Amphi 1

Les formules trigonométriques : à apprendre par cœur et/ou à savoir retrouver Applications

Les objectifs :

1) Étudier quelques formules indispensables pour le GEII
2) Application au calcul d'intégrales.

Page 28 Exercice 4

Exercice 4 Compléter sans utiliser de formulaire de trigonométrie :

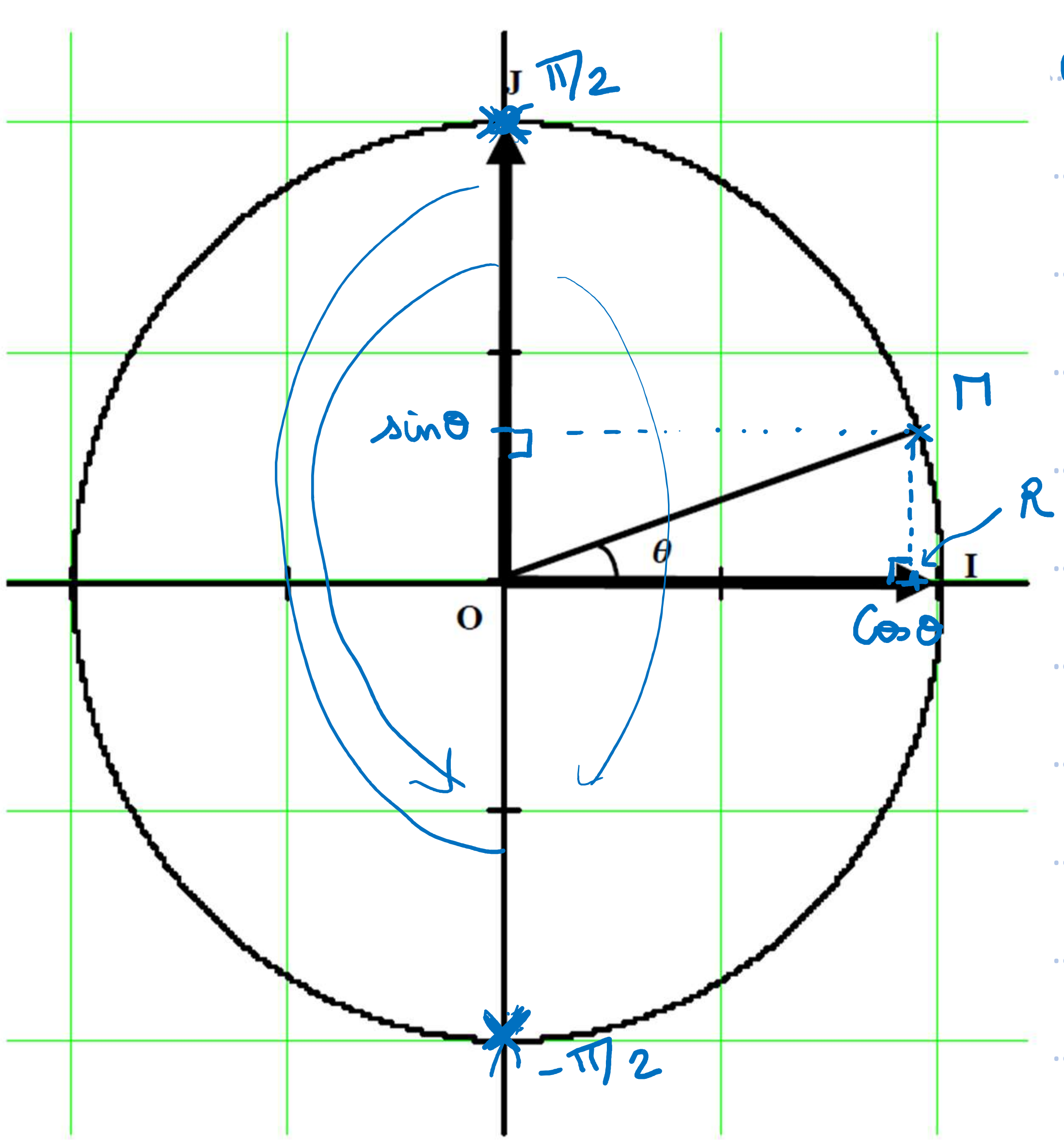
1) $\boxed{\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta) = 1}$ $\forall\, \theta \in \mathbb{R}$
"pour tout"

Justification : voir page 31

2) Définition de $\tan(\theta) = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ $\forall\ \theta \neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi ;\ k\in\mathbb{Z}$ voir p.31

Alors : $1+\tan^2(\theta) = 1+\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \dfrac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta}+\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \dfrac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$

et : $1+\tan^2(\theta) = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ voir page 31 $\forall\ \theta \neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi ;\ k\in\mathbb{Z}$



Page 31

$*\ \cos^2\theta + \sin^2\theta \overset{??}{=} 1$

Th de Pythagore dans OMR

$OM^2 = MR^2 + OR^2$

$1 = (\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2$

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1.$

$*\ \tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ existe ssi $\cos\theta \neq 0$

$\cos\theta = 0 \Longleftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \ ; k \in \mathbb{Z}$

ou

$\theta = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$\Longleftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$\mathcal{D}_{\tan} = \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z} \right\}$

$= \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z} \right\}$

tel que
où

Page 31&32

* Dérivée de $\tan\theta$:

$$(\tan\theta)' = \left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)' = \frac{\cos\theta\cdot\cos\theta - \sin\theta\cdot(-\sin\theta)}{\cos^2\theta}$$

$$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2} \qquad (\cos\theta)' = -\sin\theta \qquad (\sin\theta)' = \cos\theta.$$

$$(\tan\theta)' = \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\cos^2\theta}$$

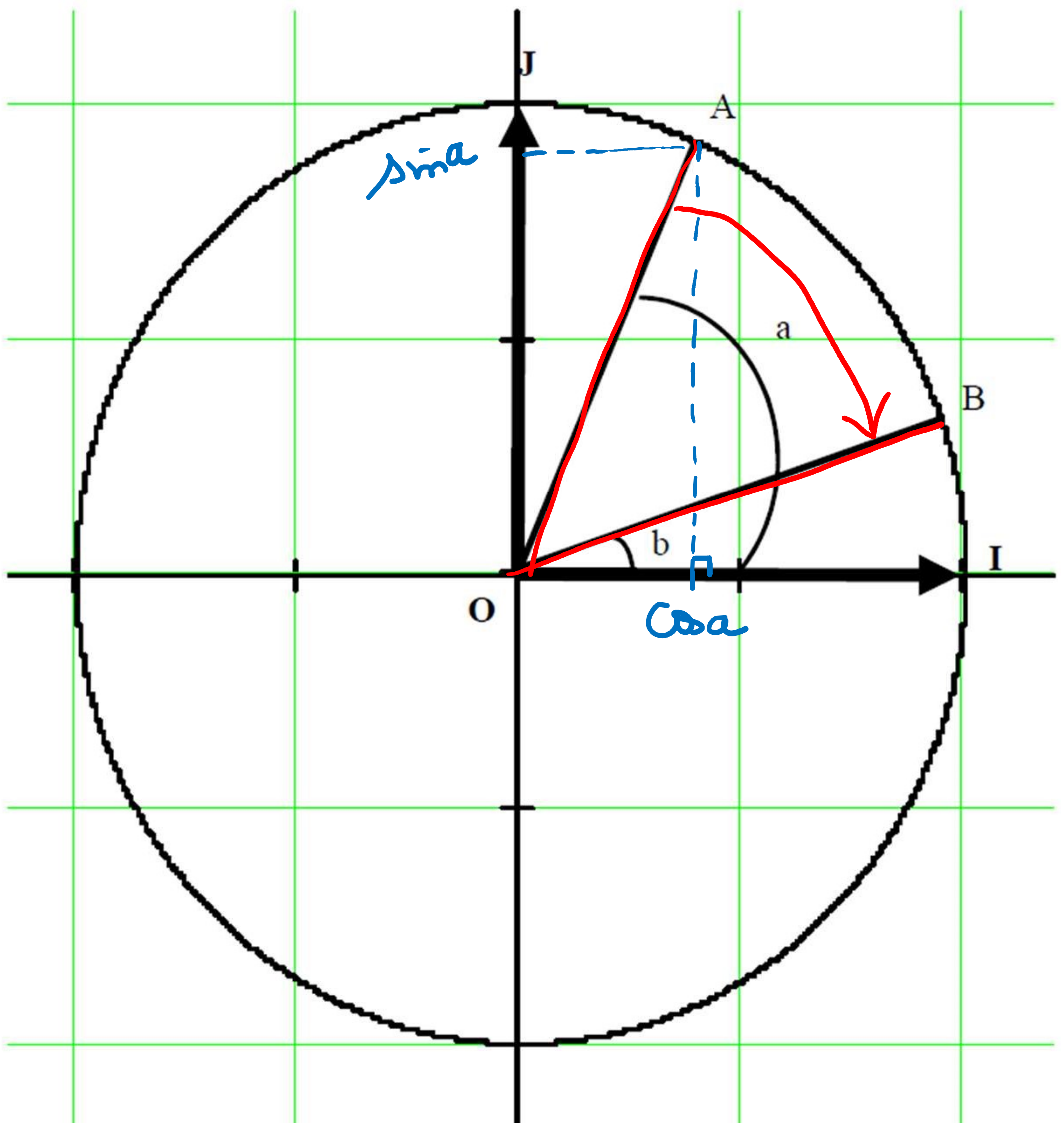
$$\to = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$\forall\, \theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\to = \frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta} + \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = 1 + \tan^2\theta.$$

4bis) Lire la formule cos(a-b)

$\|\overrightarrow{OA}\| = OA$



P. 31-32-33.

Page ~~4~~ 5 Supplément Chapitre 1

$\cos(a-b)$??

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = x_A x_B + y_A y_B$

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \cos a . \cos b + \sin a \sin b$

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = OA \times OB \times \cos(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}})$

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 1 \times 1 \times \cos(a-b)$

$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a . \sin b$

Page 28 & 29

3) Rappeler les formules trigonométriques suivantes :

$\cos(a+b) =$ Cosa.Cosb − sina.sinb

$\sin(a+b) =$ sina.Cosb + sinb.Cosa

sympa

En déduire les formules suivantes :

−sinb car sin est impaire

$\cos(a-b) = \cos(a+(-b)) = \cos a.\underbrace{\cos(-b)}_{\cos b \text{ car Cosinus est paire}} - \sin a.\sin(-b)$

$\cos(a-b) =$ Cosa Cosb + sina sinb

$\sin(a-b) = \sin(a+(-b)) = \sin a\,\underbrace{\cos(-b)}_{\cos b} + \underbrace{\sin(-b)}_{-\sin b}.\cos a$

$\sin(a-b) =$ sina Cosb − sinb Cosa

$\sin(2a) = \sin(a+a) = \sin a\,\cos a + \sin a\,\cos a$

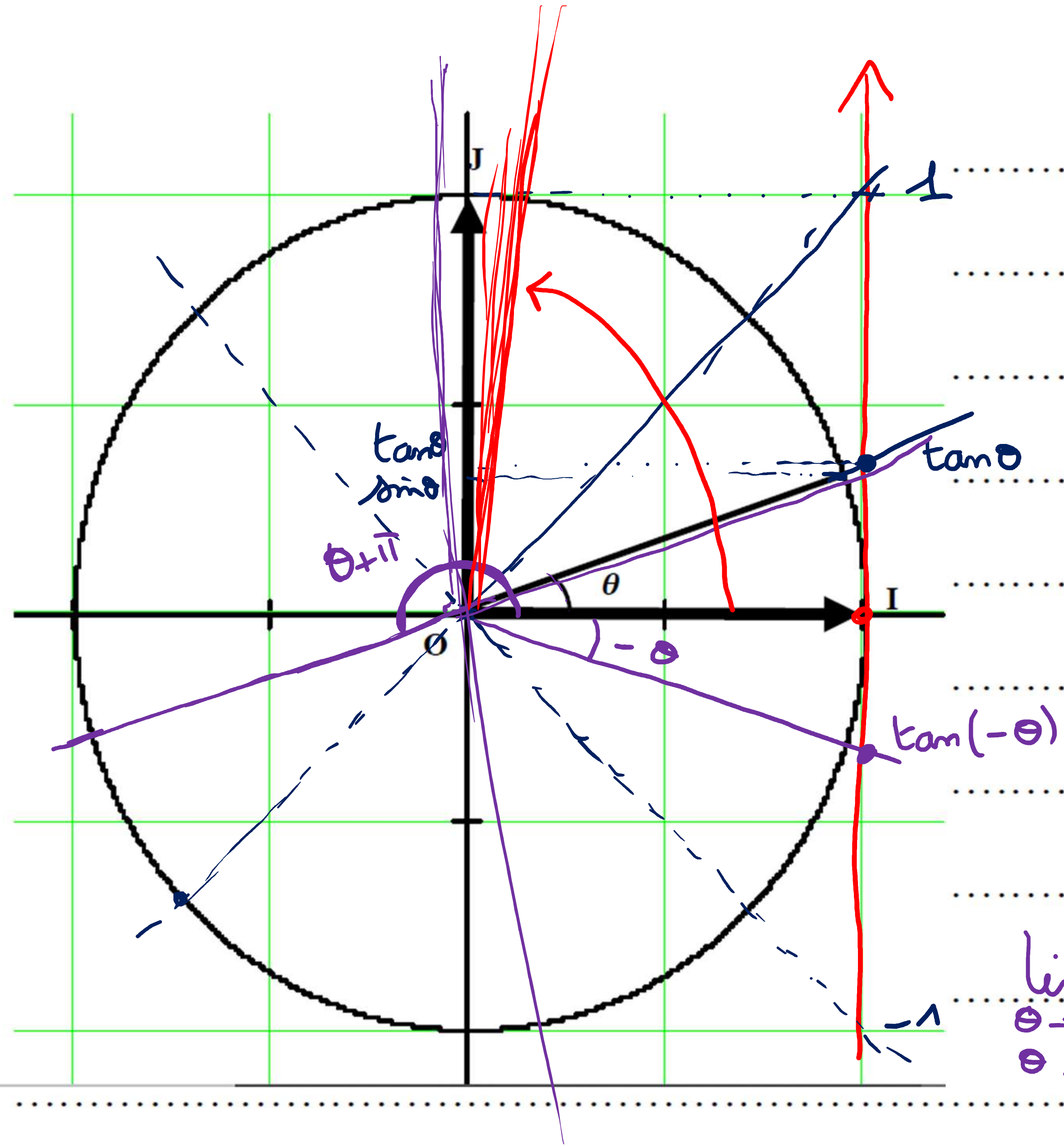
$\sin(2a) = 2\sin a.\cos a$

Amphi 2

Tangente et Arctangente

<u>Les objectifs :</u>

1) Etudier la fonction tangente et revoir la méthodologie d'étude d'une fonction
2) Se préparer au chapitre 2 sur les nombres complexes



$\tan 0 = 0$; $\tan\frac{\pi}{4} = 1$

$\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$

$\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -1$

$\tan\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = 1$.

$\tan(-\theta) = -\tan\theta$

tan est impaire. $\mathcal{C}_{\tan}$ sym % O

$\tan(\theta+\pi) = \tan\theta$

tan est π-périodique.

$\lim\limits_{\substack{\theta \to \frac{\pi}{2} \\ \theta < \frac{\pi}{2}}} \tan\theta = +\infty$ $\lim\limits_{\substack{\theta \to \pi/2 \\ \theta > \pi/2}} \tan\theta = -\infty$.

Etude de la fonction tangente.

→ Ensemble de définition : $\mathcal{D}_{tan} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z} \right\}$

→ Périodicité : $\tan(\theta + \pi) = \tan\theta$ donc tan est π-périodique.

On étudie tan sur $\left] -\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} \right[$

→ Parité : $\tan(-\theta) = -\tan\theta$ donc tan est impaire et sa courbe est symétrique par rapport à O. On étudie donc tan sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2} \right[$

→ $(\tan\theta)' = \left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta} \right)' = \frac{1}{\cos^2\theta} = 1 + \tan^2\theta > 0 \quad \forall \theta \in \left[0 ; \frac{\pi}{2} \right[$

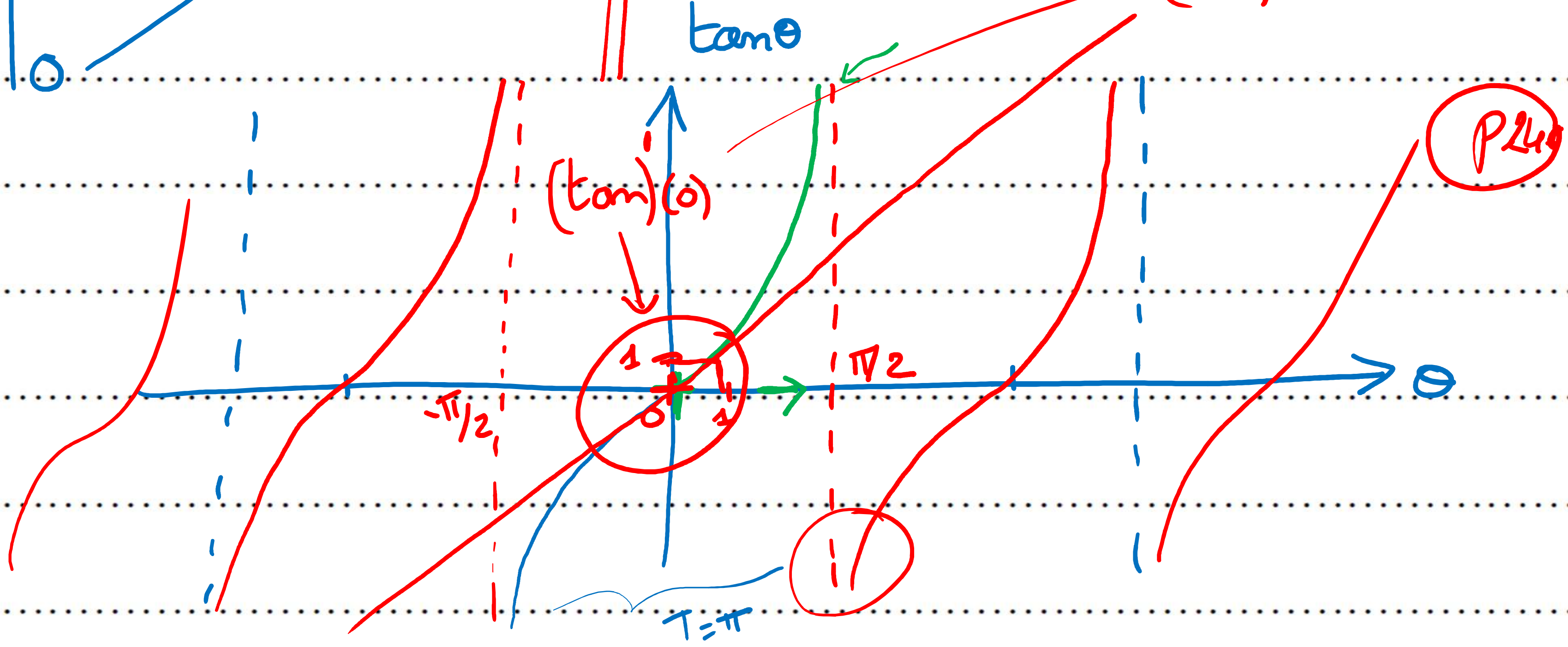
→

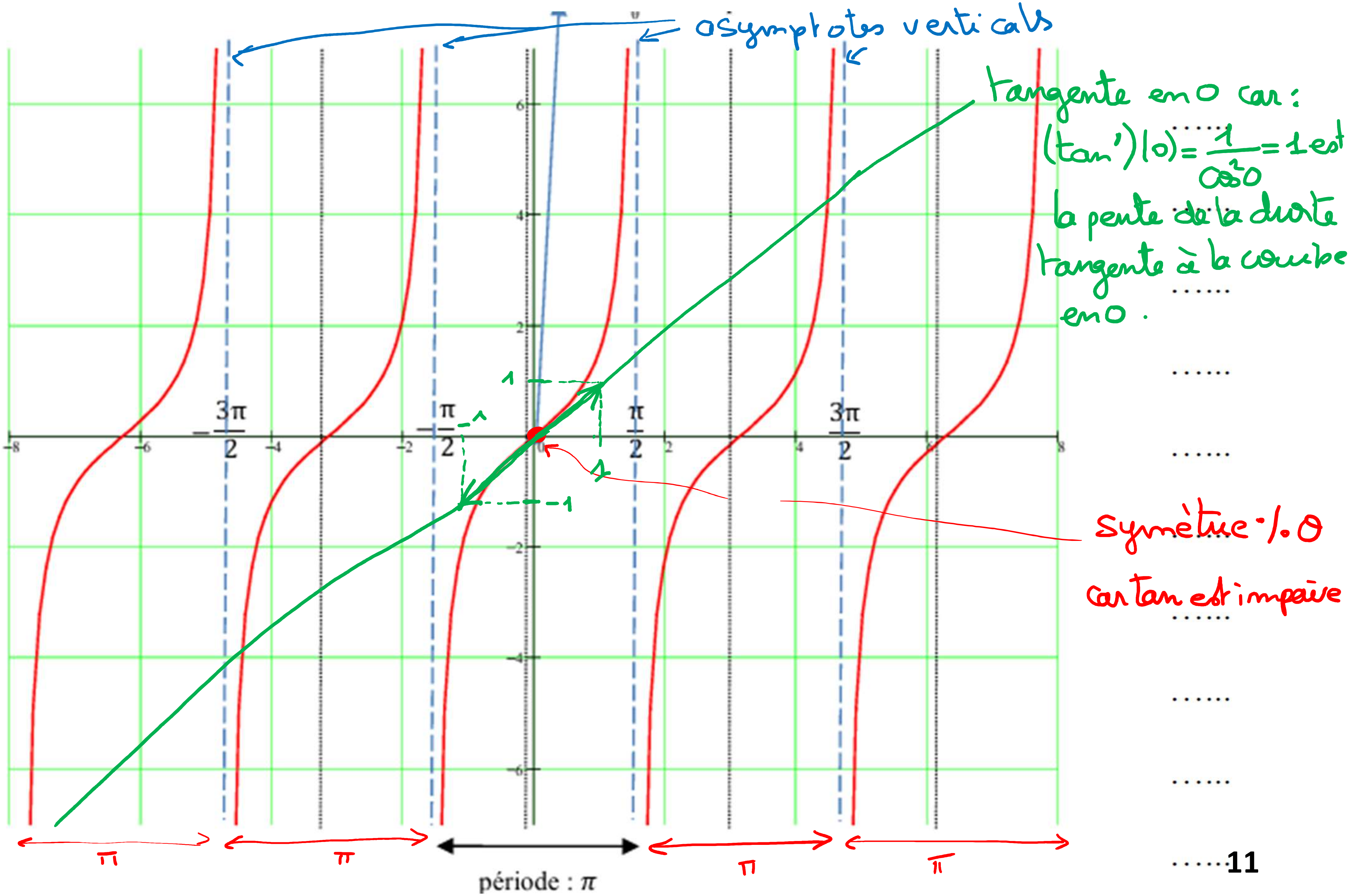
θ	0		$\pi/2$
$(\tan\theta)'$		$+$	$\Vert$
$\tan$	0	$\nearrow$	$+\infty$ $\Vert$

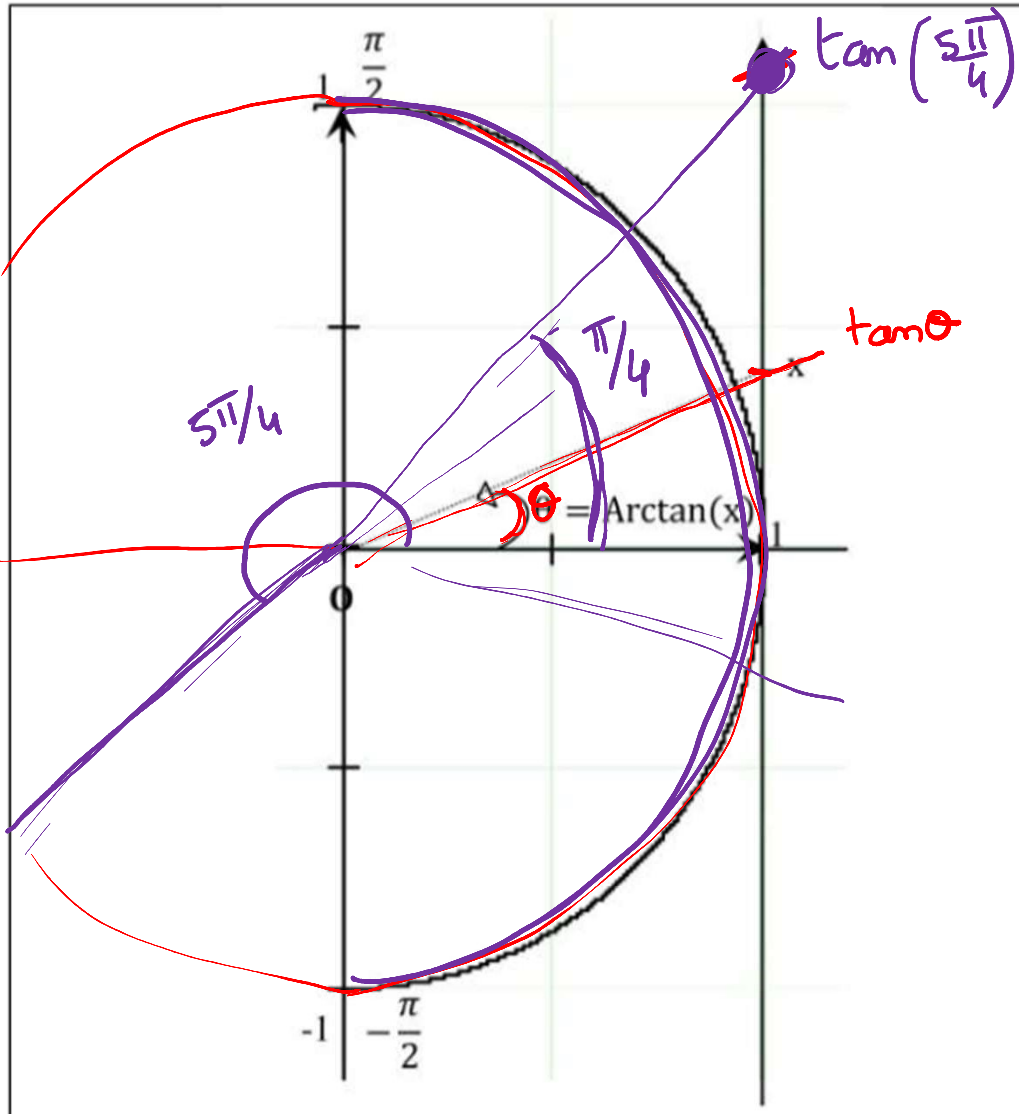
$$\lim_{\substack{\theta \to \pi/2 \\ \theta < \pi/2}} \tan\theta = +\infty$$

$$\left(\lim_{\substack{\theta \to \pi/2 \\ \theta > \pi/2}} \tan\theta = -\infty \right)$$

$$(\tan)'(0) = 1 + \tan^2(0) = 1$$




asymptotes verticals
tangente en 0 car :
(tan')(0) = 1/cos²0 = 1 est
la pente de la droite
tangente à la courbe
en 0 .
symétrie /. O
car tan est impaire
−3π/2
−π/2
π/2
3π/2
π
période : π



Soit x∈ ℝ, on appelle Arctangente de x et on note Arctan(x), l'unique angle $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ solution de l'équation : tan(θ) = x .

$\text{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4}$; $\text{Arctan}\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3}$; $\text{Arctan}\left(-\sqrt{3}\right) = -\frac{\pi}{3}$

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \tan(\text{Arctan}(x)) = x$$

$$\forall \theta \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\ \text{Arctan}(\tan(\theta)) = \theta$$

tan(Arctan112)=112 ; $\text{Arc}\tan\left(\tan\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right) = \frac{\pi}{4}$

$\text{Arc}\tan\left(\tan\left(\frac{-\pi}{16}\right)\right) = -\frac{\pi}{16} \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

Exercice 7 Arctangente

Page 30

Compléter le formulaire ci-dessous puis déterminer : Arctan(-1) ; Arctan(0) ; tan(Arctan189) ; $\text{Arctan}(\tan(-\frac{2\pi}{3}))$; $\text{Arctan}(\tan\frac{\pi}{20})$; $\forall\theta\in\left]\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right[\quad \text{Arc}\tan(\tan(\theta))$

$\text{Arctan}(-1) = -\frac{\pi}{4}$

$\text{Arctan}\, 0 = 0$

$\tan(\text{Arctan}\, 189) = 189$

$\text{Arctan}(\tan(-\frac{2\pi}{3})) = \frac{\pi}{3}$

$\text{Arctan}(\tan\frac{\pi}{20}) = \frac{\pi}{20} \in \left]-\pi/2;\pi/2\right[$.

$\text{Arctan}(\tan\theta) = ??\ \theta - \pi$ $\qquad \theta\in\left]\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right[$.

car $\tan(\theta-\pi) = \tan\theta$ et $-\frac{\pi}{2} < \theta-\pi < \frac{\pi}{2}$