Partie A : Rappels sur les propriétés et calculs de base

N'est pas dans le chapitre 2

Théorèmes/Définitions/Notations :

1) Toute fonction continue sur [a,b] est intégrable sur [a,b] : $\int_a^b f(x)\,dx = \underline{\text{fini}}$

2) Soit f, une fonction intégrable sur [a,b]. On appelle fonction primitive de f sur [a,b] toute fonction notée F, définie par : $F'(x) = f(x)\ \forall x \in [a,b]$.

3) On note $\int f(x)dx$ toutes les fonctions primitives de f, on a donc :

$$\int f(x)dx = F(x) + cte$$

4) Soit f, une fonction continue sur [a,b], soit F, une fonction primitive de f. On a alors :

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Propriétés

1) Soit f, g deux fonctions continues sur [a,b]. Soit α et β deux nombres réels. On a alors :

$$\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))dt = \alpha \int_a^b f(t)dt + \beta \int_a^b g(t)dt$$

2) Relation de Chasles : Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé I. Soit a,b,c trois réels de I. On a alors : $\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$

3) $\boxed{\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt}$

4) Soit f et g, deux fonctions continues sur [a,b] telles que $f(x) \leq g(x)\ \forall x \in [a,b]$, on a alors :

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

Partie C : Calcul d'intégrales doubles

Page 22 chapitre 2

I. Généralités :

1) Domaine fermé de $\mathbb{R}^2$

Définition On appelle domaine fermé de $\mathbb{R}^2$ tout domaine du plan délimité par une courbe fermée

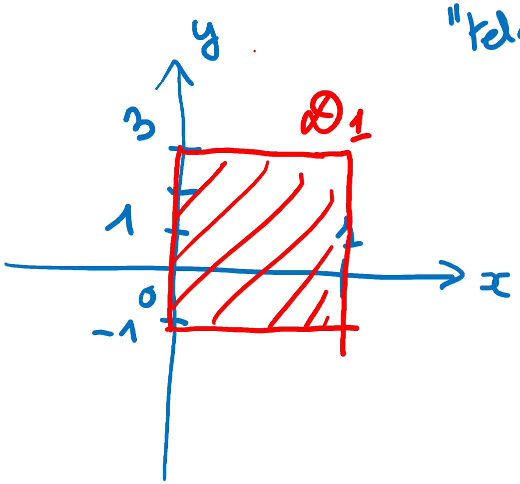
plan

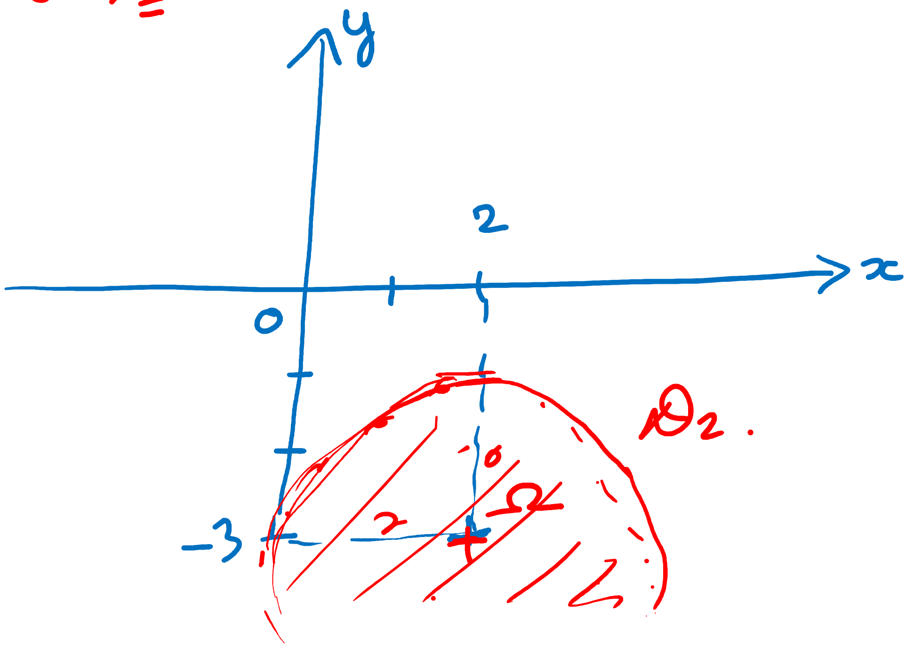
Exemples

$D_1 = [0;1]\times[-1;3] = \{(x,y)\in \mathbb{R}^2 / x\in[0;1] \text{ et } y\in[-1;3]\}$

$D_2 = \{(x,y)\in IR^2 / (x-2)^2+(y+3)^2 \le 4\} = \mathcal{D}(\Omega; 2)$ où $\Omega(2;-3)$

"telque"





Remarque : $\mathcal{D}_3 =]0;1]\times[-1;3]$

Page 21 chapitre 2

Note * Equation d'un cercle de centre $\Omega(a,b)$ et de rayon R :

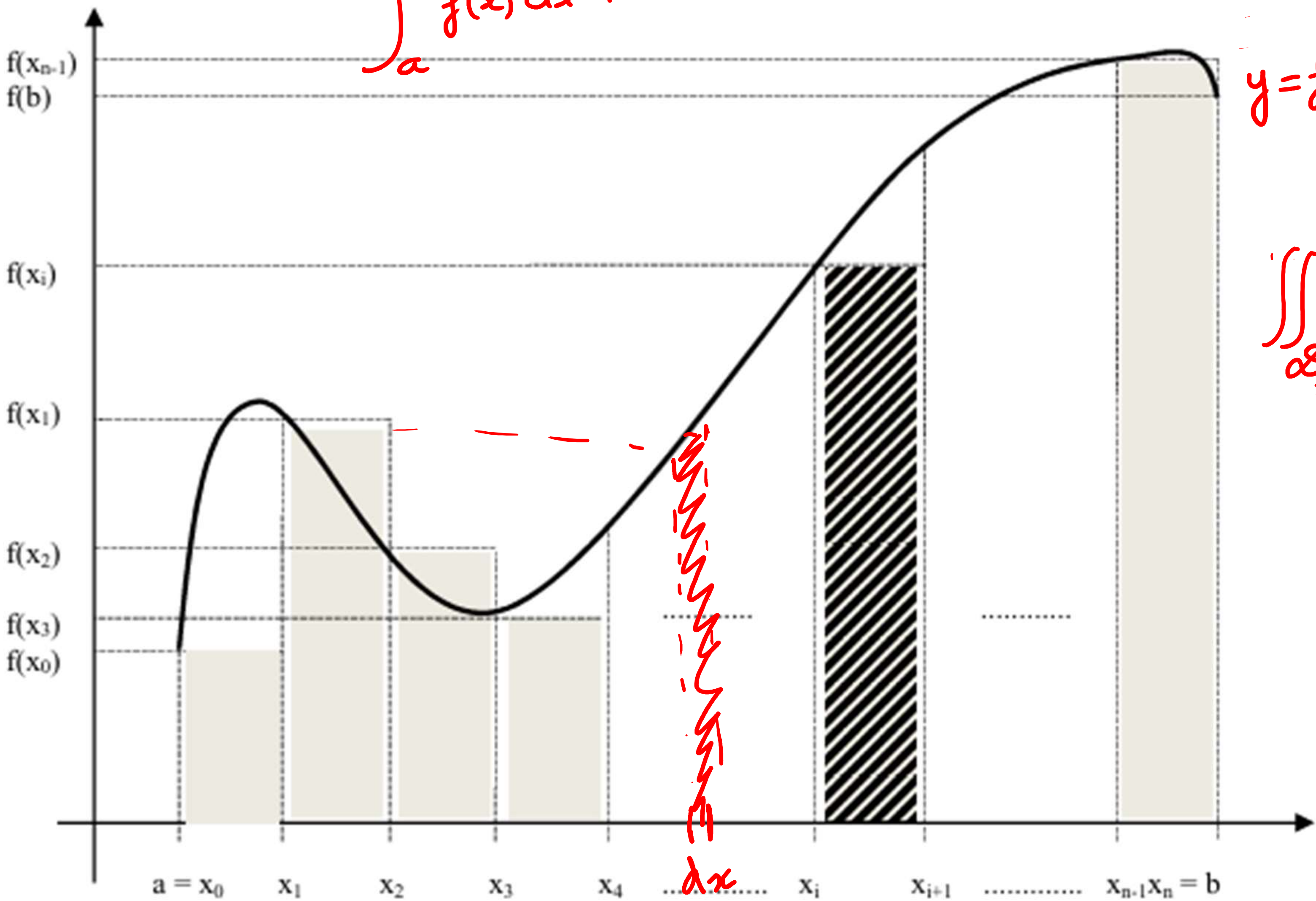
$$\mathcal{C}(\Omega;R) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2\}$$

* ~~Inéquation~~ Équation d'un disque fermé de centre $\Omega(a,b)$ et de rayon R :

$$\mathcal{D}(\Omega;R) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / (x-a)^2 + (y-b)^2 \leq R^2\}$$

Notes

$\int_a^b f(x)\,dx$.



$y = f(x)$.

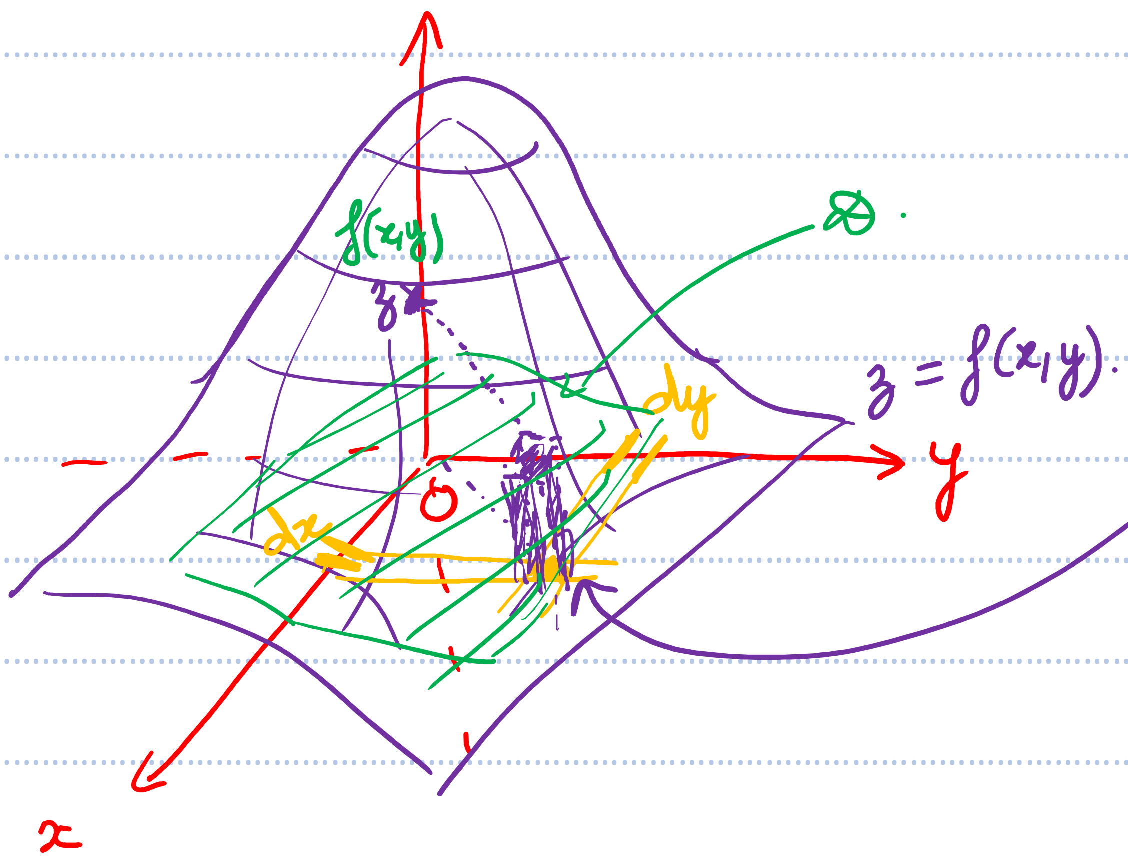
$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$.

D = rectangle .

Notes

$z = f(x,y)$

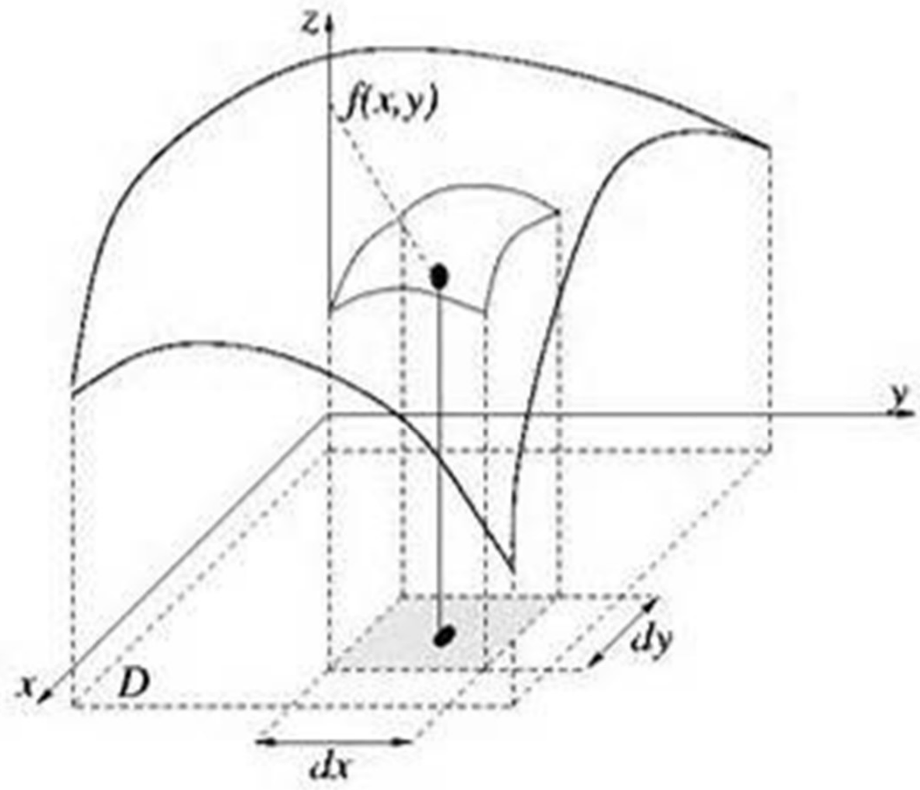
$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\cdot dx\cdot dy =$$



2) Intégrale double

Page 22 chapitre 2

Définition/théorème **Soit f, une fonction continue dans D, un domaine fermé de $\mathbb{R}^2$.**
Alors l'intégrale double $I = \iint_D f(x,y)\,dxdy$ existe.



3) Applications

Page 23 chapitre 2

- Si $f(x,y) = 1 \ \forall (x,y) \in D$, alors $I = \iint_D f(x,y)\,dxdy$ représente l'aire du domaine D.
- Si f(x,y) est la masse surfacique au point M(x,y) du domaine D, alors $I = \iint_D f(x,y)\,dxdy$ est la masse du domaine D.
- Soit A, l'aire du domaine D. Les coordonnées du centre de gravité G de D sont données par les intégrales : $x_G = \frac{1}{A}\iint_D x\,dxdy$ et $y_G = \frac{1}{A}\iint_D y\,dxdy$

4) Propriétés

Soient D un domaine fermé de $\mathbb{R}^2$; f et g, deux fonctions continues sur D ; α et β deux nombres réels.

- Si $f(x,y) \geq 0 \ \forall (x,y) \in D$, alors $\iint_D f(x,y)\,dxdy \geq 0$

- $\iint_D (\alpha f(x,y) + \beta g(x,y))\,dxdy = \alpha \iint_D (f(x,y)dxdy + \beta \iint_D g(x,y)\,dxdy$

- Si $D = D_1 \cup D_2$ où D_1 et D_2 sont deux domaines fermés de $\mathbb{R}^2$ et disjoints ($D_1 \cap D_2 =$ Ø) alors : $\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)\,dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)\,dxdy$

Page 23 chapitre 2

II. Calcul d'une intégrale double en coordonnées cartésiennes :

Théorème de Fubini Soit f, une fonction continue dans D, un domaine fermé de $\mathbb{R}^2$. On peut calculer l'intégrale double $I = \iint_D f(x,y)\,dxdy$ en intégrant soit d'abord par rapport à la variable x, soit d'abord par rapport à la variable y :

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_D f(x,y)\,dydx$$

1) 1er cas : D est un domaine fermé rectangulaire de $\mathbb{R}^2$

Exemple Calculer $I = \iint_D (x+y)\,dxdy$ où $D = \overset{x}{[0;2]} \times \overset{y}{[0;1]}$ rectangle.

méth 1 On intègre d'abord par rapport à x :

$$I = \int_0^1 \int_0^2 (x+y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2} + xy\right]_0^2 dy$$

$$I = \int_0^1 (2+2y)\,dy = \left[2y + y^2\right]_0^1 = 3.$$

méth 2 $I = \int_0^2 \int_0^1 (x+y)\,dy\,dx$

$$I = \int_0^2 \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_0^1 dx = \int_0^2 \left(x + \frac{1}{2}\right) dx = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}\right]_0^2$$

$$= 2 + 1 = 3.$$

Application du théorème de Fubini

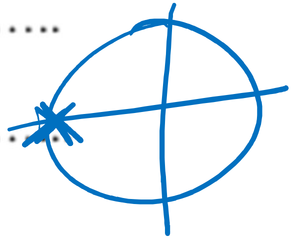
$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dxdy = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dx\,dy = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dy\,dx$$

Page 24 chapitre 2

Cas particulier : Calculer $I = \iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dxdy$ lorsque $f(x,y)=g(x)h(y)$ à variables séparables.

$[a,b]\times[c,d] \leftarrow$ rectangle

$$I = \int_a^b \int_c^d \underbrace{g(x)}_{\text{cte/}y}\, h(y)\,dy\,dx = \int_a^b g(x).\underbrace{\int_c^d h(y)\,dy}_{\text{cte}}\,dx = \int_c^d h(y)\,dy \times \int_a^b g(x)\,dx.$$



① à variables séparables

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} \overbrace{g(x).h(y)}\,dxdy = \int_a^b g(x)\,dx \times \int_c^d h(y)\,dy.$$

$[a,b]\times[c,d] \longrightarrow$ ② rectangle

Exemple $I = \iint_{[0,\pi]\times\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]} \underbrace{\sin(3x).\tan(y)}\,dxdy \rightarrow$ à var. sép.

$[0,\pi]\times\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right] \rightarrow$ rectangle

$$-\int -\tan x\,dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx$$

$$\int \frac{U'}{U}\,dx = \ln|U| + cte$$

$$U = \cos x \Rightarrow U' = -\sin x.$$

$$I = \int_0^\pi \sin(3x)\,dx \times -\int_{\pi/6}^{\pi/3} -\tan(y)\,dy = \left[-\frac{\cos(3x)}{3}\right]_0^\pi \times \left[-\ln|\cos y|\right]_{\pi/6}^{\pi/3}$$

$\ln A^\alpha = \alpha.\ln A$; $\ln A - \ln B = \ln\left(\frac{A}{B}\right)$

$$I = \frac{1}{3}\Big(-\overbrace{\cos 3\pi}^{-1} + \overbrace{\cos 0}^{1}\Big) \times \Big(-\ln \overbrace{\cos\frac{\pi}{3}}^{\frac{1}{2}} + \ln \overbrace{\cos\frac{\pi}{6}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\Big) = \boxed{\frac{2}{3}\left(\ln\frac{\sqrt{3}}{2} - \ln\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{3}\ln\left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}\right)$$

$$= \boxed{\frac{2}{3}\ln\left(\sqrt{3}\right)}$$

$$\boxed{I = \frac{\ln 3}{3}}$$