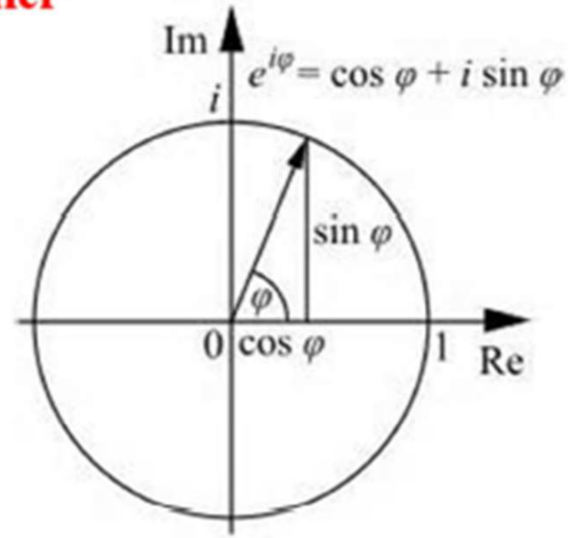
Chapitre 2 : Les bases des nombres complexes pour le GEII

Leonhard Euler



$$e^{i\pi}+1=0$$

Page 5 chapitre 2

Partie A : Définitions et notations du GEII

I. Introduction

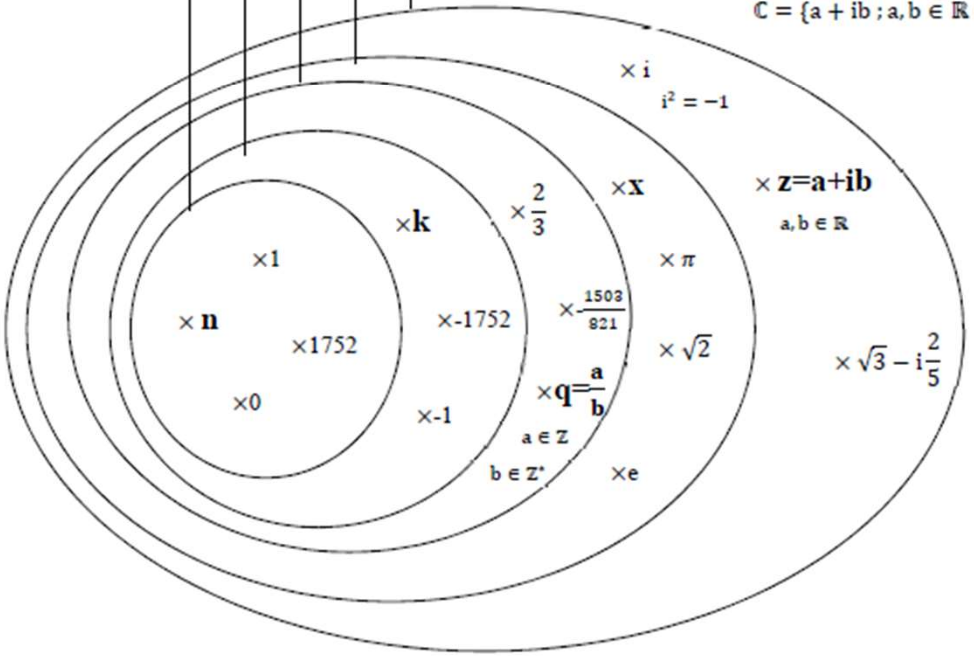
Ensemble des nombres entiers naturels : $\mathbb{N} = \{0\,;1\,;2\,;3\,;\ \dots\,;n\,;\dots\}$

Ensemble des nombres entiers relatifs :
$\mathbb{Z} = \{\dots;\ -3\,;\ -2\,;\ -1\,;\ 0\,;1\,;2\,;3\,;\dots;k\,;\dots\}$

Ensembles des nombres rationnels : $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b}\,;a \in \mathbb{Z} \text{ et } b \in \mathbb{Z}^*\right\}$

Ensembles des nombres réels : $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \underbrace{\{\sqrt{2}\,;\ e\,;\ \pi\,;\dots;x\,;\dots\}}_{\text{nombres irrationnels}}$

Ensemble des nombres complexes :
$\mathbb{C} = \{a + ib\,; a, b \in \mathbb{R} \text{ et } i^2 = -1\}$



$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Notes Résoudre $x^2+1=0 \iff x^2=-1$ $S_{\mathbb{R}}=\emptyset$

Page 4 chapitre 2

Déf: Soit i, le nombre imaginaire tel que $\boxed{i^2=-1}$

$\iff x^2=(i)^2 \iff x=i$ ou $-i$ $S_{\mathbb{C}}=\{-i;i\}$

Résoudre $x^2+4=0 \iff x^2=-4$

$\iff x^2=i^2.2^2$

$\iff x=2i$ ou $-2i$ $S_{\mathbb{C}}=\{-2i;2i\}$

Résoudre $x^2+2x+5=0$

$\Delta=b^2-4ac=2^2-4(1)(5)=4-20=-16<0$ $\Delta=-16=(\underbrace{4i}_{\sqrt{\Delta}})^2$

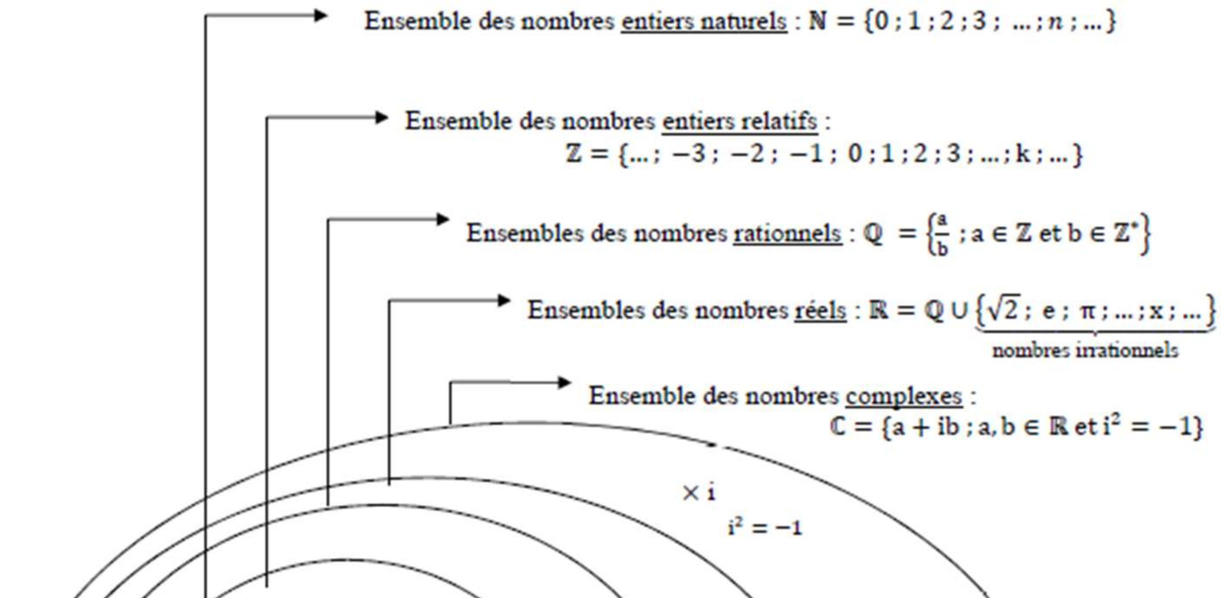
$\Delta<0$

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a}=\dfrac{-2-4i}{2}=\dfrac{2(-1-2i)}{2}=-1-2i \\ x_2=\dfrac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a}=\dfrac{-2+4i}{2}=-1+2i \end{cases}$$

$S_{\mathbb{C}}=\{-1-2i;-1+2i\}$

$\mathbb{C}=\{z=a+ib\ ;\ a,b\in\mathbb{R}\}$

Page 5 chapitre 2



On appelle i le nombre imaginaire, défini par : $\boxed{i^2 = -1}$.
L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$: $\mathbb{C} = \{z = a + ib ; a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$
Dans cet ensemble toute équation du second degré possède deux solutions.
En électricité la lettre i étant réservée à l'intensité d'un courant, nous la remplacerons par la lettre j.

Pour résoudre $az^2+bz+c=0$ avec $\Delta = b^2-4ac<0$, on a les solutions suivantes : $z_1 = \frac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$

$\boxed{\mathbb{R} \subset \mathbb{C}}$

inclus dans.

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Notes Simplifier dans $\mathbb{C}$: $\boxed{i^2 = -1}$

Page 4 chapitre 2

page 24

$(3-4i)\cdot(1+i) = 3+\underbrace{3i-4i}-\underbrace{4i^2} = 3-i+4 = 7-i$

$1+i+i^2+\underbrace{i^3}_{i\,i^2} = 1+i-1-i = 0$

$i^3 = i\,\underbrace{i^2}_{-1} = -i$

$(1+2i)^2+(2-i)^2 = \underbrace{1+4i+(2i)^2}+\underbrace{4-4i+i^2}_{} = 0$; $4i^2=-4$; $i^2 = -1$

$\underbrace{(3-4i)\cdot(3+4i)} = 9-16i^2 = 9+16 = 25$

$\dfrac{2+i}{3-4i} = \dfrac{2+i}{3-4i} \times \dfrac{3+4i}{3+4i} = \dfrac{6+8i+3i+\overbrace{4i^2}^{=-4}}{25} = \dfrac{2+11i}{25} = \dfrac{2}{25} + i\,\dfrac{11}{25}$

Notations Maths

$\mathbb{C} = \left\{ z = a+ib \;;\; a,b \in \mathbb{R} \right\}$ $\boxed{i^2 = -1}$

Notations du GEII.

$\mathbb{C} = \left\{ \underline{Z} = a+jb \;;\; a,b \in \mathbb{R} \right\}$ $\boxed{j^2 = -1}$

Page 7 chapitre 2

II. Définitions et notations du GEII

- ✓ **Tout nombre complexe $\underline{Z}$ s'écrit de la forme :**

$$\underline{Z} = x + j.y \quad \text{où } x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R} \text{ et } \boxed{j^2 = -1}$$

x est la partie réelle de $\underline{Z}$
On note : $x = \mathcal{R}e(\underline{Z})$

y est la partie imaginaire de $\underline{Z}$
On note : $y = \mathrm{Im}(\underline{Z})$

Page 6 chapitre 2

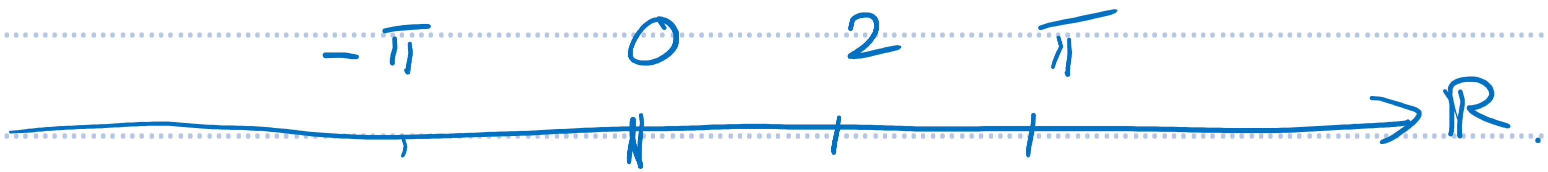
Notes

$z_1 = 3+5j$ $\quad Re(z_1) = 3$ $\quad Im(z_1) = 5$

$z_2 = 5+0.j$ $\quad Re(z_2) = 5$ $\quad Im(z_2) = 0$

$z_3 = j-1 = -1+j$ $\quad Re(z_3) = -1$ $\quad Im(z_3) = 1$

$z_4 = 0-3j$ $\quad Re(z_4) = 0$ $\quad Im(z_4) = -3$



Notes

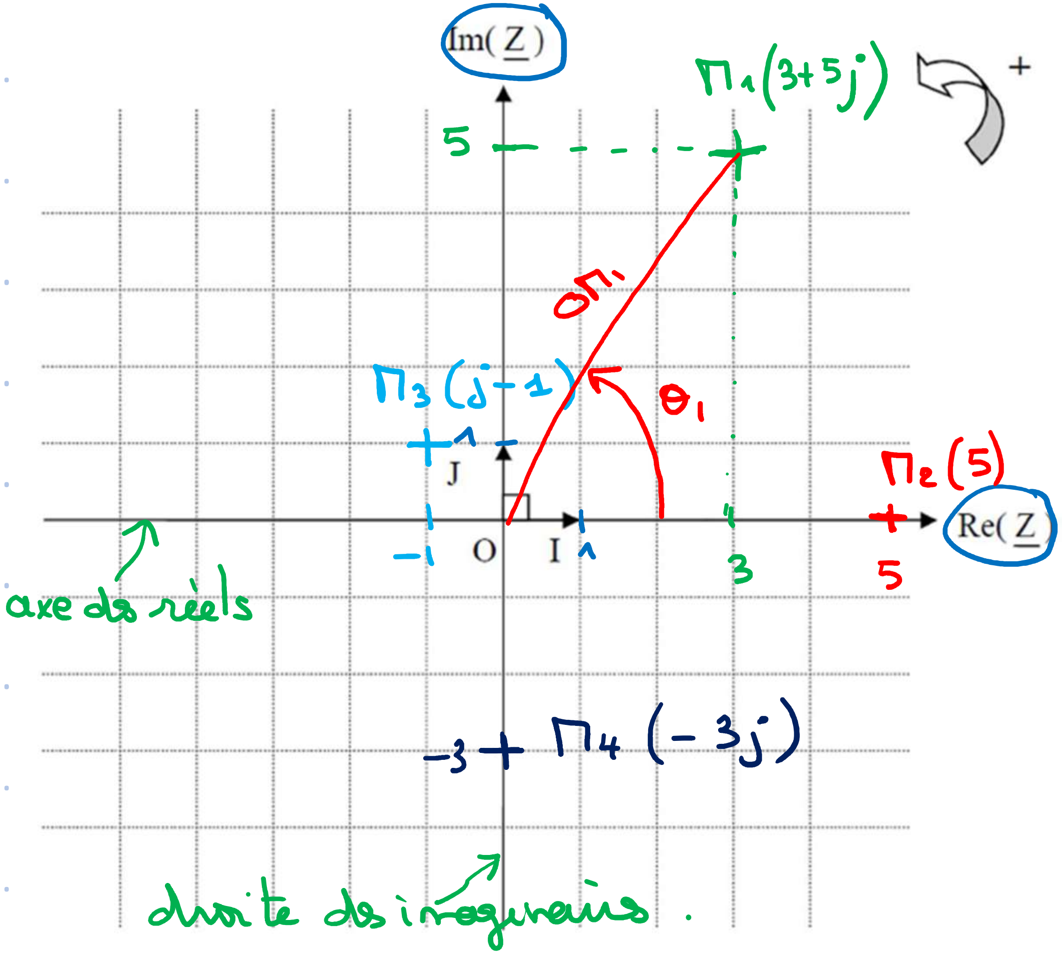
$Z_1 = 3+5j$ a pour image M_1

$Z_2 = 5$ est l'affixe du point M_2

$Z_3 = j-1$

$Z_4 = -3j$

Page 6 chapitre 2



II. Définitions et notations du GEII

Page 7 chapitre 2

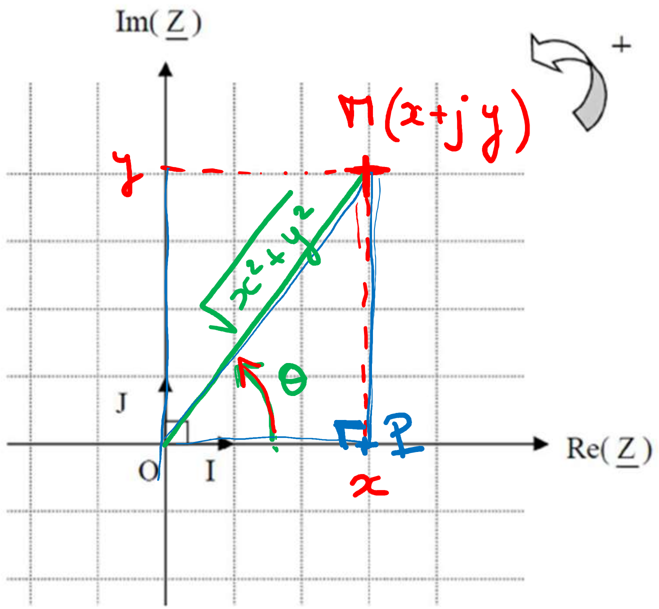
- ✓ Tout nombre complexe $\underline{Z}$ s'écrit de la forme :

$$\underline{Z} = x + j.y \quad \text{où } x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R} \text{ et } \boxed{j^2 = -1}$$

x est la partie réelle de $\underline{Z}$
On note : $x = \mathcal{R}e(\underline{Z})$

y est la partie imaginaire de $\underline{Z}$
On note : $y = \mathrm{Im}(\underline{Z})$

- ✓ Le plan complexe : On représente un nombre réel sur une droite munie d'un repère $\left(O, \overrightarrow{OI}\right)$. Tout nombre complexe $\underline{Z} = x + j.y$ (où $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$) est représenté dans un plan muni d'un repère orthonormé $\left(O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\right)$ par le point M d'abscisse $x = \mathcal{R}e(\underline{Z})$ et d'ordonnée $y = \mathrm{Im}(\underline{Z})$
Le point M(x,y) est appelé image de $\underline{Z}$.
$\underline{Z}$ est appelé l'affixe du point M.
$\underline{Z}$ est aussi appelé l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j}$



Calcul de OM : …Pythagore dans OPM…

$OM^2 = \underbrace{OP^2}_{x^2} + \underbrace{MP^2}_{y^2} \Longleftrightarrow OM = \sqrt{x^2+y^2}$

Soit θ, la mesure de l'angle de vecteur orienté $(\vec{OI}, \vec{OM})$

Page 7 chapitre 2

$\cos(\theta) = \dfrac{Adj}{Hyp} = \dfrac{OP}{OM} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{Re(\underline{Z})}{Z}$

$Z \neq 0$

$\sin(\theta) = \dfrac{Opp}{Hyp} = \dfrac{PM}{OM} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{Im(\underline{Z})}{Z}$

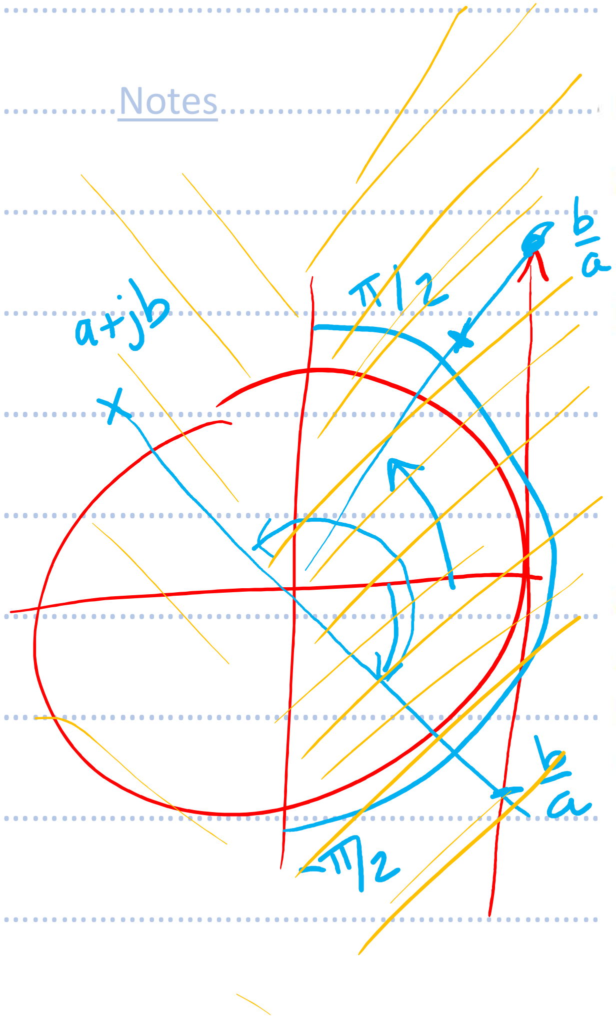
- ✓ **Le <u>module</u> de $\underline{Z}$ est noté Z ou encore $|\underline{Z}|$, c'est la distance de O à M, ainsi :**
  $|\underline{Z}| = Z = \sqrt{x^2+y^2}$

- ✓ **L'<u>argument</u> de $\underline{Z}$ est noté $\arg(\underline{Z})$, c'est la mesure en radians de l'angle de vecteur orienté $(\vec{OI}, \vec{OM})$, déterminée à $2k\pi$ près $(k \in \mathbb{Z})$. On note $\theta = \arg(\underline{Z})$,**

on a alors : $\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{x}{Z} = \dfrac{\text{partie réelle de } \underline{Z}}{\text{module de } \underline{Z}} = \dfrac{Re(\underline{Z})}{Z} \\ \sin(\theta) = \dfrac{y}{Z} = \dfrac{\text{partie imaginaire de } \underline{Z}}{\text{module de } \underline{Z}} = \dfrac{Im(\underline{Z})}{Z} \end{cases}$ **si $Z \neq 0$.**

Page 15 chapitre 2

Notes



Partie C : Opérations sur les module et arguments d'un nombre complexe

I. Argument d'un nombre complexe et arctangente

Comment obtenir θ l'argument d'un nombre complexe, lorsqu'il n'est pas remarquable ?

Soit $\underline{Z} = a + j.b$ un nombre complexe non nul et $a \neq 0$.

Pour déterminer un argument de $\underline{Z}$, on calcule

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{\text{partie réelle de } \underline{Z}}{\text{module de } \underline{Z}} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \dfrac{a}{Z} \\ \sin(\theta) = \dfrac{\text{partie imaginaire de } \underline{Z}}{\text{module de } \underline{Z}} = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \dfrac{b}{Z} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{b}{\cancel{Z}}}{\frac{a}{\cancel{Z}}} = \frac{b}{a}$$

Si θ n'est pas un angle remarquable, alors on calcule : $\tan(\theta) = \dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \dfrac{b}{a}$.

On peut alors en déduire θ, en utilisant la fonction Arctangente, mais en faisant très attention, car $\text{Arctan}(x) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$!!! En effet, lorsque la partie réelle de $\underline{Z}$ est négative, la mesure principale de son argument θ n'est pas dans l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, pour obtenir le bon résultat, il suffit donc d'ajouter ou de soustraire π à $\text{Arctan}\left(\frac{b}{a}\right)$

A retenir

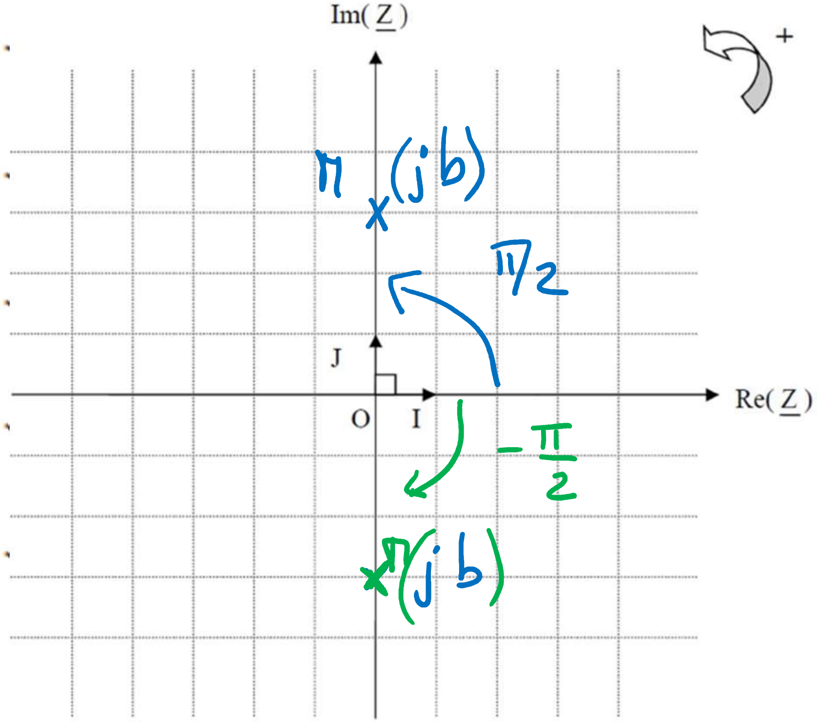
Soit $\underline{Z} = a + j.b$ un nombre complexe non nul, tel que $a \neq 0$.

$$\arg(\underline{Z}) = \begin{cases} \text{Arctan}\left(\dfrac{b}{a}\right) & \text{si } a > 0 \\ \text{Arctan}\left(\dfrac{b}{a}\right) \pm \pi & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Page 15 chapitre 2

Remarque : Que se passe-t-il si a = 0 ?

$$\underline{Z} = jb \quad \text{alors} \quad \arg(\underline{Z}) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \text{ si } b > 0 \\ -\frac{\pi}{2} \text{ si } b < 0 \end{cases}$$



Page 9 chapitre 2

Partie B : Les différentes écritures d'un nombre complexe

I. Définitions

$$\underline{Z} = x + j.y \text{ où } x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R} \text{ et } j^2 = -1$$

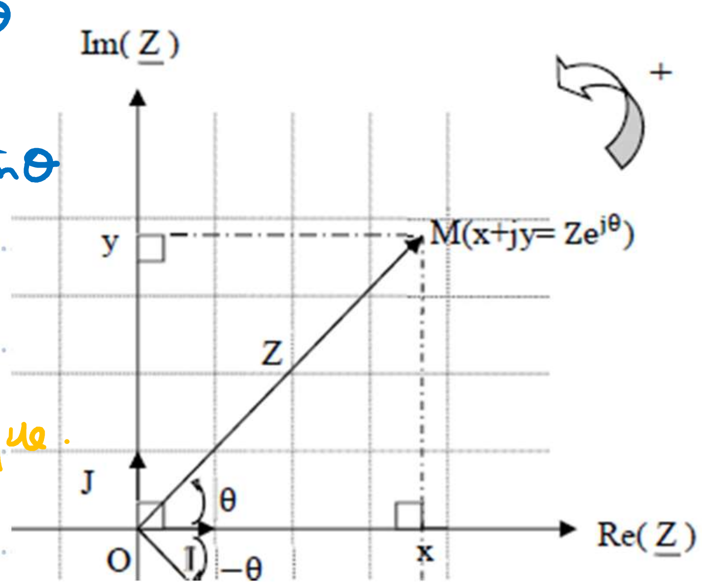
x est la partie réelle de $\underline{Z}$
On note : $x = \mathcal{R}e(\underline{Z})$

y est la partie imaginaire de $\underline{Z}$
On note : $y = \mathrm{Im}(\underline{Z})$

Le module de $\underline{Z}$ est noté Z ou encore $|\underline{Z}|$, c'est la distance de O à M, donc $|\underline{Z}| = Z = \sqrt{x^2 + y^2}$

L'argument de $\underline{Z}$ est noté $\arg(\underline{Z})$, c'est la mesure en radians de l'angle de vecteur orienté $(\vec{OI}, \vec{OM})$, déterminée à $2k\pi$ près ($k \in \mathbb{Z}$). On note $\theta = \arg(\underline{Z})$, on a alors :

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{x}{Z} = \dfrac{\text{partie réelle de } \underline{Z}}{\text{module de } \underline{Z}} = \dfrac{\mathrm{Re}(\underline{Z})}{Z} \iff x = Z.\cos\theta \\[2ex] \sin(\theta) = \dfrac{y}{Z} = \dfrac{\text{partie imaginaire de } \underline{Z}}{\text{module de } \underline{Z}} = \dfrac{\mathrm{Im}(\underline{Z})}{Z} \iff y = Z.\sin\theta \end{cases} \quad \text{si } Z \neq 0.$$



algébrique / cartésienne.

$$\underline{Z} = x + jy = Z\cos\theta + jZ\sin\theta$$

$$= Z(\boxed{\cos\theta + j\sin\theta}) \longleftarrow \text{trigonométrique.}$$

$$= Z.\boxed{e^{j\theta}} \quad \text{EULER} \quad = [Z ; \theta]$$

exponentielle. polaire

Notes

Page 9 chapitre 2

Forme algébrique de $\underline{Z}$: (coordonnées cartésiennes)

$\underline{Z} = x + j.y$

Forme trigonométrique de $\underline{Z}$: (coordonnées polaires)

module

argument en ° ou rad.

Polaire

$\underline{Z} = Z.\cos(\theta) + j.Z.\sin(\theta) = Z.(\cos(\theta) + j.\sin(\theta))$ aussi noté : $\underline{Z} = [Z , \theta]$

Forme exponentielle, géométrique ou polaire : Euler a noté $\boxed{e^{j\theta} = \cos(\theta) + j.\sin(\theta)}$

$\underline{Z} = Z.e^{j.\theta}$

Voir page 19

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

Page 19 chapitre 2

algébrique

* $z_1 = \underbrace{-1}_{<0} + j$ $\qquad Re(z_1) = -1 \qquad Im(z_1) = 1$

module de z_1 = $\quad Z_1 = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

argument de z_1 : $\quad \theta_1 = \text{Arctan}\left(\frac{1}{-1}\right) + \frac{4\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}$

écritures : $\underset{\text{polaire}}{\overset{\text{exponentielle}}{z_1}} = Z_1 . e^{j\theta_1} = \sqrt{2} . e^{j\frac{3\pi}{4}} = \sqrt{2} . e^{\frac{3j\pi}{4}}$

Vérification $\quad \sqrt{2} . \left(\cos\frac{3\pi}{4} + j \sin\frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$= -1 + j$

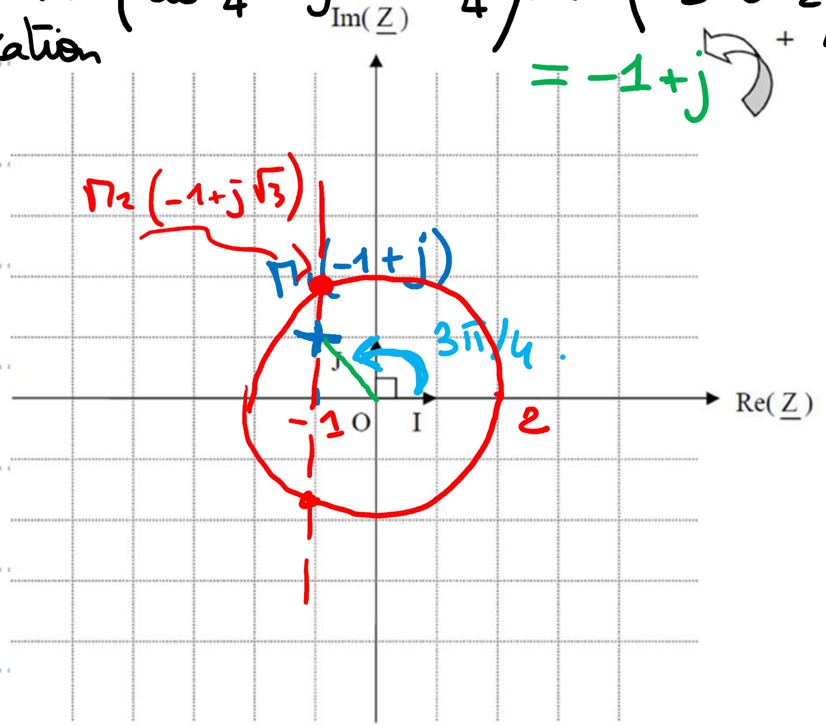
$$z_1 = \left[\sqrt{2} ; \frac{3\pi}{4}\right] = \left[\sqrt{2} ; 135°\right]$$

* $z_2 = \underbrace{\left[2 ; \frac{2\pi}{3}\right]}_{\text{polaire}} = 2 . e^{j\frac{2\pi}{3}} = 2 e^{2j\pi/3}$ exponentielle.

$Z_2 = 2 \qquad \arg(z_2) = \frac{2\pi}{3}$

$$z_2 = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + j \sin\frac{2\pi}{3}\right) = 2\left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$z_2 = \underbrace{-1 + j\sqrt{3}}_{\text{algébrique}}$



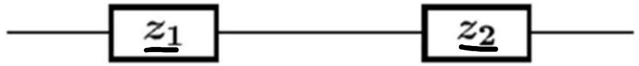
Page 17 chapitre 2

Opérations sur les nombres complexes

III. Application au GEII

Soient les deux nombres complexes : $\underline{z_1} = \mathbf{1} + \boldsymbol{j3}$ et $\underline{z_2} = \mathbf{2} + \boldsymbol{j4}$.
Calculer le module, l'argument, la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes suivants :

1. $\underline{z_1} + \underline{z_2}$ En génie électrique, ce calcul correspond à calculer l'impédance équivalente de deux impédances montées en série ($\underline{z_{eq}} = \underline{z_1} + \underline{z_2}$).



$\underline{z_{eq}} = \underline{z_1} + \underline{z_2} = 1 + 3j + 2 + 4j = 3 + 7j$

$z_{eq} = \sqrt{3^2 + 7^2} = \sqrt{9+49} = \sqrt{58}$

$\arg(\underline{z_{eq}}) = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(\underline{z_{eq}})}{\mathrm{Re}(\underline{z_{eq}})}\right) = \arctan\left(\frac{7}{3}\right)$

$\mathrm{Re}(\underline{z_{eq}}) = 3$

$\mathrm{Im}(\underline{z_{eq}}) = 7$

\+ écriture algébrique.

Notes

Résumé de cours:

Coord. Cartésiennes: $\left\{ \begin{array}{l} \underline{z} = x + jy \quad j^2 = -1 \quad x, y \in \mathbb{R}. \\ Re(\underline{z}) = x \quad Im(\underline{z}) = y \end{array} \right.$

Coord. polaires: $\left\{ \begin{array}{l} \underline{Z = |x + jy|} = \sqrt{x^2+y^2} \\ \underline{\arg(\underline{z}) = \theta} \text{ tel que } \left\{ \begin{array}{l} \cos\theta = \frac{x}{Z} \\ \sin\theta = \frac{y}{Z} \end{array} \right. \quad Z \neq 0 \\ \arg(\underline{z}) = \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right) \text{ si } x > 0 \\ \mathrm{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right) \underline{\pm\pi} \text{ si } \underline{x < 0} \end{array} \right. \end{array} \right.$

Ecriture algébrique: $\underline{z} = x + jy$

exponentielle: $\underline{z} = Z e^{j\theta}$ $\quad Z > 0$

$\boxed{e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta}$ (EULER)

polaire: $\underline{z} = [Z; \theta]$

$\underline{z} = Z(\cos\theta + j\sin\theta)$

$= \underline{Z\cos\theta} + jZ\sin\theta$

$\underline{z} = -7e^{j\pi/3}$

$e^{j\pi} = \underbrace{\cos\pi}_{-1} + j\underbrace{\sin\pi}_{0}$

$\underline{z} = 7e^{j\pi}e^{j\pi/3}$

2) Produit de deux nombres complexes (Comme $e^a.e^b = e^{a+b}$ il est préférable d'utiliser l'écriture exponentielle/polaire le plus possible)

Page 16 chapitre 2

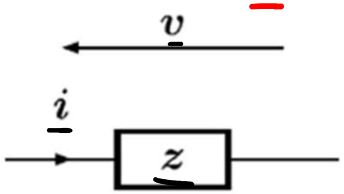
$$\underline{Z}.\underline{Z'} = \boxed{Ze^{j.\theta}.Z'e^{j.\theta'}} = Z.Z'e^{j(\theta+\theta')}$$ on en déduit que :

$$\mathbf{arg(\underline{Z}.\underline{Z'}) = arg(\underline{Z}) + arg(\underline{Z}') + 2k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}\ ,\ et\ |\underline{Z}.\underline{Z}'| = |\underline{Z}|.|\underline{Z}'|}$$

$$\boxed{\mathbf{[Z\,,\theta] \times [Z'\,,\theta'] = [ZZ', \theta + \theta']}}$$

Le module d'un produit de nombres complexes est le produit des modules, l'argument d'un produit de nombres complexes est la somme des arguments (à 2kπ près)

2. $z_1.z_2$ Cela correspond par exemple à calculer en régime sinusoïdal établi, la tension complexe $\underline{v}$ aux bornes d'une impédance $\underline{z} = 1 + 3j$ traversée par un courant $\underline{i} = 2 + 4j$ ($\underline{v} = \underline{z}.\underline{i}$).



Page 17&18 chapitre 2

Méth 1

$\underline{v} = \underline{z}.\underline{i} = (1+3j)(2+4j)$

$\boxed{\text{Produit} \rightarrow \text{Exponentielle ou polaire}}$

$Re(z) = Z.\cos\theta$

$Im(z) = Z.\sin\theta.$

$\underline{v} = -10 + j10$

Méth 2

$\underline{v} = \underline{z}.\underline{i}\ (1+3j)(2+4j)$

* $v = z.i = \boxed{|1+3j|.|2+4j|}$

$v = \sqrt{10} \times \underbrace{\sqrt{20}}_{\sqrt{2\times 10} = \sqrt{2}\sqrt{10}} = 10.\sqrt{2}$

θ

* $\arg(\underline{v}) = \arg(\underline{z}.\underline{i}) = \boxed{\arg(\underline{z}) + \arg(\underline{i})}$

$= \arctan\left(\frac{3}{1}\right) + \arctan\left(\frac{4}{2}\right)$

$\arg(\underline{v}) = \arctan(3) + \arctan(2)$

* $Re(\underline{v}) = v\cos\theta = 10\sqrt{2}.\cos(\arctan 3 + \arctan 2) = -10$

* $Im(\underline{v}) = v.\sin\theta = 10\sqrt{2}.\sin(\arctan 3 + \arctan 2) = 10$

3. $\frac{\underline{z_1}}{\underline{z_2}}$. Cela correspond à calculer le courant $\underline{i}$ qui traverse une impédance $\underline{z} = \mathbf{2 + 4j}$ ayant une tension $\underline{v} = \mathbf{1 + 3j}$ à ses bornes $\left(\underline{i} = \frac{\underline{v}}{\underline{z}}\right)$.

Page 18 chapitre 2

Méth 1 :

$$\underline{i} = \frac{\underline{v}}{\underline{z}} = \frac{1+3j}{2+4j} \times \frac{2-4j}{2-4j} = \frac{2-4j+6j-12j^2}{2^2+4^2}$$

$$\boxed{(a+jb)(a-jb)} = a^2 - (jb)^2 = a^2 - \underbrace{j^2}_{-1} b^2 = \boxed{a^2+b^2}$$

$$\underline{i} = \frac{14+2j}{20} = \frac{2(7+j)}{2 \cdot 10} = \frac{7+j}{10} = \frac{7}{10} + j\frac{1}{10}$$

$$Re(\underline{i}) = \frac{7}{10} > 0 \qquad Im(\underline{i}) = \frac{1}{10}$$

$$i = \sqrt{\frac{49}{100} + \frac{1}{100}} = \sqrt{\frac{50}{100}} = \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{100}} = \frac{\sqrt{2 \times 25}}{10} = \frac{5\sqrt{2}}{10} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\arg(\underline{i}) = \arctan\left(\frac{Im(\underline{i})}{Re(\underline{i})}\right) = \arctan\left(\frac{\frac{1}{10}}{\frac{7}{10}}\right) = \arctan\left(\frac{1}{7}\right)$$

$$\underline{i} = \frac{\underline{v}}{\underline{z}} \text{ donc } \boxed{i = \frac{v}{z}} = \frac{|1+3j|}{|2+4j|}$$

$$i = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{20}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\arg(\underline{i}) = \boxed{\arg\left(\frac{\underline{v}}{\underline{z}}\right) = \arg(\underline{v}) - \arg(\underline{z})}$$
$$= \arg(1+3j) - \arg(2+4j)$$

$$\arg(\underline{i}) = \arctan(3) - \arctan(2)$$

$$Re(\underline{i}) = i \cdot \cos(\arg(\underline{i})) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos(\arctan 3 - \arctan 2)$$
$$= 0{,}7$$
$$Im(\underline{i}) = i \cdot \sin(\arg(\underline{i}))$$
$$= 0{,}1$$

Page 16 chapitre 2

3) Quotient (Rappel : $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$ on utilisera l'écriture exponentielle/polaire si possible)

$$\frac{\underline{Z}}{\underline{Z'}} = \frac{Ze^{j.\theta}}{Z'e^{j.\theta'}} = \frac{Z}{Z'}e^{j(\theta-\theta')}$$ on en déduit que :

$$\arg\left(\frac{\underline{Z}}{\underline{Z'}}\right) = \arg(\underline{Z}) - \arg(\underline{Z}') + 2k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}\ ,\ \text{et}\ \left|\frac{\underline{Z}}{\underline{Z}'}\right| = \frac{|\underline{Z}|}{|\underline{Z}'|}$$

$$\frac{x^n}{x^p} = x^{n-p}$$

$$\frac{[Z,\theta]}{[Z',\theta']} = [\frac{Z}{Z'}, \theta - \theta']$$

Le module d'un quotient de nombres complexes est le quotient des modules, l'argument d'un quotient de nombres complexes est la soustraction des arguments (à 2kπ près)

Page 16 chapitre 2

Cas particulier : (Rappel : $\frac{1}{e^a} = e^{-a}$) $\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{Z.e^{j.\theta}} = \frac{1}{Z}.e^{-j.\theta}$ avec $\underline{Z} \neq 0$. On en déduit que :

$$\arg\left(\frac{1}{\underline{Z}}\right) = -\arg(\underline{Z}) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\ \text{, et } \left|\frac{1}{\underline{Z}}\right| = \frac{1}{|\underline{Z}|} \qquad \frac{1}{[Z,\theta]} = [\frac{1}{Z}, -\theta]$$

Le module de l'inverse d'un nombre complexe est l'inverse de son module, l'argument de l'inverse d'un nombre complexe est l'opposé de son argument (à 2kπ près)

Exercice 1

Page 21 chapitre 2

Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :

$Z_1 = 4 + 3j$; $Z_2 = -5 + 3j$; $Z_3 = \sqrt{7} - j\sqrt{2}$

$Z_4 = (-\sqrt{3} + j).(1 + j)$; $Z_5 = \frac{-\sqrt{3}+j}{1+j}$; $Z_6 = (-\sqrt{3} + j)^{10}$; $Z_7 = \frac{1}{1+j}$

$3^2 = 9$

$\sqrt{3}^2 = 3$.

(*) $Z_4 = (-\sqrt{3}+j)\cdot(1+j)$

$|Z_4| = |-\sqrt{3}+j|.|1+j| = \sqrt{3+1} \cdot \sqrt{1+1} = 2\sqrt{2}$

$\arg(Z_4) = \arg(\underbrace{-\sqrt{3}}_{<0}+j) + \arg(1+j) = \arctan\left(\frac{1}{-\sqrt{3}}\right) + \pi + \arctan(1) = -\frac{2\times\pi}{2\times 6} + \frac{12\times\pi}{12} + \frac{\pi\times 3}{4\times 3}$

$\arg(Z_4) = \frac{-2\pi + 12\pi + 3\pi}{12} = \frac{13\pi}{12}$

(*) $Z_5 = \frac{-\sqrt{3}+j}{1+j}$

$|Z_5| = \frac{|-\sqrt{3}+j|}{|1+j|} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$; $\arg(Z_5) = \arg(-\sqrt{3}+j) - \arg(1+j) = -\frac{2\times\pi}{2\times 6} + \frac{\pi\times 12}{12} - \frac{\pi\times 3}{4\times 3}$

$\arg(Z_5) = \frac{-2\pi + 12\pi - 3\pi}{12} = \frac{7\pi}{12}$.