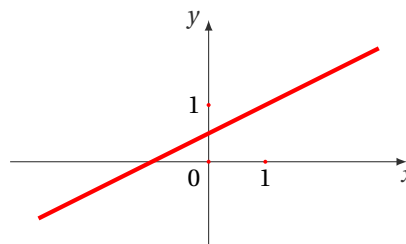


Quelques caractéristiques de H :

- la fonction a l'avantage d'être très simple et de séparer clairement les résultats en deux catégories (0 et 1),
- c'est aussi un inconvénient car il n'y a pas de nuance possible (du genre « plutôt oui/plutôt non »),
- la fonction H n'est pas dérivable en 0 (ni même continue), ce qui sera gênant pour la suite,
- avoir posé $H(0) = 1$ est un choix arbitraire, on aurait pu choisir une autre valeur comme 0 (certains préfèrent la valeur $\frac{1}{2}$).

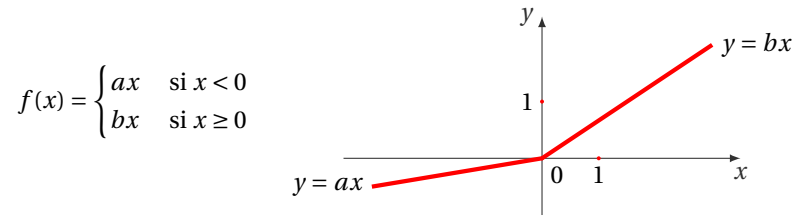
Fonction affine. Une fonction affine est définie par

$$f(x) = ax + b$$



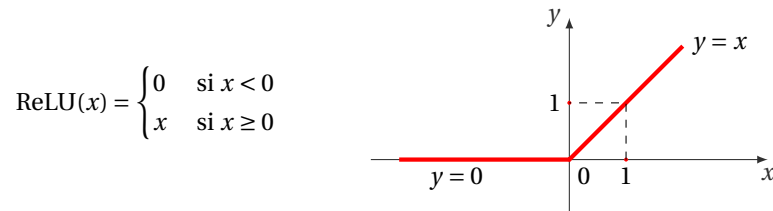
- Les fonctions affines seront à la base des réseaux de neurones. Elles sont simples.
- Si $a = 1$ et $b = 0$ alors $f(x) = x$, c'est la fonction identité : la sortie est égale à l'entrée. Nous l'utiliserons plus tard dans certains cas.
- Si $b = 0$ la sortie est proportionnelle à l'entrée.
- Le principal inconvénient est le suivant : si $f(x) = ax + b$ et $g(x) = cx + d$ sont deux fonctions affines alors la composition $h = g \circ f$ est encore une fonction affine. Ainsi, avec des fonctions d'activation qui sont affines, par composition on n'obtiendra que des fonctions affines, ce qui n'est pas assez riche pour les problèmes de classification.

ReLU et fonctions linéaires par morceaux. Une fonction définie par



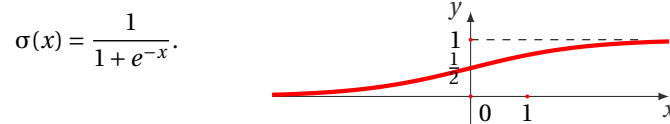
est un exemple de fonction linéaire par morceaux (elle est linéaire à gauche et linéaire à droite).

La plus utilisée est la fonction ReLU (pour *Rectified Linear Unit*), définie par

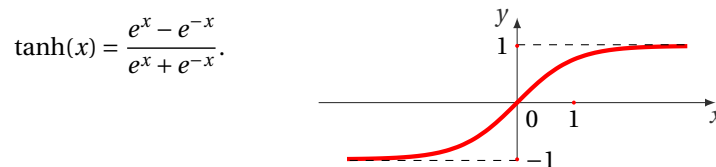


- Attention ces fonctions ne sont pas dérivables en 0 (sauf dans le cas $a = b$).
- La fonction ReLU conjugue les bénéfices d'une fonction continue, avec une activation (ici la sortie est non nulle pour une entrée strictement positive) et d'une sortie proportionnelle à l'entrée (pour les entrées positives).

La fonction sigmoïde. La fonction sigmoïde est définie par



La fonction tangente hyperbolique. La tangente hyperbolique est définie par



Elle a des propriétés similaires à la fonction sigmoïde mais varie de -1 à $+1$. C'est une fonction impaire : son graphe est symétrique par rapport à l'origine. On pourrait refaire une étude complète de cette fonction mais celle-ci est liée à celle de la fonction σ par la relation $\tanh(x) = 2\sigma(2x) - 1$.

4.1.2. Interprétation géométrique d'un perceptron avec la fonction de Heaviside

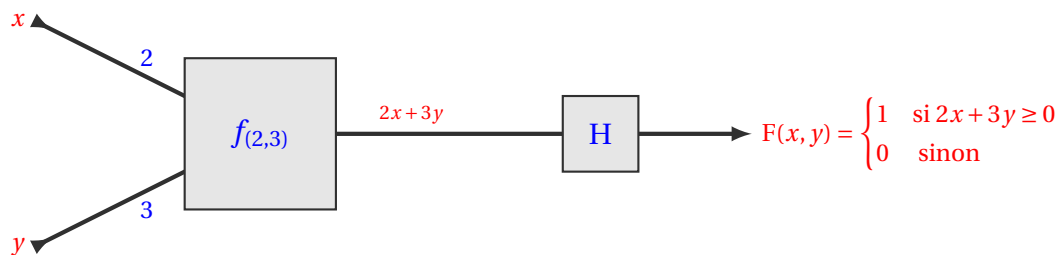
Cas linéaire. Considérons un perceptron à n variables, de poids $\mathbf{a}$, linéaire (donc $a_0 = 0$), muni de la fonction marche de Heaviside comme fonction d'activation. Il s'agit de la donnée de n coefficients réels $\mathbf{a} \stackrel{\text{def}}{=} (a_1, \dots, a_n)$ auxquels est associée la fonction $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $F \stackrel{\text{def}}{=} H \circ f_{\mathbf{a}}$, c'est-à-dire

$$F(x_1, \dots, x_n) = H(f_{\mathbf{a}}(x_1, \dots, x_n)) = \begin{cases} 1 & \text{si } a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

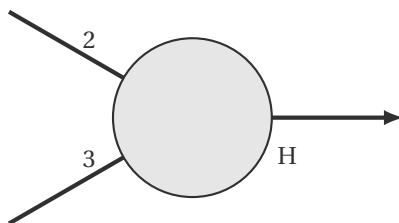
EXEMPLE

Considérons un perceptron linéaire à deux entrées, ayant les poids $a_1 = 2$ et $a_2 = 3$ et de fonction d'activation la fonction marche de Heaviside.

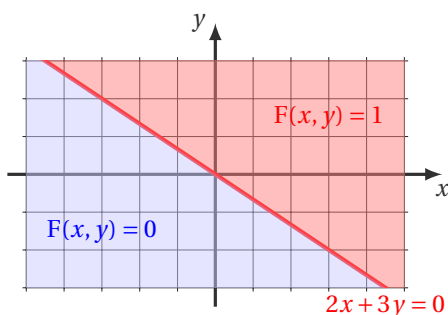
Notons x et y les deux réels en entrée. La fonction linéaire $f_{\mathbf{a}}$ est donc $f_{(2,3)}(x, y) = 2x + 3y$ et la valeur en sortie est la suivante :



On représente ce neurone ainsi :



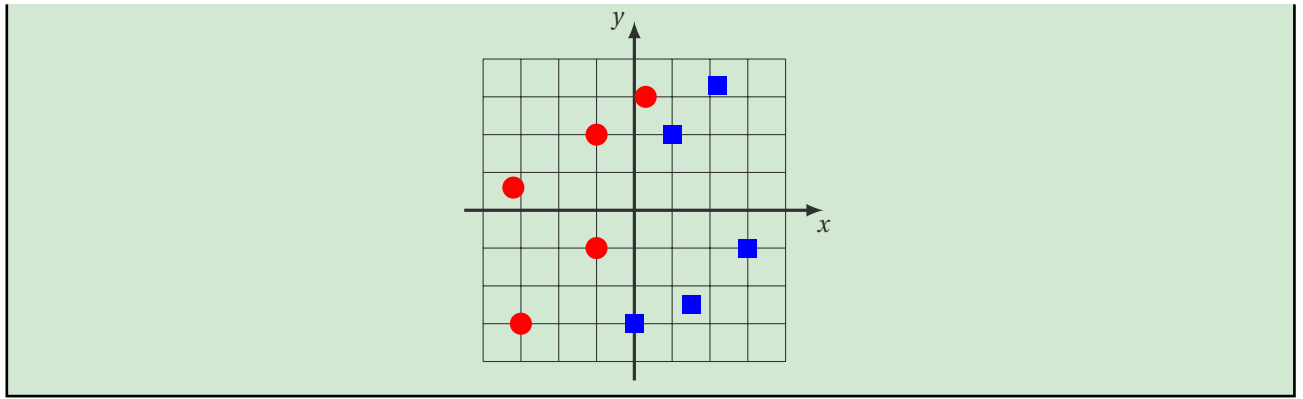
- **Évaluation en quelques points.** Utilisons ce perceptron comme une fonction et évaluons-la en trois points : $(4, -1)$, $(-3, 1)$ et $(6, -4)$. Que renvoie le perceptron pour la valeur d'entrée $(x, y) = (4, -1)$? On calcule $f_a(x, y) = 2x + 3y = 5$. Comme $f_a(x, y) \geq 0$, alors la valeur de sortie est donc $F(x, y) = 1$. Recommençons avec $(x, y) = (-3, 1)$. Cette fois $f_a(x, y) = -3 < 0$ donc $F(x, y) = 0$. Enfin, l'entrée $(x, y) = (6, -4)$ est « à la limite » car $f_a(x, y) = 0$ (0 est l'abscisse critique pour la fonction marche de Heaviside). On a $F(x, y) = 1$.
- **Interprétation.** La fonction F prend seulement deux valeurs : 0 ou 1. La frontière correspond aux points (x, y) tels que $f_a(x, y) = 0$, c'est-à-dire à la droite $2x + 3y = 0$. Pour les points au-dessus de la droite (ou sur la droite) la fonction F prend la valeur 1 ; pour les points en-dessous de la droite, la fonction F vaut 0.



Exercice 4.1

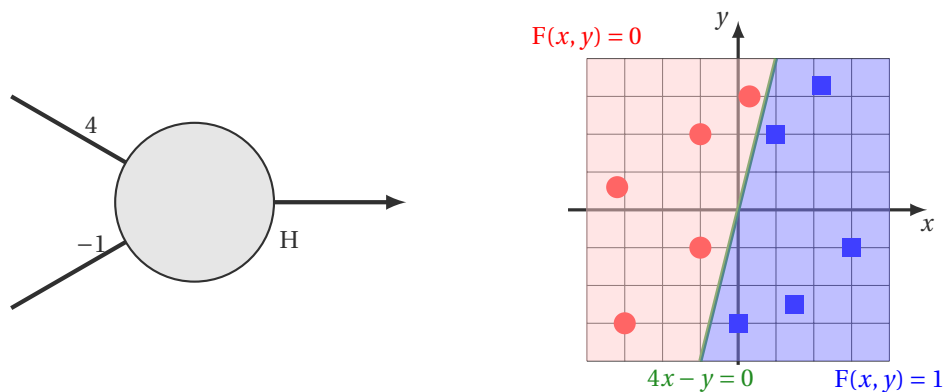
On souhaite déterminer une fonction d'activation ainsi que des poids permettant de séparer les *carrés bleus* des *ronds rouges* dans le plan. Plus précisément, la fonction finale doit valoir

$$F(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si le point } (x, y) \text{ correspond à un carré bleu,} \\ 0 & \text{si le point } (x, y) \text{ correspond à un rond rouge.} \end{cases}$$

**Correction**

Il s'agit de trouver les deux poids a_1 et a_2 d'un perceptron, dont la fonction associée F vérifie $F(x, y) = 1$ pour les coordonnées des carrés et $F(x, y) = 0$ pour les ronds. Trouvons donc l'équation d'une droite qui les sépare (elle n'est pas unique). Par exemple, on remarque que la droite d'équation $4x - y = 0$ sépare les ronds des carrés. On définit alors le neurone avec les poids $a_1 = 4$ et $a_2 = -1$.

Si (x, y) sont les coordonnées d'un carré alors on a bien $F(x, y) = 1$ et pour un rond $F(x, y) = 0$.

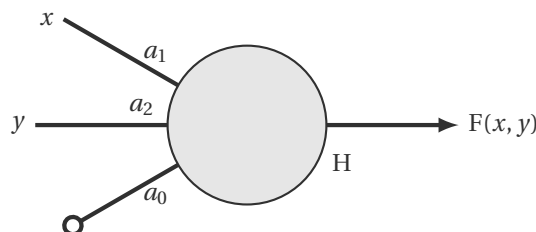


Cas affine Considérons un perceptron à n variables, de poids $\mathbf{a}$, muni de la fonction marche de Heaviside comme fonction d'activation. Il s'agit de la donnée de $n + 1$ coefficients réels $\mathbf{a} \stackrel{\text{def}}{=} (a_0, a_1, \dots, a_n)$ auxquels est associée la fonction $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $F \stackrel{\text{def}}{=} H \circ f_{\mathbf{a}}$, c'est-à-dire

$$F(x_1, \dots, x_n) = H(f_{\mathbf{a}}(x_1, \dots, x_n)) = \begin{cases} 1 & \text{si } a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

EXEMPLE

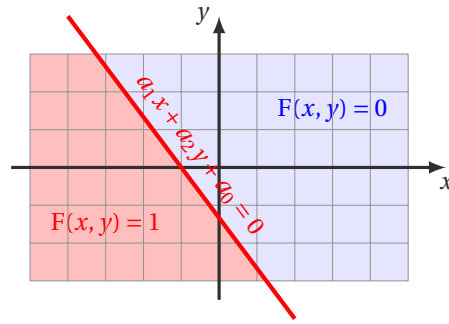
Dans le cas de deux entrées, les poids sont trois réels a_1 , a_2 (les coefficients) et a_0 (le biais).



La fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction affine $f(x, y) = a_1 x + a_2 y + a_0$. Si la fonction d'activation est la fonction marche de Heaviside, alors le perceptron affine définit une fonction $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ par la formule

$$F(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } a_1 x + a_2 y + a_0 \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Un perceptron affine à deux entrées sépare donc le plan en deux parties, la frontière étant la droite d'équation $a_1 x + a_2 y + a_0 = 0$. D'un côté de cette droite la fonction F vaut 1, de l'autre elle vaut 0.



Remarque (Équation d'une droite par deux points)

Soient $P = (P_x, P_y)$ et $Q = (Q_x, Q_y)$. Si $Q_x \neq P_x$, la droite a pour équation $y = \frac{Q_y - P_y}{Q_x - P_x}(x - P_x) + P_y$; si $Q_x = P_x$, elle est verticale et a pour équation $x = P_x$. Une forme unifiée (valable dans tous les cas) est :

$$(Q_x - P_x)(y - P_y) = (Q_y - P_y)(x - P_x) \rightsquigarrow \underbrace{(P_y - Q_y)}_{a_1}x + \underbrace{(Q_x - P_x)}_{a_2}y + \underbrace{(Q_y P_x - Q_x P_y)}_{a_0} = 0. \quad (4.1)$$

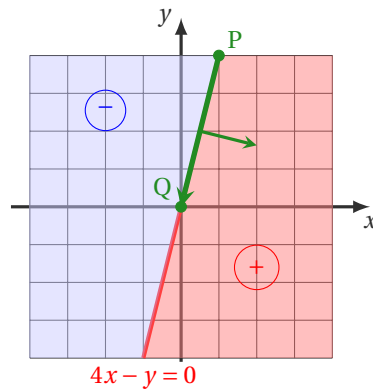
Cette équation est définie à un facteur près. En particulier, remplacer (a_1, a_2, a_0) par $(-a_1, -a_2, -a_0)$ décrit la même droite.

Puisqu'on va composer avec la fonction de Heaviside, il faut décider de quel côté la fonction vaudra 1. Si on considère le segment (orienté) qui va de P à Q et la formule (4.1), la partie positive se trouve à gauche. Si on préfère un calcul analytique, on fixe un point (x_0, y_0) qui n'appartient pas à la droite et on calcule $S(x_0, y_0) = a_1 x_0 + a_2 y_0 + a_0$. Si $S(x_0, y_0)$ n'a pas le signe souhaité, on remplace (a_1, a_2, a_0) par $(-a_1, -a_2, -a_0)$.

Prenons l'exemple de l'exercice 4.1. On prend par exemple $P = (1, 4)$ et $Q = (0, 0)$. La forme (4.1) donne

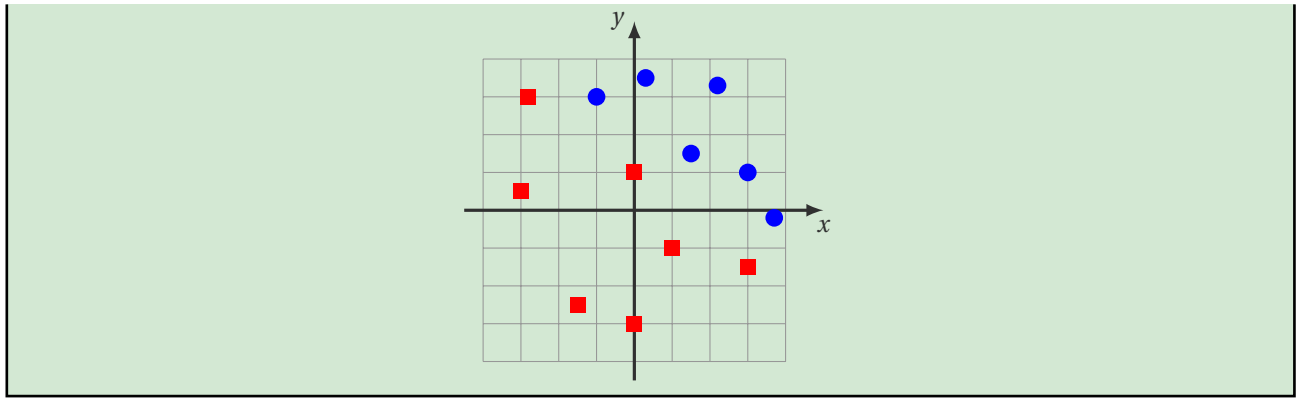
$$\underbrace{(4 - 0)}_{a_1}x + \underbrace{(0 - 1)}_{a_2}y + \underbrace{(0 \times 1 - 0 \times 4)}_{a_0} = 0 \implies 4x - y = 0.$$

Nous voulons que le point $(4, 0)$ soit rouge, c'est à dire que $S(4, 0) > 0$. On a $4 \times 4 - 0 > 0$ donc on peut garder $a_1 = 4$, $a_2 = -1$ et $a_0 = 0$.



Exercice 4.2

Trouver un perceptron qui distingue les carrés des ronds.

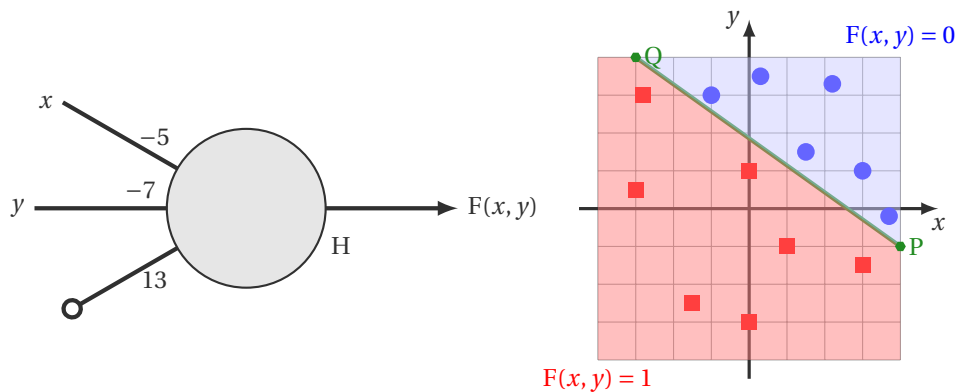
**Correction**

Il s'agit de trouver les deux poids a_1 et a_2 et le biais a_0 d'un perceptron, dont la fonction associée F vérifie $F(x, y) = 1$ pour les coordonnées des carrés et $F(x, y) = 0$ pour les ronds.

Trouvons donc l'équation d'une droite qui les sépare. Par exemple, écrivons l'équation de la droite qui passe par les points $P = (4, -1)$ et $Q = (-3, 4)$:

$$\underbrace{(P_y - Q_y)}_{a_1 = -5} x + \underbrace{(Q_x - P_x)}_{a_2 = -7} y + \underbrace{(Q_y P_x - Q_x P_y)}_{a_0 = 13} = 0$$

soit encore $-5x - 7y + 13 = 0$. On définit alors le neurone avec les poids $a_1 = -5$ et $a_2 = -7$ et biais $a_0 = 13$. La partie positive se trouve à gauche du segment orienté qui va de P à Q et qui correspond, dans notre exemple, aux carrés rouges. Pour vérifier, évaluons F en $(0, 0)$: on trouve $F(0, 0) = H(-5 \times 0 - 7 \times 0 + 13) = H(13) = 1$.

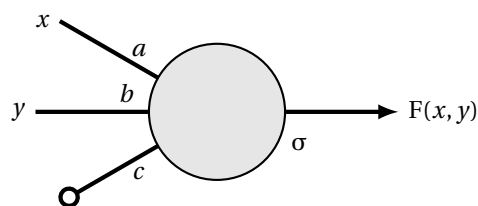


Montrer un cas où une droite ne permet pas de séparer les points mais si on passe en coordonnées polaires oui cf slide Marxer

4.1.3. Exemple d'un perceptron avec la fonction sigmoïde

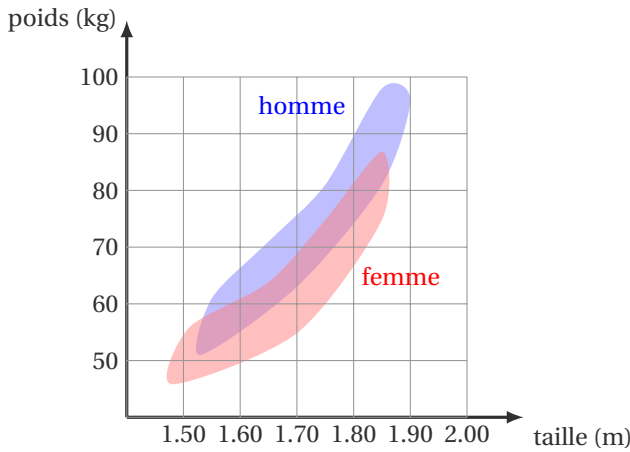
Il n'est pas toujours possible de répondre à une question seulement par « oui » ou « non ». Pour y remédier, on peut changer de fonction d'activation en utilisant par exemple la fonction sigmoïde σ . Dans ce cas, à chaque point du plan, on associe, non plus 0 ou 1, mais une valeur entre 0 et 1. Ce nombre peut correspondre à un degré de certitude. Par exemple avec une question « Est-ce que cette photo est un chat ? », si la sortie vaut 0.8, cela signifie « c'est bien un chat avec 80% de certitude ». Si la sortie vaut 0.1 alors ce n'est probablement pas un chat.

Voici un neurone à deux entrées muni de la fonction d'activation sigmoïde :



EXEMPLE

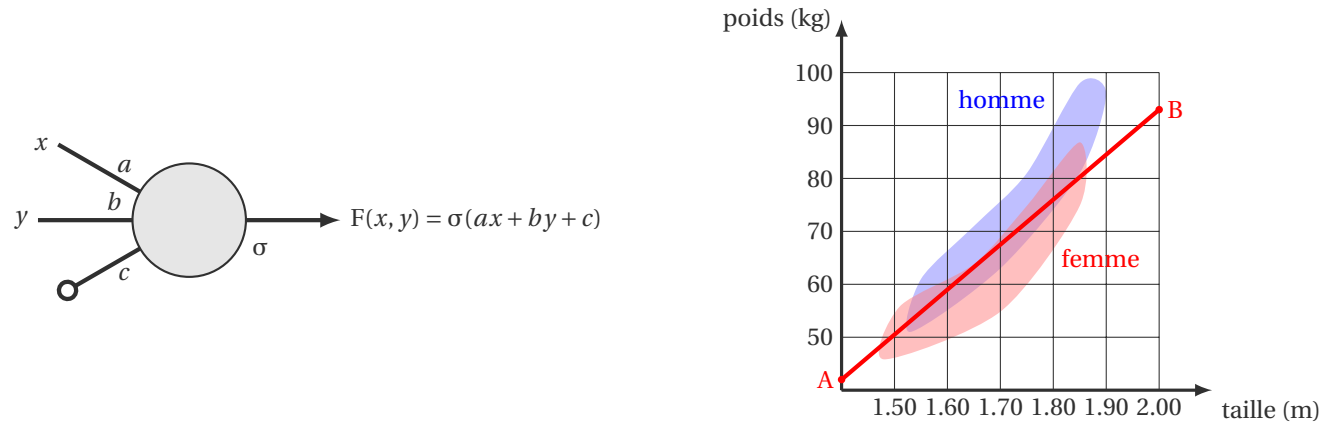
Ci dessous on représente les données (fictives) de la répartition des hommes et des femmes selon leur taille et leur poids. Problème : la taille et le poids d'une personne étant donnés, trouver un perceptron qui réponde à la question « Cette personne est-elle un homme ou une femme ? ».



Au vu de la superposition des zones, il n'est pas possible de répondre avec certitude. On construit donc un perceptron selon les idées suivantes :

- on trace une droite qui sépare au mieux les hommes des femmes, par exemple ici la droite qui passe par les points A(1.40, 42) et B(2.00, 93) d'équation approchée $y = 85x - 77$ où x, y représentent respectivement la taille et le poids ;
- on choisit la fonction d'activation sigmoïde.

Ce qui nous permet de définir le perceptron suivant avec $a = 85, b = -1$ et $c = -77$.



Maintenant pour un couple donné (x, y) , le perceptron associe une valeur $F(x, y) \in [0, 1]$. Si $F(x, y)$ est proche de 0 alors la personne est probablement un homme, si $F(x, y)$ est proche de 1 c'est probablement une femme.

Exemple : une personne mesurant 1.77 mètres et pesant 75 kg est-elle plutôt un homme ou une femme ? On calcule $f(1.77, 75) = -1.55$ où $f(x, y) = ax + by + c$. Puis on calcule $F(1.77, 75) = \sigma(-1.55) \approx 0.17$. Selon notre modèle cette personne est probablement un homme (car la valeur de F est proche de 0).

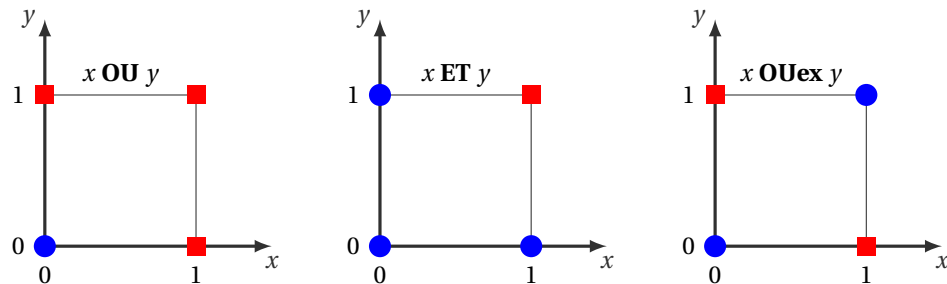
Autre exemple : $(x, y) = (1.67, 64)$. On calcule $F(1.67, 64) \approx 0.72$. Une personne mesurant 1.67 mètres et pesant 64 kg est probablement une femme (car la valeur de F est plus proche de 1 que de 0).

Malgré les données fictives, cet exemple met en évidence le problème de la superposition et de l'utilité d'avoir une sortie plus riche que « oui » ou « non ». On peut aussi discuter de la pertinence de la frontière, car la séparation par une droite ne semble pas la mieux adaptée. En fait, le poids varie en fonction du carré de la taille (les zones ont une forme de parabole).

4.1.4. Opérations logiques : OR (OU), AND (ET), XOR (OU exclusif)

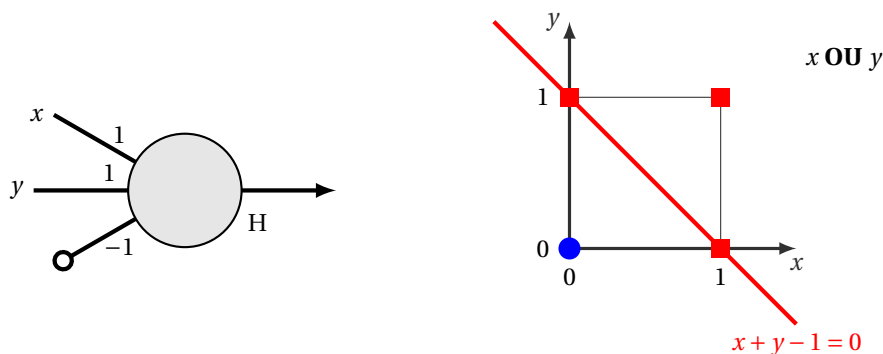
Un booléen est une variable qui peut prendre soit la valeur « vrai », soit la valeur « faux ». Dans la pratique, on associe 1 à « vrai » et 0 à « faux ».

- **Opération OU.** À partir de deux booléens x et y , on peut associer un nouveau booléen « x OU y » qui est vrai lorsque x est vrai ou y est vrai. Graphiquement, on représente toutes les configurations associées à « x OU y » par un diagramme. Un rond bleu en position (x, y) signifie que « x OU y » est faux (le résultat vaut 0), un carré rouge que « x OU y » est vrai (le résultat vaut 1).
- **Opération ET.** De la même manière, on peut représenter l'opération « x ET y » qui renvoie « vrai » uniquement si x et y sont vrais.
- **Opération OU exclusif.** Enfin, le ou exclusif, noté « x OUex y », qui est vrai lorsque x ou y est vrai, mais pas les deux en même temps.

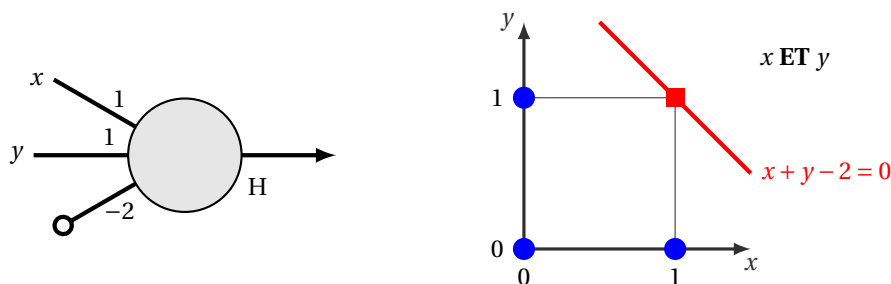


Ces trois opérations sont-elles réalisables par un perceptron ?

Opération OU. Cela revient à séparer les ronds bleus des carrés rouges. C'est possible avec le perceptron de poids $a = 1$, $b = 1$, $c = -1$. Par exemple, si $x = 0$ et $y = 1$ alors, on calcule $1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 - 1 = 0 \geq 0$. Composée avec la fonction marche de Heaviside, la fonction $F(x, y)$ définie par le perceptron renvoie dans ce cas 1 (« vrai »). Si $x = 0$ et $y = 0$, alors $1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 - 1 = -1 < 0$ et $F(x, y) = 0$ (« faux »).



Opération ET. On peut également réaliser l'opération « x ET y » en choisissant les poids $a = 1$, $b = 1$, $c = -2$.



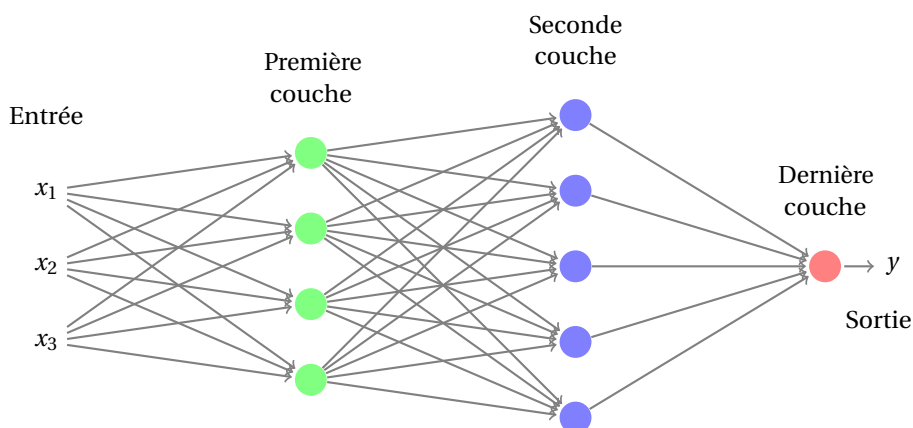
Remarque : d'un point de vue numérique, si on considère des valeurs réelles pour x et y , notre perceptron « ET » n'est pas numériquement très stable. Par exemple avec $x = 0.9$ et $y = 0.9$, on calcule $x + y - 2 = -0.2$ et la sortie est 0, mais comme x et y sont proches de 1, on aimerait que la sortie soit 1. Il suffit de changer un peu les paramètres : prenons $a = 1$, $b = 1$ et $c = -1.5$, alors $x + y - 1.5 = 0.3$ et cette fois la sortie est 1.

Opération OU exclusif. Le ou exclusif est-il réalisable par un perceptron ? Cette fois la réponse est non car il n'existe pas de droite qui sépare les ronds bleus des carrés rouges. Autrement-dit, il n'existe pas de perceptron (affine, à deux entrées et de fonction d'activation la fonction marche de Heaviside) qui réalise le « ou exclusif ».

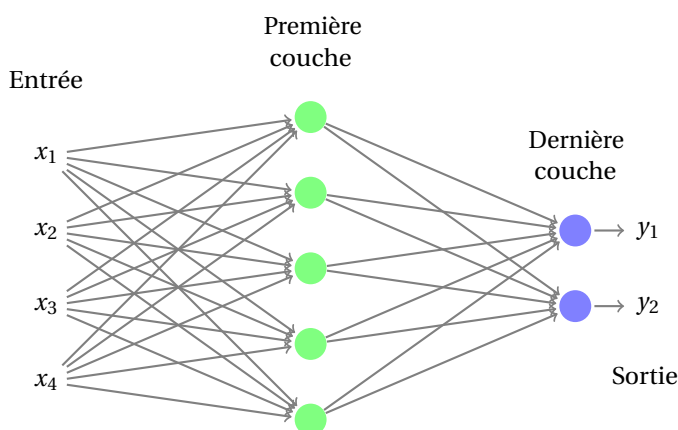
Un neurone tout seul est trop élémentaire pour résoudre certains problèmes, comme par exemple le « ou exclusif ». Comment faire mieux ? C'est ce que l'on va voir en connectant plusieurs neurones.

4.2. Réseau de neurones

Un réseau de neurones est la juxtaposition de plusieurs neurones, regroupés par couches.

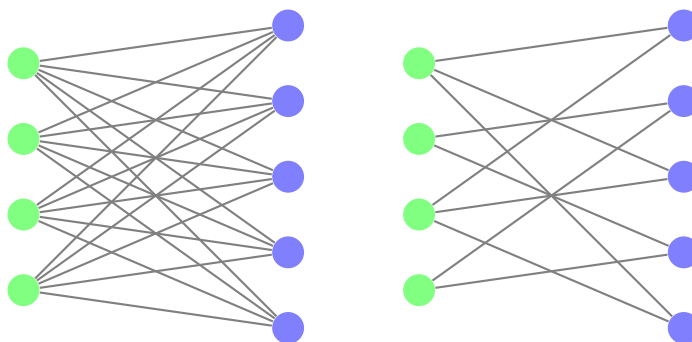


À un réseau de neurones on associe une fonction. Si à la dernière couche la fonction ne contient qu'un seul neurone (voir ci-dessus), cette fonction est $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $y = F(x_1, \dots, x_n)$ où $(x_1, \dots, x_n)$ est l'entrée et y est la sortie. Sinon (voir ci-dessous), la fonction est $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, $(y_1, \dots, y_p) = F(x_1, \dots, x_n)$ où $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ est l'entrée et $(y_1, \dots, y_p)$ est la sortie.



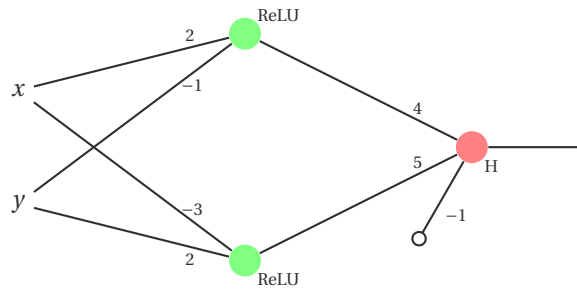
En résumé :

- chaque neurone est défini par ses poids et une fonction d'activation. Pour une couche donnée, on choisit toujours la même fonction d'activation. En général on choisit la même fonction d'activation pour tout le réseau, sauf peut-être pour la couche de sortie.
- Un neurone prend plusieurs valeurs en entrée mais ne renvoie qu'une seule valeur en sortie! Si ce neurone est connecté à plusieurs autres neurones, **il envoie la même valeur à tous**.
- On peut relier un neurone à tous les neurones de la couche suivante (voir ci-dessous figure de gauche). On dit que la seconde couche est dense ou complètement connectée. Mais on peut aussi choisir de ne relier que certains neurones entre eux (voir ci-dessous figure de droite). S'il n'y a pas d'arêtes du neurone A vers le neurone B, c'est que la sortie de A n'intervient pas comme entrée de B (cela revient à imposer un poids nul entre ces deux neurones).



EXEMPLE

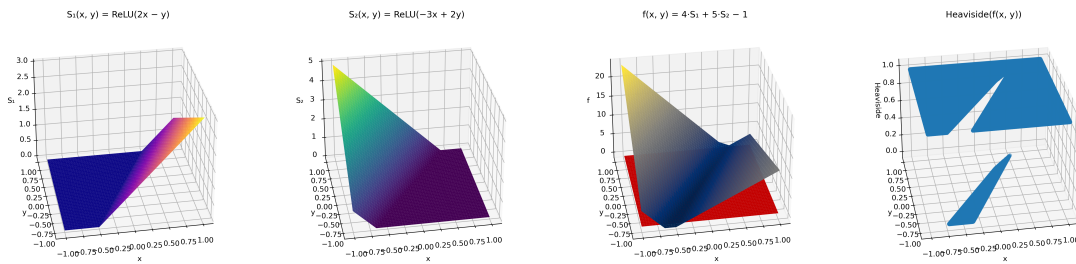
Voici un réseau de neurones à deux couches: 2 neurones linéaires sur la première couche (ayant pour fonction d'activation la fonction ReLU), 1 neurone affine sur la seconde couche (de fonction d'activation H).



- Le premier perceptron linéaire de la première couche renvoie $s_1 = \text{ReLU}(2x - y) = \begin{cases} 0 & \text{si } 2x - y < 0, \\ 2x - y & \text{si } 2x - y \geq 0. \end{cases}$
- Le deuxième perceptron linéaire de la première couche renvoie $s_2 = \text{ReLU}(-3x + 2y) = \begin{cases} 0 & \text{si } -3x + 2y < 0, \\ -3x + 2y & \text{si } -3x + 2y \geq 0. \end{cases}$
- L'unique perceptron affine de la deuxième couche renvoie $w = H(4s_1 + 5s_2 - 1) = \begin{cases} 0 & \text{si } 4s_1 + 5s_2 - 1 < 0, \\ 1 & \text{si } 4s_1 + 5s_2 - 1 \geq 0. \end{cases}$

En conclusion, ce réseau de neurones calcule :

$$H(4\text{ReLU}(2x - y) + 5\text{ReLU}(-3x + 2y) - 1)$$



- Exemple avec $x = 4$ et $y = 7$.
Si $x = 4$ et $y = 7$ alors on calcule la sortie de chaque neurone de la première couche. Ces sorties sont les entrées du neurone de la seconde couche. Pour le premier neurone, on effectue le calcul $2 \cdot 4 + (-1) \cdot 7 = 1 \geq 0$, le réel étant positif la fonction ReLU le garde inchangé : le premier neurone renvoie la valeur $s_1 = 1$. Le second neurone effectue le calcul $(-3) \cdot 4 + 2 \cdot 7 = 2 \geq 0$ et renvoie $s_2 = 2$. Le neurone de la couche de sortie reçoit en entrées s_1 et s_2 et effectue le calcul $4 \cdot 1 + 5 \cdot 2 - 1 = 13 \geq 0$. La fonction d'activation étant H, ce neurone renvoie 1. Ainsi $F(4, 7) = 1$.
- Exemple avec $x = 3$ et $y = 2$.
Si $(x, y) = (3, 2)$ alors $s_1 = 4$, par contre $s_2 = 0$ car $(-3) \cdot 3 + 2 \cdot 2 = -5 < 0$ et la fonction ReLU renvoie 0 (on dit que le neurone ne s'active pas). Les entrées du dernier neurone sont donc $s_1 = 4$ et $s_2 = 0$, ce neurone calcule $4 \cdot 4 + 5 \cdot 0 - 1 = 15 \geq 0$ et, après la fonction d'activation, renvoie 1. Donc $F(3, 2) = 1$.
- Exemple avec $x = \frac{1}{10}$ et $y = \frac{1}{10}$.
Si $(x, y) = (\frac{1}{10}, \frac{1}{10})$ alors $s_1 = \frac{1}{10}$ et $s_2 = 0$. Les entrées du dernier neurone sont donc $s_1 = \frac{1}{10}$ et $s_2 = 0$, ce neurone calcule $4 \cdot \frac{1}{10} + 5 \cdot 0 - 1 = -0.6 < 0$ et, après la fonction d'activation, renvoie 0. Donc $F(\frac{1}{10}, \frac{1}{10}) = 0$.

```
import sympy as sp

# Variables
x, y = sp.symbols('x y')

# Fonction ReLU et Heaviside
ReLU = lambda u: sp.Max(0, u)
Heaviside = lambda u: sp.Piecewise((0, u < 0), (1, u >= 0))
```

```

# Neurones (S1, S2)
s1 = ReLU(2 * x - y)
s2 = ReLU(-3 * x + 2 * y)

# Combinaison linéaire puis Heaviside
f = 4 * s1 + 5 * s2 - 1
F = Heaviside(f)

# Points à évaluer
k = sp.symbols('k')
points = [(4, 7), (3, 2), (1/sp.S(10), 1/sp.S(10))]

# Évaluation des points
for px, py in points:
    subs = {x: px, y: py}
    s1_val = s1.subs(subs)
    s2_val = s2.subs(subs)
    f_val = f.subs(subs)
    F_val = F.subs(subs)

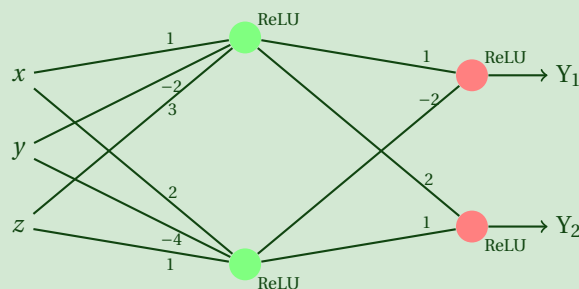
    print(f"Avec (x, y)=({px}, {py}), on a s_1(x,y)={s1_val},
    ↪ s_2(x,y)={s2_val}, 4s_1(x,y)+5s_2(x,y)-1={f_val}, F(x,y)={F_val}")

```

Avec $(x, y) = (4, 7)$, on a $s_1(x, y) = 1$, $s_2(x, y) = 2$, $4s_1(x, y) + 5s_2(x, y) - 1 = 13$, $F(x, y) = 1$
Avec $(x, y) = (3, 2)$, on a $s_1(x, y) = 4$, $s_2(x, y) = 0$, $4s_1(x, y) + 5s_2(x, y) - 1 = 15$, $F(x, y) = 1$
Avec $(x, y) = (1/10, 1/10)$, on a $s_1(x, y) = 1/10$, $s_2(x, y) = 0$, $4s_1(x, y) + 5s_2(x, y) - 1 = -3/5$,
↪ $F(x, y) = 0$

Exercice 4.3

Considérons le réseau de neurones représenté ci-dessous :



1. Décrire le réseau.
2. Calculer les valeurs de sortie (Y_1, Y_2) pour chacune des entrées (x, y, z) suivantes :
 $(0, 0, 0)$ $(1, 0, 0)$ $(1, -1, 1)$ $(3, 2, 1)$
3. Trouver un (x, y, z) tel que $Y_1 = 1$ et $Y_2 = 7$ (commencer par déterminer les valeurs de sorties s_1 et s_2 de la première couche).
4. Existe-t-il (x, y, z) tel que Y_2 soit nul, mais pas Y_1 ?

Correction

1. C'est un réseau à trois entrée et deux sortie.
La première couche est constituée de deux neurones linéaires de fonction d'activation ReLU :
 - le premier neurone réalise $s_1 = \text{ReLU}(x - 2y + 3z)$,
 - le deuxième neurone réalise $s_2 = \text{ReLU}(2x - 4y + z)$.

La dernière couche est constituée de deux neurones linéaires de fonction d'activation ReLU :

- le premier neurone réalise $Y_1 = \text{ReLU}(s_1 - 2s_2)$,
 - le deuxième neurone réalise $Y_2 = \text{ReLU}(2s_1 + s_2)$.
2.
 - Soit $(x, y, z) = (0, 0, 0)$. Alors $s_1 = \text{ReLU}(0) = 0$ et $s_2 = \text{ReLU}(0) = 0$ donc $Y_1 = \text{ReLU}(0) = 0$ et $Y_2 = \text{ReLU}(0) = 0$.
 - Soit $(x, y, z) = (1, 0, 0)$. Alors $s_1 = \text{ReLU}(1) = 1$ et $s_2 = \text{ReLU}(2) = 2$ donc $Y_1 = \text{ReLU}(1 - 4) = 0$ et $Y_2 = \text{ReLU}(2 + 2) = 4$.
 - Soit $(x, y, z) = (1, -1, 1)$. Alors $s_1 = \text{ReLU}(6) = 6$ et $s_2 = \text{ReLU}(7) = 7$ donc $Y_1 = \text{ReLU}(6 - 14) = 0$ et $Y_2 = \text{ReLU}(12 + 7) = 19$.
 - Soit $(x, y, z) = (3, 2, 1)$. Alors $s_1 = \text{ReLU}(2) = 2$ et $s_2 = \text{ReLU}(-1) = 0$ donc $Y_1 = \text{ReLU}(2 - 0) = 2$ et $Y_2 = \text{ReLU}(4 + 0) = 4$.
 3. Pour obtenir $Y_1 = 1$ et $Y_2 = 7$ il faut imposer $s_1 - 2s_2 = 1$ et $2s_1 + s_2 = 7$. Cela donne $s_1 = 3$ et $s_2 = 1$.
 Pour obtenir $s_1 = 3$ et $s_2 = 1$ il faut imposer $x - 2y + 3z = 3$ et $2x - 4y + z = 1$. Cela donne une infinité de solutions de la forme $(2\kappa, \kappa, 1)$. On peut donc prendre par exemple l'entrée $(2, 1, 1)$.
 4. Si $Y_2 = 0$ alors $2s_1 + s_2 = 0$. Comme $s_1, s_2 \geq 0$ (car sorties d'une fonction ReLU), alors $s_1 = s_2 = 0$ et $Y_1 = s_1 - 2s_2 = 0$.

```
import sympy as sp

# Variables d'entrée et Poids
x, y, z = sp.symbols('x y z')
a11, a12, a13 = sp.symbols('a11 a12 a13') # Poids pour le premier neurone de
↳ la première couche
a21, a22, a23 = sp.symbols('a21 a22 a23') # Poids pour le second neurone de
↳ la première couche
b11, b12 = sp.symbols('b11 b12')          # Poids pour la deuxième couche
↳ menant à Y1
b21, b22 = sp.symbols('b21 b22')          # Poids pour la deuxième couche
↳ menant à Y2

# Fonction ReLU
ReLU = lambda x: sp.Max(0, x)

# Calcul des neurones de la première couche
I_1 = ReLU(a11 * x + a12 * y + a13 * z)
I_2 = ReLU(a21 * x + a22 * y + a23 * z)

# Calcul des sorties finales
Y_1 = ReLU(b11 * I_1 + b12 * I_2)
Y_2 = ReLU(b21 * I_1 + b22 * I_2)

# Substituer les poids par leurs valeurs spécifiques
# Poids pour la première couche
weight_substitutions = {
    a11: 1, a12: -2, a13: 3, # Poids du premier neurone de la première
    ↳ couche
    a21: 2, a22: -4, a23: 1, # Poids du second neurone de la première couche
    b11: 1, b12: -2,         # Poids du premier neurone de la seconde couche
    b21: 2, b22: 1           # Poids du second neurone de la seconde couche
}

# Liste des points à évaluer
k = sp.var('k')
points = [(0, 0, 0), (1, 0, 0), (1, -1, 1), (3, 2, 1), (2*k, k, 1)]

# Itérer sur chaque point et afficher les résultats
for px, py, pz in points:
```



```

point_substitutions = {x: px, y: py, z: pz}
I_1_val = I_1.subs(**weight_substitutions, **point_substitutions)
I_2_val = I_2.subs(**weight_substitutions, **point_substitutions)
Y_1_val = Y_1.subs(**weight_substitutions, **point_substitutions)
Y_2_val = Y_2.subs(**weight_substitutions, **point_substitutions)

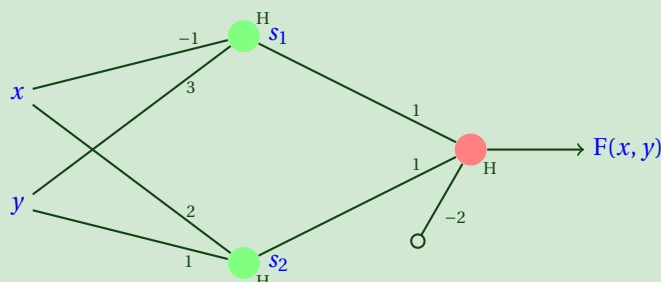
print(f"Avec (x, y, z) = ({px}, {py}, {pz}), on a s_1 = {I_1_val}, s_2 = {I_2_val}, Y_1 = {Y_1_val}, Y_2 = {Y_2_val}")

```

Avec $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, on a $s_1 = 0$, $s_2 = 0$, $Y_1 = 0$, $Y_2 = 0$
 Avec $(x, y, z) = (1, 0, 0)$, on a $s_1 = 1$, $s_2 = 2$, $Y_1 = 0$, $Y_2 = 4$
 Avec $(x, y, z) = (1, -1, 1)$, on a $s_1 = 6$, $s_2 = 7$, $Y_1 = 0$, $Y_2 = 19$
 Avec $(x, y, z) = (3, 2, 1)$, on a $s_1 = 2$, $s_2 = 0$, $Y_1 = 2$, $Y_2 = 4$
 Avec $(x, y, z) = (2k, k, 1)$, on a $s_1 = 3$, $s_2 = 1$, $Y_1 = 1$, $Y_2 = 7$

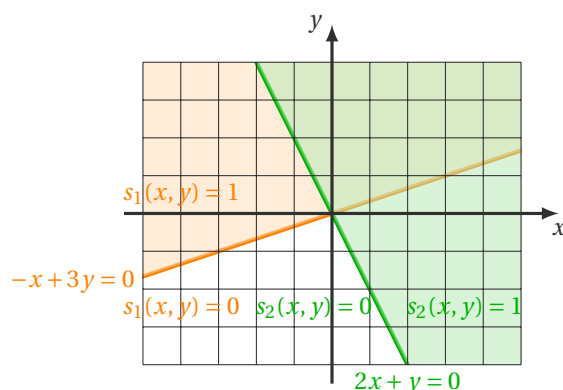
Exercice 4.4 (Neurone ET $\rightsquigarrow$ intersection)

Étudier le réseau de 3 neurones suivant : deux sur la première couche et un sur la seconde. La fonction d'activation est partout la fonction marche de Heaviside. Combien vaut la fonction associée F selon l'entrée (x, y) ? Quelle interprétation géométrique peut-on donner au neurone de sortie?

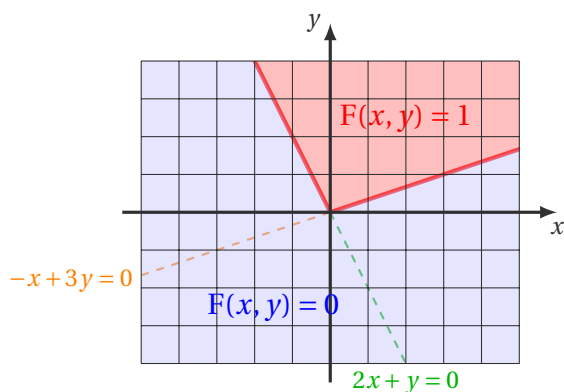


Correction

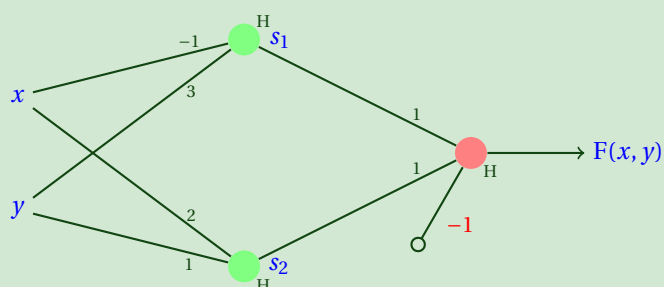
On commence par calculer les sorties des neurones de la première couche. Pour le premier neurone la sortie s_1 dépend du signe de $-x + 3y$. Si $-x + 3y \geq 0$ alors $s_1(x, y) = 1$, sinon $s_1(x, y) = 0$. Donc pour les points (x, y) situés au-dessus de la droite d'équation $-x + 3y = 0$, on a $s_1(x, y) = 1$. De même pour le second neurone, on a $s_2(x, y) = 1$ pour les points situés au-dessus de la droite $2x + y = 0$. Voir la figure ci-dessous.



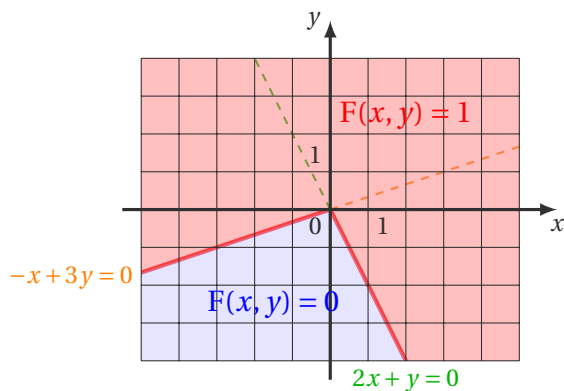
On reconnaît dans le neurone de sortie un neurone qui réalise le « ET ». C'est pourquoi l'ensemble des points pour lesquels F vaut 1 est l'intersection des deux demi-plans en lesquels s_1 et s_2 valent 1. Ainsi $F(x, y) = 1$ dans un secteur angulaire et $F(x, y) = 0$ ailleurs. Voir la figure ci-dessous.

**Exercice 4.5 (Neurone OU $\rightsquigarrow$ union)**

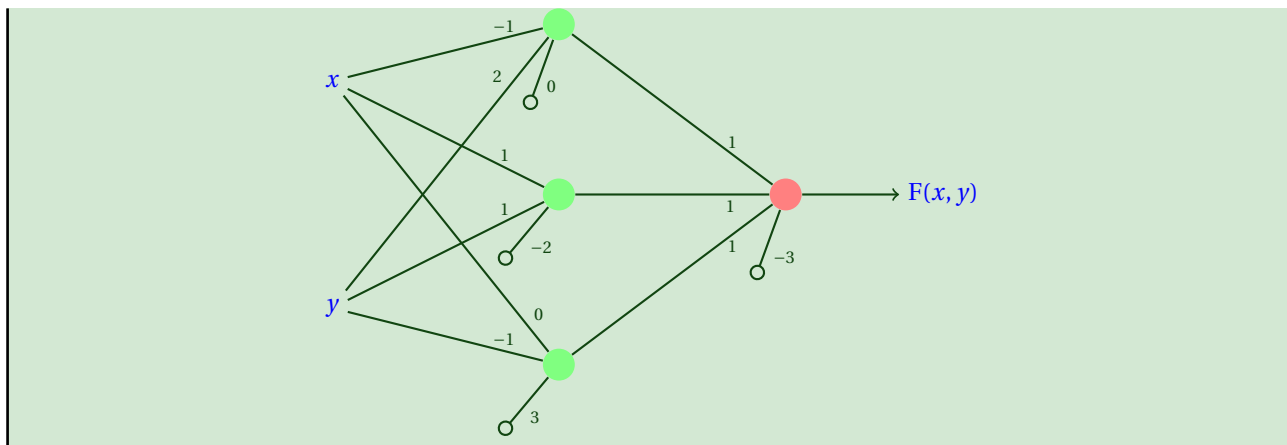
On reprend la même architecture que l'exemple précédent, mais en changeant les poids du neurone de sortie qui réalise cette fois l'opération « OU ». Quelle interprétation géométrique peut-on donner au neurone de sortie ?

**Correction**

L'ensemble des points pour lesquels F vaut 1 est maintenant l'union des deux demi-plans en lesquels s_1 et s_2 valent 1.

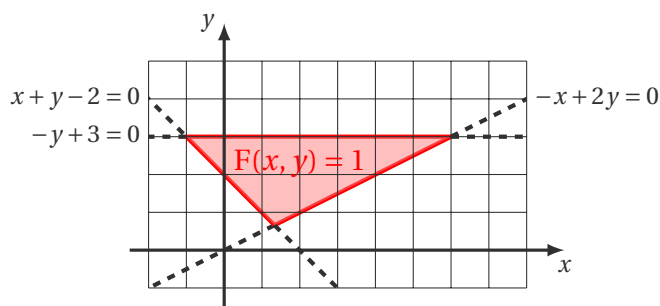
**Exercice 4.6 (Neurone ET $\rightsquigarrow$ intersection)**

Étudier le réseau de neurones suivant (la fonction d'activation est H partout). Quelle interprétation géométrique peut-on donner au neurone de sortie ?

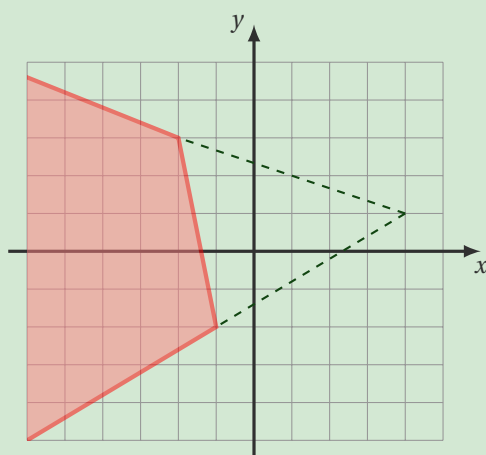
**Correction**

Chaque neurone de la première couche délimite un demi-plan. Ce sont les demi-plans $-x + 2y \geq 0$, $x + y - 2 \geq 0$ et $-y + 3 \geq 0$.

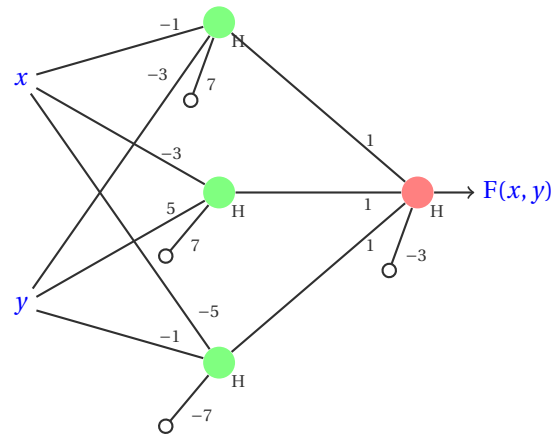
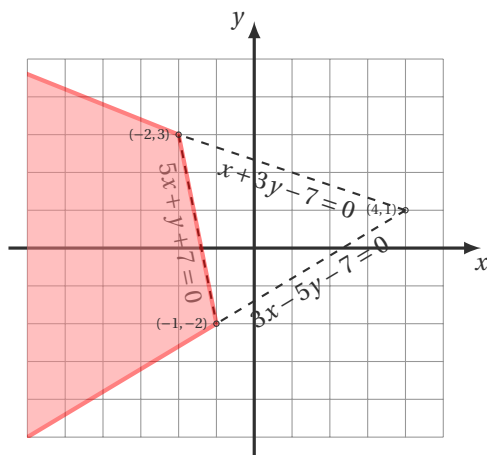
Le neurone de sortie est un neurone qui réalise l'opération « ET » : il s'active uniquement si les trois précédents neurones sont activés. Ainsi la sortie finale $F(x, y)$ vaut 1 si et seulement si (x, y) appartient simultanément aux trois demi-plans.

**Exercice 4.7**

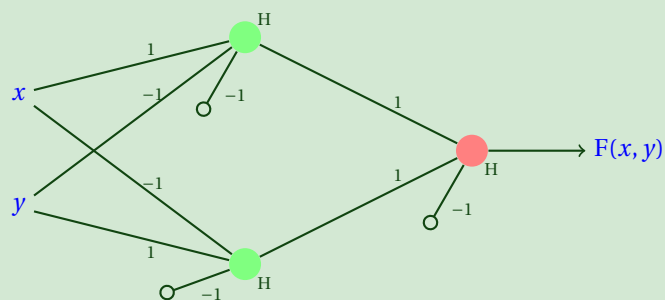
En utilisant les idées de l'exemple précédent et pour le dessin ci-dessous, trouver un réseau de neurones dont la fonction F vaut 1 pour la zone colorée et 0 ailleurs.

**Correction**

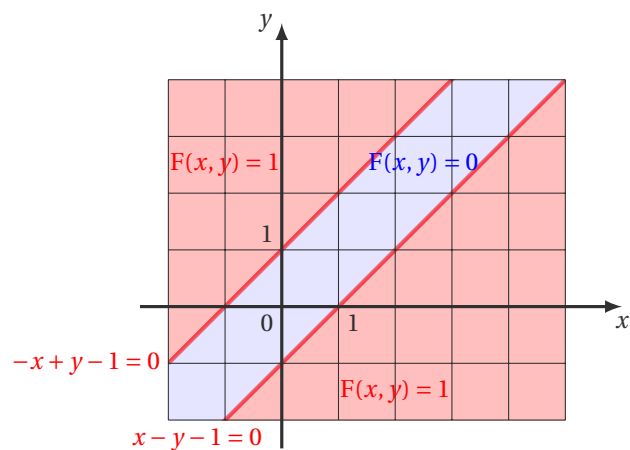
On remarque que la région est délimitée par trois droites. Pour trouver leurs équations on note qu'elles s'intersectent en $(-2, 3)$, $(4, 1)$ et $(-1, -2)$. La partie coloriée correspond à l'intersection des demi-plans $-x - 3y + 7 \geq 0$, $-3x + 5y + 7 \geq 0$ et $-5x - y - 7 \geq 0$. Un réseau de neurones qui réalise cette opération est donc le suivant.

**Exercice 4.8 (OU exclusif (XOR))**

Étudier le réseau suivant et en donner une interprétation géométrique.

**Correction**

Nous avons vu qu'un seul neurone ne permet pas de réaliser la fonction associée au « OU exclusif ». Le réseau de neurones proposé sépare le plan en trois parties, le secteur central en lequel la fonction associée au réseau vaut 0, alors que la fonction vaut 1 partout ailleurs (y compris sur la frontière rouge).



Ce réseau permet d'obtenir une valeur $F(x, y) = 1$ en $(1, 0)$ et $(0, 1)$ et une valeur $F(x, y) = 0$ en $(0, 0)$ et $(1, 1)$. L'idée de ce réseau vient du fait que l'opération « OU exclusif » est une combinaison de « OU » et de « ET » :

$$x \text{ OUex } y = (x \text{ ET non } y) \text{ OU } (\text{non } x \text{ ET } y).$$

Théorème d'approximation universelle Un résultat dû à Cybenko en 1989 (raffiné par Hornik en 1991) nous dit que toute fonction continue $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur un intervalle fermé et borné peut être approchée, avec une précision arbitraire, par un réseau de neurones formé d'une seule couche intermédiaire (à condition d'utiliser un nombre suffisant

de neurones dans cette couche). Que signifie « approcher d'aussi près que l'on veut la fonction f »? C'est dire que pour chaque $\epsilon > 0$, il existe une fonction F (ici issue d'un réseau de neurones), telle que :

$$\text{pour tout } x \in [a, b] \quad |f(x) - F(x)| < \epsilon.$$

C'est l'approximation uniforme des fonctions.

Cependant, ce résultat est à modérer par la pratique : le nombre de neurones nécessaire dans cette couche intermédiaire est, dans beaucoup de cas, colossal, ce qui rend les réseaux de neurones à une seule couche cachée peu efficaces.

La solution est alors d'empiler les couches cachées, créant ainsi ce que l'on appelle maintenant un réseau de neurones profond : le DEEP LEARNING.

On peut interpréter un réseau de neurones multi-couche en considérant que la sortie de chaque couche intermédiaire est une nouvelle représentation des données.

4.3. Calcul des poids d'un réseau de neurones

Considérons un réseau de neurones $\mathcal{R}$ ayant

- une seule sortie,
- n entrées $(x_1, \dots, x_n)$
- m poids $a_1, \dots, a_m$ (l'ensemble des coefficients et des biais, toutes couches confondus).

Nous pouvons associer trois fonctions à ce réseau :

- si les poids sont fixés, le réseau $\mathcal{R}$ définit la fonction

$$\begin{aligned} F: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto F(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

- si les entrées sont fixées, on pourrait considérer que ce même réseau $\mathcal{R}$ définit la fonction

$$\begin{aligned} \tilde{F}: \mathbb{R}^m &\rightarrow \mathbb{R} \\ (a_1, \dots, a_m) &\mapsto \tilde{F}(a_1, \dots, a_m) \end{aligned}$$

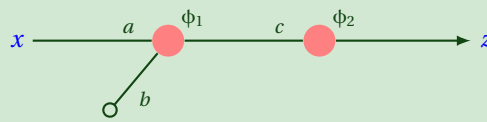
- pour concilier les deux points de vue (entrées et poids), on dira qu'un réseau de neurones ayant n entrées $(x_1, \dots, x_n)$ et m poids $(a_1, \dots, a_m)$ définit la fonction

$$\begin{aligned} \hat{F}: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_m) &\mapsto \hat{F}(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_m) \end{aligned}$$

Exercice 4.9

Voici un réseau très simple avec

- une entrée x , une sortie $F(x)$,
- trois poids a, b, c ,
- des fonctions d'activation (plutôt fantaisistes) $\phi_1: u \mapsto u^2$ et $\phi_2: v \mapsto \ln(v)$.



1. Écrire explicitement les fonctions F , $\tilde{F}$ et $\hat{F}$.
2. Calculer $\nabla \hat{F}$.

Correction

Nous pouvons associer trois fonctions à ce réseau :

$$\begin{aligned} F: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto F(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{F}: \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (a, b, c) &\mapsto \tilde{F}(a, b, c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{F}: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x; a, b, c) &\mapsto \hat{F}(x; a, b, c) \end{aligned}$$

- La première couche contient un seul perceptron affine $s = \phi_1(ax + b) = (ax + b)^2$.
- La deuxième couche contient un seul perceptron linéaire $z = \phi_2(cs) = \ln(cs)$.
- On a donc $z = \phi_2(c\phi_1(ax + b)) = \ln(c(ax + b)^2) = \ln(c) + 2\ln(ax + b)$.

On a alors

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{F}}{\partial a} &= \frac{\partial (\ln(c) + 2\ln(ax + b))}{\partial a} = 2 \frac{x}{ax + b} \\ \frac{\partial \tilde{F}}{\partial b} &= \frac{\partial (\ln(c) + 2\ln(ax + b))}{\partial b} = 2 \frac{1}{ax + b} \\ \frac{\partial \tilde{F}}{\partial c} &= \frac{\partial (\ln(c) + 2\ln(ax + b))}{\partial c} = \frac{1}{c}\end{aligned}$$

Pour comprendre comment fonctionne la dérivation automatique, écrivons explicitement les fonctions de pré-activation :

$$x \xrightarrow{\ell_1} y \xrightarrow{\phi_1} u \xrightarrow{\ell_2} v \xrightarrow{\phi_2} w$$

avec

$$\ell_1(x; a, b) = ax + b, \quad \phi_1(y) = y^2, \quad \ell_2(u; c) = cu; \quad \phi_2(v) = \ln(v).$$

On a alors $z = \hat{F}(x; a, b, c) = \phi_2(\ell_2(\phi_1(\ell_1(x; a, b)); c))$ et on peut dériver cette fonction par rapport aux poids :

$$\begin{aligned}\hat{F}(x; a, b, c) &= \phi_2(\ell_2(\phi_1(\ell_1(x; a, b)); c)) \\ \frac{\partial \hat{F}}{\partial a}(x; a, b, c) &= \phi_2'(\ell_2(\phi_1(\ell_1(x; a, b)); c)) \cdot \frac{\partial \ell_2}{\partial u}(\phi_1(\ell_1(x; a, b)); c) \cdot \phi_1'(\ell_1(x; a, b)) \cdot \frac{\partial \ell_1}{\partial a}(x; a, b) \\ \frac{\partial \hat{F}}{\partial b}(x; a, b, c) &= \phi_2'(\ell_2(\phi_1(\ell_1(x; a, b)); c)) \cdot \frac{\partial \ell_2}{\partial u}(\phi_1(\ell_1(x; a, b)); c) \cdot \phi_1'(\ell_1(x; a, b)) \cdot \frac{\partial \ell_1}{\partial b}(x; a, b) \\ \frac{\partial \hat{F}}{\partial c}(x; a, b, c) &= \phi_2'(\ell_2(\phi_1(\ell_1(x; a, b)); c)) \cdot \frac{\partial \ell_2}{\partial c}(\phi_1(\ell_1(x; a, b)); c)\end{aligned}$$

On remarque que beaucoup de termes se répètent dans ces dérivées et il suffit de les calculer une fois pour toutes. En particulier, pour les ℓ_1 , ℓ_2 , ϕ_1 et ϕ_2 de notre énoncé, on a besoin des dérivées suivantes :

$$\begin{aligned}\phi_1'(\ell_1(x; a, b)) &= 2\ell_1(x; a, b), & \frac{\partial \ell_1}{\partial a}(x; a, b) &= x, & \frac{\partial \ell_2}{\partial u}(\phi_1(\ell_1(x; a, b)); c) &= c, \\ \phi_2'(\ell_2(\phi_1(\ell_1(x; a, b)); c)) &= \frac{1}{\ell_2(\phi_1(\ell_1(x; a, b)); c)}, & \frac{\partial \ell_1}{\partial b}(x; a, b) &= 1, & \frac{\partial \ell_2}{\partial c}(\phi_1(\ell_1(x; a, b)); c) &= \phi_1(\ell_1(x; a, b)).\end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{F}}{\partial a}(x; a, b, c) &= \frac{1}{\ell_2(\phi_1(\ell_1(x; a, b)); c)} \cdot c \cdot 2\ell_1(x; a, b) \cdot x = \frac{1}{c(ax + b)^2} \cdot c \cdot 2(ax + b) \cdot x = 2 \frac{x}{ax + b} = \frac{\partial \tilde{F}}{\partial a}(a, b, c) \\ \frac{\partial \hat{F}}{\partial b}(x; a, b, c) &= \frac{1}{\ell_2(\phi_1(\ell_1(x; a, b)); c)} \cdot c \cdot 2\ell_1(x; a, b) \cdot 1 = \frac{1}{c(ax + b)^2} \cdot c \cdot 2(ax + b) \cdot 1 = 2 \frac{1}{ax + b} = \frac{\partial \tilde{F}}{\partial b}(a, b, c) \\ \frac{\partial \hat{F}}{\partial c}(x; a, b, c) &= \frac{1}{\ell_2(\phi_1(\ell_1(x; a, b)); c)} \cdot \phi_1(\ell_1(x; a, b)) = \frac{1}{c(ax + b)^2} \cdot (ax + b)^2 = \frac{1}{c} = \frac{\partial \tilde{F}}{\partial c}(a, b, c)\end{aligned}$$

4.3.1. Rétropropagation, apprentissage et test

La rétropropagation, c'est le calcul des poids optimaux d'un réseau de neurones par rapport à une erreur donnée. Pour ce faire, il est nécessaire d'entraîner le réseau sur un ensemble de données constitué de couples d'entrées et de sorties attendues, ce qui constitue la phase d'apprentissage.

Le processus commence par l'initialisation des neurones avec des poids choisis aléatoirement. Ensuite, l'algorithme tente de minimiser l'écart entre les résultats souhaités et ceux effectivement produits par le modèle. Cela se fait

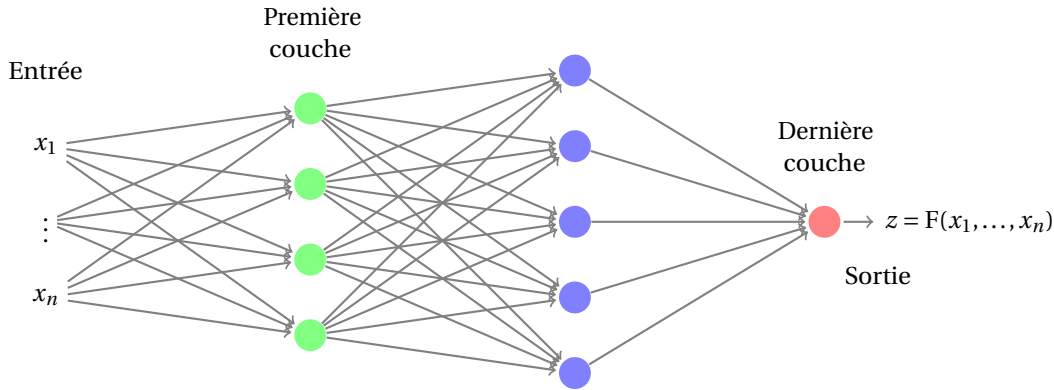
en calculant le gradient de cette erreur et en appliquant l'algorithme de descente de gradient. Ce processus est répété jusqu'à ce que des poids appropriés soient trouvés. Cette approche est souvent désignée sous le terme de **rétropropagation du gradient** ou **backpropagation**.²

La rétropropagation permet ainsi d'ajuster efficacement les poids des neurones, en utilisant les informations sur l'erreur pour optimiser les performances du réseau sur l'ensemble des données d'apprentissage.

- **Définition du réseau**

Soit $\mathcal{R}$ un réseau de neurones, défini par son architecture (nombre de couches et nombre de neurones par couche), ses fonctions d'activation, ainsi que l'ensemble $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ des poids de tous les neurones.

À ce réseau $\mathcal{R}$ on associe une fonction $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ où n est la dimension des entrées (celles de la première couche) et p le nombre de neurones de la couche de sortie. Pour simplifier, nous supposons qu'il n'y a qu'une seule sortie, c'est-à-dire $p = 1$, ce qui donne $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.



- **Préparation des données.** Pour entraîner un réseau de neurones et évaluer sa performance, il faut de diviser les données disponibles en deux ensembles : un ensemble d'apprentissage (ou *training set*) et un ensemble de test (ou *test set*). On dispose donc de données $\{(X_i, z_i)\}_i$ où chaque entrée $X_i \in \mathbb{R}^n$ (avec $X_i = (x_1, \dots, x_n)$) correspond à une observation et $z_i \in \mathbb{R}$ est la sortie attendue. Pour construire et évaluer le modèle, on divise cet ensemble initial en deux sous-ensembles distincts :
 - Ensemble d'apprentissage $\mathcal{A}$: il contient une fraction (généralement entre 70% et 80%) des données. Notons N sa cardinalité. Ces données sont utilisées pour ajuster les poids $\mathbf{a}$ du réseau de neurones pendant la phase d'apprentissage, afin que le modèle apprenne à associer les entrées X_i aux sorties z_i .
 - Ensemble de test $\mathcal{B}$: il regroupe le reste des données. Cet ensemble n'est pas utilisé pendant l'entraînement, mais sert à évaluer la capacité du modèle à généraliser, c'est-à-dire à effectuer des prédictions correctes sur des données qu'il n'a jamais vues auparavant.
- **Phase d'apprentissage :** l'objectif est de déterminer les poids $\mathbf{a}$ afin que la fonction F satisfasse $F(X_i) \simeq z_i$ pour tout $i = 1, \dots, N$. On cherche donc les poids $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots)$ qui minimisent l'erreur E , considérée comme une fonction des poids $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots)$. On utilise typiquement la méthode de la descente de gradient dont le principe est le suivant :
 - Tout d'abord, on choisit la fonction d'erreur. Dans nos exemples elle sera celle de type "moindres carrés" :

$$E = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E_i \quad \text{avec} \quad E_i = (F(X_i) - z_i)^2.$$

- On part de poids initiaux $\mathbf{a}_0 = (a_1, a_2, \dots)$ choisis aléatoirement. On fixe un pas δ et les poids $\mathbf{a}_k$ sont mis à jour par la récurrence $\mathbf{a}_{k+1} = \mathbf{a}_k - \delta \nabla E(\mathbf{a}_k)$. L'erreur $E(\mathbf{a}_k)$ diminue à chaque itération, et le processus s'arrête après un nombre prédéterminé d'itérations.

Cette méthode d'optimisation est efficace pour des fonctions convexes, comme la fonction d'erreur choisie. Dans ce cas, elle converge vers un minimum global (mais la vitesse dépend du choix du point de départ et du pas). Pour les fonctions non-convexes, comme certaines autres fonctions d'erreur, il n'y a pas de garantie de convergence vers un minimum global, et le processus peut aboutir à un minimum local.

Le gradient ∇E est calculé à partir de la relation $\nabla E = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \nabla E_i$, où chaque ∇E_i est donné par les dérivées partielles des poids a_j :

$$\frac{\partial E_i}{\partial a_j}(X_i) = 2 \frac{\partial F}{\partial a_j}(X_i) (F(X_i) - z_i).$$

2. Rumelhart, D. E., Hinton, G. E., & Williams, R. J. (1986). Learning representations by back-propagating errors. *nature*, 323(6088), 533-536.

Dans nos exemples, le gradient sera calculé manuellement, mais en pratique, on utilise la “différenciation automatique” (AutoDiff, ou AD), une méthode permettant de calculer les dérivées de manière efficace dans un langage de programmation. Cette méthode surpasse la différenciation symbolique, qui peut être complexe à manipuler, et la différenciation numérique, qui peut être instable.

• **Phase de test**

- Une fois le modèle entraîné (les poids **a** déterminés pour modéliser au mieux les données $\mathcal{A}$), on vérifie d’abord si le modèle reproduit correctement les données d’apprentissage, en vérifiant que $F(X_i) \approx z_i$ pour les données de $\mathcal{A}$.
- L’objectif réel d’un réseau de neurones est de faire des prédictions pour de nouvelles valeurs. On va donc tester sa capacité à prédire pour des valeurs jamais rencontrées auparavant, typiquement sur l’ensemble de données de test $\mathcal{B}$, non utilisé pendant l’apprentissage, pour vérifier la qualité des prédictions.

Remarque (Différentes fonctions d’erreurs)

Soit des données $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^N$. Les valeurs y_i sont fournies par observations ou expérimentations. On cherche une fonction F , par exemple issue d’un réseau de neurones, telle que $F(x_i) \approx y_i$. Pour savoir si l’objectif est atteint, on mesure l’écart entre ces valeurs mais lequel?

- Premier exemple : l’*Erreur quadratique moyenne*

$$E = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - F(x_i))^2.$$

C’est la formule la plus classique (en anglais *minimal squared error* ou *mse*). Bien entendu $E \geq 0$ quels que soit les $F(x_i)$ et $E = 0$ si et seulement si $y_i = F(x_i)$ pour tous les $i = 1, \dots, N$. C’est presque la formule que l’on a utilisée pour la régression linéaire (il n’y avait pas le facteur $\frac{1}{N}$).

- Deuxième exemple : l’*Erreur absolue moyenne*.

$$E = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |y_i - F(x_i)|.$$

C’est une formule plus naturelle, mais moins agréable à manipuler à cause de la valeur absolue.

Noter que pour ces deux formules, l’erreur globale E est la moyenne d’erreurs locales $E_i = (y_i - F(x_i))^2$ (ou bien $E_i = |y_i - F(x_i)|$). Les erreurs locales sont indépendantes les unes des autres.

Il existe d’autres formules d’erreur, en particulier si la sortie attendue est du type 0 ou 1 ou bien si la sortie produite est une probabilité $0 \leq p \leq 1$.

Remarque (Algorithme de la descente de gradient classique)

Cette méthode a pour but de trouver un minimum d’une fonction d’une ou plusieurs variables le plus rapidement possible. Comme on sait que le vecteur opposé au gradient indique une direction vers des plus petites valeurs de la fonction, il suffit de suivre d’un pas cette direction et de recommencer.

Soit une fonction

$$\begin{aligned} \tilde{F} : \mathbb{R}^m &\rightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{a} = (a_1, \dots, a_m) &\mapsto \tilde{F}(\mathbf{a}) \end{aligned}$$

On calcule une suite de points $\{\mathbf{a}_k\}_k$ par récurrence de la façon suivante :

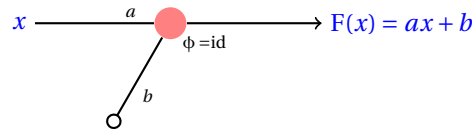
$$\begin{cases} \mathbf{a}_0 \in \mathbb{R}^m & \text{donné,} \\ \mathbf{a}_{k+1} = \mathbf{a}_k - \delta_k \nabla \tilde{F}(\mathbf{a}_k) & \text{avec un pas } \delta_k \text{ à choisir.} \end{cases}$$

On s’arrête lorsque $\|\nabla \tilde{F}(\mathbf{a}_k)\| \leq \epsilon$ ou lorsqu’on a atteint un nombre d’itérations prédéterminé.

4.4. Application ① : l’approximation au sens des moindres carrées par un réseau de neurones

Commençons par établir un lien entre la régression linéaire (qu’il faudrait appeler affine) et un neurone.

Soit des données $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^N$. Le problème de la régression linéaire consiste à trouver les coefficients a et b , tels que la droite d'équation $F(x) = ax + b$ "décrit" au mieux ces données, c'est-à-dire tels que $F(x_i) \simeq y_i$. Pour cela, la méthode des moindres carrés demande à minimiser la somme des erreurs quadratiques $E = \sum_{i=1}^N E_i = \sum_{i=1}^N (y_i - F(x_i))^2$. Nous pouvons traduire ce problème en la recherche des poids a et b associés au perceptron suivant qui minimisent la même fonction erreur E :



Vocabulaire:

- Chaque x_i est une valeur qu'on peut passer comme *entrée*,
- y_i est la *sortie attendue* pour l'entrée $x = x_i$,
- $F(x_i) = \phi(ax_i + b) = ax_i + b$ est la *sortie produite* pour l'entrée $x = x_i$,
- $E_i = (y_i - F(x_i))^2$ est l'erreur pour l'entrée $x = x_i$,
- L'*erreur totale* est

$$E = \sum_{i=1}^N E_i = \sum_{i=1}^N (y_i - F(x_i))^2.$$

Exercice 4.10

Quel réseau de neurones correspond-il à la régression de l'exercice 3.2 portant sur l'approximation affine au sens des moindres carrés en deux variables?

Correction

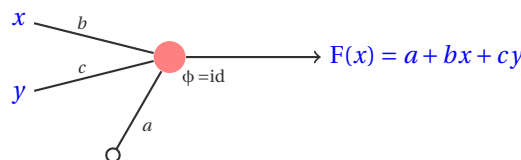
Nous devons adapter la structure du réseau de neurones pour représenter un modèle de la forme

$$F(x, y) = a + bx + cy$$

Un réseau de neurones simple qui modélise cette régression pourrait avoir une architecture comme suit

- Deux entrées: x et y .
- Une sortie qui est une combinaison affine de ces termes.

Le réseau de neurones peut être représenté graphiquement comme suit



Exercice 4.11 (Régression parabolique)

Quel réseau de neurones correspond-il à la régression parabolique?

Correction

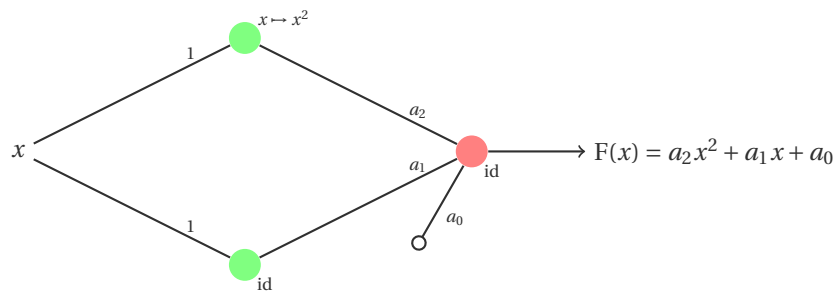
Pour obtenir une régression parabolique (ou régression quadratique), nous devons adapter la structure du réseau de neurones pour représenter un modèle de la forme

$$F(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Un réseau de neurones simple qui modélise cette régression pourrait avoir une architecture comme suit

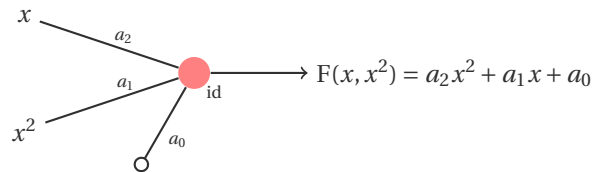
- Une entrée x .
- Une couche cachée à deux neurones
- Une sortie qui est une combinaison affine de ces termes.

Le réseau de neurones peut être représenté graphiquement comme suit



- **Entrée :** Le réseau reçoit une seule entrée x .
- **Couche cachée :**
 - Le premier neurone applique la fonction d'activation $\phi(x) = x^2$ avec un poids de 1, produisant le terme quadratique.
 - Le deuxième neurone applique l'identité $\phi(x) = x$ avec un poids de 1, produisant le terme linéaire.
- **Neurone de sortie :**
 - Applique la fonction identité à la combinaison linéaire $a_2x^2 + a_1x + a_0$, pour produire la fonction de régression $F(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$.

Attention : les poids de la première couche sont donnés, c'est pour cela qu'on préfère modéliser le problème de la régression parabolique par un seul perceptron :



Exercice 4.12

Quel réseau de neurones correspond-il à la régression polynomiale ?

Correction

Pour obtenir une régression polynomiale de degré n , nous pouvons utiliser un réseau de neurones avec une couche cachée comprenant n neurones, où chaque neurone correspond à un terme polynomial.

- **Entrée :** le réseau reçoit une seule entrée x .
- **Couche cachée :** chaque neurone i applique la fonction d'activation $\phi(x) = x^i$ pour $i = 1, 2, \dots, n$. Cela produit les termes polynomiaux $x^1, x^2, \dots, x^n$.
- **Neurone de sortie :** combine les termes $a_nx^n, a_{n-1}x^{n-1}, \dots, a_1x + a_0$, et un biais a_0 , pour produire la fonction de régression polynomiale

$$F(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0.$$

Ainsi, le réseau de neurones peut modéliser n'importe quel polynôme de degré n en utilisant des neurones avec des fonctions d'activation correspondant aux puissances de x .

Exercice 4.13 (Régression dans un espace vectoriel quelconque)

Quel réseau de neurones correspond-il à l'approximation au sens des moindres carrés dans l'espace engendré par $\{\varphi_1, \varphi_2\}$?

Correction

Nous devons adapter la structure du réseau de neurones pour représenter un modèle de la forme

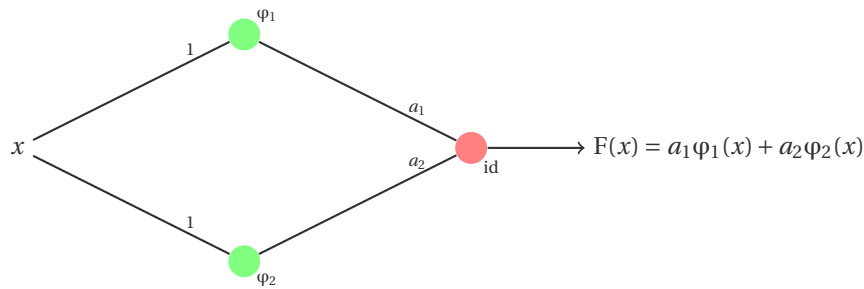
$$F(x) = a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x).$$

Un réseau de neurones simple qui modélise cette régression pourrait avoir une architecture comme suit

- Une entrée x .
- Une couche cachée à deux neurones

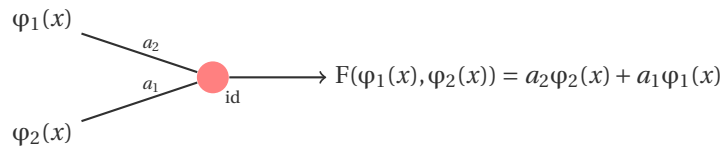
- Une sortie qui est une combinaison linéaire de ces termes.

Le réseau de neurones peut être représenté graphiquement comme suit



- **Entrée**: le réseau reçoit une seule entrée x .
- **Couche cachée**: le neurone i applique la fonction d'activation $\varphi_i(x)$ avec un poids de 1,
- **Neurone de sortie**: applique la fonction identité à la combinaison linéaire $\sum_i a_i \varphi_i(x)$, pour produire la fonction de régression

Attention: les poids de la première couche sont donnés, c'est pour cela qu'on préfère modéliser le problème de la régression dans un espace vectoriel de base $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ par un seul perceptron:



4.4.1. Un exemple complet : régression affine avec un réseau de neurones

Appliquons cette démarche au cas de la régression linéaire. Dans le jargon du *machine learning*, on dit que “on va entraîner un modèle linéaire pour apprendre à prédire la cible en fonction de l'unique feature.”

Soit $\{(X_i, Y_i)\}_{i=1}^N$ un ensemble de points dans le plan. Séparons cet ensemble en deux sous-ensembles: $\mathcal{A} \stackrel{\text{def}}{=} \{(X_i, Y_i)\}_{i=1}^N$ et $\mathcal{B} \stackrel{\text{def}}{=} \{(X_i, Y_i)\}_i$. Pour chaque point de notre jeu d'entraînement $\mathcal{A}$, le modèle fait une prédiction. En comparant cette prédiction à la cible (la “vraie” valeur), on obtient un écart.

Nous allons prendre une métrique classique pour les problèmes de régression, c'est-à-dire la moyenne des carrés des écarts (mse).

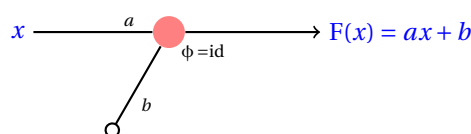
Notre modèle linéaire possède deux paramètres: le coefficient directeur de la droite (le poids), et l'ordonnée à l'origine (le biais). Il s'agit de trouver automatiquement les paramètres qui vont minimiser notre métrique.

Pour ce faire, on initialise les paramètres (plus au moins) au hasard, puis on applique la descente du gradient en minimisant une fonction de coût (ou erreur, ou encore risque). Ici, on va minimiser directement notre métrique; la fonction de coût et la métrique sont donc identiques.

Cet exemple de régression linéaire est utile pour comprendre, mais peu utilisé en pratique. En effet, pour un problème linéaire on peut simplement calculer le gradient une fois pour toutes, à l'aide d'une formule mathématique, et résoudre le problème (c'est ce que l'on a fait au chapitre précédent). Cela est permis par le fait que la fonction de coût a des bonnes propriétés (convexité), ce qui fait qu'il y a une unique solution optimale à notre problème, soit un unique minimum global. Néanmoins, la descente de gradient est bien plus générale, en ce qu'elle peut s'appliquer à des modèles bien plus complexes pour lesquels calculer le gradient n'est pas simple, ou bien la fonction de coût n'est pas totalement convexe.

1. Le problème

- **Définition de la fonction à ajuster**: on cherche une fonction affine $F(x) = ax + b$ ajustée à l'ensemble des points $\mathcal{A}$. Cette fonction peut être représentée par le réseau de neurones suivant



- **Définition de la fonction erreur et calcul de son gradient :** pour minimiser l'erreur au sens des moindres carrés, on minimise la somme des carrés des écarts verticaux :

$$E(a, b) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (F(X_i) - Y_i)^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (aX_i + b - Y_i)^2 \quad \text{avec} \quad (X_i, Y_i) \in \mathcal{A}.$$

Remarquons que $E(a, b) \geq 0$ pour tout a et b . Si tous les points sont alignés, il existe a et b tels que $E(a, b) = 0$. Sinon, on cherche le couple (a, b) qui minimise $E(a, b)$. Dans tous les cas, on cherche à résoudre le système d'équations $\frac{\partial E}{\partial a} = \frac{\partial E}{\partial b} = 0$:

$$\frac{\partial E}{\partial a}(a, b) = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N (aX_i + b - Y_i)X_i, \quad \frac{\partial E}{\partial b}(a, b) = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N (aX_i + b - Y_i).$$

2. **Phase d'entraînement :** dans cette phase on calcule les poids a et b par minimisation de l'erreur obtenue avec les données du jeu d'entraînement $\mathcal{A}$. Dans cet exemple simple nous pouvons calculer les poids analytiquement ou utiliser l'approche classique d'approximation par descente de gradient.

- **Calcul analytique du minimum :** lorsque F est affine (et E est l'erreur quadratique), on peut calculer explicitement le couple (a, b) en résolvant un système linéaire

$$\begin{cases} \frac{\partial E}{\partial a}(a, b) = 0, \\ \frac{\partial E}{\partial b}(a, b) = 0 \end{cases} \iff \begin{bmatrix} N & \sum_{i=1}^N X_i \\ \sum_{i=1}^N X_i & \sum_{i=1}^N X_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N Y_i \\ \sum_{i=1}^N X_i Y_i \end{bmatrix}.$$

C'est ce que l'on a fait au chapitre précédent.

- **Calcul approché par descente de gradient :** cette méthode, couramment utilisée en apprentissage automatique, permet de minimiser l'erreur même pour des modèles non linéaires. La suite de points $\{(a_k, b_k)\}_k$ est définie par récurrence :

$$\begin{cases} (a_0, b_0) \text{ donné,} \\ (a_{k+1}, b_{k+1}) = (a_k, b_k) - \delta \nabla E(a_k, b_k), \end{cases}$$

où δ est le pas d'apprentissage qu'il faut bien choisir.

3. **Phase de test :** on évalue l'erreur cette fois-ci sur les données de l'ensemble de test :

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (aX_i + b - Y_i)^2 \quad \text{avec} \quad (X_i, Y_i) \in \mathcal{B}.$$

EXEMPLE (RÉGRESSION AFFINE, POINTS ALIGNÉS)

Prenons d'abord l'exemple des trois points $A_1 = (0, 3)$, $A_2 = (2, 4)$ et $A_3 = (6, 6)$ qui sont alignés.

La fonction E (sans diviser par $N = 3$) s'écrit $E(a, b) = \sum_{i=1}^3 (aX_i + b - Y_i)^2$.

- **Calcul exacte de (a, b) par résolution du système linéaire :**

```
import sympy as sp
a, b = sp.symbols('a b')

A = [ (0,3), (2,4), (6,6) ]
E = sum([ (a*x+b-y)**2 for x,y in A ])
grad_E = [sp.diff(E, var) for var in (a, b)]

print(sp.solve(grad_E, [a,b]))
```

{a: 1/2, b: 3}

- **Calcul approché de (a, b) par descente de gradient :** partons arbitrairement de $(a_0, b_0) = (0, 1)$ (qui correspond à la droite horizontale d'équation $y = 1$). Au bout de 100 itérations, on obtient $a_{100} \simeq 0.501$ et $b_{100} \simeq 2.99$ (avec un gradient et une erreur presque nuls). C'est bien la droite $y = \frac{1}{2}x + 3$ qui passe par les trois points.

```

from tabulate import tabulate
import sympy as sp
a, b = sp.symbols('a b')

A = [ (0,3), (2,4), (6,6) ]
E = sum([ (a*x+b-y)**2 for x,y in A ])
grad_E = [sp.diff(E, var) for var in (a, b)]

values = []

# Set initial values and learning rate (delta)
iterations = 100
delta = 0.02
a_k, b_k = 0, 1

# Update a_k and b_k using gradient descent
for k in range(iterations + 1):
    grad_val = (grad_E[0].subs({a:a_k, b:b_k}), grad_E[1].subs({a:a_k,
        b:b_k}))
    norm_grad = sp.sqrt(grad_val[0]**2 + grad_val[1]**2)
    E_val = E.subs({a: a_k, b: b_k})
    if k%10==0:
        values.append((k, a_k, b_k, norm_grad, E_val))
    a_k = a_k - delta * grad_val[0]
    b_k = b_k - delta * grad_val[1]

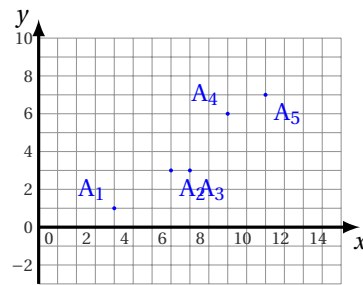
# Display the table
headers = ["Iter", "a_k", "b_k", "||∇(a_k, b_k)||", "E(a_k, b_k)"]
table = tabulate(values, headers, floatfmt=".5f")
print(table)

```

Iter	a_k	b_k	∇(a_k, b_k)	E(a_k, b_k)
0	0.00000	1.00000	74.72617	38.00000
10	0.70146	1.95049	3.14709	1.54491
20	0.62434	2.39789	1.65322	0.50817
30	0.57169	2.65359	0.95113	0.16823
40	0.54125	2.80069	0.54725	0.05569
50	0.52373	2.88532	0.31487	0.01844
60	0.51366	2.93402	0.18117	0.00610
70	0.50786	2.96204	0.10424	0.00202
80	0.50452	2.97816	0.05998	0.00067
90	0.50260	2.98743	0.03451	0.00022
100	0.50150	2.99277	0.01986	0.00007

EXEMPLE (RÉGRESSION AFFINE, POINTS NON ALIGNÉS)

Prenons maintenant les 5 points suivants $A_1 = (4, 1)$, $A_2 = (7, 3)$, $A_3 = (8, 3)$, $A_4 = (10, 6)$, $A_5 = (12, 7)$.



Ces 5 points sont à peu près alignés. La fonction E (sans diviser par $N = 5$) s'écrit $E(a, b) = \sum_{i=1}^5 (aX_i + b - Y_i)^2$.

- **Calcul exacte de (a, b) par résolution du système linéaire:**

```
import sympy as sp
a, b = sp.symbols('a b')

A = [ (4,1), (7,3), (8,3), (10,6), (12,7) ]
E = sum([ (a*x+b-y)**2 for x,y in A ])
grad_E = [sp.diff(E, var) for var in (a, b)]

sol = sp.solve(grad_E, [a,b])
print(f"a={sol[a]}≈{sol[a].evalf()}, b={sol[b]}≈{sol[b].evalf()}")
```

$a=145/184 \approx 0.788043478260870$, $b=-453/184 \approx -2.46195652173913$

- **Calcul approché de (a, b) par descente de gradient:** on ne choisit pas le point initial (a_0, b_0) complètement au hasard, car plus on part d'un point proche de la solution, plus la suite convergera rapidement. On utilise par exemple les coefficients qui correspondent à la droite qui passe par le premier point A_1 et le dernier point A_5 . Cette droite a pour équation $y = \frac{3}{4}x - 2$ et est déjà une droite qui approche assez bien les 5 points. Prenons cette droite comme point de départ, c'est-à-dire posons $(a_0, b_0) = (\frac{3}{4}, -2)$.

Pour avoir convergence, on doit utiliser un pas très petit, on choisira $\delta = 0.001$. La descente de gradient conduit au bout de 2000 itérations à $a \approx 0.78$ et $b \approx -2.40$.

```
from tabulate import tabulate
import sympy as sp
a, b = sp.symbols('a b')

A = [ (4,1), (7,3), (8,3), (10,6), (12,7) ]
E = sum([ (a*x+b-y)**2 for x,y in A ])
grad_E = [sp.diff(E, var) for var in (a, b)]

values = []

# Set initial values and learning rate (delta)
iterations = 2000
delta = 0.001
a_k, b_k = 3/sp.S(4), -2

# Update a_k and b_k using gradient descent
for k in range(iterations + 1):
    grad_val = (grad_E[0].subs({a:a_k, b:b_k}), grad_E[1].subs({a:a_k,
        ↪ b:b_k}))
    norm_grad = sp.sqrt(grad_val[0]**2 + grad_val[1]**2)
    E_val = E.subs({a: a_k, b: b_k})
    if k%200==0:
        values.append((k, a_k, b_k, norm_grad, E_val))
```

```

a_k = a_k - delta * grad_val[0]
b_k = b_k - delta * grad_val[1]

# Display the table
headers = ["Iter", "a_k", "b_k", "||∇(a_k, b_k)||", "E(a_k, b_k)"]
table = tabulate(values, headers, floatfmt=".5f")
print(table)

```

Iter	a_k	b_k	∇(a_k, b_k)	E(a_k, b_k)
0	0.75000	-2.00000	9.61769	1.31250
200	0.74634	-2.08301	0.37163	1.21758
400	0.75373	-2.15016	0.30577	1.19470
600	0.75981	-2.20542	0.25159	1.17921
800	0.76481	-2.25088	0.20700	1.16872
1000	0.76893	-2.28828	0.17032	1.16162
1200	0.77232	-2.31906	0.14014	1.15681
1400	0.77510	-2.34438	0.11530	1.15356
1600	0.77740	-2.36522	0.09487	1.15136
1800	0.77928	-2.38236	0.07806	1.14986
2000	0.78084	-2.39647	0.06423	1.14885

Pourquoi c'est ci-difficile de converger? Lorsque l'on dessine les lignes de niveau, on s'aperçoit que le minimum se trouve dans une région plate allongée. Cela signifie que, bien que le minimum soit unique, il existe beaucoup de points (a, b) tels que $E(a, b)$ soit proche de la valeur minimale $E(a_{\text{opt}}, b_{\text{opt}})$. De plus, ces points peuvent être assez éloignés de la solution: cela signifie que beaucoup de droites avec des coefficients très différents approchent la solution optimale. On peut améliorer la convergence en changeant le point de départ, mais ça reste une fonction difficile à optimiser.

```

import sympy as sp
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
a, b = sp.symbols('a b')

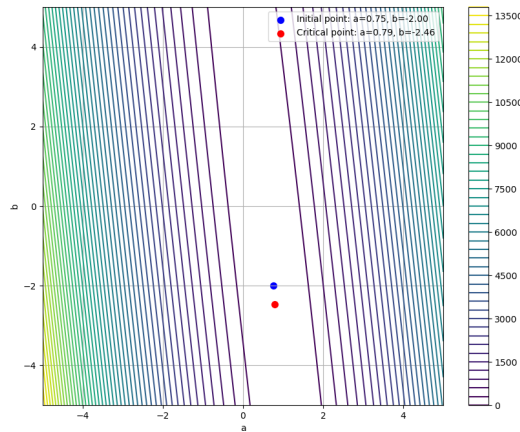
A = [(4, 1), (7, 3), (8, 3), (10, 6), (12, 7)]
E = lambda a,b : sum((a * x + b - y) ** 2 for x, y in A)
grad_E = [sp.diff(E(a,b), var) for var in (a, b)]
a_eval = sol[a].evalf()
b_eval = sol[b].evalf()

a_vals = np.linspace(-5, 5, 200)
b_vals = np.linspace(-5, 5, 200)
A_mesh, B_mesh = np.meshgrid(a_vals, b_vals)
E_vals = np.array([E(a, b) for a,b in zip(A_mesh,B_mesh)])

plt.figure(figsize=(10, 8))
contour = plt.contour(A_mesh, B_mesh, E_vals, levels=50, cmap='viridis')
plt.colorbar(contour)
plt.scatter(3/4, -2, color='blue', label=f"Initial point: a={3/4:.2f},
    ↪ b={-2:.2f}", s=50)
plt.scatter(a_eval, b_eval, color='red', label=f"Critical point:
    ↪ a={a_eval:.2f}, b={b_eval:.2f}", s=50)
plt.xlabel('a')
plt.ylabel('b')
plt.legend()
plt.grid(True)

```

```
plt.savefig('descente_non_alignes.png')
plt.show()
```



Centrer et normaliser les données avant d'appliquer la descente de gradient peut améliorer la convergence, car cela rend la fonction de coût plus isotrope, ce qui facilite la descente. Voici un code pour centrer et normaliser les données, effectuer la descente de gradient, et revenir aux coefficients initiaux.

```
import numpy as np
import sympy as sp
from tabulate import tabulate
a, b = sp.symbols('a b')

A = [ (4,1), (7,3), (8,3), (10,6), (12,7) ]
X,Y = zip(*A)

# Centrage et normalisation des données
X_mean = np.mean(X)
Y_mean = np.mean(Y)
X_std = np.std(X)
Y_std = np.std(Y)

X_normalized = (X - X_mean) / X_std
Y_normalized = (Y - Y_mean) / Y_std

E = sum((a * X_normalized[i] + b - Y_normalized[i]) ** 2 for i in
        range(len(X)))
grad_E = [sp.diff(E, var) for var in (a, b)]

values = []

# Set initial values and learning rate (delta)
iterations = 2000
delta = 0.001
a_k, b_k = 0, 0 # On part de (0,0) pour les données normalisées

# Update a_k and b_k using gradient descent
for k in range(iterations + 1):
    grad_val = (grad_E[0].subs({a:a_k, b:b_k}), grad_E[1].subs({a:a_k,
        b:b_k}))
```



```

norm_grad = sp.sqrt(grad_val[0]**2 + grad_val[1]**2)
E_val = E.subs({a: a_k, b: b_k})
if k%200==0:
    values.append((k, a_k, b_k, norm_grad, E_val))
a_k = a_k - delta * grad_val[0]
b_k = b_k - delta * grad_val[1]

# Display the table
headers = ["Iter", "a_k", "b_k", "||∇(a_k, b_k)||", "E(a_k, b_k)"]
table = tabulate(values, headers, floatfmt=".5f")
print(table)

# Récupération des coefficients a et b originaux
a_final = a_k * (Y_std / X_std)
b_final = b_k * Y_std + Y_mean - a_final * X_mean
print(f"Final coefficients: a ≈ {a_final:.5f}, b ≈ {b_final:.5f}")

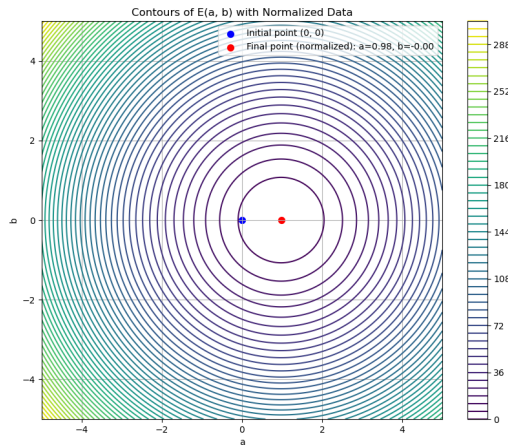
# Visualisation
import matplotlib.pyplot as plt
E = sp.lambdify((a, b), E, 'numpy')
a_vals = np.linspace(-5, 5, 200)
b_vals = np.linspace(-5, 5, 200)
A_mesh, B_mesh = np.meshgrid(a_vals, b_vals)
E_vals = E(A_mesh, B_mesh)

plt.figure(figsize=(10, 8))
contour = plt.contour(A_mesh, B_mesh, E_vals, levels=50, cmap='viridis')
plt.colorbar(contour)
plt.scatter(0, 0, color='blue', label="Initial point (0, 0)", s=50)
plt.scatter(a_k, b_k, color='red', label=f"Final point (normalized):",
            s=50, a={a_k:.2f}, b={b_k:.2f})
plt.xlabel('a')
plt.ylabel('b')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.title('Contours of E(a, b) with Normalized Data')
plt.savefig('descente_non_alignes_normal.png')
plt.show()

```

Iter	a_k	b_k	∇(a_k, b_k)	E(a_k, b_k)
0	0.00000	0.00000	9.75817	5.00000
200	0.84508	-0.00000	1.30740	0.32437
400	0.95830	-0.00000	0.17516	0.24044
600	0.97347	-0.00000	0.02347	0.23893
800	0.97550	-0.00000	0.00314	0.23890
1000	0.97578	-0.00000	0.00042	0.23890
1200	0.97581	-0.00000	0.00006	0.23890
1400	0.97582	-0.00000	0.00001	0.23890
1600	0.97582	-0.00000	0.00000	0.23890
1800	0.97582	-0.00000	0.00000	0.23890
2000	0.97582	-0.00000	0.00000	0.23890

Final coefficients: a ≈ 0.78804, b ≈ -2.46196



Pour passer des coefficients de la régression obtenus avec des données centrées et normalisées aux coefficients correspondants aux données originales, on utilise les formules suivantes :

- Soient X et Y les données originales. Après centrage et normalisation, on obtient

$$X_{\text{norm}} = \frac{X - \mu_X}{\sigma_X}, \quad Y_{\text{norm}} = \frac{Y - \mu_Y}{\sigma_Y},$$

où μ_X et μ_Y sont les moyennes de X et Y , et σ_X et σ_Y leurs écarts-types.

- La régression sur les données normalisées donne

$$Y_{\text{norm}} \approx a_{\text{norm}} \cdot X_{\text{norm}} + b_{\text{norm}}.$$

- Pour retrouver la régression sur les données originales, soit $Y \approx a \cdot X + b$, les formules de transformation des coefficients sont

$$a = a_{\text{norm}} \cdot \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}, \quad b = b_{\text{norm}} \cdot \sigma_Y + \mu_Y - a \cdot \mu_X.$$

Le terme a ajuste la pente pour tenir compte des échelles originales, et b recentre la régression autour des moyennes des données originales.

Et avec sklearn?

```
import numpy as np
from sklearn.linear_model import LinearRegression
from sklearn.neural_network import MLPRegressor
from sklearn.preprocessing import StandardScaler

# Données
A = [(4, 1), (7, 3), (8, 3), (10, 6), (12, 7)]
X, Y = zip(*A)
X = np.array(X).reshape(-1, 1) # Reshape pour en faire une matrice colonne
Y = np.array(Y).reshape(-1, 1) # Reshape pour en faire une matrice colonne

# =====
# Modèle de régression linéaire
# =====
model = LinearRegression()
model.fit(X, Y)
a_final = model.coef_[0][0] # Pente
b_final = model.intercept_[0] # Ordonnée à l'origine

print(f"Final coefficients (Linear Regression): a ≈ {a_final:.5f}, b ≈ {b_final:.5f}")
```

```
# =====
# Modèle MLP pour la régression
# =====

# Standardisation des données
scaler_X = StandardScaler()
scaler_Y = StandardScaler()

X_scaled = scaler_X.fit_transform(X)
Y_scaled = scaler_Y.fit_transform(Y)

# MLP
mlp = MLPRegressor(hidden_layer_sizes=(1,),
                    activation='identity',
                    max_iter=10000,
                    solver='sgd', # 'adam',
                    learning_rate='adaptive',
                    learning_rate_init=0.001,
                    random_state=0)
mlp.fit(X_scaled, Y_scaled.ravel())

# Récupération des coefficients
a_final_mlp = mlp.coefs_[0][0][0] * (scaler_Y.scale_[0] / scaler_X.scale_[0])
b_final_mlp = scaler_Y.mean_[0] + mlp.intercepts_[0] - a_final_mlp *
    ↪ scaler_X.mean_[0]

# Convertir les valeurs en scalaires
a_final_mlp = a_final_mlp.item() # Convertir en scalaire
b_final_mlp = b_final_mlp.item() # Convertir en scalaire

print(f"Final coefficients (MLP Regression): a ≈ {a_final_mlp:.5f}, b ≈
    ↪ {b_final_mlp:.5f}")
```

Final coefficients (Linear Regression): a ≈ 0.78804, b ≈ -2.46196

Final coefficients (MLP Regression): a ≈ 0.83675, b ≈ -2.39261

Et avec keras?

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from tensorflow.keras.models import Sequential
from tensorflow.keras.layers import Dense
from tensorflow.keras.optimizers import SGD

# Définition des données
A = [(4, 1), (7, 3), (8, 3), (10, 6), (12, 7)]
X, Y = zip(*A)

# Conversion en tableau NumPy pour les traitements
X = np.array(X)
Y = np.array(Y)

# Fonction pour créer et entraîner le modèle Keras
def create_and_train_model(X_train, Y_train, epochs=2000):
    # Création d'un modèle séquentiel = réseau de neurones
```

```

model = Sequential()

# Ajoute une couche dense avec une seule entrée et une activation
↳ linéaire (=identité)
model.add(Dense(1, input_dim=1, activation='linear'))

# Stochastic Gradient Descent est un algorithme d'optimisation
# Initialisation de l'optimiseur avec un taux d'apprentissage de 0.01
optimizer = SGD(learning_rate=0.01)

# Compilation du modèle avec l'optimiseur et la fonction de perte à
↳ minimiser (ici l'erreur quadratique moyenne)
model.compile(optimizer=optimizer, loss='mean_squared_error')

# Entraînement du modèle sur les données d'entraînement
model.fit(X_train.reshape(-1, 1), Y_train, epochs=epochs, verbose=0)

# Retourne le modèle entraîné
return model

# Entraînement sur les données d'origine
model_original = create_and_train_model(X, Y)
a_original = model_original.layers[0].get_weights()[0][0][0]
b_original = model_original.layers[0].get_weights()[1][0]
print(f"Coefficients obtenus avec Keras sur données d'origine : a ≈
↳ {a_original:.5f}, b ≈ {b_original:.5f}")

# Entraînement sur les données normalisées
X_mean = np.mean(X)
Y_mean = np.mean(Y)
X_std = np.std(X)
Y_std = np.std(Y)
X_normalized = (X - X_mean) / X_std
Y_normalized = (Y - Y_mean) / Y_std
model_normalized = create_and_train_model(X_normalized, Y_normalized)
a_normalized = model_normalized.layers[0].get_weights()[0][0][0]
b_normalized = model_normalized.layers[0].get_weights()[1][0]
a_final_normalized = a_normalized * (Y_std / X_std)
b_final_normalized = b_normalized * Y_std + Y_mean - a_final_normalized *
↳ X_mean
print(f"Coefficients réajustés pour les données originales (normalisées) : a
↳ ≈ {a_final_normalized:.5f}, b ≈ {b_final_normalized:.5f}")

```

4.5. Application ② : Physics-Informed Neural Network (PINN)

Les équations différentielles modélisent l'évolution de nombreux phénomènes physiques, biologiques ou économiques. Elles expriment des relations entre une fonction inconnue et ses dérivées. Lorsqu'elles ne font intervenir que des dérivées par rapport à une seule variable, on parle d'équations différentielles ordinaires (EDO). En revanche, lorsqu'elles impliquent des dérivées partielles par rapport à plusieurs variables, on parle d'équations aux dérivées partielles (EDP).

Une EDO s'écrit sous la forme générale :

$$F(y(t), y'(t), y''(t), \dots, y^{(p)}(t)) = g(t),$$

où $y: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction inconnue définie sur un intervalle I , et p est l'ordre de l'équation.

Résoudre une équation différentielle consiste à déterminer toutes les fonctions y satisfaisant cette relation sur un intervalle donné. La solution *générale* regroupe l'ensemble des solutions possibles sous une forme paramétrée par des constantes libres. Les EDO admettent en général une infinité de solutions. Pour isoler celle qui correspond à un problème physique concret, on impose des données supplémentaires appelées **conditions initiales**.

EXEMPLE

Résolvons l'EDO $y'(t) = -y(t)$. On cherche les fonctions $y(t)$ vérifiant cette relation pour tout $t \in I$ où I est un intervalle qu'on cherchera le plus grand possible. Il est facile de vérifier que, pour $c \in \mathbb{R}$, les fonctions $y(t) = ce^{-t}$ sont solution pour tout $t \in \mathbb{R}$. Si on impose une condition initiale (=passage par un point), par exemple $y(0) = 1$, on sélectionne une seule fonction de cette famille, c'est la fonction $y(t) = e^{-t}$.

Le couple EDO+CI est appelé **problème de Cauchy**. Résoudre un tel problème revient à

- déterminer toutes les fonctions y vérifiant l'EDO;
- parmi elles, identifier celles qui satisfont la condition initiale;
- étudier l'intervalle maximal sur lequel la solution est définie et unique.

Dans ce chapitre, nous nous limiterons aux cas où le problème de Cauchy admet une unique solution définie sur l'intervalle spécifié.

EXEMPLE (CALCUL EXACT DE LA SOLUTION D'UNE EDO LINÉAIRES DU PREMIER ORDRE)

Une équation différentielle linéaire du premier ordre s'écrit sous la forme

$$a(x)y'(x) + b(x)y(x) = g(x),$$

où a , b et g sont des fonctions continues sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Pour garantir l'existence d'une solution, on suppose que $a(x) \neq 0$ sur un sous-intervalle $J \subset I$. Sur un tel intervalle, toute solution $y(x)$ peut être exprimée comme combinaison de deux termes :

$$y(x) = \underbrace{Ce^{-A(x)}}_{y_H(x)} + \underbrace{B(x)e^{-A(x)}}_{y_P(x)}, \quad \forall C \in \mathbb{R},$$

où $A(x)$ est une primitive de $\frac{b(x)}{a(x)}$ et $B(x)$ une primitive de $\frac{g(x)}{a(x)}e^{A(x)}$.

Par exemple, considérons l'EDO $y'(x) - y(x) = x$. On identifie $a(x) = 1$, $b(x) = -1$, $g(x) = x$. On calcule alors

$$A(x) = \int -1 dx = -x, \quad B(x) = \int xe^{-x} dx = -(1+x)e^{-x},$$

d'où la famille de solutions

$$y(x) = (C - (1+x)e^{-x})e^x = Ce^x - (1+x).$$

Seules les équations différentielles les plus simples peuvent être résolues par des formules explicites. Si une solution analytique n'est pas disponible, la solution peut être approchée numériquement.

4.5.1. Solution exacte discrète vs solution approchée

Considérons le cadre classique d'un problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = \varphi(t, y(t)), & \forall t \in I =]t_0, T[, \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

où φ est une fonction donnée continue et y_0 une valeur initiale prescrite. On suppose qu'on a montré l'existence et l'unicité d'une solution y définie sur l'intervalle I .

On introduit les définitions suivantes de solution du problème de Cauchy :

- **Solution exacte continue** : il s'agit d'une fonction $t \mapsto y(t)$ satisfaisant exactement l'équation différentielle et la condition initiale. Dans certains cas, une expression analytique de cette fonction est accessible.
- **Solution exacte discrète** : si l'on considère une discrétisation de l'intervalle temporel, par exemple $\{t_i\}_{i=0}^N$, on peut évaluer la solution exacte en ces points et obtenir les valeurs exactes $\{y(t_i)\}_{i=0}^N$ de la solution continue. Il s'agit alors d'une suite discrète représentant la solution au points de la grille.
- **Solution approchée discrète** : dans le cas des méthodes numériques classiques, on calcule une suite de valeurs $\{u_i\}_{i=0}^N$ telles que $u_i \approx y(t_i)$. Ces approximations sont construites à l'aide de schémas numériques (typiquement, des suites définies par récurrence), sans connaître la solution exacte.

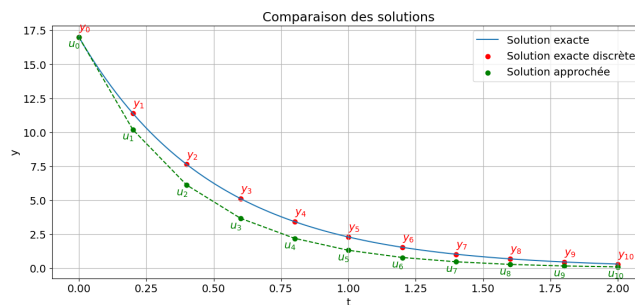
- **Solution PINN**: il s'agit d'une fonction $t \mapsto u(t)$ dont on fixe à l'avance la forme analytique (typiquement, un réseau de neurones) et dont on ajuste les paramètres internes pour qu'elle vérifie au mieux l'équation différentielle, la condition initiale et éventuellement certaines valeurs aux points de la grille. On aura ainsi $u(t) \approx y(t)$ pour tout t de l'intervalle I .

Pour les solutions (exacte et approchée) discrètes, on doit introduire une discrétisation de l'intervalle de temps $[t_0; T]$. Pour cela, on choisit un pas $h > 0$, et on définit les $N + 1$ points

$$t_n = t_0 + nh, \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad \text{avec } h = \frac{T - t_0}{N}.$$

Cette discrétisation divise l'intervalle $[t_0, T]$ en N sous-intervalles de même longueur h , notés $I_n = [t_n, t_{n+1}]$.

- L'ensemble des $N + 1$ valeurs $\{t_0, t_1, \dots, t_N\}$ définit la **grille de discrétisation**.
- Les valeurs $\{y(t_0), y(t_1), \dots, y(t_N)\}$ constituent la **solution exacte discrète**.
- Une méthode numérique fournit une approximation de cette suite, notée $\{u_0 = y_0, u_1, \dots, u_N\}$, appelée **solution approchée discrète**.



4.5.2. Un schéma classique : le schéma d'Euler explicite

Considérons l'EDO $y'(t) = \varphi(t, y(t))$. En intégrant cette équation entre deux instants t_n et $t_{n+1} = t_n + h$, on obtient

$$\underbrace{\int_{t_n}^{t_{n+1}} y'(t) dt}_{y_{n+1} - y_n} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \varphi(t, y(t)) dt.$$

L'idée des méthodes numériques consiste à approcher cette intégrale par une formule de quadrature. Par exemple, si on considère la *formule de quadrature du rectangle à gauche*, on obtient l'approximation suivante :

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b - a)f(a) \quad \rightsquigarrow \quad y_{n+1} - y_n = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \varphi(t, y(t)) dt \approx h \varphi(t_n, y(t_n)).$$

On obtient le **schéma d'Euler explicite** qui construit la suite de $N + 1$ valeurs suivante :

$$\begin{cases} u_0 = y(t_0) = y_0, \\ u_{n+1} = u_n + h \varphi(t_n, u_n), \quad \text{pour } n = 0, 1, \dots, N - 1. \end{cases}$$

```
import numpy as np

def EE(phi, tt, y0):
    h = tt[1] - tt[0]
    u_euler = np.zeros_like(tt)
    u_euler[0] = y0
    for n in range(len(tt) - 1):
        u_euler[n+1] = u_euler[n] + h * phi(tt[n], u_euler[n])
    return u_euler
```

Pour d'autres exemples de schémas d'approximation, vous pouvez consulter le cours [M64 Data Science and Scientific Computing 6](#)

4.5.3. Approximation par un réseau de neurones

Au lieu de calculer une suite discrète de valeurs $(u_n)_{n=0,\dots,N}$ approchant les $y(t_n)$ à l'aide d'un schéma numérique, on adopte ici une approche différente : on cherche directement une fonction $t \mapsto u(t)$, d'expression analytique choisie, censée approcher la solution exacte $y(t)$ du problème de Cauchy. Cette fonction $u(t)$ est représentée par un réseau de neurones dont

- l'entrée est la variable temporelle t ,
- la sortie est une valeur $u(t)$ censée approcher $y(t)$.

L'expression analytique dépend de la structure du réseau : combien de couches, combien de neurones dans chaque couche, quelles fonctions d'activations dans chaque couche.

La fonction sera fixée une fois les paramètres (poids et biais du réseau) déterminés. Contrairement aux méthodes d'apprentissage de type "fitting", on n'utilise pas une base d'apprentissage constituée de couples $(t_i, y(t_i))$, car la solution exacte $y(t)$ est inconnue. On dispose uniquement d'un ensemble de points $\{t_k\}$ dans l'intervalle $[t_0, T]$ et de la seule valeur connue $y(t_0) = y_0$. **Comment peut-on entraîner le réseau, i.e. comment choisir les poids qui fixeront la fonction u ?** L'idée est simple : on impose que $u(t)$ vérifie "au mieux" l'équation différentielle et la condition initiale en les points $\{t_k\}$. Pour cela, on définit une fonction de coût combinant les deux termes :

- l'erreur sur l'équation différentielle,
- l'erreur sur la condition initiale (en effet, la condition initiale n'est pas vérifiée exactement aux points t_0).

La fonction de coût est par exemple donnée par

$$E = \sum_k (u'(t_k) - \varphi(t_k, u(t_k)))^2 + (u(t_0) - y_0)^2.$$

L'entraînement du réseau consiste alors à ajuster les paramètres (poids et biais) de u pour minimiser cette erreur E . Cette approche est ce que l'on appelle un **PINN (Physics-Informed Neural Network)**.

Dans l'exemple ci-dessous nous avons choisi un réseau à deux couche cachées, chacune ayant 20 neurones. La fonction d'activation est toujours une tangente hyperbolique.

```
import numpy as np
import tensorflow as tf
from tensorflow import keras
from tensorflow.keras import layers

def PINN(phi, t0, y0, tt_train, max_epochs=5000):

    my_activation = 'tanh' # 'tanh', 'softplus', 'swish', 'relu', 'softmax',
    _ 'exponential'

    model = keras.Sequential([
        layers.Input(shape=(1,)),
        layers.Dense(20, activation=my_activation),
        layers.Dense(20, activation=my_activation),
        layers.Dense(1)
    ])

    optimizer = keras.optimizers.Adam(learning_rate=1e-3)

    t_train = tf.convert_to_tensor(tt_train, dtype=tf.float32)

    @tf.function
    def compute_loss(t_train):
        with tf.GradientTape() as tape:
            tape.watch(t_train)
            u = model(t_train)
            du_dt = tape.gradient(u, t_train)
            eq_residual = du_dt - phi(t_train, u)
            loss_eq = tf.reduce_mean(tf.square(eq_residual))
```

```

        loss_init = tf.square(model(tf.constant([[t0]]),
        ↳ dtype=tf.float32)) - y0)
        return loss_eq + loss_init

@tf.function
def train_step(t_train):
    with tf.GradientTape() as tape:
        loss = compute_loss(t_train)
        grads = tape.gradient(loss, model.trainable_variables)
        optimizer.apply_gradients(zip(grads, model.trainable_variables))
    return loss

for epoch in range(max_epochs):
    loss = train_step(t_train)
    if epoch % 100 == 0:
        print(f"Epoch {epoch}, Loss: {loss.numpy().item():.6f}")

return model

```

4.5.4. Comparaison Euler explicite vs PINN sur un exemple

Dans cet exemple, nous résolvons le problème de Cauchy suivant à l'aide de deux méthodes : la méthode d'Euler explicite et un PINN.

Problème de Cauchy Considérons le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = -2y(t), & t \in [0; 1] \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

```

t0, T = 0, 1
y0 = 1
phi = lambda t, y : -2*y
# phi = lambda t, y: t*y
# phi = lambda t, y: t / (y + 1e-3) # évite la division par zéro

```

Méthode PINN : calibrage du réseau

```

N_train = 50
# tt_train = np.linspace(t0, T, N_train+1)
tt_train = np.random.rand(N_train, 1) * (T - t0) + t0
model = PINN(phi, t0, y0, tt_train)

```

Discretisation et évaluations Considérons l'intervalle $[0, 1]$ et une discrétisation contenant $N = 100$ sous-intervalles de même longueur $h = 1/N$.

```

# Grille régulière pour évaluation
# - de la solution exacte,
# - du réseau
# et pour la construction de la solution approchée par le schéma d'Euler
N_eval = 100
tt_eval = np.linspace(t0, T, N_eval+1)

```

La solution exacte est $y(t) = e^{-2t}$:


```
import sympy as sp

t = sp.Symbol('t')
y = sp.Function('y')(t)
eq = sp.Eq(sp.Derivative(y, t), phi(t,y))
sol = sp.dsolve(eq, ics={y.subs(t, t0): y0})
display(sol)
sol = sp.lambdify(t, sol.rhs, 'numpy')
```

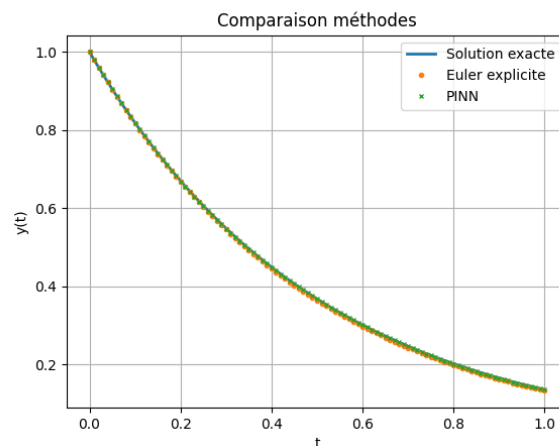
Évaluons la solution exacte et le PINN sur la grille uniforme choisie. Calculons ensuite la solution obtenue par la méthode d'Euler sur cette même grille.

```
y_exact = sol(tt_eval)
u_euler = EE(phi, tt_eval, y0)
u_pinn = model.predict(tt_eval).flatten() # model.predict() renvoie un
↳ tableau de shape (N_eval+1, 1), donc un 2D array, alors que y_exact et
↳ u_euler sont des vecteurs 1D de shape (N_eval+1,).
```

Comparaison Les résultats obtenus par les deux méthodes sont comparés en les points de la discrétisation en termes d'erreur relative entre la solution exacte et la solution approchée.

```
import matplotlib.pyplot as plt

plt.plot(tt_eval, y_exact, '-', label='Solution exacte', linewidth=2)
plt.plot(tt_eval, u_euler, 'o', label="Euler explicite", markersize=3)
plt.plot(tt_eval, u_pinn, 'x', label="PINN", markersize=3)
plt.legend()
plt.grid()
plt.xlabel("t")
plt.ylabel("y(t)")
plt.title("Comparaison méthodes")
plt.savefig("comparaison_methodes.png")
# plt.show()
```



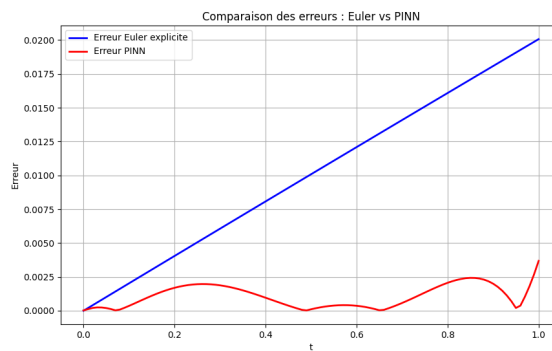
L'analyse des erreurs montre que la méthode d'Euler explicite présente des erreurs plus importantes, surtout pour des valeurs de t plus grandes. Pour en améliorer la précision il faut utiliser une grille plus fine. Le réseau de neurones utilisé donne des résultats plus précis, mais cela se dégrade si on diminue le nombre de neurones dans chaque couche.

```

# === Calcul des erreurs ===
error_euler = abs(y_exact - u_euler)/abs(y_exact)
error_pinn = abs(y_exact - u_pinn)/abs(y_exact)

# === Affichage des erreurs ===
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.plot(tt_eval, error_euler, label="Erreur Euler explicite", linewidth=2,
        color="blue")
plt.plot(tt_eval, error_pinn, label="Erreur PINN", linewidth=2, color="red")
plt.xlabel("t")
plt.ylabel("Erreur")
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.title("Comparaison des erreurs : Euler vs PINN")
plt.savefig("comparaison_errors.png")
# plt.show()

```



Deuxième partie

Annexes

ANNEXE A

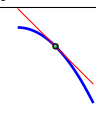
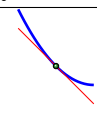
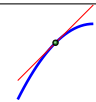
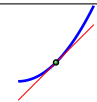
Exercices de calcul différentiel et intégral dans $\mathbb{R}$

Dans ce chapitre

A.1	Dérivées	201
A.2	Primitives et intégrales	214

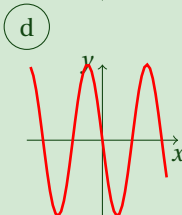
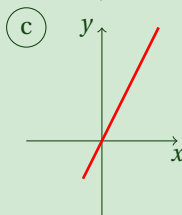
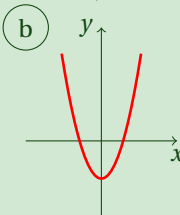
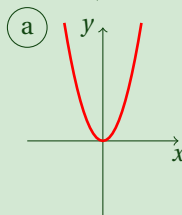
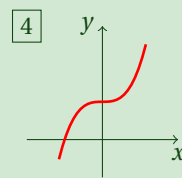
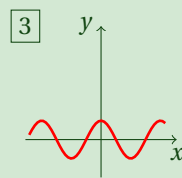
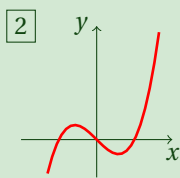
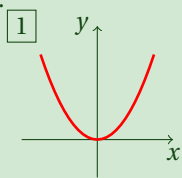
A.1. Dérivées

Rappels		
$f''(x)$	$f'(x)$	$f(x)$
	> 0	$\nearrow$
	$= 0$	f tangente horizontale
	< 0	$\searrow$
> 0	$\nearrow$	convexe
$= 0$	$\longleftrightarrow$	
< 0	$\searrow$	concave

	$f''(x_0) < 0$	$f''(x_0) > 0$
$f'(x_0) < 0$		
$f'(x_0) = 0$		
$f'(x_0) > 0$		

Exercice A.1

Pour les fonctions représentées en figure, trouver les appariements entre les fonction 1, 2, 3, 4 et les dérivées a, b, c, d.

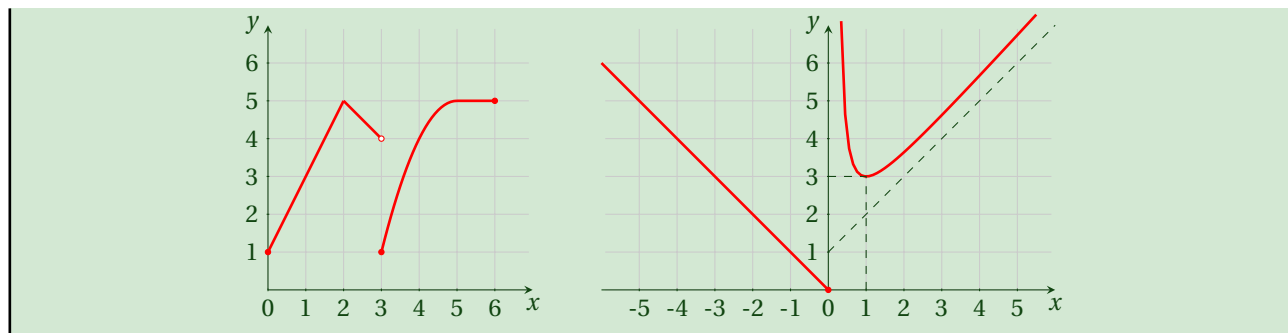


Correction

1 - c 2 - b 3 - d 4 - a

Exercice A.2

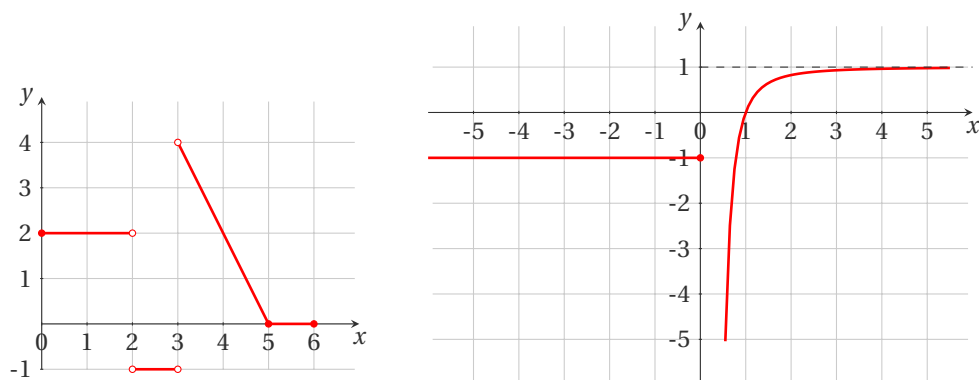
Pour chacune des fonctions représentées, tracer une esquisse du graphe de leur dérivée (la graphe de gauche est constitué de parties de droites ou paraboles).

**Correction**

Pour la fonction de gauche on remarque que $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } 0 \leq x \leq 2, \\ -x+7 & \text{si } 2 \leq x < 3, \\ 5-(x-5)^2 & \text{si } 3 \leq x \leq 5, \\ 5 & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$ ainsi $f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } 0 \leq x < 2, \\ -1 & \text{si } 2 < x < 3, \\ -2x & \text{si } 3 \leq x < 5, \\ 0 & \text{si } x > 5 \end{cases}$

Étudions les raccordements :

- $f'(2)$ n'existe pas car $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = 2$ tandis que $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = -1$
- $f'(3)$ n'existe pas car f n'est pas continue en $x = 3$
- $f'(5) = 0$

**Exercice A.3**

Calculer $f'(x)$ pour les fonctions suivantes :

- | | | |
|-----------------------------------|----------------------------------|---------------------------------|
| 1. $f(x) = 3 \sin(x) - 5 \cos(x)$ | 2. $f(x) = 3e^x - x^2$ | 3. $f(x) = 3 \ln(x)$ |
| 4. $f(x) = \sin(2x)$ | 5. $f(x) = \sin(x + x^3)$ | 6. $f(x) = (x+4)^3$ |
| 7. $f(x) = \sin(\ln(x^2))$ | 8. $f(x) = \exp(\cos^2(x))$ | 9. $f(x) = xe^x$ |
| 10. $f(x) = e^x \sin(x)$ | 11. $f(x) = \frac{\cos(x)}{x^2}$ | 12. $f(x) = \frac{\ln(x)}{e^x}$ |
| 13. $f(x) = \frac{\ln(x)}{x^4}$ | 14. $f(x) = \sin(x) \cos(x)$ | 15. $f(x) = \frac{\ln(x)}{e^x}$ |
| 16. $f(x) = x^2 \sin(x)$ | 17. $f(x) = \frac{e^{1/x}}{x}$ | |

Correction

- | | | |
|---|--|---|
| 1. $f'(x) = 3 \cos(x) + 5 \sin(x)$ | 2. $f'(x) = 3e^x - 2x$ | 3. $f'(x) = \frac{3}{x}$ |
| 4. $f'(x) = 2 \cos(2x)$ | 5. $f'(x) = (1 + 3x^2) \cos(x + x^3)$ | 6. $f'(x) = 3(x+4)^2$ |
| 7. $f'(x) = 5(x + \sin(x))^4 (1 + \cos(x))$ | 8. $f'(x) = \frac{2}{x} \cos(\ln(x^2))$ | 9. $f'(x) = -2 \cos(x) \sin(x) \exp(\cos^2(x))$ |
| 10. $f'(x) = (1+x)e^x$ | 11. $f'(x) = \frac{-x \sin(x) - 2 \cos(x)}{x^3}$ | 12. $f'(x) = e^x (\sin(x) + \cos(x))$ |

13. $f'(x) = \frac{1-4\ln(x)}{x^5}$

14. $f'(x) = -\sin^2(x) + \cos^2(x)$

15. $f'(x) = \frac{1-x\ln(x)}{xe^x}$

16. $f'(x) = 2x\sin(x) + x^2\cos(x)$

17. $f'(x) = -\frac{1+x}{x^3}e^{1/x}$

Exercice A.4

Calculer les dérivées des fonctions :

1. $5x^2$

2. $4x^3 + 2x - 1$

3. $\left(1 - \frac{x}{7}\right)^7$

4. $(3x+2)^9$

5. $\frac{1}{(2x+1)^4}$

6. $\frac{1}{\sqrt{x^3}}$

7. $\frac{x^2+3}{x^3+3x-7}$

8. $x^3\sin(x)$

9. $x^2\tan(x)$

10. $\frac{\cos(x)}{1-\sin(x)}$

11. $\sin(x)\cos(x)$

12. $\cos(-2x+1)$

13. $\frac{x}{\sin(2x)}$

14. $\ln(x^2+1)$

15. e^{x^2-3}

16. $\frac{4x}{\cos(x)}$

17. $2xe^{\cos(x)}$

18. $\sqrt{\cos(x)+2}$

19. $\sin(2x+1)$

20. $x\cos(5x)$

21. $\sin(x^2)$

22. $\sin\left(\frac{x-2}{x+3}\right)$

23. $\sin(2x)\cos(7x)$

Correction

1. $10x$

2. $12x^2 + 2$

3. $-\left(1 - \frac{x}{7}\right)^6$

4. $27(3x+2)^8$

5. $-\frac{8}{(2x+1)^5}$

6. $(x^{-3/2})' = -\frac{3}{2}x^{-5/2} = -\frac{3}{2\sqrt{x^5}}$

7. $\frac{2x(x^3+3x-7) - (x^2+3)(3x^2+3)}{(x^3+3x-7)^2} = -\frac{x^4+6x^2+14x+9}{(x^3+3x-7)^2}$

8. $x^2(3\sin(x) + x\cos(x))$

9. $2x\tan(x) + x^2(1 + \tan^2(x))$

10. $\frac{1}{1-\sin(x)}$

11. $\cos^2(x) - \sin^2(x) = \left| \frac{2\cos^2(x) - 1}{1 - 2\sin^2(x)} \right|$

12. $2\sin(-2x+1)$

13. $\frac{\sin(2x) - 2x\cos(2x)}{\sin^2(2x)}$

14. $\frac{2x}{(x^2+1)^2}$

15. $2xe^{x^2-3}$

16. $\frac{4\cos(x) + 4x\sin(x)}{\cos^2(x)}$

17. $2(1 - x\sin(x))e^{\cos(x)}$

18. $\frac{-\sin(x)}{2\sqrt{\cos(x)+2}}$

19. $2\cos(2x+1)$

20. $\cos(5x) - 5x\sin(5x)$

21. $2x\cos(x^2)$

22. $\frac{5}{(x+3)^2} \cos\left(\frac{x-2}{x+3}\right)$

23. $2\cos(2x)\cos(7x) - 7\sin(2x)\sin(7x)$

Exercice A.5Calculer la dérivée 100-ème de la fonction $f(x) = (x^2 - x)^{-1}$.**Correction**

On a

• $f(x) = \frac{1}{x(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1}$ ssi $A = -1$ et $B = 1$

• $\frac{d^n}{dx^n} \frac{1}{x} = (-1)^n n! \frac{1}{x^{n+1}}$

• $\frac{d^n}{dx^n} \frac{1}{x-1} = (-1)^n n! \frac{1}{(x-1)^{n+1}}$

donc $(x^2 - x)^{-1} = (x-1)^{-1} - x^{-1}$ donc $f^{(100)}(x) = 100!((x-1)^{-101} - x^{-101})$ et plus généralement

$$\frac{d^n}{dx^n} f(x) = (-1)^n n! \frac{1}{(x-1)^{n+1}} - (-1)^n n! \frac{1}{x^{n+1}} = (-1)^n n! ((x-1)^{-n-1} - x^{-n-1})$$

Exercice A.6

Vérifier que la fonction donnée est solution de l'EDO (équation différentielle ordinaire) indiquée :

1. $y(x) = e^{-x}$ et $y'(x) = -y(x)$
2. $y(x) = Ce^{x^2/2}$ et $y'(x) = xy(x)$
3. $y(x) = Ce^x - (1+x)$ et $y'(x) + y(x) = x$
4. $T(t) = T_a + (T_0 - T_a)e^{\gamma t}$ et $T'(t) = \gamma(T(t) - T_a)$
5. $y(x) = \frac{1}{c+x^2}$ et $y'(x) + 2xy^2(x) = 0$

Correction

1. $y(x) = e^{-x}$ donc $y'(x) = -e^{-x} = -y(x)$
2. $y(x) = Ce^{x^2/2}$ donc $y'(x) = Cxe^{x^2/2} = xy(x)$
3. $T(t) = T_a + (T_0 - T_a)e^{\gamma t}$ donc $T'(t) = \gamma(T_0 - T_a)e^{\gamma t} = \gamma(T(t) - T_a)$
4. $y(x) = \frac{1}{c+x^2}$ donc $y'(x) = -\frac{2x}{(c+x^2)^2} = -2xy^2(x)$

Exercice A.7

1. Une masse tombe avec une accélération constante a . Comment évolue sa vitesse ?
2. Le volume V et la pression P d'un gaz maintenu à une température constante sont liés par la loi de VAN DER WAALS qui s'écrit $P(V) = nRT/(V - nb) - an^2/V^2$ où a et b sont des constantes propres au gaz, n désigne le nombre de moles, T est la température et R est une constante. Calculer P' .
3. Trouver la vitesse au temps $t = 2$ d'une masse attachée à un ressort et dont la position au temps t est donnée par $x(t) = A\cos(2\pi\omega t)$. Que se passe-t-il avec la vitesse si on double l'amplitude A ?
4. Un ballon s'élève verticalement à la vitesse de 10 m s^{-1} . S'il se trouve initialement au sol à une distance de 200 m d'un observateur, quel est le taux de variation $\vartheta'(t)$ de son angle d'élévation par rapport à l'observateur lorsque l'angle d'élévation est égal à $\pi/4$?
5. Un ballon s'élève verticalement à la vitesse de 10 m s^{-1} . S'il se trouve initialement au sol à une distance de 100 m d'un observateur, quel est le taux de variation $\vartheta'(t)$ de son angle d'élévation par rapport à l'observateur après 10 s ?
6. Quelle accélération constante (en m s^{-2}) un véhicule doit-il avoir pour passer d'une vitesse de 0 km h^{-1} à une vitesse de 100 km h^{-1} en 10 s ?
7. Un glaçon sphérique fond en conservant sa forme. Le taux de variation de son volume avec le temps est proportionnel à sa surface. Il faut une heure pour qu'un glaçon de un centimètre de rayon fonde totalement. Après combien de temps le glaçon a-t-il diminué de moitié en volume ? Rappel : la surface et le volume d'une sphère de rayon r sont respectivement $S = 4\pi r^2$ et $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.
8. Un glaçon cubique fond en conservant sa forme. Le taux de variation de son volume avec le temps est proportionnel à sa surface. Il faut une heure pour qu'un glaçon de un centimètre de côté fonde totalement. Après combien de temps le glaçon a-t-il diminué de moitié en volume ?

Correction

1. $v(t) = at + v(0)$.
2. $P'(V) = -\frac{nRT}{(V - nb)^2} + \frac{2an^2}{V^3}$.
3. $x'(t) = -2\pi\omega A\sin(2\pi\omega t)$. Lorsque l'amplitude double, la vitesse double.
4. $h(t) = 10t$ et $\frac{h(t)}{200} = \tan(\vartheta(t))$ donc $\vartheta(t) = \arctan\left(\frac{t}{20}\right)$ et $\vartheta'(t) = \frac{20}{400 + t^2}$. Si $\bar{t}$ est l'instant tel que $\vartheta(\bar{t}) = \pi/4$, alors $\bar{t} = 20\tan(\pi/4) = 20$ et $\vartheta'(\bar{t}) = \frac{20}{400 + 400} = \frac{1}{40}$ radians par second.
5. $h(t) = 10t$ et $\frac{h(t)}{100} = \tan(\vartheta(t))$ donc $\vartheta(t) = \arctan\left(\frac{t}{10}\right)$ et $\vartheta'(t) = \frac{10}{100 + t^2}$ et $\vartheta'(10) = \frac{1}{20}$ radians par second.
6. $100 \text{ km h}^{-1} = \frac{100000}{3600} \text{ m s}^{-1} = \frac{1000}{36} \text{ m s}^{-1}$ donc $a = (1000/36 - 0)/10 \text{ m s}^{-2} = \frac{10}{36} \text{ m s}^{-2}$.
7. Le rayon est fonction du temps donc $V'(t) = 4\pi[r(t)]^2 r'(t)$. Comme le taux de variation de son volume avec le temps est proportionnel à sa surface, il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $V'(t) = k4\pi[r(t)]^2$. Donc $4\pi[r(t)]^2 r'(t) = k4\pi[r(t)]^2$, autrement dit $k = r'(t)$ ce qui implique que $r(t) = at + b$. Comme il faut une heure pour qu'un glaçon de un

- centimètre de rayon fonde totalement, on a $r(0) = 1$ et $r(1) = 0$ et on obtient la relation $r(t) = 1 - t$. On cherche alors $\hat{t}$ tel que $V(\hat{t}) = V(0)/2$, c'est-à-dire $\frac{4}{3}\pi(1 - \hat{t})^3 = \frac{4}{3}\pi\frac{1}{2}$: le glaçon a diminué de moitié en volume après $\hat{t} = 1 - 2^{-1/3} \approx 0.20$ h = 12 minutes.
8. La surface et le volume d'un cube de coté ℓ sont respectivement $S = 6\ell^2$ et $V = \ell^3$. Le coté est fonction du temps donc $V'(t) = [\ell(t)]^2 \ell'(t)$. Comme le taux de variation de son volume avec le temps est proportionnel à sa surface, il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $V'(t) = k6[\ell(t)]^2$. Donc $[\ell(t)]^2 \ell'(t) = k6[\ell(t)]^2$, autrement dit $6k = \ell'(t)$ ce qui implique que $\ell(t) = at + b$. Comme il faut une heure pour qu'un glaçon de un centimètre de coté fonde totalement, on a $\ell(0) = 1$ et $\ell(1) = 0$ et on obtient la relation $\ell(t) = 1 - t$. On cherche alors $\hat{t}$ tel que $V(\hat{t}) = V(0)/2$, c'est-à-dire $(1 - \hat{t})^3 = 1/2$: le glaçon a diminué de moitié en volume après $\hat{t} = 1 - 2^{-1/3} \approx 0.20$ h = 12 minutes.

Exercice A.8 (Droite tangente au graphe d'une fonction)

1. Trouver l'équation de la tangente au graphe de la fonction définie par $f(x) = x^2 + 1$ en 1.
2. Trouver l'équation de la tangente au graphe de la fonction définie par $f(x) = \frac{4x}{x^2+1}$ en 0.
3. Trouver l'équation de la tangente au graphe de la fonction définie par $f(x) = \frac{4x}{x^2+1}$ en 1.
4. Le graphe de la fonction définie par $f(x) = ax^2 + bx + 3$ passe par le point (2, 0). La tangente au graphe de f en ce point est parallèle à la droite d'équation $y = 3x + 2$. Trouver a et b .
5. La pente de la tangente au graphe de f en $x = 1$ est égale à 3. La pente de la tangente au graphe de g en $x = 1$ est égale à 7. Calculer la pente de la tangente au graphe de $f + g$ en $x = 1$. Que peut-on dire de la pente de la tangente au graphe de fg en $x = 1$? Que peut-on dire de la pente de la tangente au graphe de fg en $x = 1$ si $f(1) = 3$ et $g(1) = 2$?

Correction

L'équation de la droite tangente au graphe de f en x_0 est $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

1. Pente: $f'(1) = 2$. Équation: $y = 2(x - 1) + f(1) = 2x$.
2. Pente: $f'(0) = 4$. Équation: $y = 4x + f(0) = 4x$.
3. Pente: $f'(1) = 0$. Équation: $y = f(1) = 2$.
4. $f'(2) = 3$ et $f(2) = 0$ donc $a = 9/4$ et $b = -6$.
5. $f'(1) = 3$ et $g'(1) = 7$, alors $(f + g)'(1) = 10$ (pente de la tangente au graphe de $f + g$ en $x = 1$). Comme $(fg)'(1) = f'(1)g(1) + f(1)g'(1)$ on ne peut rien dire sans connaître $f(1)$ et $g(1)$. Si $f(1) = 3$ et $g(1) = 2$ alors $(fg)'(1) = f'(1)g(1) + f(1)g'(1) = 3 \times 2 + 3 \times 7 = 27$ (pente de la tangente au graphe de fg en $x = 1$).

Exercice A.9 (Parabole osculatrice au graphe d'une fonction)

Trouver l'équation de la parabole osculatrice au graphe de la fonction en le point indiqué.

- | | |
|-------------------------------------|----------------------------------|
| 1. $f(x) = x^2 + 1$ en $x_0 = 1$ | 2. $g(x) = e^x$ en $x_0 = 0$ |
| 3. $h(x) = \ln(1 + x)$ en $x_0 = 0$ | 4. $w(x) = \cos(x)$ en $x_0 = 0$ |

Correction

L'équation de la parabole osculatrice au graphe de f en x_0 est $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2$.

1. On a $f(x) = x^2 + 1$, $f'(x) = 2x$ et $f''(x) = 2$ donc $f(1) = 2$, $f'(1) = 2$, $f''(1) = 2$. L'équation cherchée est $y = 2 + 2(x - 1) + \frac{2}{2}(x - 1)^2 = 2x + (x - 1)^2 = x^2 + 1$, ce qui est évident car la meilleure parabole qui approche f est f elle-même car f est une parabole.
2. On a $g(x) = e^x$, $g'(x) = g''(x) = e^x$ donc $g(0) = g'(0) = g''(0) = 1$. L'équation cherchée est $y = 1 + 1(x - 0) + \frac{1}{2}(x - 0)^2 = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$. Pour x proche de zéro on peut donc approcher la fonction exponentielle par sa droite tangente ou, encore mieux, par sa parabole osculatrice. Par exemple, on peut approcher $\sqrt{e}$ par $1 + \frac{1}{2}$ ou, encore mieux, par $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2}$. Avec une calculatrice on vérifie que $\sqrt{e} \approx 1.648721271$, $1 + \frac{1}{2} = 1.5$ et $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2} = 1.625$.
3. On a $h(x) = \ln(1 + x)$, $h'(x) = \frac{1}{1+x}$ et $h''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$ donc $h(0) = 0$, $h'(0) = 1$ et $h''(0) = -1$. L'équation cherchée est $y = 0 + 1(x - 0) - \frac{1}{2}(x - 0)^2 = x - \frac{1}{2}x^2$. Pour x proche de zéro on peut donc approcher la fonction h par sa droite tangente ou, encore mieux, par sa parabole osculatrice. Par exemple, on peut approcher $\ln(1.5)$ par $\frac{1}{2}$ ou, encore mieux, par $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2}$. Avec une calculatrice on vérifie que $\ln(1.5) \approx 0.405465108$, $\frac{1}{2} = 0.5$ et $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2} = 0.375$.

4. On a $w(x) = \cos(x)$, $w'(x) = -\sin(x)$ et $w''(x) = -\cos(x)$ donc $w(0) = 1$, $w'(0) = 0$ et $w''(0) = -1$. L'équation cherchée est $y = 1 - \frac{1}{2}(x-0)^2 = 1 - \frac{1}{2}x^2$. Pour x proche de zéro on peut donc approcher la fonction $\cos(x)$ par sa parabole osculatrice. Par exemple, on peut approcher $\cos(\pi/6)$ (radians!) par $1 - \frac{1}{72}\pi^2$. Avec une calculatrice on vérifie que $\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2 \approx 0.86602540378$ et $1 - \frac{1}{72}\pi^2 \approx 0.862922161$.

Exercice A.10

On considère une fonction exponentielle $f: x \mapsto c^x$. Soit P le point d'intersection du graphe de f avec la tangente à ce graphe passant par l'origine du plan cartésien. Montrer que l'ordonnée de P ne dépend pas du choix de la base de l'exponentielle, *i.e.* qu'importe la valeur choisie pour c .

Correction

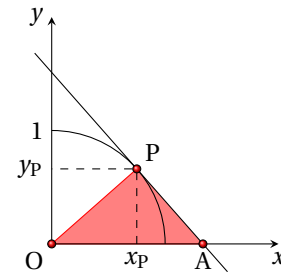
Notons (x_P, y_P) les coordonnées de P.

- P appartient au graphe de la courbe, donc $y_P = c^{x_P}$.
- P appartient à la tangente au graphe de f passant par l'origine. Cette droite a pour équation $y = f'(x_P)x$ et l'on a $f'(x) = \ln(c)c^x$ donc on a aussi $y_P = \ln(c)c^{x_P}x_P$.

x_P est alors solution de l'équation $c^{x_P} = \ln(c)c^{x_P}x_P$, ce qui équivaut à $x_P = \frac{1}{\ln(c)} = \log_c(e)$. Alors $y_P = c^{x_P} = e$ quelque soit la base c choisie.

Exercice A.11

On considère le quart de circonférence d'équation $y = \sqrt{1-x^2}$ pour $0 < x < 1$. Soit $P = (x_P, y_P)$ un point du quart de circonférence. On note par A le point d'intersection de la tangente en P avec l'axe x . Exprimer la surface du triangle OAP en fonction de x_P .

**Correction**

Soit $f(x) = \sqrt{1-x^2}$. L'équation de la droite tangente en $x = x_P$ s'écrit

$$y = f'(x_P)(x - x_P) + f(x_P) = \frac{-x_P}{\sqrt{1-x_P^2}}(x - x_P) + \sqrt{1-x_P^2}$$

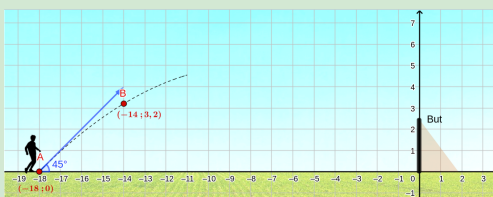
$A = (x_A, 0)$ est le point d'intersection de cette droite avec la droite d'équation $y = 0$, donc on a

$$\frac{-x_P}{\sqrt{1-x_P^2}}(x_A - x_P) + \sqrt{1-x_P^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_A = \frac{1}{x_P}$$

et la surface du triangle OAP en fonction de x_P est $\frac{x_A y_P}{2} = \frac{\sqrt{1-x_P^2}}{2x_P}$.

Exercice A.12

Un joueur de foot, situé à 18m du but, effectue un tir en cloche. On modélise la situation dans un repère orthonormé (l'unité choisie est le mètre). On suppose que la trajectoire du ballon est parabolique et passe par les points $(-18; 0)$ et $(-14; 3.2)$, la tangente à la courbe en $x = -18$ forme un angle de 45° avec l'horizontale. On note p la fonction qui à l'abscisse x de la balle associe son ordonnée $p(x)$.



1. Écrire et résoudre le système qui permet de déterminer p .
2. À quelle hauteur maximale le ballon va-t-il s'élever?
3. Sachant que le but a une hauteur de 2.44m, le tir est-il cadré?

CorrectionSource: <https://www.python-lycee.com/activite-en-ligne-mathematiques>

1. On cherche a, b, c tels que $p(x) = c + bx + ax^2$. On sait que $p(-18) = 0$, $p(-14) = \frac{32}{10}$ et $p'(-18) = 1$, d'où le système linéaire

$$\begin{cases} c - 18b + (-18)^2 a = 0 \\ c - 14b + (-14)^2 a = \frac{32}{10} \\ b - 18 \times 2a = 1 \end{cases}$$

On utilise la méthode de Gauss (pour les calculs se rappeler que $14^2 - 18^2 = (14 - 18)(14 + 18) = -4 \times 32$):

$$\begin{cases} c - 18b + (-18)^2 a = 0 \\ c - 14b + (-14)^2 a = \frac{32}{10} \\ b - 18 \times 2a = 1 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} c - 18b + 18^2 a = 0 \\ 4b - 4 \times 32a = \frac{32}{10} \\ b - 18 \times 2a = 1 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} c - 18b + 18^2 a = 0 \\ b - 32a = \frac{8}{10} \\ b - 18 \times 2a = 1 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} c - 18b + 18^2 a = 0 \\ b - 32a = \frac{8}{10} \\ -4a = \frac{1}{5} \end{cases}$$

donc

$$c = \frac{9}{5}, \quad b = -\frac{4}{5}, \quad a = -\frac{1}{20}.$$

2. $p'(x) = 0$ ssi $x = -\frac{b}{2a} = -8$ et $p(-8) = 5$: le ballon s'élèvera jusqu'à 5m et cette hauteur sera atteinte en $x = -8$.
 3. Le but est en $x = 0$ et l'on a $p(0) = \frac{9}{5} = 1.8 < 2.44$: le tir est cadré.

Exercice A.13

Calculer les points stationnaires des fonctions $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ suivantes et établir leur nature.

- | | | |
|---------------------|---------------------------------|--------------------------------|
| 1. $f(x) = (x-2)^2$ | 2. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ | 3. $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2$ |
| 4. $f(x) = xe^{-x}$ | 5. $f(x) = x^2 \ln(x)$ | |

Correction

1. $f(x) = (x-2)^2$
 $f'(x) = 2(x-2)$ et $f'(x) = 0$ ssi $x = 2$.
 $f''(x) = 2$ et $f''(2) = 2 > 0$ donc $x = 2$ est un minimum.
2. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$
 $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x-1)(x-3)$ et $f'(x) = 0$ ssi $x = 1$ ou $x = 3$.
 $f''(x) = 6x - 12 = 6(x-2)$ et $f''(1) = -6 < 0$ donc $x = 1$ est un maximum tandis que $f''(3) = 6 > 0$ donc $x = 3$ est un minimum.
3. $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 = x^2(3x^2 - 8x + 6) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
 $f'(x) = 12x^3 - 24x^2 + 12x = 12x(x^2 - 2x + 1) = 12x(x-1)^2$ et $f'(x) = 0$ ssi $x = 0$ ou $x = 1$.
 f décroissante pour $x < 0$ et f croissante pour $x > 0$ avec tangente horizontale en $x = 1$.
 $x = 0$ est un minimum.
 $f''(x) = 36x^2 - 48x + 12 = 12(3x^2 - 4x + 1) = 12(x-1)(3x-1)$ et $f''(1) = 0$ avec $f''(x) < 0$ si $\frac{1}{3} < x < 1$ et $f''(x) > 0$ si $x > 1$ donc $x = 1$ est un point d'inflexion.
4. $f(x) = xe^{-x}$
 $f'(x) = (1-x)e^{-x}$ et $f'(x) = 0$ ssi $x = 1$.
 $f''(x) = (x-2)e^{-x}$ et $f''(1) = -1/e < 0$ donc $x = 1$ est un maximum.
5. $f(x) = x^2 \ln(x)$ donc $x > 0$
 $f'(x) = x(1 + 2\ln(x))$ et $f'(x) = 0$ ssi $x = 1/\sqrt{e}$.
 $f''(x) = 3 + 2\ln(x)$ et $f''(1/\sqrt{e}) = 2 > 0$ donc $x = 1/\sqrt{e}$ est un minimum

Exercice A.14

Un triangle a deux côtés et l'angle entre eux mesurant respectivement a , b et δ . Quelle est la valeur de δ qui maximise l'aire du triangle?

Correction

L'aire du triangle vaut $A(\delta) = \frac{ab}{2} \sin(\delta)$ avec $0 \leq \delta \leq \pi$. On a $A'(\delta) = \frac{ab}{2} \cos(\delta)$ et $A'(\delta) = 0$ ssi $\delta = \frac{\pi}{2}$. Comme $A''(\delta) = -\frac{ab}{2} \sin(\delta)$, alors $A''(\frac{\pi}{2}) = -\frac{ab}{2} < 0$ donc il s'agit bien d'un maximum.

Exercice A.15

Une société produit des boîtes en carton de 5 L en forme de parallélépipède à base carrée. Les boîtes doivent utiliser la moindre quantité de carton possible. Quelles dimensions doit-elle fixer ?

Correction

Notons ℓ la longueur (en décimètre) des cotés de la base (carrée) et h la hauteur (en décimètre) de la boîte. On a $\ell^2 h = 5$ ainsi la surface de la boîte mesure $S(\ell) = 2\ell^2 + 4h\ell = 2\ell^2 + \frac{20}{\ell}$ décimètres carrés. Il s'agit d'une parabole dont le minimum s'obtient pour $\ell = \sqrt[3]{5} \simeq 171$ mm et dans ce cas l'on a $h = \ell$: la boîte qui utilise la moindre quantité de carton possible est un cube.

Exercice A.16

La distance r qui sépare deux molécules résulte d'un équilibre entre une force attractive proportionnelle à $1/r^6$ et une force répulsive proportionnelle à $1/r^{12}$. La distance d'équilibre est celle pour laquelle le potentiel de LENNARD-JONES est minimal. Calculer cette distance sachant que ce potentiel est donné par

$$V(r) = 4\epsilon \left(\left(\frac{\sigma}{r} \right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r} \right)^6 \right)$$

où σ est une distance, appelée distance de collision, et ϵ est le potentiel minimal.

Correction

$$V'(r) = 4\epsilon \left(-\frac{12}{r} \left(\frac{\sigma}{r} \right)^{12} + \frac{6}{r} \left(\frac{\sigma}{r} \right)^6 \right) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad r = \sqrt[6]{2}\sigma \quad \text{et} \quad V(\sqrt[6]{2}\sigma) = -\epsilon.$$

Exercice A.17

Dans une molécule diatomique, l'énergie potentielle varie avec la distance r entre les deux atomes. L'expression empirique de ce potentiel (appelé potentiel de MORSE) est donnée par

$$V(r) = D(1 - e^{\alpha - \beta r})^2$$

où $\alpha, \beta > 0$ sont des constantes propres à chaque molécule. À l'équilibre une molécule se trouve au niveau de son énergie potentielle la plus basse. Trouver cette position d'équilibre. La différence entre l'énergie potentielle à l'équilibre et celle lorsque r tend vers l'infini est l'énergie de dissociation. Calculer cette énergie.

Correction

- Position d'équilibre :

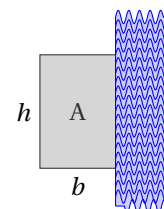
$$V'(r) = 2D(1 - e^{\alpha - \beta r}) \times (-e^{\alpha - \beta r}) \times (-\beta) = -2\beta V(r) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad V(r) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad r = \frac{\alpha}{\beta} \quad \text{et} \quad V\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = D.$$

- Énergie de dissociation :

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} V\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) - V(r) = \lim_{r \rightarrow +\infty} D(1 - (1 - e^{\alpha - \beta r})^2) = \lim_{r \rightarrow +\infty} D(-e^{2(\alpha - \beta r)} + 2e^{\alpha - \beta r}) = D.$$

Exercice A.18

Un terrain rectangulaire d'aire A se trouve le long de la rive (rectiligne) d'une rivière. Quelle est la longueur minimale de la clôture nécessaire pour clôturer les trois autres côtés du terrain ?

**Correction**

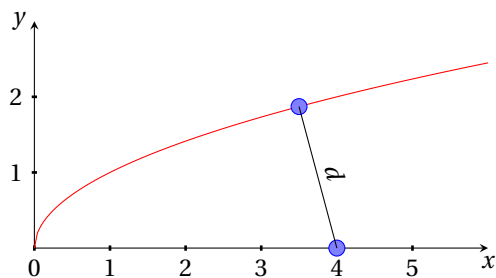
Aire : $A = bh$. Longueur clôture : $\ell(b) = 2b + h(b) = 2b + \frac{A}{b}$. Recherche du minimum : $\ell'(b) = 2 - \frac{A}{b^2}$ et $\ell'(b) = 0$ ssi $b = \sqrt{\frac{A}{2}}$.

Comme $\ell''(b) = \frac{2A}{b^3} > 0$ pour tout $b > 0$, il s'agit bien d'un minimum et la clôture mesure $\ell(b) = 2\sqrt{\frac{A}{2}} + \frac{A\sqrt{2}}{\sqrt{A}}$.

Remarque : si on clôture tous les quatre côtés on a $\ell(b) = 2b + 2h(b)$ et donc $h = b = \sqrt{A}$.

Exercice A.19

Trouver le point de la courbe d'équation $y = \sqrt{x}$ plus proche au point $(4, 0)$.

**Correction**

Soit $(x, \sqrt{x})$ un point quelconque de la courbe d'équation $y = \sqrt{x}$. Il s'agit de trouver le minimum de la distance entre ce point et le point $(4, 0)$:

$$d(x) = \sqrt{(x-4)^2 + (\sqrt{x}-0)^2} = \sqrt{x^2 - 7x + 16}.$$

Sa dérivée vaut

$$d'(x) = \frac{2x-7}{2\sqrt{x^2-7x+16}}.$$

Dans ce cas il est plus simple d'étudier directement le signe de d' (qui est le même que celui de $2x-7$) plutôt que de calculer la dérivée seconde. On a

- $d'(x) = 0 \iff x = \frac{7}{2},$
- $d'(x) > 0 \iff x > \frac{7}{2},$
- $d'(x) < 0 \iff x < \frac{7}{2},$

par conséquent le point cherché est $(\frac{7}{2}, \sqrt{\frac{7}{2}})$.

Méthode simplifiée: comme la fonction $\sqrt{}$ est strictement croissante, minimiser d équivaut à minimiser d^2 : c'est une parabole convexe de sommet $x = \frac{7}{2}$ et $d(7/2) = \sqrt{d_2(7/2)} = \sqrt{7/2}$.

Exercice A.20

La mesure de la distance entre deux points donne une série de valeurs expérimentales $d_1, d_2, \dots, d_n$. Sur la base de ces valeurs, on désire obtenir une estimation de d qui soit la plus proche possible de la réalité. Trouver une formule pour d telle que la mesure d'erreur

$$(d - d_1)^2 + (d - d_2)^2 + \dots + (d - d_n)^2$$

soit minimale.

Correction

On veut minimiser la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par $f(d) = \sum_{i=1}^n (d - d_i)^2$. On a

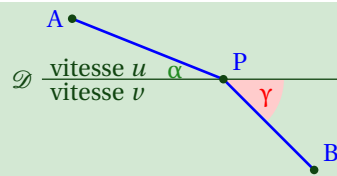
$$f'(d) = 2 \sum_{i=1}^n (d - d_i) = 2 \left(nd - \sum_{i=1}^n d_i \right)$$

donc $f'(d) = 0$ ssi $d = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d_i$.

Exercice A.21 (Loi de réfraction)

D'après le principe de FERMAT un rayon lumineux n'emprunte pas le chemin le plus court mais le chemin le plus rapide. Autrement dit, ce n'est pas la longueur du parcours mais sa durée qui est minimale.

1. Démontrer la loi de la réfraction: "dans le plan soient A et B deux points de chaque côté d'une droite $\mathcal{D}$. On suppose que la lumière voyage à vitesse u dans le demi plan contenant A et à vitesse v dans l'autre demi-plan. Alors le rayon lumineux prend le chemin caractérisé par l'équation $u \cos(\gamma) = v \cos(\alpha)$ où α et γ sont les angles indiqués ci-dessous."

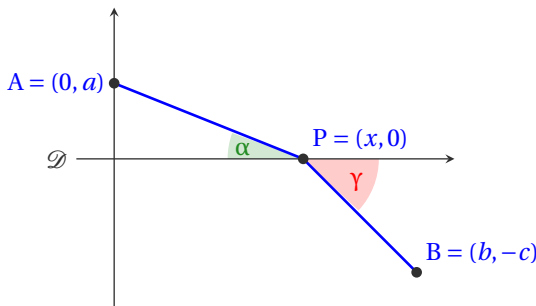


(Indication : choisir un repère adapté et exprimer le temps nécessaire pour le chemin en fonction de la position du point P ; puis minimiser par un calcul de dérivée.)

2. Pour un rayon lumineux qui arrive sur la surface d'un lac un nageur mesure $\alpha = 45^\circ$ et $\gamma = 58^\circ$. En déduire la vitesse de la lumière dans l'eau.

Correction

1. On remarque que sur le dessin $u > v$. En effet, dans le demi-plan supérieur la partie du chemin est un peu plus longue que si on suivait le chemin direct [AC] ; on gagne du temps en faisant un chemin plus long dans le demi-plan où la vitesse est plus rapide. Choisissons un système de coordonnées orthonormées et des notations comme indiquées ci-dessous.



Alors

$$AP = \sqrt{x^2 + a^2},$$

$$CP = \sqrt{(b-x)^2 + c^2}.$$

Ainsi la durée du trajet APC est

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{u} + \frac{\sqrt{(b-x)^2 + c^2}}{v}.$$

Cette expression définit une fonction dérivable f sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x) = \frac{x}{u\sqrt{x^2 + a^2}} - \frac{b-x}{v\sqrt{(b-x)^2 + c^2}} = \frac{\cos(\alpha)}{u} - \frac{\sin(\gamma)}{u}.$$

Ainsi $f'(x) = 0$ si et seulement si $u \cos(\gamma) = v \cos(\alpha)$. Géométriquement il est plus ou moins évident que cette condition correspond effectivement à un minimum de la fonction f , mais on peut aussi procéder rigoureusement en dérivant encore une fois :

$$f''(x) = \frac{a^2}{u\sqrt{(x^2 + a^2)^3}} + \frac{c^2}{v\sqrt{((b-x)^2 + c^2)^3}} > 0.$$

Le signe de la dérivée seconde étant strictement positif la dérivée f' change de signe au point où elle s'annule, de sorte que ce point est un minimum. Remarque : si la vitesse de la lumière varie en fonction du lieu (lieu anisotrope) le chemin le plus court n'est pas forcément le plus rapide ! C'est comme en voiture, un détour peut être plus rapide s'il évite des bouchons.

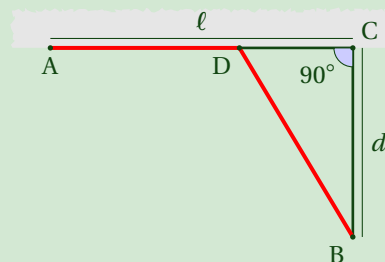
2. On obtient comme vitesse de la lumière dans l'eau :

$$v = \frac{\cos(58^\circ)}{\cos(45^\circ)} u \approx \sqrt{2} \times 0.53 \times 3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1} \approx 2.25 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}.$$

Exercice A.22

Un tracteur partant d'un point A situé sur une route rectiligne doit atteindre un point B situé dans un champ (voir la figure ci-contre). On connaît les distances $AC = \ell$ et $CB = d$ et on sait que le tracteur va deux fois moins vite dans le champ que sur la route. Il quitte la route en un point D de [AC] à préciser. Les trajets de A à D et de D à B sont supposés rectilignes. Déterminez le point D pour que le temps total soit minimal. Discutez suivant ℓ

et d .



Correction

Soit $AD = x$ avec $0 \leq x \leq \ell$. On a alors $DB = \sqrt{(\ell - x)^2 + d^2}$. Si v désigne la vitesse du tracteur dans le champ, sa vitesse sur la route est de $2v$ et le temps total mis par le tracteur pour atteindre B depuis A est

$$t(x) = \frac{x}{2v} + \frac{\sqrt{(\ell - x)^2 + d^2}}{v}.$$

On cherche $x \in [0; \ell]$ qui minimise la fonction t . On a

$$t'(x) = \frac{1}{2v} + \frac{-2(\ell - x)}{2v\sqrt{(\ell - x)^2 + d^2}} = \frac{\sqrt{(\ell - x)^2 + d^2} - 2(\ell - x)}{2v\sqrt{(\ell - x)^2 + d^2}}$$

donc $t'(x) = 0$ si et seulement si $x = \ell - \frac{d}{\sqrt{3}}$ et

$$t''(x) = \frac{d^2}{v((\ell - x)^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} > 0.$$

ce qui implique que $t'(x) > 0$ si et seulement si $x < \ell - \frac{d}{\sqrt{3}}$. Par conséquent,

- si $\ell < \frac{d}{\sqrt{3}}$ alors $t'(x) < 0$ pour tout $x \in [0; \ell]$: la fonction t atteint son minimum en $x = 0$, c'est-à-dire que le tracteur quitte la route en A ;
- si $\ell > \frac{d}{\sqrt{3}}$ alors $t'(x) < 0$ pour tout $x \in [0; \ell - \frac{d}{\sqrt{3}}]$ et $t'(x) > 0$ pour tout $x \in [\ell - \frac{d}{\sqrt{3}}; \ell]$: la fonction t atteint son minimum en $x = \ell - \frac{d}{\sqrt{3}}$.

Exercice A.23

On note x la quantité produite, p le prix et $f(x)$ le coût. On suppose que l'on se trouve dans un cas de concurrence parfaite, dans lequel le prix de la marchandise est indépendant de la quantité produite. Le profit est la fonction $\Pi(x) = \text{recette} - \text{coût}$. Prouver que le profit est optimal lorsque la recette marginale est égal au coût marginal.

Correction

La recette est $g(x) = px$. La recette marginale est $g'(x) = p$ et le coût marginal est $f'(x)$. Le profit est $\Pi(x) = g(x) - f(x)$. On a $\Pi'(x) = g'(x) - f'(x) = p - f'(x)$. Donc si $p = f'(x)$ la dérivée du profit s'annule et le profit est extrémal.

Exercice A.24

On considère un produit dont le prix unitaire est p ($p > 0$). On note q la quantité vendue de ce produit pendant un mois et on suppose que $q(p) = \alpha + \beta p$ où α et β sont des réels.

1. Peut-on déjà prédire le signe de la constante β ?
2. De combien varie la quantité vendue lorsque le prix augmente de 1 ?
3. Quelle est la plus grande valeur de p possible sachant que la quantité vendue q est un nombre positif ?
4. On suppose désormais que $q = 5000$ si $p = 100$, et que $q = 4000$ si $p = 200$. Déterminer α et β .
5. Déterminer en fonction de p les recettes mensuelles $r(p)$.
6. Quelle est la valeur maximale des recettes ?
7. Le coût unitaire de fabrication du produit est égal à 100. Déterminer en fonction de p le profit $g(p)$ total réalisé (c'est-à-dire la différence entre recettes et coût).
8. Pour quelle quantité le profit est-il maximal ?

Correction

1. La fonction q est affine. La quantité vendue est forcément une fonction décroissante du prix, donc β doit être négatif.
2. Le taux d'accroissement est $\beta = \frac{5000 - 4000}{100 - 200} = -10$. On en déduit (par décalage) que

$$q(p) = -10(p - 100) + 5000 = 6000 - 10p.$$

Donc $\alpha = 6000$.

3. Comme $\beta = -10$, lorsque le prix augmente de 1 on perd 10 acheteurs.

4. On résout l'inégalité

$$q(p) \geq 0 \iff 6000 - 10p \geq 0 \iff p \leq 600.$$

Donc on trouve des acheteurs si et seulement si le prix est inférieur à 600.

5. Les recettes mensuelles sont

$$r(p) = \text{prix unitaire} \times \text{quantité vendue} = p \times q(p) = 10p(600 - p).$$

6. La dérivée est

$$r'(p) = 20(300 - p),$$

donc r est croissante sur $[0, 300]$ et décroissante sur $[300, 600]$. Il y a donc un maximum en $p = 300$. Les recettes maximales sont donc

$$r(300) = 900000.$$

Solution alternative: la courbe de la fonction $p \mapsto r$ est une parabole concave ayant deux intersections avec l'axe des abscisses, en $p = 0$ et $p = 600$. Par symétrie le maximum se trouve au milieu entre ces deux intersections, c'est-à-dire au prix de 300.

7. On a

$$g(p) = r(p) - 100q(p) = (10p - 1000)(600 - p).$$

8. Après un petit calcul on trouve $g'(p) = 7000 - 20p$, donc g est croissante sur $[0, 350]$ et décroissante sur $[350, 600]$. Il y a donc un maximum pour le prix 350. Cela correspond à une quantité de $q(350) = 2500$.

Solution alternative: la courbe de la fonction $p \mapsto g$ est une parabole concave ayant deux intersections avec l'axe des abscisses, en $p = 100$ et $p = 600$. Par symétrie le maximum se trouve au milieu entre ces deux intersections, c'est-à-dire au prix de 350.

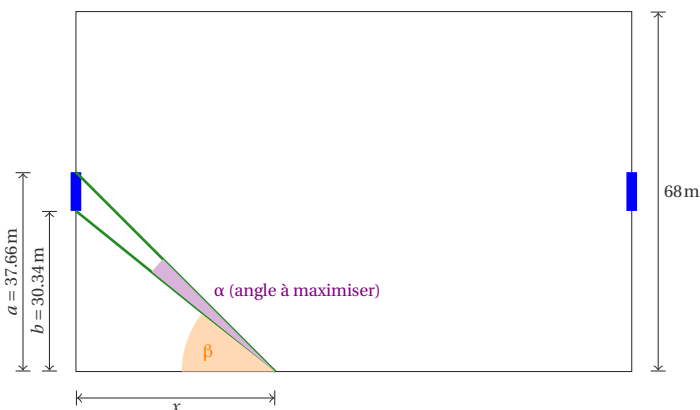
Exercice A.25

Un joueur de football, en possession du ballon, court sur la ligne de touche. Ayant une frappe extrêmement forte il ne se soucie pas de la distance et tire à l'endroit où l'angle d'ouverture par rapport au but est maximal. Quel est alors cet angle (en degrés) ?

Utiliser les dimensions recommandées par la FIFA: terrain 105 m $\times$ 68 m et largeur du but 7.32 m.

Correction

D'après ce dessin



on trouve

$$\begin{cases} \tan(\beta) = \frac{b}{x}, \\ \tan(\alpha + \beta) = \frac{a}{x}, \end{cases} \implies \begin{cases} \beta = \arctan\left(\frac{b}{x}\right), \\ \alpha + \beta = \arctan\left(\frac{a}{x}\right), \end{cases} \implies \alpha(x) = \arctan\left(\frac{a}{x}\right) - \arctan\left(\frac{b}{x}\right),$$

puis, par dérivation,

$$\alpha'(x) = \frac{b}{x^2 + b^2} - \frac{a}{x^2 + a^2} = \frac{(a-b)(ab - x^2)}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}.$$

Cette dérivée s'annule au seul point

$$x_0 = \sqrt{ab} = \sqrt{30.34 \text{ m} \times 37.66 \text{ m}} \approx 33.8 \text{ m}.$$

Géométriquement il est évident que la fonction $x \mapsto a(x)$ possède un unique maximum qui est donc x_0 . (On peut aussi remarquer que $a(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$ et que $\lim_{x \rightarrow 0} a(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} a(x) = 0$; ainsi la fonction dérivable α possède un maximum sur $\mathbb{R}_+$ qui se trouve donc en x_0). L'angle maximal est alors

$$\alpha(x_0) = \arctan\left(\frac{a}{x_0}\right) - \arctan\left(\frac{b}{x_0}\right) \simeq 6.18^\circ.$$

Exercice A.26

Deux rues se coupent en formant un angle droit. Une voiture circule sur une rue à une vitesse de 2 m s^{-1} et une seconde voiture circule sur l'autre rue à une vitesse de 4 m s^{-1} . Les voitures partent toutes les deux d'une distance de 200 m du point d'intersection et se dirigent vers l'intersection des rues. Quelle sera leur distance minimale ?

Correction

Plaçons les deux rues dans un plan cartésien, la première rue sera l'axe des abscisses, la deuxième ceux des ordonnées et l'intersection des deux rue se trouve au point de coordonnées $(0, 0)$. Indiquons par (x_i, y_i) la position de la voiture i ($i = 1$ ou 2). Alors

$$(x_1, y_1) = (-200 + 2t, 0)$$

$$(x_2, y_2) = (0, -200 + 4t)$$

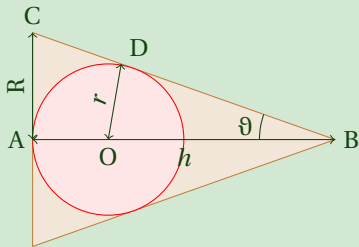
Soit $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ le carré de la fonction distance des deux voitures en fonction du temps :

$$f(t) = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = (-200 + 2t - 0)^2 + (0 + 200 - 4t)^2 = 20t^2 - 2400t + 80000.$$

Cette fonction est minimale pour $t = 60 \text{ s}$ et l'on a $\sqrt{f(t)} = \sqrt{20 \times 60^2 - 2400 \times 60 + 80000} = \sqrt{8000} \approx 90 \text{ m}$.

Exercice A.27 (Cônes de glace)

On veut insérer entièrement une sphère de glace dans un cône de biscuit de sorte à ce que le cône soit le plus remplis possible. Ceci revient à minimiser le rapport entre le volume du cône et le volume de la sphère.



- Exprimer la hauteur h et le rayon R du cône en fonction de $r > 0$ le rayon de la sphère et de $\vartheta \in]0; \frac{\pi}{2}[$ l'angle du cône.
- Trouver la valeur de ϑ qui minimise le rapport $\frac{\text{Volume du cône}}{\text{Volume de la sphère}}$.
- Calculer la hauteur h et le rayon R optimales du cône en fonction du rayon de la sphère r .

Correction

- On a deux triangles rectangles : le triangle ABC rectangle en A et le triangle OBD rectangle en D, par conséquent

$$\tan(\vartheta) = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{R}{h}, \quad \sin(\vartheta) = \frac{\overline{OD}}{\overline{OB}} = \frac{r}{h-r}, \quad \text{donc} \quad R = h \tan(\vartheta), \quad h = \left(\frac{1}{\sin(\vartheta)} + 1 \right) r.$$

- Soit $f:]0; \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$ la fonction ainsi définie :

$$f(\vartheta) = \frac{\text{Volume du cône}}{\text{Volume de la sphère}} = \frac{\frac{1}{3}\pi R^2 h}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{R^2 h}{4r^3} = \frac{(1 + \sin(\vartheta))^3}{4 \sin(\vartheta) \cos^2(\vartheta)}.$$

Pour minimiser f on cherche à annuler sa dérivée première :

$$\begin{aligned} f'(\vartheta) &= \frac{[3(1 + \sin(\vartheta))^2 \cos(\vartheta)] \times [4 \sin(\vartheta) \cos^2(\vartheta)] - [(1 + \sin(\vartheta))^3] \times [4(\cos(\vartheta) \cos^2(\vartheta) - 2 \sin^2(\vartheta) \cos(\vartheta))]}{[4 \sin(\vartheta) \cos^2(\vartheta)]^2} \\ &= 4 \frac{3 \sin(\vartheta) \cos^3(\vartheta) - (1 + \sin(\vartheta))(\cos^3(\vartheta) - 2 \sin^2(\vartheta) \cos(\vartheta))}{(4 \sin(\vartheta) \cos^2(\vartheta))^2} (1 + \sin(\vartheta))^2 \end{aligned}$$

et $f'(\vartheta) = 0$ si et seulement si

$$3 \sin(\vartheta) \cos^3(\vartheta) - (1 + \sin(\vartheta)) (\cos^2(\vartheta) - 2 \sin^2(\vartheta)) \cos(\vartheta) = 0.$$

On peut diviser par $\cos(\vartheta)$ car $\vartheta \in]0; \frac{\pi}{2}[$, ce qui donne

$$3 \sin(\vartheta) \cos^2(\vartheta) - (1 + \sin(\vartheta)) (\cos^2(\vartheta) - 2 \sin^2(\vartheta)) = 0.$$

On utilise la relation $\cos^2(\vartheta) = 1 - \sin^2(\vartheta)$

$$3 \sin(\vartheta) (1 - \sin^2(\vartheta)) - (1 + \sin(\vartheta)) (1 - 3 \sin^2(\vartheta)) = 0.$$

On remarque que $(1 - \sin^2(\vartheta)) = (1 - \sin(\vartheta))(1 + \sin(\vartheta))$ et qu'on peut diviser par $(1 + \sin(\vartheta))$ car $\vartheta \in]0; \frac{\pi}{2}[$, ce qui donne

$$3 \sin(\vartheta) (1 - \sin(\vartheta)) - (1 - 3 \sin^2(\vartheta)) = 0.$$

On trouve ainsi que l'angle $\hat{\vartheta}$ qui annule la dérivée première est tel que

$$\sin(\hat{\vartheta}) = \frac{1}{3}$$

et l'on a $f(\hat{\vartheta}) = 2$, *i.e.* la sphère occupe la moitié du volume du cône.

- On trouve directement $h = \left(\frac{1}{\sin(\hat{\vartheta})} + 1 \right) r = 4r$. De plus, sachant que pour $\vartheta \in]0; \frac{\pi}{2}[$ on a

$$\tan(\vartheta) = \frac{\sin(\vartheta)}{\sqrt{1 - \sin^2(\vartheta)}},$$

on conclut que $R = h \tan(\hat{\vartheta}) = h \frac{1}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}r$.

A.2. Primitives et intégrales

Si F est une primitive de f alors $F' = f$.

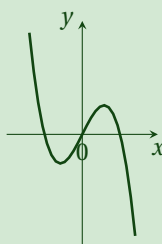
Rappels		
$F'' = f'$	$F' = f$	F
	> 0	$\nearrow$
	$= 0$	f tangente horizontale
	< 0	$\searrow$
> 0	$\nearrow$	convexe
$= 0$	$\longleftrightarrow$	
< 0	$\searrow$	concave

Ainsi,

- si F est croissante (résp. décroissante), alors sa dérivée f est positive (résp. négative); si F a des extrema, alors sa dérivée f s'annule;
- si F est convexe (résp. concave), alors sa dérivée seconde f' est positive (résp. négative), c'est-à-dire f est croissante (résp. décroissante); si F a un point d'inflexion, alors sa dérivée seconde f' s'annule, c'est-à-dire f a un extremum.

Exercice A.28

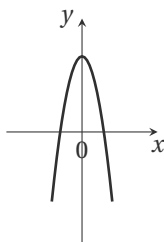
Soit f une fonction. Ci-dessous on a tracé le graphe d'une de ses primitives.



Que peut-on dire sur le signe de f ? Et sur la croissance de f ?

Correction

Un graphe possible de f est donc



Exercice A.29 (Par intégration directe)

Calculer les primitives suivantes :

- | | | | |
|--------------------------------------|-----------------------------------|--|---|
| 1. $\int 2x^3 - 3x + 1 \, dx$ | 2. $\int (1 + 2x^3)^2 \, dx$ | 3. $\int \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} \, dx$ | 4. $\int \frac{1}{x\sqrt[3]{x}} \, dx$ |
| 5. $\int \frac{1}{\sqrt{x+1}} \, dx$ | 6. $\int \sqrt[4]{(x-1)^3} \, dx$ | 7. $\int \frac{x}{x+1} \, dx$ | 8. $\int \frac{x^3 + x + 1}{x^2 + 1} \, dx$ |

Correction

- | | |
|---|--|
| 1. $2\frac{x^4}{4} - 3\frac{x^2}{2} + x + c = \frac{1}{2}x(x^3 - 3x + 2) + c$ | 2. $\int 4x^6 + 4x^3 + 1 \, dx = \frac{4}{7}x^7 + x^4 + x + c$ |
| 3. $\int x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}} \, dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + c$ | 4. $\int x^{-\frac{4}{3}} \, dx = -\frac{3}{\sqrt[3]{x}} + c$ |
| 5. $\frac{(x+1)^{\frac{1}{2}}}{1/2} + c = 2\sqrt{x+1} + c$ | 6. $\frac{4}{7}(x-1)^{7/4} + c$ |
| 7. $\int \frac{x+1-1}{x+1} \, dx = \int 1 - \frac{1}{x+1} \, dx = x - \ln(x+1) + c$ | 8. $\int \frac{x(x^2+1)+1}{x^2+1} \, dx = \int x + \frac{1}{x^2+1} \, dx = \frac{x^2}{2} + \arctan(x) + c$ |

Exercice A.30

Calculer les primitives suivantes :

- | | | | | |
|-------------------------------|-------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|--|
| 1. $\int \frac{1}{1+x} \, dx$ | 2. $\int \frac{1}{1-x} \, dx$ | 3. $\int \frac{1}{1+x^2} \, dx$ | 4. $\int \frac{1}{1-x^2} \, dx$ | 5. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$ |
|-------------------------------|-------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|--|

Correction

- $u(x) = 1+x, u'(x) = 1, \int \frac{u'(x)}{u(x)} \, dx = \ln|1+x| + c$
- $u(x) = 1-x, u'(x) = -1, -\int \frac{u'(x)}{u(x)} \, dx = -\ln|1-x| + c$
- $\arctan(x) + c$
- $\frac{1}{1-x^2} = \frac{1/2}{1-x} + \frac{1/2}{1+x}, \frac{1}{2} \int \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} \, dx = \frac{1}{2}(\ln|1+x| - \ln|1-x|) + c = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + c = \ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) + c$
- $\arcsin(x) + c = -\arccos(x) + c$

Exercice A.31 (Par transformations élémentaires ou changement de variable)

Calculer les primitives suivantes en utilisant

$$\int \underbrace{f(u(x))}_{=f} \underbrace{u'(x)}_{=\frac{dt}{dx}} dx = \int f(t) \frac{dt}{dx} dx = \int f(t) dt$$

Remarque: si $u(x) = Ax + B$ alors $u'(x) = A$ constante et on pourra utiliser la propriété $\int \underbrace{f(u(x))}_{=f} dx = \frac{1}{A} \int f(t) A dt$.

- | | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1. $\int \frac{e^x}{1+e^x} dx$ | 2. $\int \frac{1}{1+e^x} dx$ | 3. $\int \sqrt{2x+1} dx$ | 4. $\int \frac{\ln^3(x)}{x} dx$ | 5. $\int \frac{e^{-1/x}}{x^2} dx$ |
| 6. $\int \frac{1}{x \ln^3(x)} dx$ | 7. $\int \frac{1+\cos(x)}{x+\sin(x)} dx$ | 8. $\int \frac{2x}{1+x^4} dx$ | 9. $\int \frac{\sin(2x)}{1+\sin^2(x)} dx$ | 10. $\int \sin^3(x) \cos(x) dx$ |
| 11. $\int \frac{1}{\sin(x) \cos(x)} dx$ | 12. $\int \frac{e^{\tan(x)}}{\cos^2(x)} dx$ | 13. $\int \frac{1-2x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ | 14. $\int \frac{x+1}{x^2+2x+2} dx$ | 15. $\int x(x^2+1)^2 dx$ |
| 16. $\int e^{2x+1} dx$ | 17. $\int x\sqrt{5+x^2} dx$ | 18. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$ | 19. $\int x e^{x^2} dx$ | 20. $\int x^2 e^{x^3} dx$ |
| 21. $\int \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$ | 22. $\int \frac{x}{\sqrt[3]{x^2+3}} dx$ | 23. $\int \frac{x^3}{1+x^4} dx$ | 24. $\int \sin(3x) dx$ | 25. $\int \frac{e^{\tan(x)}}{\cos^2(x)} dx$ |

Correction

- $u(x) = 1 + e^x$, $u'(x) = e^x$, $\int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \ln(1 + e^x) + c$
- $u(x) = 1 + e^x$, $u'(x) = e^x$, $\int \frac{1+e^x-e^x}{1+e^x} dx = \int 1 dx - \int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = x - \ln(1 + e^x) + c$
- $u(x) = 2x + 1$, $u'(x) = 2$, $\frac{1}{2} \int \sqrt{u(x)} u'(x) dx = \frac{1}{2} \int [u(x)]^{1/2} u'(x) dx = \frac{[u(x)]^{3/2}}{3} = \frac{\sqrt{(2x+1)^3}}{3} + c$
- $u(x) = \ln(x)$, $u'(x) = 1/x$, $\int (u(x))^3 u'(x) dx = \frac{\ln^4(x)}{4} + c$
- $u(x) = -1/x$, $u'(x) = 1/x^2$, $\int e^{u(x)} u'(x) dx = e^{-1/x} + c$
- $u(x) = \ln(x)$, $u'(x) = 1/x$, $\int \frac{u'(x)}{(u(x))^3} dx = -\frac{1}{2\ln^2(x)} + c$
- $u(x) = x + \sin(x)$, $u'(x) = 1 + \cos(x)$, $\int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \ln|x + \sin(x)| + c$
- $u(x) = x^2$, $u'(x) = 2x$, $\int \frac{u'(x)}{1+(u(x))^2} dx = \arctan(x^2) + c$
- $u(x) = 1 + \sin^2(x)$, $u'(x) = 2\sin(x)\cos(x) = \sin(2x)$, $\int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \ln(1 + \sin^2(x)) + c$
- $u(x) = \sin(x)$, $u'(x) = \cos(x)$, $\int (u(x))^3 u'(x) dx = \frac{\sin^4(x)}{4} + c$
- $u(x) = \tan(x)$, $u'(x) = 1/\cos^2(x)$, $\int \frac{\cos(x)}{\sin(x)\cos^2(x)} dx = \int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \ln|\tan(x)| + c$
- $u(x) = \tan(x)$, $u'(x) = 1/\cos^2(x)$, $\int e^{u(x)} u'(x) dx = e^{\tan(x)} + c$
- $u(x) = 1 - x^2$, $u'(x) = -2x$, $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx + \int (u(x))^{-1/2} u'(x) dx = \arcsin(x) + 2\sqrt{1-x^2} + c$
- $u(x) = x^2 + 2x + 1$, $u'(x) = 2x + 2$, $\frac{1}{2} \int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 2x + 1) + c$
- $u(x) = x^2 + 1$, $u'(x) = 2x$, $\frac{1}{2} \int (u(x))^2 u'(x) dx = \frac{(x^2+1)^3}{6} + c$
- $u(x) = 2x + 1$, $u'(x) = 2$, $\frac{1}{2} \int e^{u(x)} u'(x) dx = \frac{1}{2} e^{u(x)} + c = \frac{e^{2x+1}}{2} + c$
- $u(x) = 5 + x^2$, $u'(x) = 2x$, $\frac{1}{2} \int (u(x))^{1/2} u'(x) dx = \frac{1}{3} (5 + x^2)^{3/2} + c$
- $u(x) = \sqrt{x}$, $u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $2 \int e^{u(x)} u'(x) dx = 2e^{\sqrt{x}} + c$
- $u(x) = x^2$, $u'(x) = 2x$, $\frac{1}{2} \int e^{u(x)} u'(x) dx = \frac{e^{x^2}}{2} + c$
- $u(x) = x^3$, $u'(x) = 3x^2$, $\frac{1}{3} \int e^{u(x)} u'(x) dx = \frac{e^{x^3}}{3} + c$
- $u(x) = \sqrt{x}$, $u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $\frac{1}{2} \int \sin(u(x)) u'(x) dx = -2\cos\sqrt{x} + c$
- $u(x) = x^2 + 3$, $u'(x) = 2x$, $\frac{1}{2} \int (u(x))^{-1/3} u'(x) dx = \frac{3}{4} \sqrt[3]{(x^2+3)^2} + c$

$$23. u(x) = 1 + x^4, u'(x) = 4x^3, \frac{1}{4} \int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \frac{\ln(1+x^4)}{4} + c$$

$$24. u(x) = 3x, u'(x) = 3, \frac{1}{3} \int \sin(u(x)) u'(x) dx = -\frac{1}{3} \cos(3x) + c$$

$$25. \text{ Si on pose } t = \tan(x) \text{ alors } dt = \frac{1}{\cos^2(x)} dx \text{ et on obtient } e^{\tan(x)} + c \text{ car } \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x) =$$

Exercice A.32 (Par transformations élémentaires ou changement de variable)

Calculer les primitives suivantes en utilisant

$$\int \underbrace{f(u(x))}_{=t} dx = \int f(t) \frac{dx}{dt} dt.$$

Pour cela il faut tout d'abord calculer $x = u^{-1}(t)$ puis en calculer la dérivée. Plus généralement, si on a une relation du type $u(x) = h(t)$ alors $u'(x) dx = h'(t) dt$ ce qui permet de remplacer $dx = \frac{h'(t)}{u'(x)} dt$ avec $x = u^{-1}(h(t))$.

- | | | | |
|---|--|--|--|
| 1. $\int \frac{\sin(\ln(x))}{x} dx$ | 2. $\int \frac{1+e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$ | 3. $\int \frac{1}{x-\sqrt{x}} dx$ | 4. $\int \frac{1}{\sqrt{x(1+\sqrt{x})}} dx$ |
| 5. $\int \frac{e^x}{1+e^x} dx$ | 6. $\int \frac{1}{x \ln(x)} dx$ | 7. $\int \frac{1}{x \sqrt{\ln(\frac{1}{x})}} dx$ | 8. $\int e^x \ln(1+e^x) dx$ |
| 9. $\int \frac{1}{x(2+\ln^2(x))} dx$ | 10. $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx$ | 11. $\int \frac{x^5}{\sqrt{x^3-1}} dx$ | 12. $\int \sqrt{e^x-1} dx$ |
| 13. $\int \frac{\ln(x)}{x} dx$ | 14. $\int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx$ | 15. $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$ | 16. $\int x \sqrt{a+x^2} dx$ |
| 17. $\int \frac{1}{x \sqrt{1-\ln^2(x)}} dx$ | 18. $\int \frac{e^{1/x}}{x^2} dx$ | 19. $\int \frac{\cos(x)}{1+\sin(x)} dx$ | 20. $\int \frac{1}{x^2} \cos\left(\frac{1}{x}\right) dx$ |
| 21. $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} dx$ | 22. $\int \frac{1}{3+x^2} dx$ | 23. $\int \frac{x}{1+x^4} dx$ | |

Correction

Ici c'est plus difficile de reconnaître $u'(x)$ ainsi on inverse la relation $t = u(x)$ pour obtenir $x = u^{-1}(t)$ avant de calculer les dérivées et trouver la relation entre dt et dx :

- Pour $x > 0$, si on pose $t = \ln(x)$ alors $\frac{1}{x} dx = dt$ et on obtient $-\cos(\ln(x)) + c$
- Pour $x > 0$, si on pose $t = \sqrt{x}$ alors $dx = 2t dt$ et on obtient $2(\sqrt{x} + e^{\sqrt{x}}) + c$
- Pour $x > 0$, si on pose $t = \sqrt{x}$ alors $dx = 2t dt$ et on obtient $2\ln(\sqrt{x}-1) + c$
- Pour $x > 0$, si $x > 0$. Si on pose $t = \sqrt{x}$ alors $dx = 2t dt$ et on obtient $4\sqrt{1+\sqrt{x}} + c$
- Si on pose $t = e^x$ alors $e^x dx = dt$ et on obtient $\ln(1+e^x) + c$
- Pour $x > 0$, si on pose $t = \ln(x)$ alors $\frac{1}{x} dx = dt$ et on obtient $\ln|\ln(x)| + c$
- Pour $x > 0$, si on pose $t = \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$ alors $-\frac{1}{x} dx = dt$ et on obtient $-2\sqrt{\ln\left(\frac{1}{x}\right)} + c$
- Si on pose $t = 1 + e^x$ alors $e^x dx = dt$ ainsi $\int e^x \ln(1+e^x) dx = \int \ln(t) dt$. Sans utiliser l'intégration par partie, si on pose $t = e^w$ alors $dt = e^w dw$ ainsi $\int \ln(t) dt = \int w e^w dw = (w-1)e^w$ et on obtient $(1+e^x)\ln(1+e^x) - e^x + c$.
- Pour $x > 0$, si on pose $t = \ln(x)$ alors $\frac{1}{x} dx = dt$ et on obtient $\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{\ln(x)}{\sqrt{2}}\right) + c$
- Si on pose $t^2 = 1 - x^2$ alors $-x dx = t dt$ et on obtient $-\frac{1}{3}(x^2+2)\sqrt{1-x^2} + c$
- Si on pose $t^2 = x^3 - 1$ alors $3x^2 dx = 2t dt$ et on obtient $\frac{2}{9}(x^3+2)\sqrt{x^3-1} + c$
- Si on pose $t^2 = e^x - 1$ alors $dx = \frac{2t}{t^2+1} dt$ et on obtient $2(\sqrt{e^x-1} - \arctan(\sqrt{e^x-1})) + c$
- Pour $x > 0$, si on pose $t = \ln(x)$ alors $dx = e^t dt$ et on obtient $\frac{1}{2} \ln^2(x) + c$
- Si on pose $t = e^x$ alors $dx = \frac{1}{t} dt$ et on obtient $\arctan e^x + c$
- Si on pose $t = \sqrt{1+x^2}$ alors $2x dx = 2t dt$ et on obtient $\sqrt{1+x^2} + c$

16. Pour $a + x^2 \geq 0$, si on pose $t = \sqrt{a + x^2}$ alors $2x \, dx = 2t \, dt$ et on obtient $\frac{1}{3}\sqrt{(a + x^2)^3} + c$
17. Pour $x > 0$, si on pose $t = \ln(x)$ alors $\frac{1}{x} \, dx = dt$ et on obtient $\arcsin(\ln(x)) + c$
18. Si on pose $t = \frac{1}{x}$ alors $-\frac{1}{x^2} \, dx = dt$ et on obtient $-e^{1/x} + c$
19. Si on pose $t = 1 + \sin(x)$ alors $\cos(x) \, dx = dt$ et on obtient $\ln|1 + \sin(x)| + c$
20. Si on pose $t = \frac{1}{x}$ alors $-\frac{1}{x^2} \, dx = dt$ et on obtient $-\sin\left(\frac{1}{x}\right) + c$
21. Si on pose $t^2 = 1 + x^2$ alors $x \, dx = t \, dt$ et on obtient $\frac{1}{3}(x^2 - 2)\sqrt{x^2 + 1} + c$
22. $\int \frac{1}{3+x^2} \, dx = \frac{1}{3} \int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2} \, dx$. Si on pose $t = x/\sqrt{3}$ alors $dx = \sqrt{3} \, dt$ et on obtient $\frac{\sqrt{3}}{3} \arctan(x/\sqrt{3}) + c$
23. Si on pose $t = x^2$ alors $2 \, dx = dt$ et on obtient $\frac{1}{2} \arctan(x^2) + c$

Exercice A.33

Calculer les primitives suivantes :

- | | | |
|---|---|---|
| 1. $\int \frac{\cos^2(x)}{1 - \sin(x)} \, dx$ | 2. $\int \frac{\sin(x) + \cos(x)}{\sin(x) - \cos(x)} \, dx$ | 3. $\int \frac{1}{\sin^2(x) \cos^2(x)} \, dx$ |
| 4. $\int \frac{1}{\cos(x) \sin(x)} \, dx$ | 5. $\int \frac{1}{\sin(x)} \, dx$ | 6. $\int \frac{1}{\cos(x)} \, dx$ |

Correction

1. $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x) = (1 - \sin(x))(1 + \sin(x))$, $\int \frac{(1 - \sin(x))(1 + \sin(x))}{1 - \sin(x)} \, dx = x - \cos(x) + c$
2. $1 = \cos^2(x) + \sin^2(x)$, $u(x) = \sin(x) - \cos(x)$, $u'(x) = \sin(x) + \cos(x)$, $\int \frac{\sin(x) + \cos(x)}{\sin(x) - \cos(x)} \, dx = \int \frac{u'(x)}{u(x)} \, dx = \ln(\sin(x) - \cos(x)) + c$
3. $1 = \cos^2(x) + \sin^2(x)$, $\int \frac{\sin^2(x) + \cos^2(x)}{\sin^2(x) \cos^2(x)} \, dx = \int \frac{1}{\cos^2(x)} \, dx + \int \frac{1}{\sin^2(x)} \, dx = \tan(x) - \frac{1}{\tan(x)} + c$
4. $1 = \cos^2(x) + \sin^2(x)$, $\int \frac{1}{\cos(x) \sin(x)} \, dx = \int \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos(x) \sin(x)} \, dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} + \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \, dx = -\ln|\cos(x)| + \ln|\sin(x)| + c$
5. $\sin(x) = 2 \sin(x/2) \cos(x/2)$, $u(x) = x/2$, $u'(x) = 1/2$, $\int \frac{1}{\sin(x)} \, dx = \int \frac{1}{\cos(u(x)) \sin(u(x))} u'(x) \, dx = -\ln|\cos(x/2)| + \ln|\sin(x/2)| + c = \ln|\tan(x/2)| + c$
6. $\cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, $u(x) = \frac{\pi}{2} - x$, $u'(x) = -1$, $\int \frac{1}{\cos(x)} \, dx = -\int \frac{1}{\sin(u(x))} u'(x) \, dx = \ln|\cos(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2})| - \ln|\sin(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2})| + c = \ln(\sin(x) - \cos(x)) + c$

Exercice A.34 (Intégration par parties)Calculer les primitives suivantes en utilisant $\int f(x)g'(x) \, dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) \, dx$:

- | | | | |
|------------------------------------|---|---------------------------|---|
| 1. $\int \frac{\ln(x)}{x^2} \, dx$ | 2. $\int \ln(1+x) \, dx$ | 3. $\int x^2 e^x \, dx$ | 4. $\int \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} \, dx$ |
| 5. $\int x \sin(x) \, dx$ | 6. $\int x^2 \cos(x) \, dx$ | 7. $\int x \ln(x) \, dx$ | 8. $\int \frac{\sin(x)}{\cos^3(x)} e^{\tan(x)} \, dx$ |
| 9. $\int x^3 \ln(x) \, dx$ | 10. $\int \frac{\ln(x)}{\sqrt[4]{x}} \, dx$ | 11. $\int \ln^2(x) \, dx$ | 12. $\int x^3 \sin(x^2) \, dx$ |

Correction

1. On pose $f(x) = \ln(x)$ et $g'(x) = \frac{1}{x^2}$. Alors $f'(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = -\frac{1}{x}$. On obtient $f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) \, dx = -\frac{1+\ln(x)}{x} + c$
2. On pose $f(x) = \ln(1+x)$ et $g'(x) = 1$. Alors $f'(x) = \frac{1}{1+x}$ et $g(x) = x$. On obtient $f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) \, dx = (1+x)\ln(1+x) - x + c$
3. On pose $f(x) = x^2$ et $g'(x) = e^x$. Alors $f'(x) = 2x$ et $g(x) = e^x$. On obtient $f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) \, dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x \, dx$. On intègre encore par partie et on obtient $e^x((x-2)x+2) + c$
4. On pose $f(x) = \ln(x)$ et $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Alors $f'(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = 2\sqrt{x}$. On obtient $f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) \, dx = 2\sqrt{x}(\ln(x)-2) + c$
5. On pose $f(x) = x$ et $g'(x) = \sin(x)$. Alors $f'(x) = 1$ et $g(x) = -\cos(x)$. On obtient $f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) \, dx = -x \cos(x) + \sin(x) + c$

6. On pose $f(x) = x^2$ et $g'(x) = \cos(x)$. Alors $f'(x) = 2x$ et $g(x) = \sin(x)$. On obtient $f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx = x^2 \sin(x) - 2[-x \cos(x) + \sin(x)] + c$
7. On pose $f(x) = \ln(x)$ et $g'(x) = x$. Alors $f'(x) = 1/x$ et $g(x) = x^2/2$. On obtient $f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx = \frac{1}{2}x^2 \ln(x) - \frac{1}{4}x^2 + c$
8. On pose $f(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ et $g'(x) = \frac{e^{\tan(x)}}{\cos^2(x)}$. Alors $f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$ et $g(x) = e^{\tan(x)}$. On obtient $f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx = e^{\tan(x)}(\tan(x) - 1) + c$
9. On pose $f(x) = \ln(x)$ et $g'(x) = x^3$. Alors $f'(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = \frac{x^4}{4}$. On obtient $f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx = \frac{1}{16}x^4(4 \ln(x) - 1) + c$
10. On pose $f(x) = \ln(x)$ et $g'(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x}}$. Alors $f'(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = \frac{4x^{3/4}}{3}$. On obtient $f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx = \frac{4}{3}x^{3/4}(\ln(x) - \frac{4}{3}) + c$
11. On pose $f(x) = \ln(x)$ et $g'(x) = \ln(x)$. Alors $f'(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = x \ln(x) - x$. On obtient $f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx = x(\ln^2(x) - 2 \ln(x) + 2) + c$
12. On pose d'abord $t = x^2$ ainsi $dt = 2x dx$. Alors $\int x^3 \sin(x^2) dx = \frac{1}{2} \int x^2 \sin(x^2) 2x dx = \frac{1}{2} \int t \sin(t) dt$. On pose $f(t) = t$ et $g'(t) = \sin(t)$. Alors $f'(t) = 1$ et $g(t) = -\cos(t)$. On obtient $f(t)g(t) - \int f'(t)g(t) dt = \frac{-t \cos(t) + \sin(t)}{2} + c = \frac{-x^2 \cos(x^2) + \sin(x^2)}{2} + c$

Exercice A.35

Calculer la primitive suivante en utilisant un changement de variable. Comparer ensuite au résultat obtenu en utilisant l'intégration par parties :

$$\int \frac{x \arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Correction

CV Si on pose $t = \arcsin(x)$ alors $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = dt$ et $x = \sin(t)$ et on obtient

$$\int \frac{x \arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int t \sin(t) dt$$

On a calculé cette intégrale à l'exercice A.34(5) :

$$\int t \sin(t) dt = -t \cos(t) + \sin(t) + c = -\arcsin(x) \cos(\arcsin(x)) + x + c$$

IPP

$$\int \frac{x \arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad \begin{array}{l} f(x) = \arcsin(x) \\ g(x) = -\sqrt{1-x^2} \end{array} \quad \begin{array}{l} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ \Leftarrow g'(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \end{array} = -\sqrt{1-x^2} \cdot \arcsin(x) + x + c$$

Les deux calculs donnent le même résultat car $\cos(\arcsin(x)) = \pm \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))} = \pm \sqrt{1 - x^2}$

Exercice A.36 (cf. P. HALMOS)

Si $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions dérivables quelconques, on sait que *la dérivée du produit n'est pas le produit des dérivées*, autrement dit $(fg)' \neq f'g'$. Cependant, il existe des fonctions f et g pour lesquelles on a bien $(fg)' = f'g'$, par exemple si f et g sont toutes deux égales à une constante (pas nécessairement la même). Pouvez-vous en trouver d'autres ?

Correction

- Si $f(x) = k_1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $g(x) = k_2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors $(fg)'(x) = (k_1 k_2)' = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $f'(x)g'(x) = 0 \times 0 = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- Si $g = f$, on cherche f telle que $(f^2)' = (f')^2$, c'est-à-dire $2f(x)f'(x) = (f'(x))^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc, soit $f'(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et on trouve à nouveau $f(x) = g(x) = k$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, soit $2f(x) = f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et on trouve $f(x) = g(x) = ke^{2x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

- Dire que $(fg)' = f'g' + fg''$ revient à dire que $f'g + fg' = f'g'$. En divisant par le produit fg (il est inutile à ce stade de se préoccuper de la possibilité de diviser par 0, nous cherchons seulement formellement des conditions nécessaires) on a

$$\frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot \frac{g'(x)}{g(x)}$$

c'est-à-dire $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\frac{g'(x)}{g(x)}}{1 - \frac{g'(x)}{g(x)}}$, soit encore

$$[\ln(f(x))]' = \frac{g'(x)}{g'(x) - g(x)}.$$

Si on choisit g , il suffit de poser $f = e^G$ où G est une primitive de $\frac{g'(x)}{g'(x) - g(x)}$.

Voyons quelques exemples :

- si on pose $g(x) = x$ alors $G(x) = \int \frac{1}{1-x} dx = -\ln(1-x)$ et $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Vérifions si on a bien $(fg)' = f'g'$:

$$(fg)'(x) = \left(\frac{x}{1-x} \right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$f'(x)g'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

- si on pose $g(x) = x^a$ alors $G(x) = \int \frac{ax^{a-1}}{ax^{a-1} - x^a} dx = \int \frac{ax^{a-1}}{ax^{a-1} - x^a} dx = -a \ln(a-x)$ et $f(x) = \frac{1}{(a-x)^a}$. Vérifions si on a bien $(fg)' = f'g'$:

$$(fg)'(x) = \left(\frac{x^a}{(a-x)^a} \right)' = a^2 x^{a-1} (a-x)^{-a-1}$$

$$f'(x)g'(x) = a(a-x)^{-a-1} \cdot ax^{a-1} = a^2 x^{a-1} (a-x)^{-a-1}$$

- si on pose $g(x) = e^{ax}$ alors $G(x) = \int \frac{ae^{ax}}{ae^{ax} - e^{ax}} dx = \frac{a}{a-1} x$ et $f(x) = e^{bx}$ où $b = a/(a-1)$. Vérifions si on a bien $(fg)' = f'g'$:

$$(fg)'(x) = (e^{bx} e^{ax})' = (e^{(a+b)x})' = (a+b)e^{(a+b)x}$$

$$f'(x)g'(x) = be^{bx} ae^{ax} = (ab)e^{(a+b)x} = (a+b)e^{(a+b)x}$$

Exercice A.37 (Formules de réduction)

Les formules de réduction dérivent de l'application répétée de la règle d'intégration par parties.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{R}^*$, montrer que

$$\int x^n e^{\alpha x} dx = \left(x^n - \frac{n}{\alpha} x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{\alpha^2} x^{n-2} \dots + (-1)^n \frac{n!}{\alpha^n} \right) \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} + c$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\int \sin^n(x) dx = \frac{-\sin^{n-1}(x) \cos(x)}{n} + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2}(x) dx,$$

$$\int \cos^n(x) dx = \frac{\cos^{n-1}(x) \sin(x)}{n} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2}(x) dx.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\int x^n \sin(x) dx = -x^n \cos(x) + nx^{n-1} \sin(x) - n(n-1) \int x^{n-2} \sin(x) dx,$$

$$\int x^n \cos(x) dx = x^n \sin(x) + nx^{n-1} \cos(x) - n(n-1) \int x^{n-2} \cos(x) dx.$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha \neq -1$ et $x > 0$. Montrer que

$$\int x^\alpha \ln^n(x) dx = \left(\ln^n(x) - \frac{n}{\alpha+1} \ln^{n-1}(x) + \frac{n(n-1)}{(\alpha+1)^2} \ln^{n-2}(x) \cdots + (-1)^n \frac{n!}{(\alpha+1)^n} \right) \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c.$$

Correction

1. On pose $I_n = \int x^n e^{\alpha x} dx$. En intégrant par parties ($f(x) = x^n$ et $g'(x) = e^{\alpha x}$) on trouve

$$I_n = x^n \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} - \frac{n}{\alpha} I_{n-1} = x^n \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} - \frac{n}{\alpha} \left(x^{n-1} \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} - \frac{n-1}{\alpha} I_{n-2} \right) = \cdots = \left(x^n - \frac{n}{\alpha} x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{\alpha^2} x^{n-2} \cdots + (-1)^n \frac{n!}{\alpha^n} \right) \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} + c$$

2. On pose $I_n = \int \sin^n(x) dx$. En intégrant par parties ($f(x) = \sin^{n-1}(x)$ et $g'(x) = \sin(x)$) on trouve

$$I_n = -\sin^{n-1}(x) \cos(x) + (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n = \frac{-\sin^{n-1}(x) \cos(x)}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

De la même manière, on pose $I_n = \int \cos^n(x) dx$. En intégrant par parties ($f(x) = \cos^{n-1}(x)$ et $g'(x) = \cos(x)$) on trouve

$$I_n = \frac{\cos^{n-1}(x) \sin(x)}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

3. On pose $I_n = \int x^n \sin(x) dx$ et $J_n = \int x^n \cos(x) dx$. En intégrant par parties ($f(x) = x^n$ et $g'(x) = \sin(x)$ dans la première intégrale et $f(x) = x^n$ et $g'(x) = \cos(x)$ dans la deuxième intégrale) on trouve

$$I_n = -x^n \cos(x) + nJ_{n-1} \quad J_n = x^n \sin(x) - nI_{n-1}$$

Par conséquent

$$I_n = -x^n \cos(x) + n(x^{n-1} \sin(x) - (n-1)I_{n-2}) = -x^n \cos(x) + nx^{n-1} \sin(x) - n(n-1)I_{n-2}$$

$$J_n = x^n \sin(x) - n(-x^{n-1} \cos(x) + (n-1)J_{n-2}) = x^n \sin(x) + nx^{n-1} \cos(x) - n(n-1)J_{n-2}$$

4. On pose $I_n = \int x^\alpha \ln^n(x) dx$. En intégrant par parties ($f(x) = \ln^n(x)$ et $g'(x) = x^\alpha$) on trouve

$$I_n = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \ln^n(x) - \frac{n}{\alpha+1} I_{n-1} = \cdots = \left(\ln^n(x) - \frac{n}{\alpha+1} \ln^{n-1}(x) + \frac{n(n-1)}{(\alpha+1)^2} \ln^{n-2}(x) \cdots + (-1)^n \frac{n!}{(\alpha+1)^n} \right) \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c.$$

Exercice A.38 (Vitesse et accélération)

Soit $V > 0$ une constante. Une voiture roule à une vitesse de $v(t) = Vt(1-t)$ km h⁻¹ durant l'intervalle de temps $0 \leq t \leq 1$ h. Quelle a été sa vitesse maximale? Que vaut l'accélération instantanée? Quelle distance a-t-elle parcouru?

Correction

- Vitesse maximale: $v(t) = Vt(1-t) = V(t-t^2)$, $v'(t) = V(1-2t)$, $v'(t) = 0$ ssi $t = \frac{1}{2}$ et $v(\frac{1}{2}) = \frac{V}{4}$.
- Accélération instantanée: $a(t) = v'(t) = V(1-2t)$ donc $a > 0$ si $t < \frac{1}{2}$ et $a < 0$ si $t > \frac{1}{2}$
- Distance parcourue: $v(t) = x'(t)$ donc $x_{\text{parcourue}} = \int_0^1 v(t) dt = \frac{V}{6}$.

Exercice A.39

Calculer

$$\mathcal{A} = \int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx, \quad \mathcal{B} = \int_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} \frac{1}{1+3x^2} dx, \quad \mathcal{C} = \int_{-1}^1 \frac{2x-5}{x^2-5x+6} dx.$$

Correction

$$\mathcal{A} = [\arctan(x)]_{-1}^1 = \arctan(1) - \arctan(-1) = \frac{\pi}{4} - \frac{-\pi}{4} = \frac{\pi}{2},$$

$$\mathcal{B} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int_{-1}^1 \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\mathcal{A}}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}},$$

$$\mathcal{C} = \int_{-1}^1 \frac{2x-5}{x^2-5x+6} dx = [\ln|x^2-5x+6|]_{-1}^1 = \ln(2) - \ln(12) = \ln(2) - \ln(3) - 2\ln(2) = -\ln(2) - \ln(3).$$

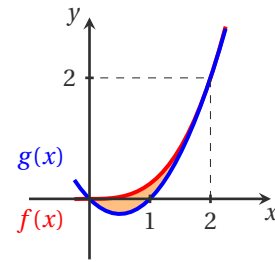
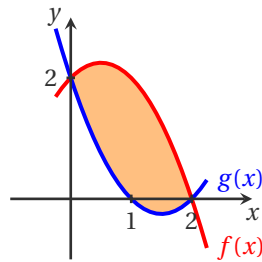
Exercice A.40 (Calcul de l'aire)Calculer l'aire comprise entre le graphe de la fonction $f(x)$ et le graphe de la fonction $g(x)$:

a) $f(x) = -x^2 + x + 2$ et $g(x) = x^2 - 3x + 2$

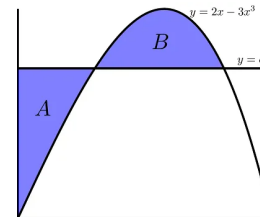
b) $f(x) = \frac{x^3}{4}$ et $g(x) = x^2 - x$

Correctiona) Comme $f(x) = g(x)$ ssi $x \in \{0, 2\}$ et $f(x) \geq g(x)$ pour $x \in [0, 2]$, l'aire comprise entre le graphe de la fonction $f(x)$ et legraphe de la fonction $g(x)$ est $\int_0^2 (f(x) - g(x)) dx = \int_0^2 -2x^2 + 4x dx = \left[-2\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2} \right]_0^2 = \frac{8}{3}$.b) Comme $f(x) = g(x)$ ssi $x \in \{0, 2\}$ et $f(x) \geq g(x)$ pour $x \in [0, 2]$, l'aire comprise entre le graphe de la fonction $f(x)$ et legraphe de la fonction $g(x)$ est $\int_0^2 (f(x) - g(x)) dx = \int_0^2 \frac{x^3}{4} - x^2 + x dx = \left[\frac{x^4}{16} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_0^2 = \frac{1}{3}$.

$$f(x) = -x^2 + x + 2 = -(x+1)(x-2) \text{ et } g(x) = x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2) \quad f(x) = \frac{x^3}{4} \text{ et } g(x) = x^2 - x = x(x-1)$$

**Exercice A.41 (Putnam 1993)**

La ligne horizontale $y = c$ coupe la courbe $y = 2x - 3x^3$ dans le premier quadrant comme sur la figure. Trouvez c de sorte que les aires des deux régions coloriées soient égales.

**Correction**

Les deux aires dépendent de l'endroit où la ligne $y = c$ coupe la courbe $y = 2x - 3x^3$. Notons ces points a et b avec $0 < a < b$. On a alors

$$A = \int_0^a c dx - \int_0^a 2x - 3x^3 dx,$$

$$B = \int_a^b 2x - 3x^3 dx - \int_a^b c dx.$$

Si $A = B$ alors

$$\begin{aligned}
 0 = B - A &= \int_a^b 2x - 3x^3 dx - \int_a^b c dx - \int_0^a c dx + \int_0^a 2x - 3x^3 dx = \int_0^b 2x - 3x^3 dx - \int_0^b c dx \\
 &= [cx]_0^b - \left[x^2 - \frac{3}{4}x^4 \right]_0^b = bc - b^2 + \frac{3}{4}b^4 = b \left(c - b + \frac{3}{4}b^3 \right).
 \end{aligned}$$

Cela signifie que la solution du problème ne dépend pas de a .Comme $2b - 3b^3 = c$ (le point (b, c) appartient à la parabole), on doit alors résoudre

$$0 = 2b - 3b^3 - b + \frac{3}{4}b^4 = b - \frac{9}{4}b^3 = b \left(1 - \frac{9}{4}b^2 \right)$$

ainsi $b = \frac{2}{3}$ et $c = 2b - 3b^3 = \frac{4}{9}$.

Exercice A.42 (Calcul de l'aire)

Calculer l'aire de A et de B ainsi définis :

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2\pi, \frac{1}{8} \leq y \leq \cos^3(x) \right\}, \quad B = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\pi \leq x \leq \pi, \frac{1}{8} \leq y \leq \cos^3(x) \right\}.$$

Correction

Remarquons d'abord que

$$\begin{aligned} \int \cos^3(x) \, dx &\stackrel{\cos^2(x)=1-\sin^2(x)}{=} \int (1 - \sin^2(x)) \cos(x) \, dx = \\ &= \int \cos(x) - \cos(x) \sin^2(x) \, dx = \sin(x) - \int \cos x \sin^2(x) \, dx \stackrel{t=\sin(x)}{\stackrel{dt=\cos(x) \, dx}{=}} \\ &= \sin(x) - \int t^2 \, dt = \sin(x) - \frac{t^3}{3} + k = \sin(x) - \frac{\sin^3(x)}{3} + k, \quad k \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Comme $\cos^3(x) = \frac{1}{8}$ ssi $x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = \frac{5\pi}{3}$ alors

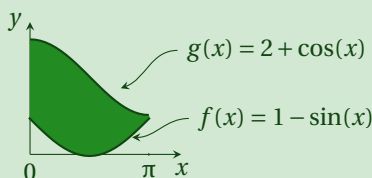
$$\text{Aire (A)} = 2 \left(\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^3(x) \, dx - \frac{\frac{\pi}{3} - 0}{8} \right) = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{24} \right) = \frac{9\sqrt{3} - \pi}{12}$$

et

$$\text{Aire (B)} = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^3(x) \, dx - 2 \cdot \frac{\frac{\pi}{3} - 0}{8} = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{24} \right) = \frac{9\sqrt{3} - \pi}{12}.$$

Exercice A.43

Que vaut l'aire coloriée comprise entre les deux courbes ?

**Correction**

$$\int_0^\pi 2 + \cos(x) - 1 + \sin(x) \, dx = \int_0^\pi 1 + \cos(x) + \sin(x) \, dx = [x + \sin(x) - \cos(x)]_0^\pi = (\pi + 0 - (-1)) - (0 + 0 - 1) = \pi + 2.$$

Exercice A.44La valeur moyenne de la fonction $f(x) = x^3$ sur l'intervalle $[0; k]$ est 9. Calculer k .**Correction**

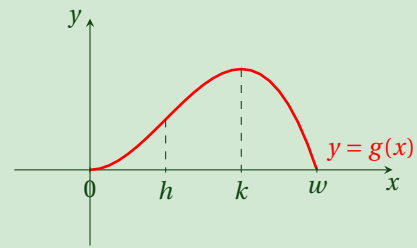
$$\text{valeur moyenne de } f \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{k} \int_0^k x^3 \, dx = 9 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{k} \frac{k^4}{4} = 9 \quad \Rightarrow \quad k = \sqrt[3]{36}.$$

Exercice A.45

Dans la figure ci-contre on a tracé le graphe de la fonction $g: [0; w] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \int_0^x f(t) dt$$

avec $f: [0; w] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et dérivable. Le graphe de g a tangente horizontale en $x = 0$ et présente un changement de concavité en $x = h$ et un maximum en $x = k$.



1. Calculer $f(0)$ et $f(k)$.
2. Tracer un graphe plausible de f et montrer qu'elle admet un maximum.
3. Dorénavant on suppose que g est une fonction polynomiale de degré 3.
 - 3.1. Montrer que $h = w/3$ et $k = 2h$.
 - 3.2. Pour $w = 3$ et $g(1) = 2/3$ trouver l'expression de g .

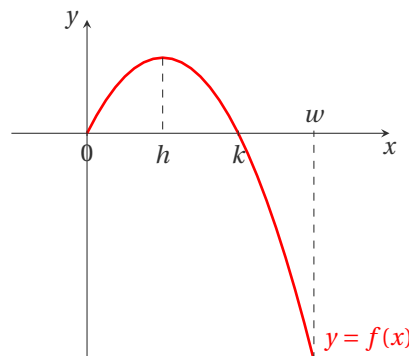
Correction

1. $g'(x) = f(x)$ pour tout $x \in [0; w]$. Puisque $x = 0$ et $x = k$ sont des points à tangente horizontale pour le graphe de g , alors $g'(0) = g'(k) = 0$ donc $f(0) = f(k) = 0$.
2. f est continue par hypothèse. D'après le théorème de WEIERSTRASS elle admet un maximum et un minimum sur $[0; w]$.

On a vu au point précédent que $f(0) = f(k) = 0$ et que $g'(x) = f(x)$ pour tout $x \in [0; w]$. g est croissante ($g'(x) > 0$) sur $[0; k]$ et décroissante ($g'(x) < 0$) sur $[k; w]$, donc f est positive sur $[0; h]$ et négative sur $[h; w]$.

De plus, $g''(x) = f'(x)$ pour tout $x \in [0; w]$. g est convexe ($g''(x) > 0$) sur $[0; h]$ et concave ($g''(x) < 0$) sur $[h; w]$, donc f est croissante sur $[0; h]$ et décroissante sur $[h; w]$. $x = h$ est un maximum absolu pour f et $x = w$ est un minimum absolu.

Un graphe plausible de f est donc le suivant :



3. g est une fonction polynomiale de degré 3, $x = w$ est un zéro simple et $x = 0$ est un zéro double (car $g'(0) = 0$), donc $g(x) = a(x - w)(x - 0)^2 = ax^2(x - w)$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ un paramètre.
 - 3.1. On a $f(x) = g'(x) = ax(3x - 2w)$: il s'agit d'une parabole. Comme $f(0) = f(k) = 0$ alors $k = 2w/3$. De plus, le sommet de la parabole se trouve en $x = k/2$ et $f'(k/2) = 0$. Comme $x = h$ est le maximum de f , alors $h = k/2 = w/3$.
 - 3.2. Si $w = 3$ alors $g(x) = ax^2(x - 3)$ et la condition $g(1) = 2/3$ implique $a = -1/3$. On obtient ainsi $g(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2$.

Exercice A.46 (Probabilité géométrique)

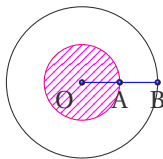
1. On sélectionne un point au hasard sur une cible *circulaire*. Quelle est la probabilité que le point choisi soit plus prêt du centre que de la circonférence de la cible ?
2. On sélectionne un point au hasard sur une cible *carrée*. Quelle est la probabilité que le point sélectionné soit

plus prêt du centre du carré que d'un de ses côtés?

Source: <http://www.thedudeminds.net>

Correction

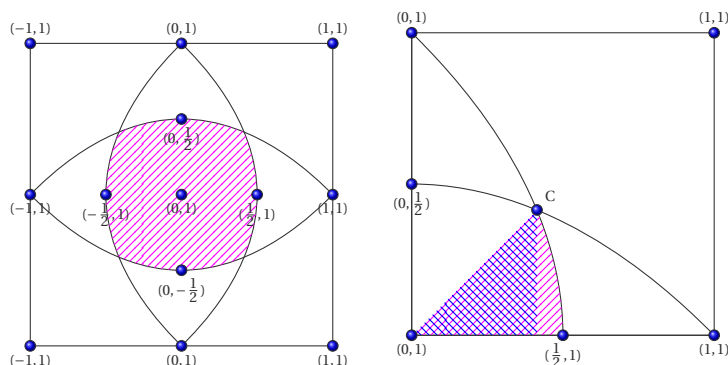
1. Il semble assez évident de délimiter correctement de manière intuitive les zones par deux disques concentriques.



Attention néanmoins à ne pas répondre que la probabilité de choisir un point dans la zone hachurée est $1/2$ (parce que le rayon du disque hachuré correspond à la moitié du rayon du grand disque). Or, si le petit disque possède un rayon de r et le grand $2r$, on a

$$P = \frac{\text{Aire du petit disque hachuré}}{\text{Aire du grand disque}} = \frac{\pi r^2}{\pi (2r)^2} = \frac{1}{4}.$$

2. L'ensemble de points équidistants d'un point et d'une droite est une parabole. La région à considérer est donc délimitée par quatre paraboles qui ont pour foyer le centre du carré et comme droites directrices les droites qui supportent les côtés du carré. On s'affaire donc à trouver l'aire de cette région hachurée. On place d'abord le tout dans un repère cartésien. Les sommets du carré sont $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$ et $(1, -1)$ (cf. figure à gauche). En vertu des symétries de la figure, il nous est possible de nous concentrer seulement sur la partie située dans le premier quadrant. Qui plus est, il est possible de ne s'attarder qu'à la moitié de cette dernière région (cf. figure à droite).



Ce «croissant de parabole» correspond à la moitié de la région à considérer dans le premier quadrant. On note au passage que l'aire du carré dans ce premier quadrant est 1. Le «croissant» est à son tour divisé en deux parties : la zone de forme triangulaire $\mathcal{T}$ et la zone $\mathcal{A}$. On cherche l'aire de ces zones. Pour y arriver, on aura besoin des coordonnées de C. L'équation de la parabole qui nous intéresse est $y^2 = 1 - 2x$. On ne s'intéressera qu'à la branche située au dessus de l'axe des abscisses. Ainsi $y = \sqrt{1 - 2x}$. On cherche ensuite les coordonnées de C, le point d'intersection entre la courbe d'équation $y = \sqrt{1 - 2x}$ et la droite d'équation $y = x$ et on obtient $x = -1 + \sqrt{2}$. Il nous est donc déjà possible de trouver l'aire du triangle, que l'on a identifié comme $\mathcal{T} = \frac{3-2\sqrt{2}}{2}$. Il reste à trouver l'aire de la région sous la courbe :

$$\mathcal{A} = \int_{-1+\sqrt{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-2x} \, dx = -\frac{1}{2} \int_{3-2\sqrt{2}}^0 \sqrt{t} \, dt = \frac{1}{3} \sqrt{3-2\sqrt{2}}^3 = \frac{(-1+\sqrt{2})^3}{3}.$$

L'aire totale est donc

$$\mathcal{T} + \mathcal{A} = \frac{-5+4\sqrt{2}}{6}.$$

Comme le carré du premier quadrant a une aire de 1, il ne reste qu'à doubler ce résultat afin d'obtenir la probabilité recherchée

$$P = \frac{-5+4\sqrt{2}}{3}$$

ce qui correspond à un peu moins de 22%.

ANNEXE B

Exercices sur la Méthode de Gauss

Dans ce chapitre

B.1	Systèmes carrés	227
B.2	Systèmes avec plus d'équations qu'inconnues	232
B.3	Systèmes avec plus d'inconnues que d'équations	233

B.1. Systèmes carrés

Exercice B.1

Résoudre les systèmes linéaires suivantes par la méthode de GAUSS

$$\begin{array}{llll}
 (1) \begin{cases} 4x - 3y = 84 \\ 5x + 7y = 19 \end{cases} & (2) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -6, \\ x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 3. \end{cases} & (3) \begin{cases} -x_1 + x_2 + 3x_3 = 12, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -8, \\ 4x_1 + x_2 - 4x_3 = 15. \end{cases} & (4) \begin{cases} -2u - 4v + 3w = -1 \\ 2v - w = 1 \\ u + v - 3w = -6 \end{cases} \\
 (5) \begin{cases} 2v - w = 1 \\ -2u - 4v + 3w = -1 \\ u + v - 3w = -6 \end{cases} & (6) \begin{cases} u + v - 3w = -6 \\ 2v - w = 1 \\ -2u - 4v + 3w = -1 \end{cases} & (7) \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} & (8) \begin{cases} -2x - y + 4t = 2 \\ 2x + 3y + 3z + 2t = 14 \\ x + 2y + z + t = 7 \\ -x - z + t = -1 \end{cases}
 \end{array}$$

Correction

Système (1)

$$\begin{cases} 4x - 3y = 84 \\ 5x + 7y = 19 \end{cases} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{5}{4}L_1} \begin{cases} 4x - 3y = 84 \\ \frac{43}{4}y = -86 \end{cases}$$

donc $y = -8$ et $x = 15$.

Système (2)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -6, \\ x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 3. \end{cases} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1, L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ -4x_2 - 2x_3 = -8, \\ 2x_2 + 5x_3 = 1. \end{cases} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_2/2} \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ -4x_2 - 2x_3 = -8, \\ 4x_3 = -3. \end{cases}$$

donc $x_3 = -\frac{3}{4}$, $x_2 = \frac{19}{8}$ et $x_1 = -\frac{7}{2}$.

Système (3)

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 3x_3 = 12 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -8 \\ 4x_1 + x_2 - 4x_3 = 15 \end{cases} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1, L_3 \leftarrow L_3 + 4L_1} \begin{cases} -x_1 + x_2 + 3x_3 = 12 \\ x_2 + 8x_3 = 16 \\ 5x_2 + 8x_3 = 63 \end{cases} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 5L_2} \begin{cases} -x_1 + x_2 + 3x_3 = 12 \\ x_2 + 8x_3 = 16 \\ -32x_3 = -17 \end{cases}$$

donc $x_3 = \frac{17}{32}$, $x_2 = \frac{47}{4}$ et $x_1 = \frac{43}{32}$.

Système (4)

$$\begin{cases} -2u - 4v + 3w = -1 \\ 2v - w = 1 \\ u + v - 3w = -6 \end{cases} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_1/2} \begin{cases} -2u - 4v + 3w = -1 \\ 2v - w = 1 \\ -v - \frac{3}{2}w = -\frac{13}{2} \end{cases} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_2/2} \begin{cases} -2u - 4v + 3w = -1 \\ 2v - w = 1 \\ -2w = -6 \end{cases}$$

donc $w = 3$, $v = 2$ et $u = 1$.

Système (5) Il n'est pas possible d'utiliser la méthode de Gauss directement, il faut d'abord échanger deux lignes (la solution d'un système linéaire ne dépend pas de l'ordre de ses équations). Si on échange la ligne 1 avec la ligne 2 on retrouve le système précédent.

Système (6) Il s'agit encore du même système, mais ce nouveau ordre des équations rend les calculs plus simples :

$$\begin{cases} u + v - 3w = -6 \\ 2v - w = 1 \\ -2u - 4v + 3w = -1 \end{cases} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1} \begin{cases} u + v - 3w = -6 \\ 2v - w = 1 \\ -2v - 3w = -13 \end{cases} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \begin{cases} u + v - 3w = -6 \\ 2v - w = 1 \\ -4w = -12 \end{cases}$$

donc $w = 3$, $v = 2$ et $u = 1$.

Système (7)

$$\begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + \frac{L_1}{2}, L_3 \leftarrow L_3 + \frac{L_1}{2}} \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ -\frac{3}{2}y + \frac{3}{2}z = 0 \\ \frac{3}{2}y - \frac{3}{2}z = 0 \end{cases} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ -\frac{3}{2}y + \frac{3}{2}z = 0 \\ 0z = 0 \end{cases}$$

donc $z = \kappa \in \mathbb{R}$, $y = z$ et $x = z$.

Système (8)

$$\begin{cases} -2x - y + 4t = 2 \\ 2x + 3y + 3z + 2t = 14 \\ x + 2y + z + t = 7 \\ -x - z + t = -1 \end{cases} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + L_1, L_3 \leftarrow L_3 + \frac{L_1}{2}, L_4 \leftarrow L_4 - \frac{L_1}{2}} \begin{cases} -2x - y + 4t = 2 \\ 2y + 3z + 6t = 16 \\ \frac{3}{2}y + z + 3t = 8 \\ \frac{1}{2}y - z - t = -2 \end{cases} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{3}{4}L_2, L_4 \leftarrow L_2 - \frac{L_2}{4}} \begin{cases} -2x - y + 4t = 2 \\ 2y + 3z + 6t = 16 \\ -\frac{5}{4}z - \frac{3}{2}t = -4 \\ -\frac{7}{4}z - \frac{5}{2}t = -6 \end{cases} \xrightarrow{L_4 \leftarrow L_4 - \frac{7}{5}L_3} \begin{cases} -2x - y + 4t = 2 \\ 2y + 3z + 6t = 16 \\ -\frac{5}{4}z - \frac{3}{2}t = -4 \\ -\frac{2}{5}t = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

donc $t = 1$, $z = 2$, $y = 2$ et $x = 0$.

Exercice B.2

Trouver toutes les solutions des systèmes linéaires homogènes suivantes

$$(1) \begin{cases} -3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ -2x_1 + 2x_3 = 0, \\ -11x_1 + 6x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases} \quad (3) \begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0, \\ -x_1 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Correction

Système (1)

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ -2x_1 + 2x_3 = 0, \\ -11x_1 + 6x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{2}{3}L_1, L_3 \leftarrow L_3 - \frac{11}{3}L_1} \begin{cases} -3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ -\frac{2}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 = 0, \\ \frac{7}{3}x_2 - \frac{7}{3}x_3 = 0, \end{cases} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + \frac{7}{2}L_2} \begin{cases} -3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ -\frac{2}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 = 0, \\ 0 = 0, \end{cases}$$

Le système admet une infinité de solutions de la forme (κ, κ, κ) avec $\kappa \in \mathbb{R}$.

Système (2)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1, L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1} \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_2 - x_3 = 3, \\ -2x_2 - 5x_3 = -3, \end{cases} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_2 - x_3 = 3, \\ -6x_3 = 0, \end{cases}$$

Le système admet une infinité de solutions de la forme $(\frac{1}{2}\kappa, -\frac{3}{2}\kappa, 0, \kappa)$ avec $\kappa \in \mathbb{R}$.

Système (3)

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0, \\ -x_1 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 0. \end{cases} \xrightarrow{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + \frac{1}{2}L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}} \begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0, \\ -\frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 0, \\ -2x_2 + 2x_3 = 0, \end{cases} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2} \begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0, \\ -\frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 0, \\ 0 = 0, \end{cases}$$

Le système admet une infinité de solutions de la forme $(2\kappa, \kappa, \kappa)$, $\kappa \in \mathbb{R}$.**Exercice B.3 (V. GUIRADEL)**

Vous projetez de passer un concours de recrutement l'an prochain. Vous avez sous les yeux le tableau de notes suivant :

CANDIDAT	Mathématique	Anglais	Informatique	Moyenne
QUI	7	12	6	8
QUO	11	6	10	9
QUA	11	16	14	14

Retrouver les coefficients de chaque épreuve. La solution est-elle unique?

CorrectionIl s'agit de trouver les trois coefficients $m, a, i \in [0; 1]$ tels que

$$\begin{cases} 7m + 12a + 6i = 8, \\ 11m + 6a + 10i = 9, \\ 11m + 16a + 14i = 14. \end{cases}$$

Utilisons la méthode de GAUSS :

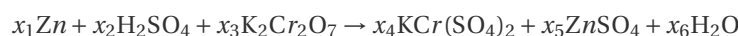
$$\begin{cases} 7m + 12a + 6i = 8, \\ 11m + 6a + 10i = 9, \\ 11m + 16a + 14i = 14, \end{cases} \xrightarrow{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{11}{7}L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \frac{11}{7}L_1}} \begin{cases} 7m + 12a + 6i = 8, \\ -\frac{90}{7}a + \frac{4}{7}i = -\frac{25}{7}, \\ -\frac{20}{7}a + \frac{32}{7}i = \frac{10}{7}, \end{cases} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{2}{9}L_2} \begin{cases} 7m + 12a + 6i = 8, \\ -\frac{90}{7}a + \frac{4}{7}i = -\frac{25}{7}, \\ \frac{40}{9}i = \frac{20}{9}, \end{cases}$$

qui admet l'unique solution $(0.2, 0.3, 0.5)$.**Exercice B.4**

Équilibrer la réaction

**Correction**

Écrivons les coefficients stœchiométriques et les contraintes :



1. Atomes de Zn : $x_1 = x_5$, i.e. $x_1 - x_5 = 0$
2. Atomes de H : $2x_2 = 2x_6$, i.e. $x_2 - x_6 = 0$
3. Atomes de S : $2x_2 = 2x_4 + x_5$, i.e. $x_2 - 2x_4 - x_5 = 0$
4. Atomes de K : $2x_3 = x_4$, i.e. $2x_3 - x_4 = 0$
5. Atomes de Cr : $2x_3 = x_4$, i.e. $2x_3 - x_4 = 0$
6. Atomes de O : $4x_2 + 7x_3 = 8x_4 + 4x_5 + x_6$, i.e. $4x_2 + 7x_3 - 8x_4 - 4x_5 - x_6 = 0$

Notons que la contrainte $2x_3 - x_4 = 0$ est répétée deux fois, donc on ne l'écrira qu'une seule fois dans le système linéaire ; cela donne 5 équations pour 6 inconnues. Fixons arbitrairement un des coefficients, par exemple $x_6 = 1$; on obtient alors le système linéaire

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 7 & -8 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
 \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 7 & -8 & -4 & 1 \end{array} \right) & \xrightarrow{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ L_5 \leftarrow L_5 - 4L_2}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -8 & -4 & -3 \end{array} \right) & \xrightarrow{L_3 \leftrightarrow L_4} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 7 & -8 & -4 & -3 \end{array} \right) \\
 & \xrightarrow{L_5 \leftarrow L_5 - \frac{7}{2}L_3} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{9}{2} & -4 & -3 \end{array} \right) & \xrightarrow{L_5 \leftarrow L_5 - \frac{9}{4}L_4} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{7}{4} & -\frac{3}{4} \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

dont la solution est bien

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{3}{7} \\ \frac{3}{7} \end{pmatrix}$$

Si on multiplie tous les coefficients par 7 on obtient

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

et donc la réaction équilibrée



Exercice B.5

Soit le système linéaire

$$(S) \quad \begin{cases} x - \alpha y = 1, \\ \alpha x - y = 1. \end{cases}$$

Déterminer les valeurs de α de telle sorte que ce système possède :

1. une infinité de solutions;
2. aucune solution;
3. une solution unique.

Correction

$$\begin{cases} x - \alpha y = 1 \\ \alpha x - y = 1 \end{cases} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - \alpha L_1} \begin{cases} x - \alpha y = 1 \\ (\alpha^2 - 1)y = -(\alpha - 1) \end{cases}$$

Comme $-1 + \alpha^2 = (\alpha - 1)(\alpha + 1)$ on conclut que

1. si $\alpha = 1$ (i.e. la dernière équation correspond à $0 = 0$) alors (S) possède une infinité de solutions,
2. si $\alpha = -1$ (i.e. la dernière équation correspond à $0 = 2$) alors (S) ne possède aucune solution,
3. si $\alpha \notin \{-1; 1\}$ alors (S) possède une solution unique $x = \frac{1}{\alpha+1}$ et $y = -\frac{1}{\alpha+1}$.

Exercice B.6

Soit le système linéaire

$$(S) \quad \begin{cases} x + y - z = 1, \\ 2x + 3y + \beta z = 3, \\ x + \beta y + 3z = -3. \end{cases}$$

Déterminer les valeurs de β de telle sorte que ce système possède :

1. une infinité de solutions;
2. aucune solution;
3. une solution unique.

Correction

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + \beta x_3 = 3 \\ x_1 + \beta x_2 + 3x_3 = -3 \end{cases} \xrightarrow{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}} \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_2 + (\beta + 2)x_3 = 1 \\ (\beta - 1)x_2 + 4x_3 = -4 \end{cases} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + (1 - \beta)L_2} \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_2 + (\beta + 2)x_3 = 1 \\ (6 - \beta - \beta^2)x_3 = -(3 + \beta) \end{cases}$$

Comme $6 - \beta - \beta^2 = (2 - \beta)(3 + \beta)$ on conclut que

1. si $\beta = -3$ (i.e. la dernière équation correspond à $0z = 0$) alors (S) possède une infinité de solutions,
2. si $\beta = 2$ (i.e. la dernière équation correspond à $0z = -5$) alors (S) ne possède aucune solution,
3. si $\beta \notin \{-3, 2\}$ alors (S) possède une solution unique.

Exercice B.7En utilisant la méthode de GAUSS, résoudre le système linéaire en discutant suivant la valeur du paramètre $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 2, \\ x - y + 2z = 7, \\ 3x + az = 10. \end{cases}$$

Correction

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ x - y + 2z = 7 \\ 3x + az = 10 \end{cases} \xrightarrow{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}} \begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ -3y - z = 5 \\ -6y + (a - 9)z = 4 \end{cases} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2} \begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ -3y - z = 5 \\ (a - 7)z = -6 \end{cases}$$

On a ainsi transformé le système linéaire initial dans le système linéaire triangulaire supérieur équivalent

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 2, \\ -3y - z = 5, \\ (a - 7)z = -6. \end{cases}$$

Par conséquent,

- si $a \neq 7$, $z = \frac{-6}{a-7}$, $y = \frac{5+z}{-3} = \frac{5a-41}{-3(a-7)}$ et $x = 2 - 2y - 3z = \frac{2(8a-35)}{3(a-7)}$ est l'unique solution du système linéaire;
- si $a = 7$ il n'y a pas de solutions du système linéaire.

Exercice B.8Soit α , β et γ des réels et considérons le système linéaire

$$\begin{cases} x + y = \alpha, \\ x + \beta y = \gamma, \end{cases}$$

d'inconnues x, y . En utilisant le pivot de GAUSS, déterminer les valeurs de α, β et $\gamma \in \mathbb{R}$ de telle sorte que ce système possède :

- a) une infinité de solutions;

- b) aucune solution;
c) une solution unique.

Correction

$$\begin{cases} x + y = \alpha \\ x + \beta y = \gamma \end{cases} \xrightarrow{L_2 - L_1} \begin{cases} x + y = \alpha \\ (\beta - 1)y = \gamma - \alpha \end{cases}$$

- a) Si $\beta = 1$ et $\gamma = \alpha$ (i.e. la dernière équation correspond à $0y = 0$) alors (S) possède une infinité de solutions,
b) si $\beta = 1$ et $\gamma \neq \alpha$ (i.e. la dernière équation correspond à $0y = \gamma - \alpha$) alors (S) ne possède aucune solution,
c) si $\beta \neq 1$ alors, pour tout α et tout γ , (S) possède une solution unique $y = \frac{\gamma - \alpha}{\beta - 1}$ et $x = \alpha - y$.

Exercice B.9

Un joueur de foot, situé à 18m du but, effectue un tir en cloche. On modélise la situation dans un repère orthonormé (l'unité choisie est le mètre). On suppose que la trajectoire du ballon est parabolique et passe par les points $(-18; 0)$ et $(-14; 3.2)$, la tangente à la courbe en $x = -18$ forme un angle de 45° avec l'horizontale. On note p la fonction qui à l'abscisse x de la balle associe son ordonnée $p(x)$.



1. Écrire et résoudre le système matriciel qui permet de déterminer p .
2. À quelle hauteur maximale le ballon va-t-il s'élever?
3. Sachant que le but a une hauteur de 2.44m, le tir est-il cadré?

Correction

Source: <https://www.python-lycee.com/activite-en-ligne-mathematiques>

1. On cherche a, b, c tels que $p(x) = c + bx + ax^2$. On sait que $p(-18) = 0$, $p(-14) = \frac{32}{10}$ et $p'(-18) = 1$, d'où le système linéaire

$$\begin{pmatrix} 1 & -18 & (-18)^2 \\ 1 & -14 & (-14)^2 \\ 0 & 1 & -18 \times 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{32}{10} \\ 1 \end{pmatrix}$$

On utilise la méthode de Gauss (pour les calculs se rappeler que $14^2 - 18^2 = (14 - 18)(14 + 18) = -4 \times 32$):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -18 & 18^2 & 0 \\ 1 & -14 & 14^2 & \frac{32}{10} \\ 0 & 1 & -18 \times 2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -18 & 18^2 & 0 \\ 0 & 4 & -4 \times 32 & \frac{32}{10} \\ 0 & 1 & -18 \times 2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_2/4} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -18 & 18^2 & 0 \\ 0 & 4 & -4 \times 32 & \frac{32}{10} \\ 0 & 0 & -4 & \frac{1}{5} \end{array} \right)$$

donc

$$\begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{5} \\ -\frac{4}{5} \\ -\frac{1}{20} \end{pmatrix}$$

2. $p'(x) = 0$ ssi $x = -\frac{b}{2a} = -8$ et $p(-8) = 5$: le ballon s'élèvera jusqu'à 5m et cette hauteur sera atteinte en $x = -8$.
3. Le but est en $x = 0$ et l'on a $p(0) = \frac{9}{5} = 1.8 < 2.44$: le tir est cadré.

B.2. Systèmes avec plus d'équations qu'inconnues

Exercice B.10Résoudre les systèmes suivants d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$(S_1) \quad \begin{cases} x+2y+z=-1, \\ 2x+y-z=1, \\ -x+y+2z=-2, \\ x+y+z=4, \end{cases}$$

$$(S_2) \quad \begin{cases} x+y+z=3, \\ x+2y+3z=6, \\ -x-y+2z=0, \\ 3x+2y-4z=1, \end{cases}$$

$$(S_3) \quad \begin{cases} x-2y+2z=0, \\ 2x+y-2z=0, \\ 3x+4y-6z=0, \\ 3x-11y+12z=0. \end{cases}$$

Correction

(S_1) étant un système de 4 équations à 3 inconnues, on considère (S') le sous-système carré d'ordre 3 qu'on peut résoudre par la méthode du pivot de Gauss

$$(S') \quad \begin{cases} x+2y+z=-1, \\ 2x+y-z=1, \\ -x+y+2z=-2, \end{cases} \xrightarrow{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1}} \begin{cases} x+2y+z=-1, \\ -3y-3z=3, \\ 3y+3z=-3, \end{cases} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \begin{cases} x+2y+z=-1, \\ -3y-3z=3, \\ 0=0, \end{cases}$$

qui admet une infinité de solutions de la forme $(1+\kappa, -1-\kappa, \kappa)$ pour $\kappa \in \mathbb{R}$. Cherchons parmi ces solutions celles qui vérifient l'équation de (S_1) qui n'apparaît pas dans (S') : pour $(x, y, z) = (1+\kappa, -1-\kappa, \kappa)$ on a $x+y+z=1+\kappa-1-\kappa+\kappa=\kappa$ donc $x+y+z=4$ si et seulement si $\kappa=4$ ainsi (S_1) admet l'unique solution $(5, -5, 4)$.

(S_2) étant un système de 4 équations à 3 inconnues, on considère (S') le sous-système carré d'ordre 3 qu'on peut résoudre par la méthode du pivot de Gauss

$$(S') \quad \begin{cases} x+y+z=3, \\ x+2y+3z=6, \\ -x-y+2z=0, \end{cases} \xrightarrow{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1}} \begin{cases} x+y+z=3, \\ y+2z=3, \\ 3z=3, \end{cases}$$

qui admet l'unique solution $(1, 1, 1)$. On étudie alors si elle est aussi solution de l'équation de (S_2) qui n'apparaît pas dans (S') : pour $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ on a $3x+2y-4z=1$ donc le triplet $(1, 1, 1)$ est solution de (S_2) et c'est l'unique.

(S_3) étant un système de 4 équations à 3 inconnues, on considère le sous-système (S') carré d'ordre 3 suivant qu'on peut résoudre par la méthode du pivot de GAUSS

$$(S') \quad \begin{cases} x-2y+2z=0, \\ 2x+y-2z=0, \\ 3x+4y-6z=0, \end{cases} \xrightarrow{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}} \begin{cases} x-2y+2z=0, \\ 5y-6z=0, \\ 10y-12z=0, \end{cases} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2} \begin{cases} x-2y+2z=0, \\ 5y-6z=0, \\ 0=0, \end{cases}$$

qui admet une infinité de solutions de la forme $(2\kappa, 6\kappa, 5\kappa)$ pour $\kappa \in \mathbb{R}$. Cherchons parmi ces solutions celles qui vérifient l'équation de (S_3) qui n'apparaît pas dans (S') : pour $(x, y, z) = (2\kappa, 6\kappa, 5\kappa)$ on a $3x-11y+12z=6\kappa-66\kappa+60\kappa=0$ donc $3x-11y+12z=0$ pour tout $\kappa \in \mathbb{R}$ ainsi (S_3) admet une infinité de solutions de la forme $(2\kappa, 6\kappa, 5\kappa)$ pour $\kappa \in \mathbb{R}$.

B.3. Systèmes avec plus d'inconnues que d'équations**Exercice B.11**Résoudre le système suivant d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$(S) \quad \begin{cases} -2x+y+z=0, \\ x-2y+z=0, \end{cases}$$

Correction

(S) est équivalent au système

$$\begin{cases} -2x+y+z=0, \\ -3y+3z=0, \end{cases}$$

qui admet une infinité de solutions de la forme (κ, κ, κ) pour $\kappa \in \mathbb{R}$.

Exercice B.12

Soit le système linéaire

$$(S) \quad \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 6, \\ -3x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 12x_4 = b. \end{cases}$$

1. Pour quelle valeur de b le système est-il possible?
2. Donner à b la valeur trouvée au point précédent et calculer la solution complète du système.

Correction

(S) est équivalent au système

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 6, \\ 0 = b + 18. \end{cases}$$

1. (S) est possible si et seulement si $b = -18$.
2. Si $b = -18$, (S) admet une infinité de solutions dépendant de trois paramètres. Elles sont de la forme $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (6 - a + 2b - 4c, a, b, c)$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.