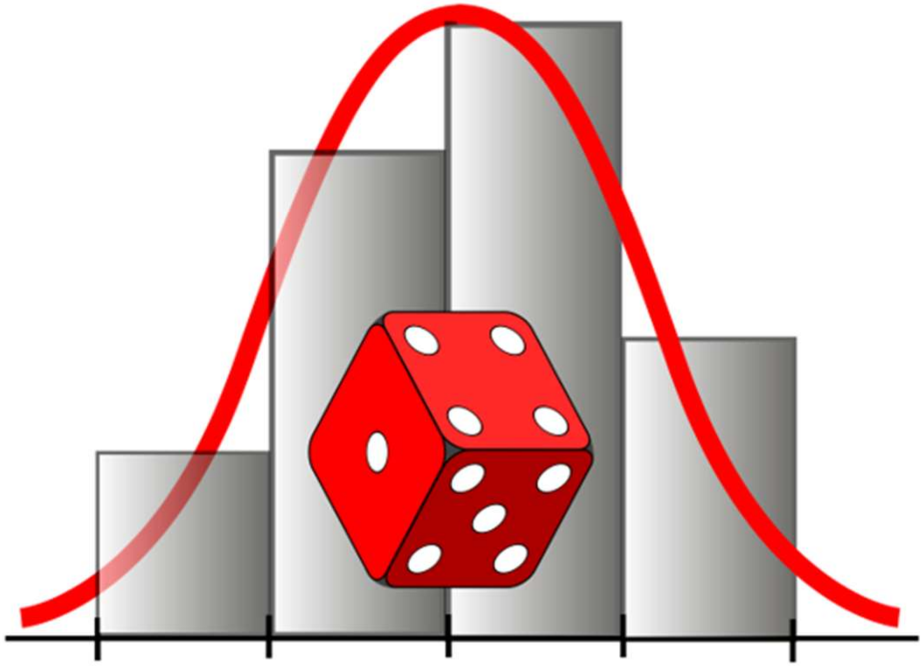
Probabilité

Correction du TD

Chapitre 1 : Variables aléatoires discrètes et continues



Exercice 13 :

La densité de probabilité d'une variable aléatoire réelle X est définie par :

$$f(x)=\begin{cases}\lambda.\,e^{-4x+1} & \text{si } x \geq 0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

1) Déterminer la valeur de λ
2) Calculer la probabilité $p(X\geq 5)$
3) Déterminer x pour que $p(X<x) > 1/2$
4) Déterminer E(X) et V(X).

1) On calcule λ afin que f soit bien une densité de probabilité :

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 1 \iff \int_0^{+\infty} \lambda.\,e^{-4x+1}\,dx = 1 \iff \lim_{T\to+\infty} \lambda.\int_0^T e^{-4x+1}\,dx = 1$$

$$\Longleftrightarrow \lim_{T\to+\infty} \lambda \left[\frac{e^{-4x+1}}{-4}\right]_0^T = 1 \Longleftrightarrow -\frac{\lambda}{4}\times \underbrace{\lim_{T\to+\infty}\left(e^{-4T+1}-1\right)}_{=-1} = 1$$

$$\Longleftrightarrow \frac{\lambda}{4} = 1$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{\lambda = 4}$$

2) $$P(X\geqslant 5) = \int_5^{+\infty} 4.e^{-4x+1}\,dx = 4.\lim_{T\to+\infty}\left[\frac{e^{-4x+1}}{-4}\right]_5^T = e^{-19}$$

3) On cherche x pour que $P(X<x) > 0,5 \Longleftrightarrow \int_{-\infty}^{x} 4\,e^{-4t+1}\,dt > 0,5 \Longleftrightarrow \int_0^x e^{-4t+1}\,dt > 0,125$

$$\Longleftrightarrow \left[\frac{e^{-4t+1}}{-4}\right]_0^x > 0,125 \Longleftrightarrow \frac{1}{4}\left(1-e^{-4x+1}\right) > 0,125 \Longleftrightarrow 1-e^{-4x+1} > 0,5$$

$$\Longleftrightarrow e^{-4x+1} < 0,5 \Longleftrightarrow -4x+1 \overset{\ln\nearrow}{<} \ln 0,5 \Longleftrightarrow -4x < \ln(0,5)-1 \Longleftrightarrow x > \frac{1-\ln(0,5)}{4} \simeq 3,0794$$

$* \quad E(x) = \int_{\mathbb{R}} x f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} 4x e^{-4x+1}\,dx = \lim_{T\to+\infty} \int_0^T 4x e^{-4x+1}\,dx$

IPP: $U = 4x \Rightarrow U' = 4$

$V' = e^{-4x+1} \Rightarrow V = \dfrac{e^{-4x+1}}{-4}$

$E(x) = \lim_{T\to+\infty} \left\{ \left[-x e^{-4x+1}\right]_0^T + \int_0^T e^{-4x+1}\,dx \right\}$

$E(x) = \lim_{T\to+\infty} \left\{ -T e^{-4T+1} + \dfrac{e^{-4T+1}}{-4} - \dfrac{e}{-4} \right\} = \boxed{\dfrac{e}{4} = E(x)}$

$* \quad V(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$

$E(x^2) = \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} 4x^2 e^{-4x+1}\,dx = \lim_{T\to+\infty} \int_0^T 4x^2 e^{-4x+1}\,dx$

IPP $\begin{cases} U = x^2 \Rightarrow U' = 2x \\ V' = 4e^{-4x+1} \Rightarrow V = -e^{-4x+1} \end{cases}$

$E(x^2) = \lim_{T\to+\infty} \left\{ \left[-x^2 e^{-4x+1}\right]_0^T + 2\int_0^T x e^{-4x+1}\,dx \right\} = \dfrac{e}{8}$

$V(x) = \dfrac{e}{8} - \dfrac{e^2}{16}$

$V(x) = \dfrac{e}{16}(2-e)$

Exercice 15 :

Une série des tests sur la durée de vie d'un composant électronique a donné les résultats suivants :

X	0 à 0.5	0.5 à 1	1 à 1.5	1.5 à 2	2 à 2.5	2.5 à 3	3 à 3.5	3.5 à 4	4 à 4.5
n	1	4	8	14	24	38	58	86	70
X	4.5 à 5	5 à 5.5	5.5 à 6	6 à 6.5	6.5 à 7	7 à 7.5	7.5 à 8	8 à 9.5	9.5 à 10
n	55	43	33	25	19	15	12	10	5

X = durée de vie en années décimalisées ;
N = effectif par classe ; $N = \sum n_i = 520$.

1) Calculer la moyenne m et l'écart-type de cette série statistique. Les résultats seront donnés à 10^{-2} près.
2) On admet que les durées de vie x correspondent à une cariable aléatoire X qui suit une loi normale dont les paramètres sont les résultats de la question 1.
   a) Calculer la probabilité pour qu'un composant dure au moins 3 ans.
   b) Calculer la durée de vie minimale qu'un composant peut atteindre avec une probabilité 0.95.
   c) Déterminer l'intervalle centré sur m à l'intérieur duquel se trouve la durée de vie d'un composant avec une probabilité 0.90.

1) $m = \dfrac{\sum_i n_i c_i}{N}$ où c_i est le centre de chaque intervalle.

$m = \dfrac{0,25\times1+0,75\times4+\dots+9,75\times5}{520} = \dfrac{2304}{520} \simeq 4,43$

Variance $= E(x^2) - (E(x))^2$

$E(x^2) = \dfrac{\sum_i n_i c_i^2}{N} = \dfrac{0,25^2\times1+\dots+9,75^2\times5}{520}$

$E(x^2) = \dfrac{11662,5}{520}$

$V(x) = \dfrac{11662,5}{520} - \left(\dfrac{2304}{520}\right)^2 \simeq 2,80$

$\sigma(x) \simeq 1,67$.

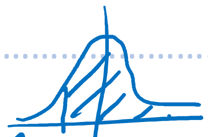
2) $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(4,43 ; 1,67)$

a) $P(x \geq 3) = P\left(Y \geq \dfrac{3-4,43}{1,67}\right)$ où

$Y = \dfrac{X-4,43}{1,67} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0;1)$

$P(x \geq 3) = P(Y \geq -0,86) = 1 - P(Y < 0,86)$

$\simeq 1 - 0,8051 = 0,1949$.



-0,51

b) $P(X \geq x) = 0,95$

$\Longrightarrow P\left(Y \geq \dfrac{x-4,43}{1,67}\right) = 0,95$

$Y \sim \mathcal{N}(0;1)$. $\quad p\left(Y \geq \dfrac{x-4{,}43}{1{,}67}\right) = 0{,}95 = p\left(Y \leq \dfrac{4{,}43-x}{1{,}67}\right)$

Lecture du tableau : $\dfrac{4{,}43-x}{1{,}67} \simeq 1{,}65$.

$\iff x \simeq 4{,}43 - 1{,}67 \times 1{,}65$

$\iff x \simeq 1{,}6745$. est la durée de vie minimale cherchée

ⓒ $\quad p(m-h \leq X \leq m+h) = 0{,}90$.

h ?? $\quad p\left(\dfrac{4{,}43-h-4{,}43}{1{,}67} \leq Y \leq \dfrac{4{,}43+h-4{,}43}{1{,}67}\right) = 0{,}90$.

$\iff p\left(-\dfrac{h}{1{,}67} \leq Y \leq \dfrac{h}{1{,}67}\right) = 0{,}90 \iff 2 \cdot p\left(0 \leq Y \leq \dfrac{h}{1{,}67}\right) = 0{,}90$

$\iff 2 \cdot \left(p\left(Y \leq \dfrac{h}{1{,}67}\right) - 0{,}5\right) = 0{,}90$

$\iff p\left(Y \leq \dfrac{h}{1{,}67}\right) = 0{,}95 \iff \dfrac{h}{1{,}67} = 1{,}65 \iff \boxed{h = 2{,}76}$

Exercice 16 :

1) Une variable aléatoire X suit une loi normale de paramètres m et σ. Retrouver les paramètres m et σ tels que : $p(X > 80.6) = 0.0228$ et $p(X \leq 57.2) = 0.1587$. (Les valeurs demandées seront exactes avec au plus 1 chiffre après la virgule)

2) On admet que dans l'entreprise SAROULE la probabilité qu'un appel téléphonique, choisi au hasard, soit suivi d'une commande, est 0.065. Le nombre d'appels reçus dans une journée est 1000. (On suppose qu'il y a indépendance entre les issues des différents appels).

On note Y, la variable aléatoire qui, à chaque jour, associe le nombre d'appels reçus suivis d'une commande. Expliquer pourquoi la loi suivie par Y est binomiale, quels en sont les paramètres ?

3) a) On admet que l'on peut approcher la loi de Y par une loi normale. Quels en sont les paramètres ?

b) On désigne par Y' une variable qui suit cette loi normale. Calculer, en utilisant l'approximation précédente, la probabilité $p(50 \leq Y \leq 70)$; on effectuera **deux calculs** : l'un sans correction de continuité, l'autre avec correction de continuité, et on donnera les résultats à 10^{-2} près , en prenant les valeurs approchées figurant dans la table.

c) Déterminer le nombre entier le plus proche a tel que : $P(64.5 - a \leq Y' \leq 65.5 + a) = 0.60$

1 $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(m ; \sigma)$

$p(X > 80{,}6) = 0{,}0228$ et $p(X \leq 57{,}2) = 0{,}1587$ (*)

Soit $Y = \frac{X-m}{\sigma} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0;1)$

(*) $\iff p\left(Y > \underbrace{\frac{80{,}6-m}{\sigma}}_{>0}\right) = 0{,}0228$ $<0{,}5$ et $p\left(Y \leq \underbrace{\frac{57{,}2-m}{\sigma}}_{<0}\right) = 0{,}1587$ $<0{,}5$.

(*) $\begin{cases} 1 - p\left(Y < \frac{80{,}6-m}{\sigma}\right) = 0{,}0228 \\ 1 - p\left(Y < \frac{m-57{,}2}{\sigma}\right) = 0{,}1587 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} p\left(Y < \frac{80{,}6-m}{\sigma}\right) = 0{,}9772 \\ p\left(Y < \frac{m-57{,}2}{\sigma}\right) = 0{,}8413 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} \frac{80{,}6-m}{\sigma} = 2 \quad \text{(lecture Tableau)} \\ \frac{m-57{,}2}{\sigma} = 1 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} 3\sigma = 80{,}6 - 57{,}2 \iff \sigma \simeq 7{,}8 \\ m = 7{,}8 + 57{,}2 \iff m \simeq 65. \end{cases}$

② Soit $\mathcal{E}$: l'expérience " Appeler qqu'un "

$$\Omega = \{ \underbrace{\text{Appel suivi d'1 commande}}_{C} \; ; \; \bar{C} \} \qquad p(C) = 0{,}065$$

On répète, de façon indépendante, 1000 fois l'expérience $\mathcal{E}$.

Y : " nbre d'appels suivis d'une commande "

Alors $Y \rightsquigarrow \mathcal{B}(1000 ; 0{,}065)$

③ ⓐ $\mathcal{B}(1000 ; 0{,}065)$ a pour moyenne : $E(Y) = 1000 \times 0{,}065 = 65$

et écart type : $\sigma(Y) = \sqrt{1000 \times 0{,}065 \times 0{,}935} \simeq 7{,}8$

③ ⓑ $Y' \rightsquigarrow \mathcal{N}(65 ; 7{,}8)$ Soit $T = \dfrac{Y-65}{7{,}8} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0;1)$

Sans correction de C^{te} :

$$P(50 \leq Y' \leq 70) = P(-1{,}92 \leq T \leq 0{,}64) \quad p(T \geq 1{,}92)$$

$$= P(T \leq 0{,}64) - \underbrace{P(T \leq -1{,}92)}_{p(T \geq 1{,}92)} = \overset{0{,}7389}{P(T \leq 0{,}64)} - (1 - \overset{0{,}9726}{P(T \leq 1{,}92)}) \simeq 0{,}7115$$

Avec correction de la cté :

$$p(49{,}5 \leq Y' \leq 70{,}5) = p(-1{,}99 \leq T \leq 0{,}71) = p(T \leq 0{,}71) - \underbrace{p(T \leq -1{,}99)}^{P(T \geqslant 1{,}99)}$$

$$= p(T \leq 0{,}71) - (1 - p(T \leq 1{,}99))$$

$$= 0{,}7611 - (1 - 0{,}9767)$$

$$p(49{,}5 \leq Y' \leq 70{,}5) \simeq 0{,}7378.$$

Les résultats sont égaux à 10^{-1} près.

c) On cherche a, tel que : $p(64{,}5 - a \leq Y' \leq 65{,}5 + a) = 0{,}60$

$$\Longleftrightarrow P\left(\frac{-0{,}5-a}{7{,}8} \leq T \leq \frac{0{,}5+a}{7{,}8}\right) = 0{,}6$$

$$\Longleftrightarrow 2 \times p\left(0 \leq T \leq \frac{0{,}5+a}{7{,}8}\right) = 0{,}6$$

$$\Longleftrightarrow P\left(T \leq \frac{0{,}5+a}{7{,}8}\right) = 0{,}3 + 0{,}5 = 0{,}8 \overset{\text{Tableau}}{\Longleftrightarrow} \frac{0{,}5+a}{7{,}8} \simeq 0{,}84 \Longleftrightarrow a = 6{,}05$$

Sujet 2017 - Réponses 8A-F 8B-V 8C-F 8D-V 8E-V

Question 8

On étudie la transmission d'un bit (une information binaire de valeur 0 ou 1) à travers trois relais successifs notés I_1, I_2 et I_3. Un bit de valeur 1 est envoyé à I_1 qui le transmet à I_2 et ainsi de suite. Les relais I_1, I_2 et I_3 ne sont pas fiables : ils peuvent se tromper de manière indépendante. On fait l'hypothèse que chacun renvoie l'information qu'il reçoit du relais précédent avec la probabilité 4/5 et l'information contraire avec la probabilité 1/5. Ainsi, deux erreurs successives se neutralisent.

$$\boxed{\text{Bit émis } 1} \to I_1 \to I_2 \to I_3 \to \boxed{\text{Bit reçu } ?}$$

Pour tout $k \in \{1, 2, 3\}$ on note E_k l'évènement « I_k transmet un bit de valeur 1 » et $p_k = P(E_k)$. De plus, on pose $p_0 = 1$. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de relais qui transmettent un bit de valeur 1.

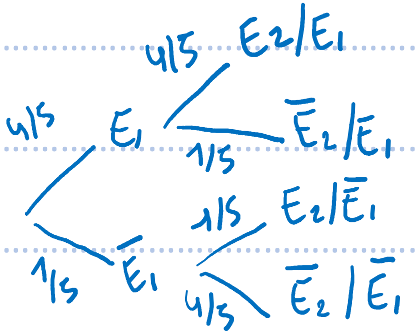
(A) La variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = \frac{4}{5}$.

(B) Pour tout $k \in \{2, 3\}$, on a $P(E_k \mid E_{k-1}) = \frac{4}{5}$.

(C) $P(E_1 \mid E_2) = \frac{15}{16}$.

(D) Pour tout $k \in \{1, 2, 3\}$, $p_k = \frac{3}{5}p_{k-1} + \frac{1}{5}$.

(E) On a $P(X = 0) = \frac{16}{125}$.



(A) FAUX X ne peut pas suivre une loi binômiale car les 3 expériences ne sont pas indépendantes, selon que le relais reçoive 0 ou 1 du précédent.

(B) VRAI $k \in [\![2;3]\!]$

$P(E_k/E_{k-1})$ = probabilité que I_k transmette "1" sachant que E_{k-1} lui a transmis "1" (même informatio

donc $P(E_k/E_{k-1}) = \frac{4}{5}$ d'après l'énoncé

(C) FAUX BAYES

$$P(E_1/E_2) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)} = \frac{P(E_2/E_1) \times P(E_1)}{P(E_2/E_1) \times P(E_1) + P(E_2/\bar{E}_1) \cdot P(\bar{E}_1)}$$

$$= \frac{\frac{16}{25}}{\frac{16}{25} + \frac{1}{25}} = \frac{16}{17}$$

(D) VRAI

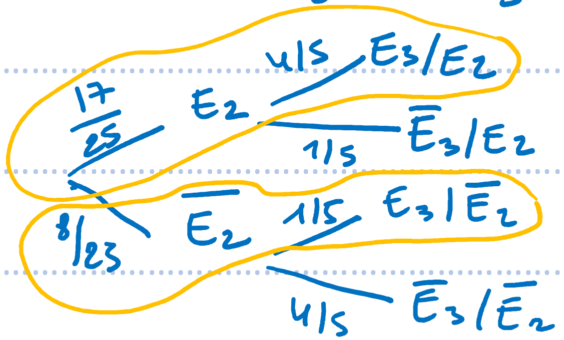
$p_k = P(E_k)$

$k \in [\![1;3]\!]$ $\qquad p_k = \frac{3}{5}p_{k-1} + \frac{1}{5}$??

$k=1$: $p_1 = \frac{3}{5}p_0 + \frac{1}{5} = \frac{3}{5} + \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$ est vrai car $P(E_1) = \frac{4}{5}$ voir Arbre et énoncé

$k=2$: $p_2 = \frac{3}{5}p_1 + \frac{1}{5} = \frac{3}{5} \times \frac{4}{5} + \frac{1}{5} = \frac{17}{25}$ est vrai car d'après la formule de probabilité totale : $P(E_2) = P(E_2|E_1)P(E_1) + P(E_2|\overline{E_1}).P(\overline{E_1}) = \frac{16}{25} + \frac{1}{25} = \frac{17}{25}$ (déjà vu précédemment)

$k=3$: $p_3 = \frac{3}{5}p_2 + \frac{1}{5} = \frac{3}{5} \times \frac{17}{25} + \frac{1}{5} = \frac{76}{125}$



D'après la formule de probabilité totale :

$$p(E_3) = p(E_3/E_2).p(E_2) + p(E_3/\overline{E_2}).p(\overline{E_2})$$

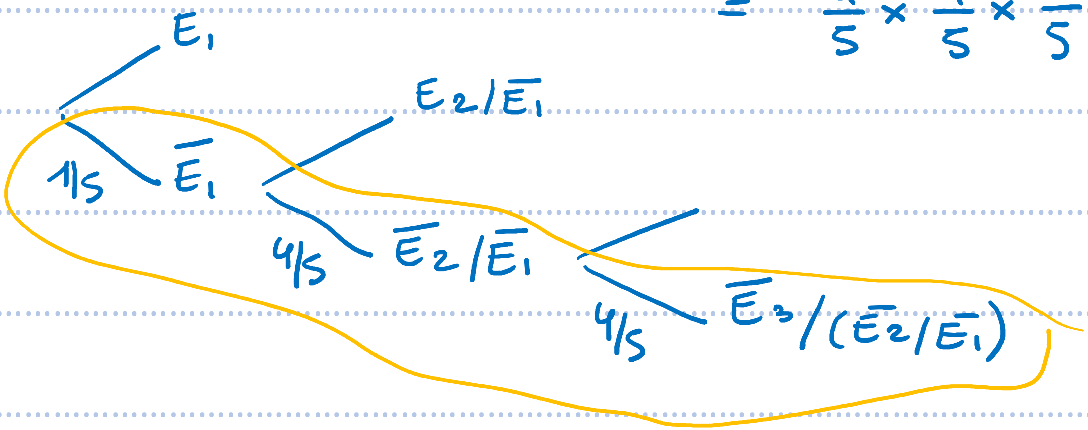
$$= \frac{68}{125} + \frac{8}{125} = \frac{76}{125}.$$

(E) VRAI

$$p(X=0) = p(\bar{E}_1 \cap \bar{E}_2 \cap \bar{E}_3) = \underbrace{p(\bar{E}_3 / \bar{E}_1 \cap \bar{E}_2)} \times p(\bar{E}_1 \cap \bar{E}_2)$$

$$= \frac{4}{5} \times p(\bar{E}_2 / \bar{E}_1) \times p(\bar{E}_1)$$

$$= \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{1}{5}$$



avec l'arbre.

$$\frac{1}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{16}{125}.$$