

Correction DS1-S1 1APP

Ex 1
Notes

1) Ecrire sous forme algébrique le nombre complexe ci-dessous, en utilisant le conjugué :

$$Z = \frac{3+j}{2-j} \times \frac{2+j}{2+j} = \frac{(3+j)(2+j)}{2^2+1^2} = \frac{6+3j+2j+j^2}{5} = \frac{5+5j}{5} = \frac{5}{5} + \frac{5j}{5} = 1+j$$

2) En déduire la valeur exacte de l'angle : $\theta = \arctan(1/3) + \arctan(1/2)$

$$Z = \frac{3+j}{2-j} \dots \text{donc } \arg(Z) = \arctan\left(\frac{1}{3}\right) - \arctan\left(-\frac{1}{2}\right) \\ = \arctan\left(\frac{1}{3}\right) + \arctan\left(\frac{1}{2}\right) = \arg(1+j) = \frac{\pi}{4}$$

$$\textcircled{1} \quad Z = \frac{3+j}{2-j} \times \frac{2+j}{2+j} = \frac{6+3j+2j+j^2}{2^2+1^2} = \frac{5+5j}{5} = \frac{5(1+j)}{5} = 1+j$$

$$\textcircled{2} \quad \arg(Z) = \arg\left(\frac{3+j}{2-j}\right) = \arg(3+j) - \arg(2-j) = \arctan\left(\frac{1}{3}\right) - \arctan\left(-\frac{1}{2}\right) \\ = \arctan\left(\frac{1}{3}\right) + \arctan\left(\frac{1}{2}\right) \\ \left. \begin{array}{l} \text{d'après } \textcircled{1} \quad = \arg(1+j) = \arctan(1) = \pi/4 \end{array} \right\} \text{donc } \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{4}$$

1) Complétez le tableau ci-dessous :

Exercices et applications

Z	$\text{Re}(Z)$	$\text{Im}(Z)$	Z	$\text{Arg}(Z)$	Autre écriture	Z^* exponentielle et algébrique
$3e^{-j\frac{\pi}{6}}$	$3\cos(\frac{\pi}{6})$ $\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$3\sin(\frac{\pi}{6})$ $-\frac{3}{2}$	3	$-\frac{\pi}{6}$	algébrique $\frac{3\sqrt{3}}{2} - j\frac{3}{2}$	$3e^{j\frac{\pi}{6}}$ $\frac{3\sqrt{3}}{2} + j\frac{3}{2}$ ✓
$-1+j$	-1	1	$\frac{\sqrt{2}e^{j\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$ $\sqrt{2}$	$\arctan(\frac{1}{-1}) + \pi$ $\frac{3\pi}{4}$	exponentielle $\sqrt{2}e^{j\frac{3\pi}{4}}$	$-1-j$ $\sqrt{2}e^{-j\frac{3\pi}{4}}$ ✓
$5je^{j\frac{\pi}{4}}$	$-\frac{5\sqrt{2}}{2}$	$\frac{5\sqrt{2}}{2}$	5	$\frac{\pi}{4}$	exponentielle $5e^{j\frac{3\pi}{4}}$	$-\frac{5\sqrt{2}}{2} - j\frac{5\sqrt{2}}{2}$ $5e^{-j\frac{3\pi}{4}}$ ✓

2) Déterminer le module et un argument de : $Z = (j-1)^{2000}(1+j\sqrt{3})^{1000}$ Simplifier au maximum les résultats obtenus et en déduire l'écriture algébrique de Z .

module de $(j-1)^{2000} : \sqrt{1^2+1^2}^{2000} = \sqrt{2}^{2000} = (2^{\frac{1}{2}})^{2000} = 2^{1000}$ ✓

module de $(1+j\sqrt{3})^{1000} : \sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}^{1000} = 2^{1000}$ ✓

module de $Z : 2^{1000} \times 2^{1000} = 4^{1000}$ ✓

argument de $(j-1)^{2000} = 2000 \times \arctan(\frac{1}{-1}) + \pi = -499\pi$ ✓

argument de $(1+j\sqrt{3})^{1000} = 1000 \times \arctan(\frac{\sqrt{3}}{1}) = \frac{1000\pi}{3}$ ✓

Notes

DS1 de R1.04 ALT

$$\arg(Z) = 2000 \times \arctan\left(\frac{1}{-1}\right) + \pi + 1000 \times \arctan(\sqrt{3}) = -\frac{497}{3}\pi$$

$$\text{ainsi la nouvelle écriture est : } Z = \frac{4^{1000}}{2} + j \frac{\sqrt{3} 4^{1000}}{2}$$

$$\text{Re : } 4^{1000} \times \cos\left(-\frac{497\pi}{3}\right) = \frac{4^{1000}}{2} \quad \text{Im : } 4^{1000} \times \sin\left(-\frac{497\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3} 4^{1000}}{2}$$

$$Z = (j-1)^{2000} \times (1+j\sqrt{3})^{1000}$$

$$Z = |j-1|^{2000} \times |1+j\sqrt{3}|^{1000} = \sqrt{2}^{2000} \times 2^{1000} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2000} \times 2^{1000} = 4^{1000}$$

$$(a \times b)^n = a^n b^n$$

$$\arg(Z) = 2000 \arg(j-1) + 1000 \arg(1+j\sqrt{3})$$

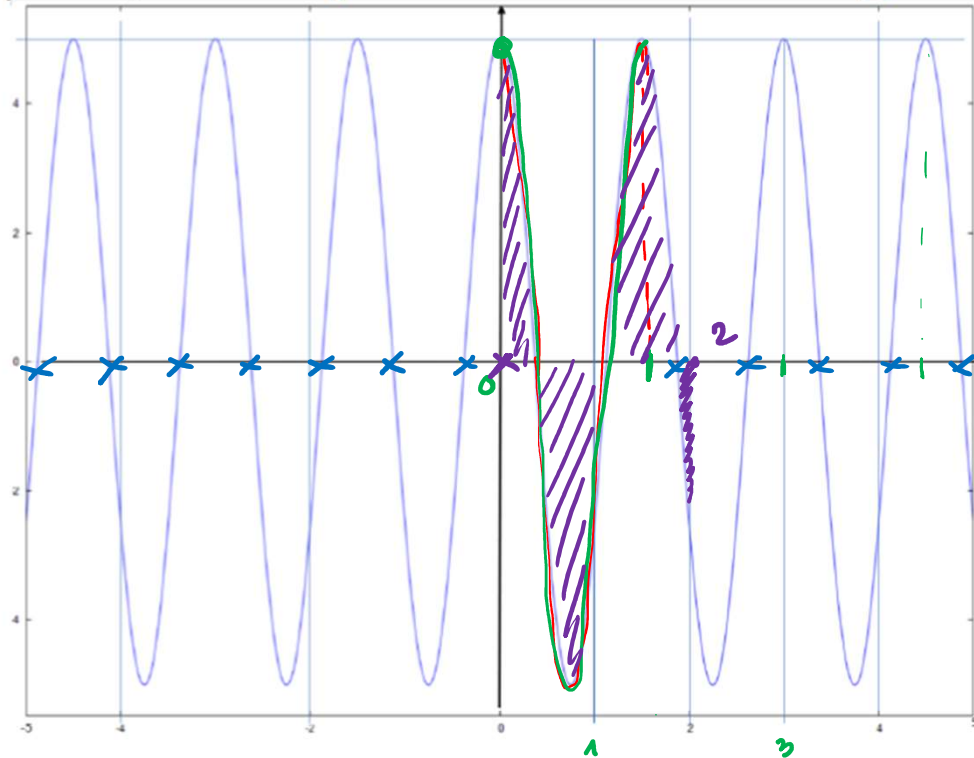
$$= 2000 \left(\arctan\left(\frac{1}{-1}\right) + \pi \right) + 1000 \arctan(\sqrt{3}) = 2000 \left(-\frac{\pi}{4} + \pi \right) + 1000 \frac{\pi}{3}$$

$$= 3 \times 2000 \times \frac{3\pi}{4} + 1000 \frac{\pi \times 4}{3 \times 4} = \frac{9000\pi + 4000\pi}{4}$$

$$\arg(Z) = \frac{13000\pi}{12}$$

$$Z = 4^{1000} \left(\cos \frac{13000\pi}{12} + j \sin \frac{13000\pi}{12} \right)$$

.Notes.

$$\int_0^2 f(t) dt$$


$$f = \frac{\text{nbr de motifs}}{\text{durée}} = \frac{2}{3} \Rightarrow \omega = 2\pi f = \frac{4\pi}{3} ; A = 5 ; \varphi = 0.$$

$$f(t) = 5 \cdot \cos\left(\frac{4\pi}{3}t\right)$$

2) Calculer l'intégrale suivante : $I = \int_0^2 f(t)dt$, interpréter graphiquement le résultat obtenu sur la figure ci-dessus.

$$I = \int_0^2 5 \cos\left(\frac{4\pi}{3}t\right) dt = 5 \int_0^2 \cos\left(\frac{4\pi}{3}t\right) dt = 5 \times \frac{3}{4\pi} \left[\sin\left(\frac{4\pi}{3}t\right) \right]_0^2$$

$$I = \frac{15}{4\pi} \left(\sin\left(\frac{8\pi}{3}\right) - \underbrace{\sin 0}_0 \right) = \frac{15}{4\pi} \sin\left(\frac{8\pi}{3}\right)$$

IUT de Toulon – Département GEII – Première année - semestre 1

DS1 de R1.04 ALT

Notes

3) Résoudre l'équation $f(t) = 0$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu sur la figure précédente

$$5 \cos\left(\frac{4\pi}{3}t\right) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{4\pi}{3}t\right) = 0 \Rightarrow \frac{4\pi}{3}t = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\Rightarrow t = \frac{3}{4\pi} \left(\frac{\pi}{2} + k\pi \right)$$

$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

ou

$$-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$S = \left\{ \frac{3}{8} + \frac{3k}{4} ; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$S = \left\{ \frac{3}{8} + \frac{3k}{4} ; -\frac{7}{8} + \frac{3k}{4} ; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Notes

$$-2\cos^2 x + 9\sin x + 4 = 0 \Leftrightarrow -2(1 - \sin^2 x) + 9\sin x + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 x + 9\sin x + 2 = 0$$

Exercice 4 : Equation trigonométrique (3 pts)

③

Résoudre l'équation : $-2\cos^2(x) + 9\sin(x) + 4 = 0$

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \quad \cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$$

$$\Leftrightarrow -2(1 - \sin^2(x)) + 9\sin(x) + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow -2 + 2\sin^2(x) + 9\sin(x) + 4 = 0$$

$$2\sin^2(x) + 9\sin(x) + 2 = 0 \quad \text{posons } X = \sin(x) \text{ alors } 2X^2 + 9X + 2 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 9^2 - 4 \times 2 \times 2 = 65 > 0$$

$$X_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-9 + \sqrt{65}}{4} \text{ possible}$$

$$X_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-9 - \sqrt{65}}{4} \text{ impossible car } \sin \text{ est compris entre } -1 \text{ et } 1$$

$$\arcsin\left(\frac{-9 + \sqrt{65}}{4}\right) \approx -13,5^\circ \text{ et } \pi + \arcsin\left(\frac{-9 + \sqrt{65}}{4}\right)$$

de plus le sinus est 2π périodique

$$S = \left\{ \arcsin\left(\frac{-9 + \sqrt{65}}{4}\right) + 2k\pi; \pi + \arcsin\left(\frac{-9 + \sqrt{65}}{4}\right) + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

IUT de Toulon - Département GEI - Première année - semestre 1

TB

$$X = \sin x$$

$$2X^2 + 9X + 2 = 0$$

$$\Delta = 9^2 - 4 \times 2 \times 2 = 81 - 16$$

$$\Delta = 65 > 0$$

$$X_1 = \frac{-9 + \sqrt{65}}{4} \in [-1; 1]$$

$$X_2 = \frac{-9 - \sqrt{65}}{4} \notin [-1; 1]$$

$$\sin x = \frac{-9 + \sqrt{65}}{4}$$

$$x = \arcsin\left(\frac{-9 + \sqrt{65}}{4}\right) + 2k\pi \text{ ou } \pi - \arcsin\left(\frac{-9 + \sqrt{65}}{4}\right) + 2k\pi$$

Exercice 5 : Trigonométrie (5 pts)

Notes

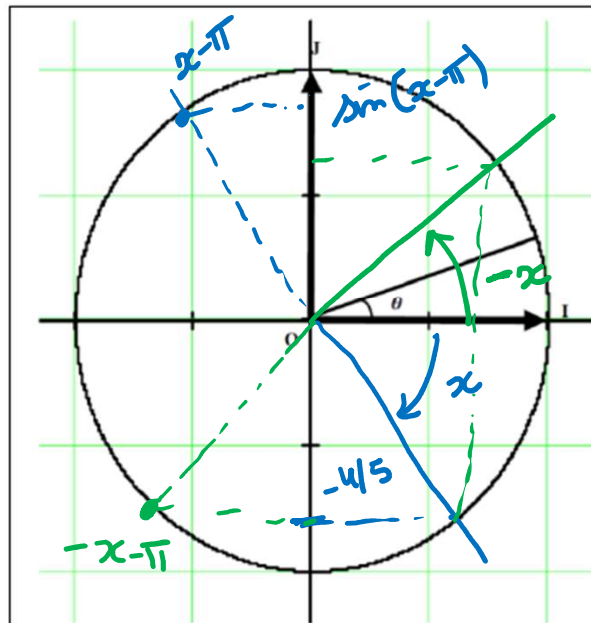
1) Compléter :

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\text{En déduire } \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

2) Sachant que $\sin(x) = -\frac{4}{5}$ déterminer, en le justifiant sur le cercle trigonométrique, les valeurs de :

$$A = \sin(\textcircled{x} - \pi) ; B = \sin(-x - \pi)$$



$$A = \sin(x - \pi) = -\sin x = \frac{4}{5}$$

$$A = \sin x \underbrace{\cos \pi}_{-1} - \underbrace{\sin \pi}_0 \cos x = -\sin \textcircled{x} = \frac{4}{5}.$$

$$B = \sin(\textcircled{-x} - \pi) = \sin x = -\frac{4}{5} \\ = -\sin(-x) = \sin x = -\frac{4}{5}.$$

Noté

3) Sachant que $\sin(x) = -\frac{4}{5}$ et que $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, déterminer les valeurs de $\cos(x)$, $\tan(x)$, $\sin(2x+18\pi)$

$$\cos^2 x + \underbrace{\sin^2 x}_{\frac{16}{25}} = 1 \Leftrightarrow \cos^2 x = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} \Leftrightarrow \cos x = \pm \sqrt{\frac{9}{25}} = \pm \frac{3}{5}$$



donc $\cos x = \frac{3}{5}$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$$

$$\underbrace{\sin(2x+18\pi)}_{\text{gros}} = \sin(2x) = \sin x \cos x + \sin x \cos x = 2 \sin x \cos x = 2 \times \left(-\frac{4}{5}\right) \frac{3}{5} = -\frac{24}{25} = -\frac{24}{10}$$

Exercice 6 de poursuites d'études : ne compte pas dans la note finale.

Notes

Résoudre le système suivant :
$$\begin{cases} 2\cos x + 3\sin y = \sqrt{2} - \frac{3}{2} \\ 4\cos x + \sin y = 2\sqrt{2} - \frac{1}{2} \end{cases}$$