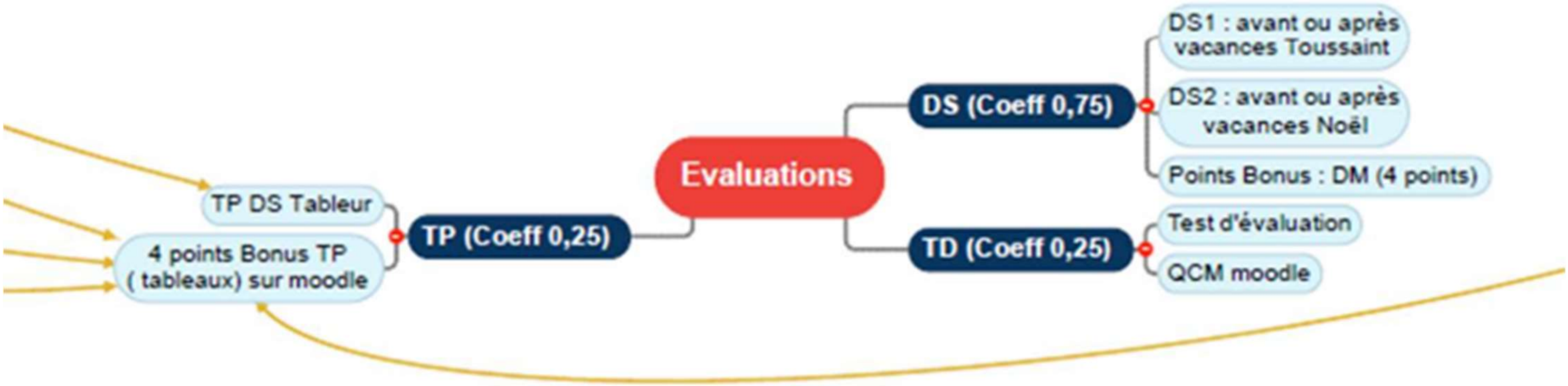


Evaluations
DS (Coeff 0,75)
DS1 : avant ou après vacances Toussaint
DS2 : avant ou après vacances Noël
Points Bonus : DM (4 points)
TD (Coeff 0,25)
Test d'évaluation
QCM moodle
TP (Coeff 0,25)
TP DS Tableur
4 points Bonus TP (tableaux) sur moodle

Correction DS1
Semestre 1

Exercice 1 : **Calculer avec les nombres complexes (2 pts)**

1) Développer et simplifier le nombre complexe ci-dessous : $j^2 = -1$

$\underline{Z} = (1 + j)(1 + 2j)(1 + 3j)$

$\underline{Z} = (1 + 2j + j + \underbrace{2j^2}_{-2})(1 + 3j) = (-1 + 3j)(1 + 3j) = (3j)^2 - 1^2 = -9 - 1 = -10$

2) En déduire la valeur exacte de l'angle : $\theta = \arctan(1) + \arctan(2) + \arctan(3)$

$\arg(\underline{Z}) = \arg(1+j) + \arg(1+2j) + \arg(1+3j) = \arctan\left(\frac{1}{1}\right) + \arctan\left(\frac{2}{1}\right) + \arctan\left(\frac{3}{1}\right)$

et d'après ① $\arg(\underline{Z}) = \arg(-10) = \boxed{\pi = \arctan 1 + \arctan 2 + \arctan 3}$

Exercice 2 **Nombres complexes (6 pts)**

1) Complétez le tableau ci-dessous :

$\underline{Z}$	Re($\underline{Z}$)	Im($\underline{Z}$)	Z	Arg($\underline{Z}$)	Autre écriture	$\underline{Z}^*$ exponentielle et algébrique
$5e^{-j\frac{\pi}{4}}$	$5\cos(-\pi/4)$ $\frac{5\sqrt{2}}{2}$	$5\sin(-\pi/4)$ $-\frac{5\sqrt{2}}{2}$	5	$-\frac{\pi}{4}$	algébrique $\frac{5\sqrt{2}}{2} - j\frac{5\sqrt{2}}{2}$	$5e^{j\pi/4} = \frac{5\sqrt{2}}{2}(1+j)$
$\underbrace{-1}_{<0} + j\sqrt{3}$	-1	$\sqrt{3}$	2	$\arctan(-\sqrt{3})+\pi$ $-\frac{\pi}{3}+\pi = \frac{2\pi}{3}$	exponentielle $2e^{2j\pi/3}$	$2e^{-2j\pi/3} = -1-j\sqrt{3}$
$\underbrace{-2j}e^{j\frac{\pi}{3}}$ $2e^{-j\pi/2}e^{j\pi/3} = 2e^{-j\pi/6}$	$2\cos(-\pi/6)$ $\sqrt{3}$	$2\sin(-\pi/6)$ -1	2	$-\pi/6$	exponentielle $2e^{-j\pi/6}$	$2e^{j\pi/6} = \sqrt{3}+j$

2) Déterminer le module et un argument de : $\underline{Z} = \frac{(1+j)^{2000}}{(j+\sqrt{3})^{1000}}$ Simplifier au maximum les résultats obtenus et en déduire l'écriture algébrique de $\underline{Z}$.

$$|\underline{Z}| = \frac{|(1+j)^{2000}|}{|(j+\sqrt{3})^{1000}|} = \frac{|1+j|^{2000}}{|j+\sqrt{3}|^{1000}} = \frac{\sqrt{2}^{2000}}{2^{1000}} = \frac{(2^{\frac{1}{2}})^{2000}}{2^{1000}} = \frac{2^{1000}}{2^{1000}} = \boxed{1}$$

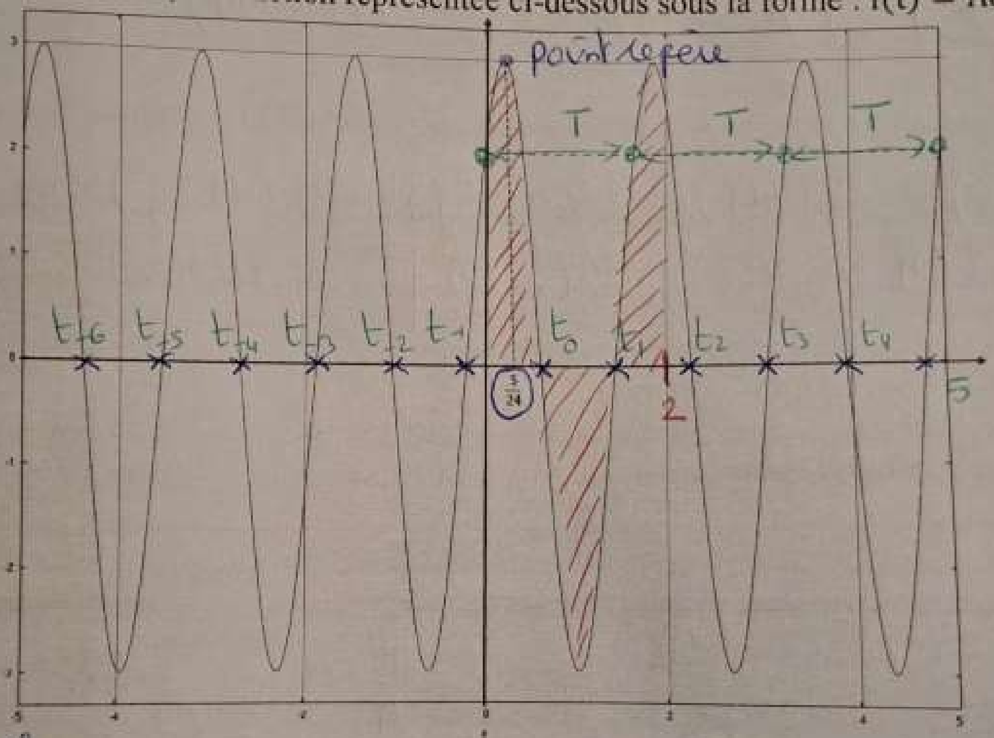
$$\arg(\underline{Z}) = 2000\arg(1+j) - 1000\arg(j+\sqrt{3}) = 2000\arctan 1 - 1000\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= \frac{3\times 2000\pi}{3\times 4} - 1000\frac{\pi\times 2}{6\times 2} = \frac{4000\pi}{12} = \frac{1000\pi}{3} = \boxed{-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi} \; ; k\in\mathbb{Z}$$

$\underline{z} = 1 \cdot e^{-2j\pi/3} = \cos\frac{-2\pi}{3} + j\sin\frac{-2\pi}{3} = \boxed{-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}}$ est l'écriture algébrique de $\underline{z}$

<u>Exercice 3</u> : Sinusoïde (4 pts)

1) Exprimer, en le justifiant, la fonction représentée ci-dessous sous la forme : $f(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$



$f = \dfrac{3 \text{ motifs}}{5} = \dfrac{3}{5}$ donc $\omega = 2\pi f = \dfrac{6\pi}{5}$ et $A = 3$

$t_{max} = 5/24$ donc $\varphi = -\omega t_{max} = -\dfrac{6\pi}{5} \times \dfrac{5}{24} = -\dfrac{6\pi}{24} = -\dfrac{\pi}{4}$

Ainsi $\boxed{f(t) = 3\cos\left(\dfrac{6\pi}{5}t - \dfrac{\pi}{4}\right)}$

2) Calculer l'intégrale suivante : $I = \int_0^2 f(t)dt$, interpréter graphiquement le résultat obtenu sur la figure ci-dessus.

$$I = \int_0^2 3.\cos\left(\frac{6\pi}{5}t - \frac{\pi}{4}\right)dt = 3.\int_0^2 \cos\left(\frac{6\pi}{5}t - \frac{\pi}{4}\right)dt$$

$$I = 3 \times \frac{5}{6\pi}\left[\sin\left(\frac{6\pi t}{5} - \frac{\pi}{4}\right)\right]_0^2 = \frac{5}{2\pi}\left(\sin\left(\frac{12\pi}{5} - \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$I = \frac{5}{2\pi}\left(\underbrace{\sin\left(\frac{43\pi}{20}\right)}_{= \sin\left(\frac{3\pi}{20}\right)} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

3) Résoudre l'équation f(t) = 0 et interpréter graphiquement le résultat obtenu sur la figure précédente

$f(t) = 0 \iff 3\cos\left(\frac{6\pi}{5}t - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \iff \cos\left(\frac{6\pi}{5}t - \frac{\pi}{4}\right) = 0$

$\iff \frac{6\pi t}{5} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi \; ; \; k \in \mathbb{Z}$

$\iff \frac{6\pi t}{5} = \frac{3\pi}{4} + k\pi \iff t = \frac{5}{6\pi}\left(\frac{3\pi}{4} + k\pi\right)$

$\boxed{S = \left\{ \underbrace{\frac{5}{8} + \frac{5k}{6}}_{t_k} \; ; \; k \in \mathbb{Z} \right\}}$

les solutions de $f(t) = 0$ sont les abscisses indiquées sur le graphe.

Exercice 4 : **Equation trigonométrique (3 pts)**

Résoudre l'équation : $-2\sin^2(x) + 9\cos(x) + 4 = 0$ (E)

On sait que $\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \iff \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

(E) $\iff -2(1-\cos^2 x) + 9\cos x + 4 = 0$

$\iff -2 + 2\cos^2 x + 9\cos x + 4 = 0$

$\iff 2\cos^2 x + 9\cos x + 2 = 0$

On pose $X = \cos x$, et on résout : $2X^2 + 9X + 2 = 0$

$\Delta = 9^2 - 4(2)(2) = 81 - 16 = 65 > 0$

$$\begin{cases} X_1 = \dfrac{-9+\sqrt{65}}{4} \in [-1;1] \\ X_2 = \dfrac{-9-\sqrt{65}}{4} \notin [-1;1]. \end{cases}$$

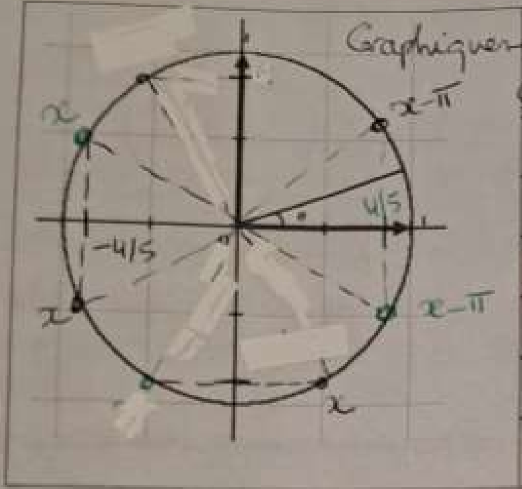
On résout donc : $\cos x = \dfrac{-9+\sqrt{65}}{2} \iff \boxed{\begin{cases} x = \arccos\left(\dfrac{-9+\sqrt{65}}{2}\right) + 2k\pi \\ \text{ou} \qquad ; k \in \mathbb{Z} \\ x = -\arccos\left(\dfrac{-9+\sqrt{65}}{2}\right) + 2k\pi \end{cases}}$

Exercice 5 : **Trigonométrique (5 pts)**

1) Compléter :

$\sin(a + b) =$ sina.Cosb + sinb.Cosa

En déduire $\sin(2x) =$ sinx.Cosx + sinx.Cosx = 2 sinx.Cosx



Graphiquement $A = \cos(x-\pi) = -\cos x = 4/5$

Ou $A = \cos x \underbrace{\cos\pi}_{-1} + \sin x \underbrace{\sin\pi}_{0}$

$\boxed{A = -\cos x = 4/5}$

$B = \cos(-x-\pi) = -\cos(-x) = -\cos x$

$\boxed{B = 4/5}$

3) Sachant que $\cos(x) = -\frac{4}{5}$ et que $\pi \leq x < 2\pi$, déterminer les valeurs de $\sin(x)$, $\tan(x)$, $\cos(2x+18\pi)$

$\cos x = -\frac{4}{5}$ Comme $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, alors $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

$\sin^2 x = 1 - \frac{16}{25} = \frac{25-16}{25} = \frac{9}{25}$

et

$\sin x = \pm \frac{3}{5}$, comme $\pi < x < 2\pi$, alors

$\sin x < 0$ et $\sin x = -\frac{3}{5}$

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-3/5}{-4/5} = \frac{3}{4}$

$\cos(2x + \underbrace{18\pi}_{9\text{ tours}}) = \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \frac{16}{25} - \frac{9}{25} = \frac{7}{25}$