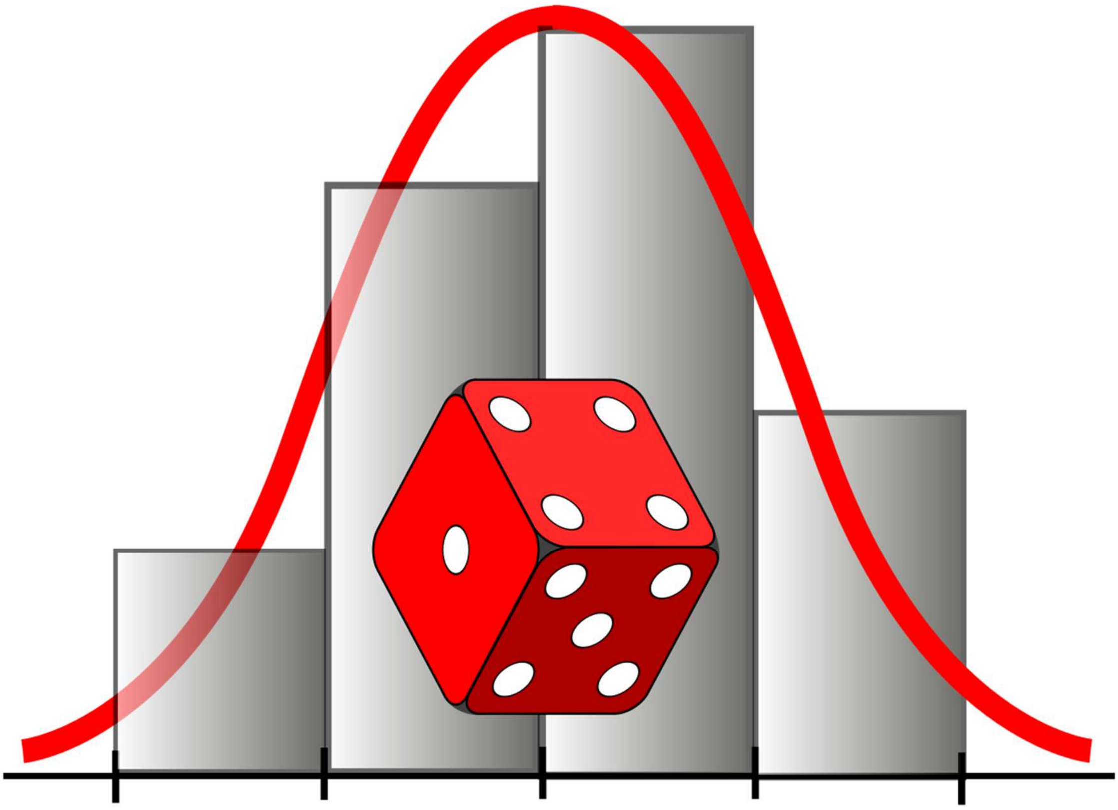
BACHELOR UNIVERSITAIRE DE TECHNOLOGIE

Ressource R5-04 : OUTILS MATHEMATIQUES ET LOGICIELS

Chapitre 1 : Variables aléatoires discrètes et continues



Enseignante : Sylvia Le Beux
Sylvia.lebeux@univ-tln.fr

Table des matières

Programme d'Outils mathématiques et logiciels du semestre 5

--- R5-04 ---

Chapitre I : Variables aléatoires discrètes et continues (avec le logiciel Excel ou Oo Calc)

Chapitre II : Fonctions à plusieurs variables – Intégrales multiples (avec le logiciel maxima)

Evaluation   CCE/TD/TP = (DS1+DS2+Bonus)/2

Bibliographie

- Pour les étudiants souhaitant s'entraîner et progresser :

Mathématiques en modules – Tome 2 - bases fondamentales DUT et BTS industriels
auteur : C.Larcher - édition CASTELLA
Magasin GEII
Remarques : Résumé/rappel de cours de DUT et exercices appliqués au GEII corrigés.

Maths BTS-DUT industriels - édition Techno + - auteurs C.Larcher
Côte BU : 510 LAR
Remarques : Résumé de cours et exercices très appliqués au GEII corrigés.

- Pour les étudiants souhaitant suivre de longues études :

Cours DUT/BTS : édition : Ellipses – auteur : P. Variot
Côte BU :510 VAR
Remarques : Cours DUT d'un très bon niveau, tout le programme du DUT y est traité et plus.

L'épreuve de mathématiques au concours ENSEA - édition : CASTELLA - auteurs : Lièvre - Mazoyer
ISBN : 978 2 7135 2846 0   à la BU.
Remarques : Résumé de cours très clair et sujets de concours corrigés intégralement.

	Planning C TD TP OML Semestres 5																						
Sem Civile	s36	s37	s38	s39	s40	s41	s42	s43	s44	s45	s46	s47	s48	s49	s50	s51	s52	s1	s2	s3	s4	s5	s6
				1,5C+3TD	1,5C+1,5TD	1,5C+1,5TD	1,5TD					3TD	1,5TD	1,5TP	1,5TP					1,5TP	1,5TP	1,5TP	3TP
QB/DS							DS																DS
Salles					Info							Info	Info										
Chapitres	Probabilité											Fonctions à plusieurs variables											
Prog. PE	Developpements limités											Révision Concours											

Notes

Partie A : Variables aléatoires discrètes

I. Définitions :

1) Problème : Contre une mise convenable, on lance un dé équilibré marqué : As, Roi, Dame, Valet, Dix, Neuf. L'As rapporte 10€, le Roi 6€, la Dame 6€, le Valet 5€, le Dix 0€ et le Neuf 0€. Quelle doit être la mise pour que le jeu soit équitable ?

- ✓ Description de l'expérience :

  Expérience : ....

  Univers : ....

  Probabilité : ....

- ✓ On note X : le gain obtenu après un lancer :

  Ensemble des valeurs prises par X : ....

  On note (X=10) : l'événement « obtenir 10€ après un lancer ».

  P(X=10)=..

  P(X=6)= ....

  P(X=5)= ....

  P(X=0)= ....

  On consigne ces résultats dans le tableau suivant :

x				
P(X=x)				

$P((X=10)\cup(X=6)\cup(X=5)\cup(X=0))$ =..

....

$P(6\le X\le 10)$=..

$P(X<6)$=..

$P(\overline{X<6})$=..

$P((6\le X\le 10)\cap(0\le X\le 7))$=..

X est appelée variable aléatoire, et le tableau précédent représente sa loi de probabilité

Notes

Gain obtenu en moyenne après un lancer :

E(X)=...

- ✓ Réponse au problème : ....

2) Définitions :

Soit E une expérience aléatoire, S son univers associé. On peut attribuer un nombre X à chacun des résultats de E. X est alors appelé variable aléatoire, si de plus S est un ensemble dénombrable (i.e : contenant des éléments distincts et isolés) X est dite discrète. Supposons que S est un ensemble contenant un nombre fini d'éléments. On note $X(S)=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ l'ensemble des valeurs prises par X .

- ✓ **La loi de probabilité de X est la donnée de $p_1=P(X=x_1)$, $p_2=P(X=x_2),\ldots,p_n=P(X=x_n)$, elle peut se présenter sous forme de tableau :**

x	x_1	x_2	…	x_n
P(X=x)	p_1	p_2	…	p_n

$$P((X=x_1)\cup(X=x_2)\cup\ldots\cup(X=x_n))=P(X=x_1)+P(X=x_2)+\ldots+P(X=x_n)=p_1+p_2+\ldots+p_n=1$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

- ✓ **On appelle Espérance mathématique de la variable aléatoire X (moyenne espérée) la valeur notée :**

$$E(X)=x_1.P(X=x_1)+x_2.P(X=x_2)+\ldots+x_n.P(X=x_n)=x_1.p_1+x_2.p_2+\ldots+x_n.p_n.$$

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i.p_i .$$

- ✓ **La fonction de répartition de X est la fonction F définie soit par : $F(x)=P(X<x)$ ou $F(x)=P(X\leq x)$. $P(X\leq x_i)=p_1+p_2+\ldots+p_i$.**
- ✓ **On appelle Variance de la variable aléatoire X la valeur notée :**

$$V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2.$$

- ✓ **On appelle Ecart-type de la variable aléatoire X la valeur notée : $\sigma_X=\sqrt{V(X)}$.**

L'écart-type permet d'estimer la dispersion de la probabilité autour de la moyenne.

II. Loi de probabilité binômiale :

1) Définition :

Soit E une expérience aléatoire à deux résultats possibles : S={ s : succès ; e : échec }.
On répète n fois de façon indépendante l'expérience E
La probabilité d'un succès qu'on note p est la même pour toutes les n expériences E.
Soit X, la variable aléatoire représentant le nombre de succès obtenus sur les n expériences . ($X(S)=\{0,1,2,\ldots,n\}$, X est discrète.)
On dit alors que X suit la loi Binômiale de paramètres n et p, que l'on note B(n ;p), on peut alors calculer P(X=k), la probabilité d'obtenir k succès sur n expériences par la formule suivante : $P(X=k)=C_n^k.p^k.(1-p)^{n-k}$ avec $0\leq k\leq n$.

Notes

2) Exemple 1 **:** Retrouvons cette formule sur un exemple.
On répète 4 fois de façon indépendante une expérience **E** à 2 issues s et e, avec p=p(s).
On s'intéresse à X le nombre de succès obtenus sur ces 4 expériences.
D'après la définition précédente X suit la loi de probabilité :
Sans utiliser la formule ci-dessus, complétons le tableau de loi de probabilité de X :

x					
P(X=x)					

Pour cela complétons d'abord le tableau ci-dessous :

	N° des épreuves 1 2 3 4	Nombre de possibilités
X=0		
X=1		
X=2		
X=3		
X=4		

3) Exemple 2 **:** On lance une pièce de monnaie truquée telle que P(P)=1/3 et P(F)=2/3. On exécute cette expérience 5 fois de façon indépendante.

……………………………………………………………………………………………………

Calculer la probabilité d'obtenir exactement 3 Pile : ....

Calculer la probabilité d'obtenir plus de 2 Pile : ....

4) $E(X), V(X), \sigma_X$:

Soit X une variable aléatoire suivant la loi de probabilité B(n ;p), alors :

$E(X)=n.p$ $\quad$ $V(X)=n.p.(1-p)$ $\quad$ $\sigma_X = \sqrt{n.p.(1-p)}$

Notes

III. Loi de Poisson :

1) Théorème :

Soit l'expression de la loi binômiale B(n,p) :

$$f(k) = C_n^k . p^k . (1-p)^{n-k} .$$

Quand n tend vers l'infini et p tend vers zéro, avec np = m constante, f(k) tend vers :

$$g(k) = e^{-m} . \frac{m^k}{k!}$$

2) Définition :

Soit X une variable aléatoire suivant le loi binômiale B(n,p) avec n grand et p petit alors :

$$P(X = k) = C_n^k . p^k . (1-p)^{n-k} \quad \text{avec } 0 \le k \le n.$$

Si n>50 et np$\le$ 5, on peut remplacer la loi binômiale B(n,p) par la loi de Poisson notée P(m) où m=n.p, avec :

$$P(X = k) = e^{-m} . \frac{m^k}{k!} .$$

En fait, cette approximation est possible jusqu'à n.p=10, et même davantage, mais en sacrifiant de la précision.

3) Exemples :

Soit la loi binomiale B(50 ;0,04) et la loi de Poisson P(2), on peut comparer les résultats dans le tableau ci-dessous :

x	0	2	5
loi binomiale P(X=x)	0,130	0,276	0,035
loi de Poisson P(X=x)	0,135	0,271	0,036

Même calculs pour les lois B(50 ;0,20) et P(10).

x	0	2	5
loi binomiale P(X=x)	$1{,}4.10^{-5}$	0,0295	0,1398
loi de Poisson P(X=x)	$4{,}5.10^{-5}$	0,0378	0,1251

4) $E(X), V(X), \sigma_X$:

Soit X une variable aléatoire suivant la loi de probabilité P(m), alors :

E(X)=m **V(X)=m** $\sigma_X = \sqrt{m}$

Partie B : Variables aléatoires continues

I. Variable aléatoire continue :

1) Définition : Nous avons vu que l'ensemble des valeurs prises par une variable aléatoire discrète X est dénombrable (i.e : X prend des valeurs distinctes et isolées). Une variable aléatoire X est dite continue lorsqu'elle peut prendre n'importe quelles valeurs réelles d'un intervalle de définition .

- ✓ Une variable aléatoire discrète peut représenter : le nombre de personnes par foyer, le nombre de pièces défectueuses dans un échantillon, …
- ✓ Une variable aléatoire continue représente souvent une mesure : durées observées jusqu'à la défaillance d'un appareil, masse du contenu d'un sac de céréales, diamètre d'un cylindre, …

Une variable aléatoire continue peut aussi représenter une valeur discrète lorsque celle-ci est très grande (plusieurs milliers) : moyenne mensuelle du nombre d'acheteurs éventuels rencontrés par un représentant de commerce au cours de l'année précédente…

Il est donc impossible de faire une liste des valeurs prises par une variable aléatoire continue et d'attribuer à chacune une probabilité, dans ce cas, on construit une « fonction de densité » de probabilité que l'on représentera par une « courbe de probabilité » .

2) Loi de probabilité d'une variable aléatoire continue :

Exemple : Soit X la variable aléatoire prenant comme valeur la durée de vie d'une ampoule électrique choisie parmi un lot de même fabrication. L'expérience montre que X suit une loi de densité f donnée par : $f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}.e^{-\frac{t}{\theta}} & \text{si } t \geq 0. \\ 0 \text{ ailleurs.} \end{cases}$ où $\theta > 0$.

Monter que f est bien une densité de probabilité, puis calculer $p(X<t)$ où $t>0$, E(X) et V(X).

Représentation graphique :

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

Notes

……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……

II. Loi de probabilité normale :

1) Introduction :

La loi normale, ou loi de Laplace-Gauss, s'applique à « une variable aléatoire continue dépendant de nombreux paramètres indépendants, dont les effets s'additionnent et dont aucun n'est prépondérant. » (Conditions de Borel.)
Elle est donc naturellement le modèle mathématique des phénomènes dont les causes sont à la fois nombreuses et mal connues sans qu'on puisse détecter entre elles de prépondérance.
Exemples : phénomènes soumis à des perturbations : température, hygrométrie, pression atmosphérique, vibrations, défaut d'homogénéité dans la matière, imprécision des appareils de mesure, usure de l'outillage, etc.

La fonction « densité de probabilité » d'une variable aléatoire continue X qui suit une loi normale de paramètres positifs m et σ est de la forme : $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}.e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$

2) Etude de la loi de probabilité $N(m, \sigma)$:

- ✓ Représentation graphique :

- ✓ f est une densité de probabilité : On vérifie que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx = 1$.

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

- ✓ $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx = P(a < X < b)$..
- ✓ $\mathbf{E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x.f(x)dx = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x.e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx = m}$

……

……

……

……

……

- ✓ **V(X)=σ^2.**

3) <u>Utilisation du tableau de la loi normale centrée réduite N(0 ;1)</u> :

- ✓ Soit X une variable aléatoire suivant la loi N(0 ;1), sans calculer d'intégrale on peut par lecture du tableau de la loi normale obtenir :

P(X<2)=………………………………………………………………………………….

P(X>1)= …………………………………………………………………………………

P(X<-2)= …………………………………………………………………………………

P(X>-1)= …………………………………………………………………………………

P(-1<X<2)= ……………………………………………………………………………

- ✓ Soit X une variable aléatoire suivant la loi N(m ;σ), on peut alors se ramener à la loi normale centrée réduite N(0 ;1) en faisant un changement de variable aléatoire :

Si X suit la loi N(m ; σ), alors la variable $T = \dfrac{X-m}{\sigma}$ suit la loi N(0 ;1) :

$$\mathbf{P(X < x) = P(T < \frac{x-m}{\sigma})}.$$

Exemple : Soit X une variable suivant la loi N(6 ;2), alors $T=\dfrac{X-6}{2}$ suit la loi N(0 ;1) et :

P(X<7)= …………………………………………………………………………………

P(4<X<8)= ………………………………………………………………………………

Notes

<u>Exercice 1</u> :

Soit la variable aléatoire X qui suit la loi de probabilité définie par :

X	2	4	6
P(X=x)	0,2	0,5	0,3

Vérifier qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité, puis calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type de X.

<u>Exercice 2</u> :

Un jeu consiste à lancer deux dés D_1 et D_2 et à compter la somme des résultats X_1 et X_2. Soit $Y = X_1 + X_2$.

a) Calculer la probabilité d'obtenir Y = 6.
b) Dresser le tableau de la loi de probabilité de la variable aléatoire Y
c) Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type de Y.

<u>Exercice 3 :</u>

Un atelier est constitué de quatre machines utilisées pour la même production. Le taux d'avaries de chacune d'elles, ramené en journées entières d'indisponibilité, est le suivant :
Machine A : 5 jours d'arrêt pour 200 jours ouvrables ;
Machine B : 3 jours d'arrêt pour 200 jours ouvrables ;
Machine C : 7 jours d'arrêt pour 200 jours ouvrables ;
Machine D : 10 jours d'arrêt pour 200 jours ouvrables ;
D'où les probabilités suivantes, un jour quelconque :
$P(\bar{A}) = 0.025$; $P(\bar{B}) = 0.015$; $P(\bar{C}) = 0.035$; $P(\bar{D}) = 0.050$, en appelant :
$\bar{A}$ l'évènement « la machine A est en avarie » ;
A l'évènement « la machine A est en état de marche » … etc.

1) Déterminer la loi de probabilité de la variable X : « Nombre de machines en avarie », un jour quelconque.
2) Quelle est la probabilité d'avoir au moins trois machines en état de marche, un jour quelconque ?
3) Déterminer l'espérance mathématique E(X). En déduire, sur une durée de 200 jours ouvrables, le nombre total de journées de travail des quatre machines.

<u>Exercice 4</u> :

Soit un stock « très important » de pièces de même fabrication, dans lequel on puise au hasard 4 pièces. On sait par ailleurs que la probabilité pour qu'une pièce soit défectueuse est p = 0,05. Déterminer la probabilité pour que l'échantillon ne comporte pas plus de une pièce défectueuse (P).

<u>Exercice 5</u> :

Soit quatre épreuves identiques ayant la même probabilité « p » de succès. Soit X la variable « nombre de succès ». Construire son tableau de probabilité, et calculer son espérance mathématique. Construire le tableau de probabilité de X^2, puis calculer son espérance mathématique. En déduire la variance de X.

Exercice 6 :

La probabilité pour qu'une pièce soit défectueuse est p = 0,09. Un acheteur achète un lot de 40 pièces. Calculer les probabilités de n'avoir aucune pièce défectueuse dans le lot, d'avoir au plus deux pièces défectueuses.

Exercice 7 :

Une variable X suit la loi binomiale B(50 ;p). Déterminer p pour que la probabilité $P(X=0)\geq 0{,}85$.

Exercice 8 :

Dans la production d'une machine, une pièce a la probabilité p=0.05 d'être défectueuse.
On cherche à déterminer la taille minimale n de l'échantillon, qui permettra d'avoir au moins 5 bonnes pièces, avec une probabilité d'au moins 0.98.
Soit X le nombre de bonnes pièces de l'échantillon.

1) Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire X, en admettant que l'on prélève l'échantillon dans un stock très important ?
2) On cherche à déterminer n pour que $P(X \geq 5) \geq 0.98$, ou, ce qui est équivalent, $P(X < 5) \leq 0.02$.
   a) Calculer $P(X = 4)$, pour n = 6, n = 7 et n = 8. On en déduira que n doit être au moins égale à 7.
   b) Pour n = 7, calculer $P(X < 5)$
   c) Répondre à la question posée.

Exercice 9 :

a) Une variable aléatoire suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 4{,}5$. Calculer P(X=0) et $P(X\leq 4)$.
b) Une variable aléatoire suit une loi binomiale B(75 ;p). Déterminer p à 10^{-3} près pour que $P(X\leq 5) \geq 0{,}95$.

Exercice 10 : Une entreprise de transports possède 80 camions. Chaque camion a une probabilité constante "p" d'être hors service dans une journée.
L'entreprise estime que, pour appliquer son planning, elle ne doit pas avoir plus de 3 camions hors service.
1) Déterminer la loi que l'on peut appliquer à la variable aléatoire X : " Nombre de camions hors service dans une journée".
2) Supposons que l'on puisse approcher cette loi par une loi de Poisson de paramètre m.
Déterminer m pour que la probabilité de n'avoir pas plus de 3 camions hors service soit au moins 0.95 (précision sur m : 0.1).
3) En déduire la valeur maximale que peut atteindre p.
4) Justifier à posteriori l'emploi de la loi de Poisson.

Exercice 11 :

a) Une variable X suit la loi normale N(0 ;1). Calculer les probabilités suivantes : P(X<2) ; P(X>1) ; P(X<-2) ; P(X>-1) ; P(-1<X<2).

b) X suit la loi normale N(6 ;2). Calculer les probabilités suivantes : P(X<7) ; P(4<X<8)

c) X suit la loi normale N(m,σ). Déterminer P(m- σ<X<m+ σ), puis P(m- 2σ<X<m+ 2σ)

Exercice 12 :

Une machine usine des pièces dont la longueur X suit une loi normale de moyenne m = 54 et d'écart-type $\sigma = 0.2$.
Une pièce est considérée comme défectueuse si X<53.6 ou X>54.3.

1) Calculer la probabilité p pour qu'une pièce soit défectueuse. Rép. P = 0.0896
2) Pour vérifier que la machine n'est pas déréglée, on détermine des côtes d'alerte m – h et m + h définies par : $P(m - h \leq X \leq m + h) = 0.95$.
   Calculer les côtes d'alerte.

Exercice 13 :

La densité de probabilité d'une variable aléatoire réelle X est définie par :

$$f(x)=\begin{cases} \lambda.\, e^{-4x+1} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 \text{ sinon} & \end{cases}$$

1) Déterminer la valeur de λ
2) Calculer la probabilité p(X$\geq$ 5)
3) Déterminer x pour que p(X<x) > 1/2
4) Déterminer E(X) et V(X).

Exercice 14 :

Dans un aéroport, la durée d'attente X mesurée en minutes pour l'enregistrement des bagages suit une loi exponentielle de paramètre 1/10.
1) Quelle est la densité de probabilité de X ?
2) Quelle est la probabilité d'attendre au plus 30 minutes ?
3) Quelle est la probabilité que l'attente dépasse une heure ?
4) Sachant que l'on a attendu 15 minutes, quelle est la probabilité que l'attente soit encore d'au moins 15 minutes ?

Exercice 15 :

Une série des tests sur la durée de vie d'un composant électronique a donné les résultats suivants :

X	0 à 0.5	0.5 à 1	1 à 1.5	1.5 à 2	2 à 2.5	2.5 à 3	3 à 3.5	3.5 à 4	4 à 4.5
n	1	4	8	14	24	38	58	86	70

X	4.5 à 5	5 à 5.5	5.5 à 6	6 à 6.5	6.5 à 7	7 à 7.5	7.5 à 8	8 à 9.5	9.5 à 10
n	55	43	33	25	19	15	12	10	5

X = durée de vie en années décimalisées ;
N = effectif par classe ; $N = \sum n_i = 520$.

1) Calculer la moyenne m et l'écart-type de cette série statistique. Les résultats seront donnés à 10^{-2} près.
2) On admet que les durées de vie x correspondent à une cariable aléatoire X qui suit une loi normale dont les paramètres sont les résultats de la question 1.
   a) Calculer la probabilité pour qu'un composant dure au moins 3 ans.
   b) Calculer la durée de vie minimale qu'un composant peut atteindre avec une probabilité 0.95.
   c) Déterminer l'intervalle centré sur m à l'intérieur duquel se trouve la durée de vie d'un composant avec une probabilité 0.90.

Exercice 16 :

1) Une variable aléatoire X suit une loi normale de paramètres m et σ. Retrouver les paramètres m et σ tels que : $p(X > 80.6) = 0.0228$ et $p(X \leq 57.2) = 0.1587$. (Les valeurs demandées seront exactes avec au plus 1 chiffre après la virgule)
2) On admet que dans l'entreprise SAROULE la probabilité qu'un appel téléphonique, choisi au hasard, soit suivi d'une commande, est 0.065. Le nombre d'appels reçus dans une journée est 1000. (On suppose qu'il y a indépendance entre les issues des différents appels).
On note Y, la variable aléatoire qui, à chaque jour, associe le nombre d'appels reçus suivis d'une commande. Expliquer pourquoi la loi suivie par Y est binomiale, quels en sont les paramètres ?
3) a) On admet que l'on peut approcher la loi de Y par une loi normale. Quels en sont les paramètres ?
b) On désigne par Y' une variable qui suit cette loi normale. Calculer, en utilisant l'approximation précédente, la probabilité $p(50 \leq Y \leq 70)$; on effectuera **deux calculs** : l'un sans correction de continuité, l'autre avec correction de continuité, et on donnera les résultats à 10^{-2} près , en prenant les valeurs approchées figurant dans la table.
c) Déterminer le nombre entier le plus proche a tel que : $P(64.5 - a \leq Y' \leq 65.5 + a) = 0.60$

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

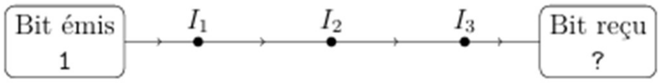
Notes

Partie D : Concours ENSEA - questions sur les probabilités

Sujet 2017 - Réponses 8A-F 8B-V 8C-F 8D-V 8E-V

Question 8

On étudie la transmission d'un bit (une information binaire de valeur 0 ou 1) à travers trois relais successifs notés I_1, I_2 et I_3. Un bit de valeur 1 est envoyé à I_1 qui le transmet à I_2 et ainsi de suite. Les relais I_1, I_2 et I_3 ne sont pas fiables : ils peuvent se tromper de manière indépendante. On fait l'hypothèse que chacun renvoie l'information qu'il reçoit du relais précédent avec la probabilité 4/5 et l'information contraire avec la probabilité 1/5. Ainsi, deux erreurs successives se neutralisent.



Pour tout $k \in \{1, 2, 3\}$ on note E_k l'évènement « I_k transmet un bit de valeur 1 » et $p_k = P(E_k)$. De plus, on pose $p_0 = 1$. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de relais qui transmettent un bit de valeur 1.

(A) La variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = \frac{4}{5}$.

(B) Pour tout $k \in \{2, 3\}$, on a $P(E_k \mid E_{k-1}) = \frac{4}{5}$.

(C) $P(E_1 \mid E_2) = \frac{15}{16}$.

(D) Pour tout $k \in \{1, 2, 3\}$, $p_k = \frac{3}{5}p_{k-1} + \frac{1}{5}$.

(E) On a $P(X = 0) = \frac{16}{125}$.

Sujet 2018 - Réponses 2A-F 2B-F 2C-V 2D-V 2E-F 3A-V 3B-F 3C-V 3D-F 3E-V

Question 2

On définit le jeu suivant. On commence par lancer une pièce de monnaie donnant **pile** ou **face** avec une probabilité 1/2 à chaque fois. Ensuite, si le résultat du lancer de la pièce est **pile**, on lance un seul dé donnant un résultat de 1 à 6 de manière équiprobable, tandis que si le résultat est **face** on lance deux dés donnant chacun un résultat de 1 à 6 de manière équiprobable, et l'on fait la somme des points des résultats des deux dés. Les différents tirages et lancers sont indépendants.

Le résultat d'une telle expérience est le couple (L, D), L valant **pile** ou **face**, D donnant le résultat du lancer de dés (un ou deux selon le cas), ce résultat allant de 1 à 12. Le gain final est la valeur de D.

(A) La probabilité que D vaille 12 est 1/12.

(B) Sachant que D vaut 1, la probabilité que L vaille **pile** est 1/2.

(C) La probabilité que D soit un nombre pair est 1/2.

(D) La probabilité que D vaille 2 est 7/72.

(E) La probabilité que D vaille 7 est 1/6.

Question 3

Suite de la question précédente avec les mêmes notations.

(A) Sachant que D vaut 2, la probabilité que L vaille **pile** est $6/7$.
(B) À ce jeu, la probabilité de gagner strictement plus de 6 est $1/2$.
(C) Sachant que D vaut 8, la probabilité que L vaille **face** est 1.
(D) Le gain final a une espérance inférieure à $3/2$.
(E) L'espérance du gain final est $21/4$.

Sujet 2016 - Réponses 8A-V 8B-F 8C-V 8D-F 8E-F 9A-F 9B-V 9C-F 9D-V 9E-F

Question 8

Deux composants électroniques A et B sont reliés par un réseau. Ils s'envoient des impulsions suivant le protocole suivant :

— **Étape 0**. Le composant A envoie une impulsion à B. Le composant B réagit de manière aléatoire :

1. Avec une probabilité $p_0 = \frac{1}{2} = 2^{-1}$, il répond à A. Dans ce cas, on passe à l'étape 1.
2. Avec une probabilité $1 - p_0 = \frac{1}{2} = 1 - 2^{-1}$, il ne répond pas. Dans ce cas, l'échange s'arrête.

— **Étape 1**. Le composant A envoie une impulsion à B. Le composant B réagit de manière aléatoire :

1. Avec une probabilité $p_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} = 2^{-1/2}$, il répond à A. Dans ce cas, on passe à l'étape 2.
2. Avec une probabilité $1 - p_1 = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} = 1 - 2^{-1/2}$, il ne répond pas. Dans ce cas, l'échange s'arrête.

$\vdots$

— **Étape** n. Cette étape se déroule de manière analogue aux étapes 0 et 1, mais la probabilité p_n que B réponde à A vaut $p_n = 2^{-\frac{1}{2^n}}$.

$\vdots$

(A) La probabilité que A envoie une seule impulsion est de 50%.
(B) La probabilité que B réponde à A diminue à chaque étape.
(C) La probabilité que le composant B réponde à la 4^{e} étape sachant qu'il a répondu à la 3^{e} étape est $2^{-\frac{1}{2^4}}$.
(D) La probabilité que l'échange dure au moins deux étapes est de $2^{-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)} = 2^{\frac{-7}{4}}$.
(E) La probabilité que l'envoi d'impulsions entre A et B ne s'arrête jamais est égale à 0.

Question 9

André joue à pile ou face avec une pièce non truquée (la probabilité de pile comme de face est 1/2). Si le tirage donne pile, alors André gagne 0,5 et si c'est face, il perd 1. Il peut jouer autant de fois qu'il le souhaite.

(A) André joue une seule fois. La probabilité qu'il gagne 0,5 est 1/3.
(B) André joue deux fois. La probabilité qu'il gagne 1 est de 1/4.
(C) André joue quatre fois et son gain total est de 0,5 . Dans ce cas, André a perdu exactement deux fois.
(D) André joue quatre fois. La probabilité que son gain total soit de 0,5 est de 1/4.
(E) L'espérance du gain pour un seul tirage est de $-0,5$.

Sujet 2015 - Réponses 9)VFVFF 10)VFFFV

On s'intéresse à une cellule qui est capable de produire deux molécules différentes, l'une notée A et l'autre B. Ces molécules sont produites selon les règles suivantes.

- Si la cellule est vivante, elle produit A, respectivement B, avec une probabilité de $P(A) = 1/2$, respectivement $P(B) = 1/2$.
- Si la cellule produit B, elle meurt tout de suite après la production de B.
- Si la cellule produit successivement quatre A, elle meurt tout de suite après la production du quatrième A.

On isole une de ces cellules qui n'a encore rien produit. On note X, respectivement Y, la variable aléatoire qui donne le nombre de A, respectivement B, produits par la cellule avant de mourir.

Question 9

(A) Après la mort de la cellule, les molécules produites peuvent être représentées par l'un des éléments de l'ensemble $\{B, AB, AAB, AAAB, AAAA\}$.
(B) On a $P(AB) = 1/5$.
(C) On a $P(AAB) = 1/8$.
(D) On a $P(X = 2) = 1/4$.
(E) On a $P(Y = 1) = 4/5$.

Question 10

(A) L'espérance de la variable aléatoire X est de 15/16.
(B) L'espérance de la variable aléatoire Y est 7/16.
(C) La probabilité que $X = 4$ sachant que $Y = 1$ (notée $P(X = 4 \mid Y = 1)$) est de 1/16.
(D) Les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.
(E) On isole cinq cellules qui n'ont encore rien produit. On suppose leur comportement indépendant. Après la mort des cinq cellules, la probabilité que k molécules B ait été produites en tout est de $\binom{5}{k}\left(\frac{1}{16}\right)^{5-k}\left(\frac{15}{16}\right)^{k}$ pour $k \leq 5$.

Notes

Loi Binomiale B(n,p)

Copiez les données d'exemple dans le tableau suivant, et collez-le dans la cellule A1 d'un nouveau classeur Excel. Pour que les formules affichent des résultats, sélectionnez-les, appuyez sur F2, puis sur Entrée. Si nécessaire, vous pouvez modifier la largeur des colonnes pour afficher toutes les données.

Données	Description	
6	Nombre d'essais réussis	
10	Nombre d'essais indépendants	
0,5	Probabilité de succès de chaque essai	
Formule	**Description**	**Résultat**
=LOI.BINOMIALE(A2,A3,A4,FAUX)	Probabilité d'obtenir exactement 6 essais réussis sur 10.	0,2050781

Loi de Poisson P(m)

Copiez les données d'exemple dans le tableau suivant, et collez-le dans la cellule A1 d'un nouveau classeur Excel. Pour que les formules affichent des résultats, sélectionnez-les, appuyez sur F2, puis sur Entrée. Si nécessaire, vous pouvez modifier la largeur des colonnes pour afficher toutes les données.

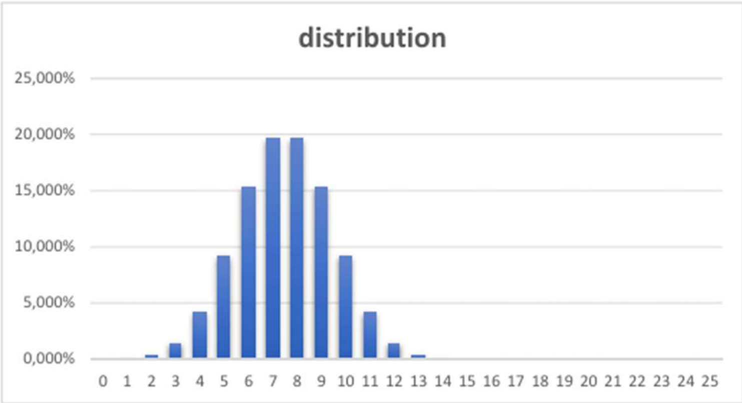
Données	Description	
2	Nombre d'événements	
5	Tendance attendue	
Formule	**Description (résultat)**	**R ésultat**
=LOI.POISSON(A2; A3; VRAI)	Probabilité de Poisson pour qu'un événement aléatoire se reproduise avec les termes définis ci-dessus (0,124652).	0,124652
=LOI.POISSON(A2; A3; FAUX)	Fonction de probabilité de masse de Poisson avec les termes ci-dessus (0,084224).	0,084224

Loi Binomiale pour n tirages variant entre 1 et 25

Choisir les valeur de n et p

n	p
15	0,5

variable	distribution	répartition
0	0,003%	0,003%
1	0,046%	0,049%
2	0,320%	0,369%
3	1,389%	1,758%
4	4,166%	5,923%
5	9,164%	15,088%
6	15,274%	30,362%
7	19,638%	50,000%
8	19,638%	69,638%
9	15,274%	84,912%
10	9,164%	94,077%
11	4,166%	98,242%
12	1,389%	99,631%
13	0,320%	99,951%
14	0,046%	99,997%
15	0,003%	100,000%
16	#NOMBRE!	#NOMBRE!

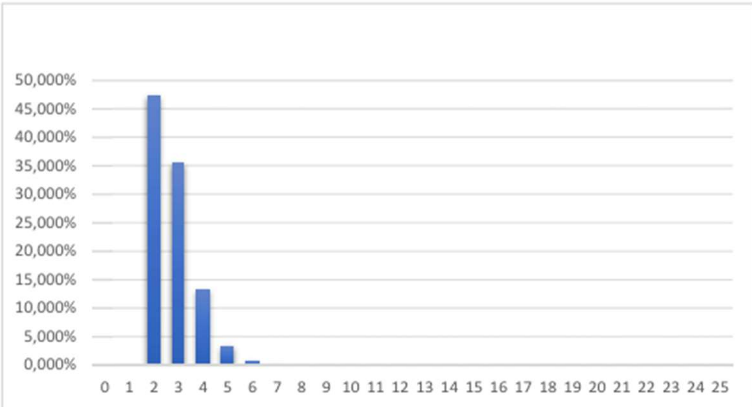


Loi de Poisson de paramètre m où m≤15

Choisir la valeur de m

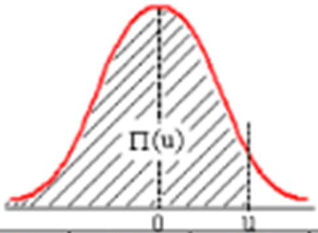
m
0,75

variable	Distribution	répartition
0	47,237%	47,237%
1	35,427%	82,664%
2	13,285%	95,949%
3	3,321%	99,271%
4	0,623%	99,894%
5	0,093%	99,987%
6	0,012%	99,999%
7	0,001%	100,000%
8	0,000%	100,000%
9	0,000%	100,000%
10	0,000%	100,000%
11	0,000%	100,000%
12	0,000%	100,000%
13	0,000%	100,000%
14	0,000%	100,000%
15	0,000%	100,000%
16	0,000%	100,000%
17	0,000%	100,000%
18	0,000%	100,000%
19	0,000%	100,000%
20	0,000%	100,000%



Loi Normale centrée réduite N(0,1)

Table de Loi Normale
P(x<u)



	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	.0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8254	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	.0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	6,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	.0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998

Loi Normale N(m,σ)

Copiez les données d'exemple dans le tableau suivant, et collez-le dans la cellule A1 d'un nouveau classeur Excel. Pour que les formules affichent des résultats, sélectionnez-les, appuyez sur F2, puis sur Entrée. Si nécessaire, vous pouvez modifier la largeur des colonnes pour afficher toutes les données.

Données	Description	
42	Valeur à centrer et à réduire.	
40	Espérance mathématique de la distribution.	
1,5	Écart type de la distribution.	
Formule	**Description**	**Résultat**
=CENTREE.REDUITE(A2;A3;A4)	Valeur normalisée 42, avec 40 comme espérance arithmétique et 1,5 comme écart type.	1,33333333

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

Notes

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………