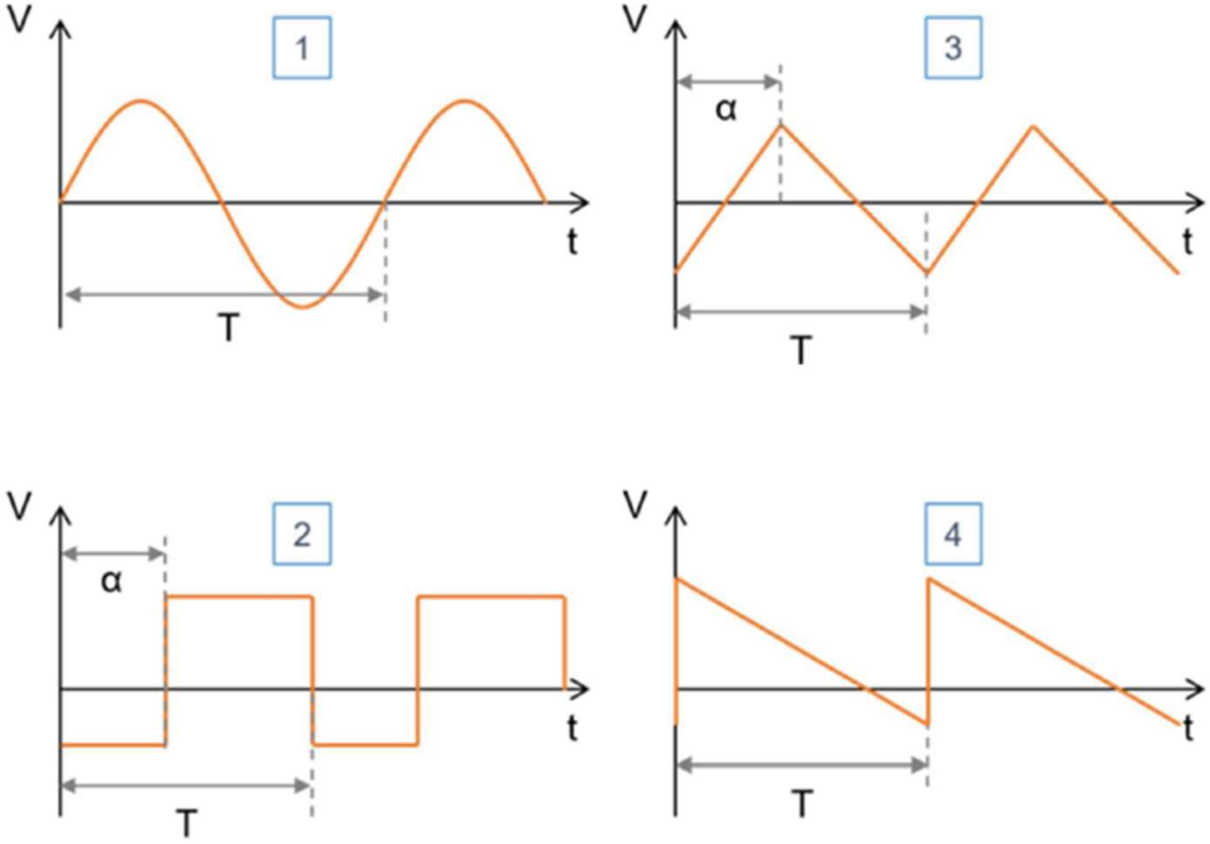
Chapitre 2 : Fonctions numériques à variable réelle.
Signaux du GEII



Partie A : Etude d'une fonction

I. Notions de base

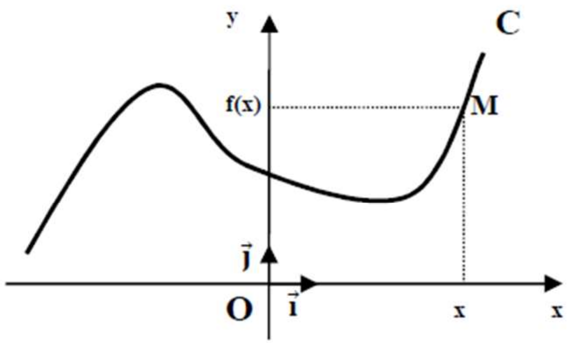
1) Définitions et notations

Une fonction f, est définie sur D, un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, si à tout x de D on peut associer un unique nombre noté f(x), et appelé image de x par f.

On écrit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x)$

D est appelé l'ensemble de définition de f, on le note aussi D_f.



On munit le plan d'un repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$).
La courbe C représentant f est l'ensemble des points M de coordonnées M (x , f(x)).

$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + f(x)\,\vec{j}$

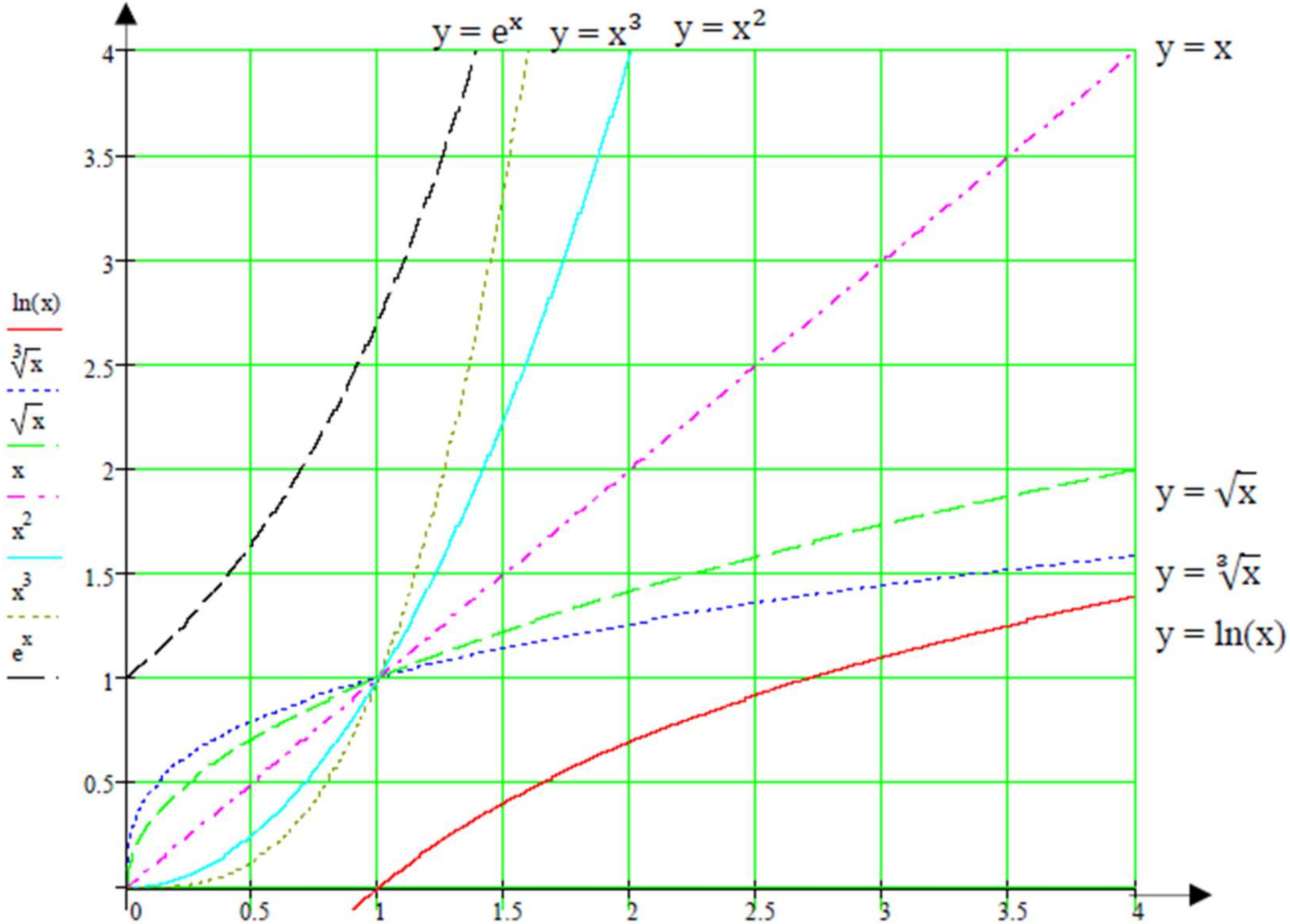
y = f(x) est l'équation cartésienne de f.

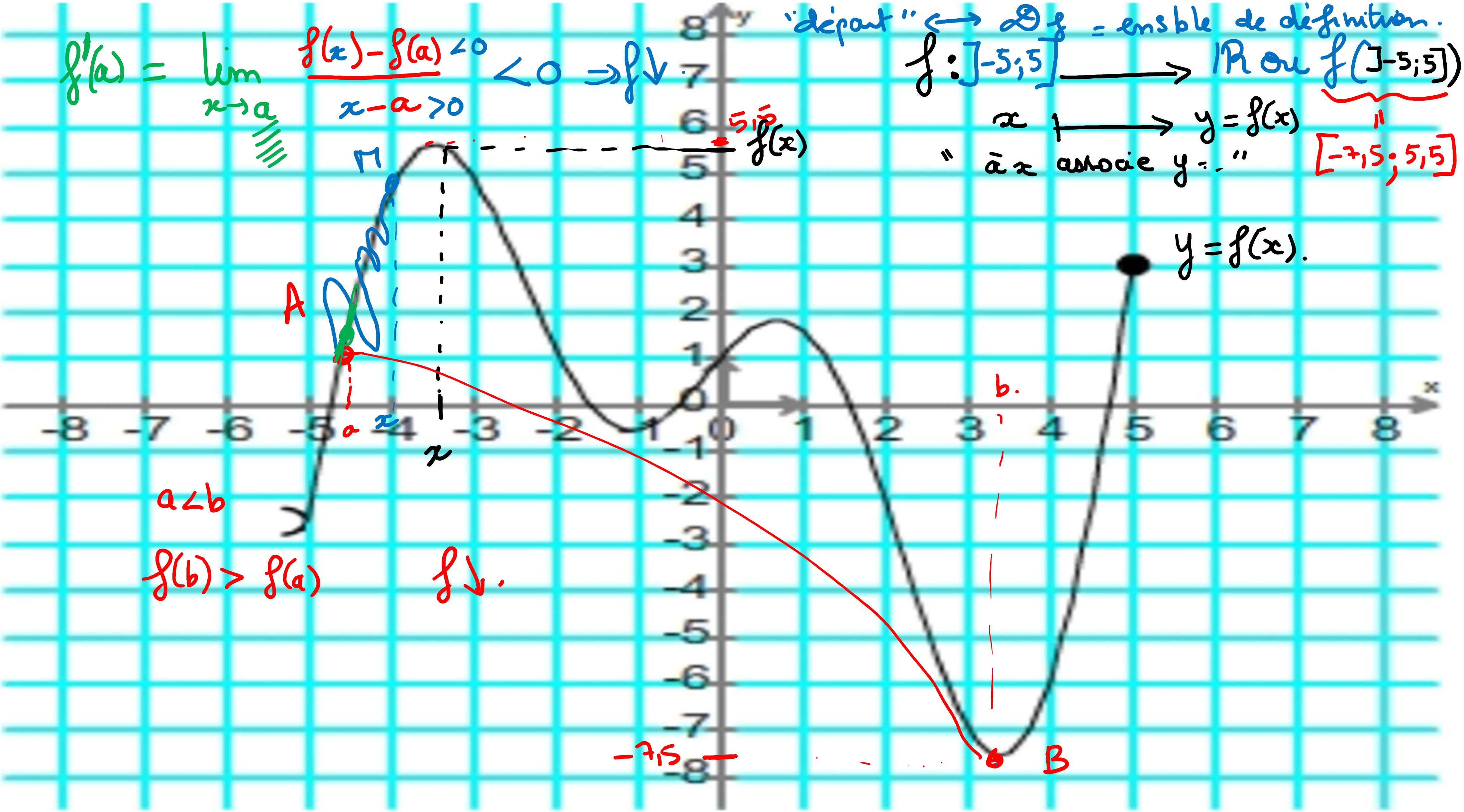
Une fonction peut être obtenue à partir d'une formule (signal déterministe), d'un tableau de valeurs relevé d'expériences physiques (signal numérique), ou bien d'une courbe.

2) Croissance comparée et fonctions usuelles

Pour des grandes valeurs positives de x : $\ln(x) < \sqrt[3]{x} < \sqrt{x} < x < x^2 < x^3 < \ldots < x^n < e^x$

Pour des grandes valeurs positives de x : $\ln(x) < \sqrt[3]{x} < \sqrt{x} < x < x^2 < x^3 < \ldots < x^n < e^x$





f'(a) = lim x→a (f(x) − f(a))/(x − a)
f(x) − f(a) < 0
x − a > 0
< 0 ⇒ f↓
"départ" ⟷ Df = ensble de définition.
f :]-5;5] ⟶ ℝ ou f(]-5;5])
= [-7,5 ; 5,5]
x ⟼ y = f(x)
" à x associe y = .. "
y = f(x).
5,5
f(x)
M
A
B
a
x
b.
-7,5
a < b
f(b) > f(a)
f↓.
y
x
-8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8

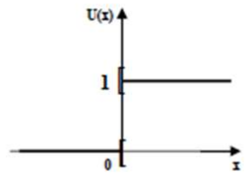
Page 6 et 7 chapitre 3

Echelon-unité : (Heaviside ⊕)

U : $\mathbb{R} \longrightarrow \{0,1\}$

$x \longmapsto U(x)$

avec $U(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \geq 0 \\ 0 \text{ si } x < 0 \end{cases}$



Ensemble de définition : $\mathbb{R}$

Ensemble image :

$U(\mathbb{R}) = \{0,1\}$

On dit que la fonction U est continue sur $\mathbb{R}$, sauf en 0.

$\lim_{x\to0^-} U(x) = 0$

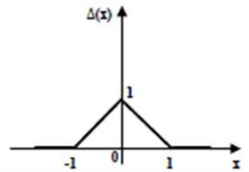
$\lim_{x\to0^+} U(x) = 1$

Triangle : (notée aussi tri)

$\Delta : \mathbb{R} \longrightarrow [0\,;1]$

$x \longmapsto \Delta(x)$

$\Delta(x) = \begin{cases} 1-|x| \text{ si } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$



Ensemble de définition : $\mathbb{R}$

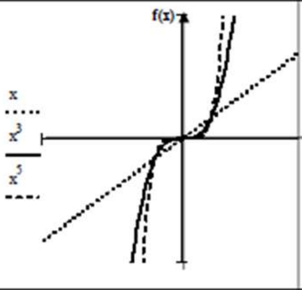
Ensemble image : [0 ; 1]

On dit que la fonction triangle est continue sur $\mathbb{R}$.

Puissance impaire : $n \in \mathbb{N}$

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x) = x^{2n+1}$



Ensemble de définition : $\mathbb{R}$

Ensemble image : $\mathbb{R}$

On dit que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

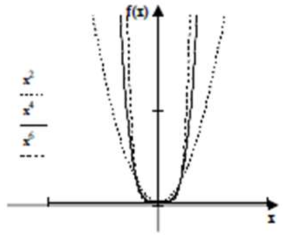
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Puissance paire : $n \in \mathbb{N}$

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$

$x \longmapsto f(x) = x^{2n}$



Ensemble de définition : $\mathbb{R}$

Ensemble image :

$\mathbb{R}_+ = [0\,;+\infty[$

On dit que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

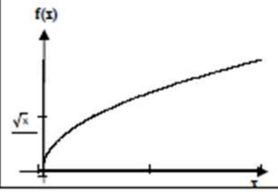
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Racine carrée :

$f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$

$x \longmapsto f(x) = \sqrt{x}$



Ensemble de définition : $\mathbb{R}_+$

Ensemble image : $\mathbb{R}_+$

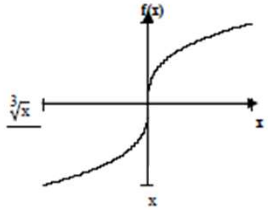
On dit que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Racine cubique :

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x) = \sqrt[3]{x}$



Ensemble de définition : $\mathbb{R}$

Ensemble image : $\mathbb{R}$

On dit que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

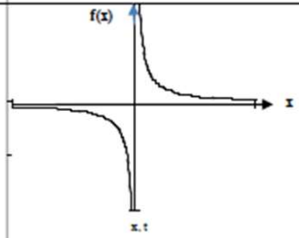
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)$

Inverse :

$f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}^*$

$x \longmapsto f(x) = 1/x$



Ensemble de définition : $\mathbb{R}^*$

Ensemble image : $\mathbb{R}^*$

f est continue sur $]0\,;+\infty[$

f est continue sur $]-\infty\,;0[$

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$

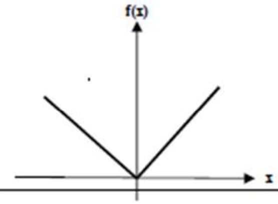
$\lim_{x\to0^-} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty$

Valeur absolue :

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$

$x \longmapsto f(x) = |x|$



Ensemble de définition : $\mathbb{R}$

Ensemble image : $\mathbb{R}_+$

f est continue sur $\mathbb{R}$.

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Exponentielle :

$f : \mathbb{R} \longrightarrow]0\,;+\infty[$

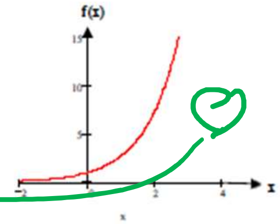
$x \longmapsto f(x) = e^x$

$e^0 = 1$

$e^{a+b} = e^a \times e^b$;

$(e^a)^n = e^{a.n}$

$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$; $e^{-b} = \frac{1}{e^b}$



Ensemble de définition : $\mathbb{R}$

Ensemble image :

$]0\,;+\infty[= \mathbb{R}_+^*$

f est continue sur $\mathbb{R}$.

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Logarithme népérien :

$f :]0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

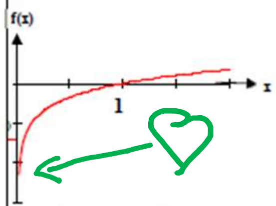
$x \longmapsto f(x) = \ln(x)$

$\ln(1) = 0$; $\ln(e) = 1$

$\ln(a.b) = \ln(a) + \ln(b)$

$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$

$\ln(a^n) = n.\ln(a)$



$\ln(e^a) = a \;\forall a \in \mathbb{R}$

$e^{\ln(a)} = a \;\forall a > 0$

Ensemble de définition : $\mathbb{R}_+^*$

Ensemble image : $\mathbb{R}$

f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$

$\lim_{x\to0} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

II. Ensemble de définition et ensemble d'étude d'une fonction

1) Ensemble de définition

Soit f, une fonction. L'ensemble de définition de f est l'ensemble des nombres réels x, pour lesquels f(x) existe.

Page 8&9 chapitre 3

Rappel des opérations impossibles division par zéro, racine carrée d'un nombre négatif, logarithme d'un nombre négatif ou nul, autrement dit :

$\mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto 1/x$

$[0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \sqrt{x}$

$]0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \ln(x)$

Exemples

✓ Soit $f(x) = \frac{x^2-1}{x+3}$, déterminer l'ensemble de définition de f

$\mathcal{D}_f = \left\{ x \in \mathbb{R} \,/\, \frac{x^2-1}{x+3} \text{ existe} \right\}$

$\Leftrightarrow x+3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -3$

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \{-3\} = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$

"privé de"

✓ Soit $g(x) = \exp\left(\frac{x^2-1}{x+3}\right)$, déterminer l'ensemble de définition de g

$D_g = \{x \in \mathbb{R} / e^{\frac{x^2-1}{x+3}} \text{ existe}\} = \mathbb{R} - \{-3\}$

✓ Soit $h(x) = \ln\left(\frac{x^2-1}{x+3}\right)$, déterminer l'ensemble de définition de h

$D_h = \{x \in \mathbb{R} / \ln\left(\frac{x^2-1}{x+3}\right) \text{ existe}\} =]-3;-1[\cup]1;+\infty[$.

$\iff \frac{x^2-1}{x+3} > 0$ et $x+3 \neq 0$

$x+3 > 0 \iff x > -3$

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
1. x^2-1		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$\frac{x^2-1}{x+3}$		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	

Page 10 chapitre 3

✓ Soit $k(x) = \sqrt{\frac{x^2-1}{x+3}}$, déterminer l'ensemble de définition de k

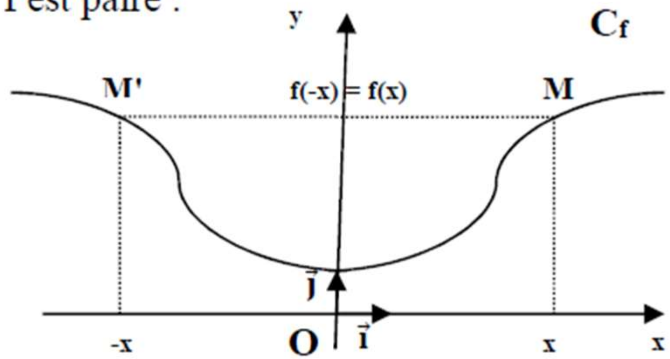
$\mathcal{D}_k = \left\{ x \in \mathbb{R} / \sqrt{\frac{x^2-1}{x+3}} \text{ existe} \right\} =]-3 ; -1] \cup [1 ; +\infty[.$

$\Longleftrightarrow \frac{x^2-1}{x+3} \geq 0$

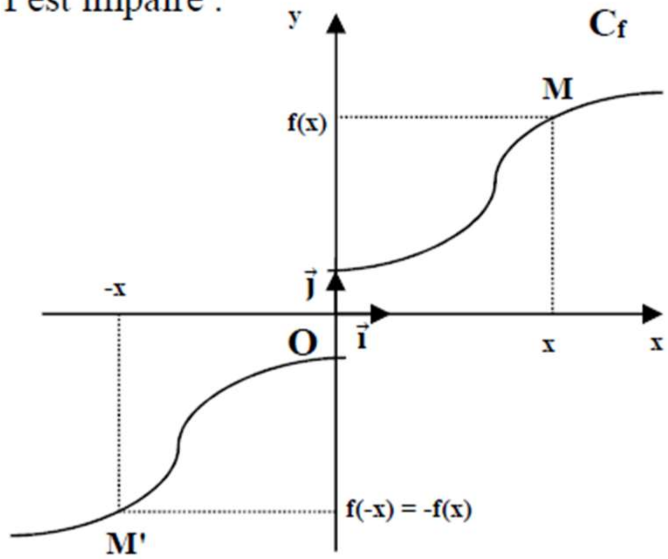
2) <u>Parité</u>

- ✓ **Une <u>fonction</u> f, définie sur D, un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ centré en 0, est dite paire lorsque : $\forall x \in D \;\; f(-x) = f(x)$. Sa représentation graphique est alors symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. On étudie alors f sur $D \cap \mathbb{R}_+$**
- ✓ **Une <u>fonction</u> f, définie sur D, un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ centré en 0, est dite impaire lorsque : $\forall x \in D \;\; f(-x) = -f(x)$. Sa représentation graphique est alors symétrique par rapport à l'origine du repère. On étudie alors f sur $D \cap \mathbb{R}_+$**

f est paire :



f est impaire :



Page 11 chapitre 3

BROUILLON

Copie

Exemples

- ✓ La fonction cosinus $x \mapsto x^2$ sont paires sur $\mathbb{R}$, les fonctions sinus et $x \mapsto x^3$ sont impaires sur $\mathbb{R}$. La fonction tangente est impaire sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \,;\, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

- ✓ Soit f, la fonction définie par : $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$, étudier la parité de f.

$D_f = \mathbb{R} - \{1\}$ est non centré en 0 donc f est ni paire, ni impaire.

$\cancel{f(-x) = \frac{(-x)^2}{-x-1} = \frac{x^2}{-x-1} \neq f(x) \neq -f(x) = -\frac{x^2}{x-1} = \frac{x^2}{-x+1}}$

Contre-exple : $f(-2) = \frac{4}{-3} \neq f(2) = \frac{4}{1}$ et $f(-2) \neq -f(2)$ donc f est ni paire, ni impaire.

- ✓ Soit g, la fonction définie par : $g(x) = \sin(x) - \sin(3x)$, étudier la parité de g.

$D_g = \mathbb{R}$ centré en 0.

$g(-x) = \underbrace{\sin(-x) - \sin(-3x)}_{\sin \text{ impaire}} = -\sin x + \sin(3x) = -g(x)$

g est impaire.

- ✓ On appelle sinus hyperbolique, la fonction définie par : $sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ étudier la parité de sh.

$D_{sh} = \mathbb{R}$ centré en 0

$sh(-x) = \frac{e^{-x} - e^{x}}{2} = -sh\,x$ car $-sh\,x = -\frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = \frac{-e^{x} + e^{-x}}{2}$

sh est donc impaire.

Opérations

- ✓ **Si f et g sont paires sur D, alors $f \times g$ (et f/g $g \neq 0$) est paire sur D**
- ✓ **Si f et g sont impaires sur D, alors $f \times g$ (et f/g $g \neq 0$) est paire sur D**
- ✓ **Si f est impaire et g est paire sur D, alors $f \times g$ (et f/g $g \neq 0$) est impaire sur D**

Exemple

Soit f, la fonction, définie par : $f(x) = \frac{x^3.\sin^2(x)}{\cos(x)}$ sur $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \,;\, k \in \mathbb{Z}\right\}$ Etudier la parité de f.

$x \mapsto x^3$ est impaire

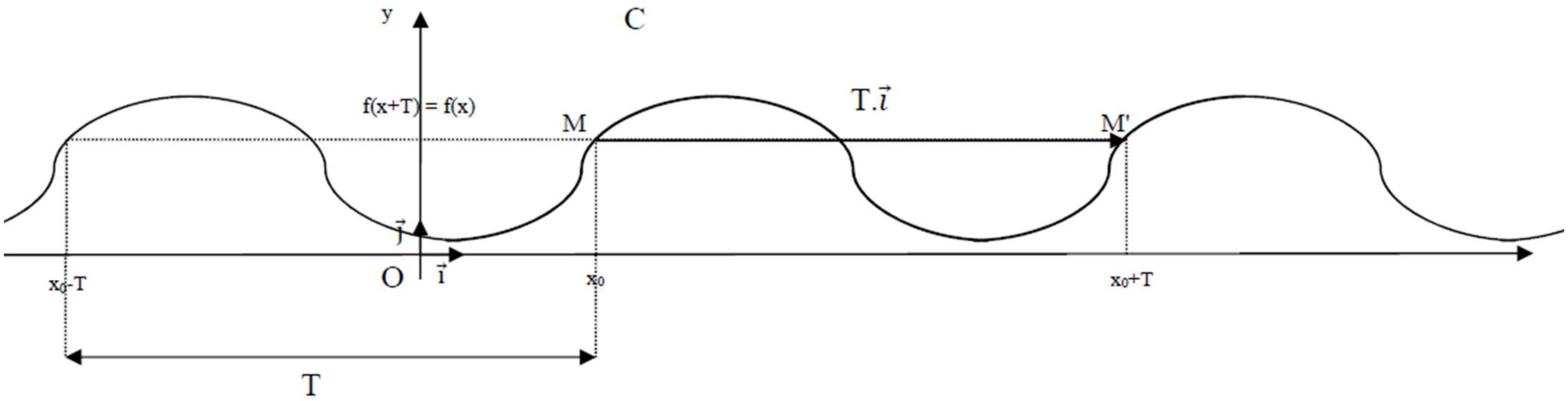
$x \mapsto \sin^2 x$ est paire   donc f est impaire.

$x \mapsto \cos x$ est paire

3) Périodicité

Page 12 chapitre 3

Une fonction f, définie sur D, un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, est dite périodique lorsqu'il existe un nombre réel positif, T, le plus petit possible tel que :
$\forall x \in D$ $\boxed{f(x+T) = f(x)}$. On dit aussi que f est T-périodique.
Soit f_0, la fonction définie par : $f_0(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \in [x_0, x_0 + T[\\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$. f_0 est appelée le motif de la fonction f.
La représentation graphique de f est obtenue en appliquant sur la courbe représentant f_0, les translations de vecteur $kT.\vec{i}$ où k est un entier relatif.
On étudie alors la fonction f sur l'intervalle $[x_0, x_0 + T[$.



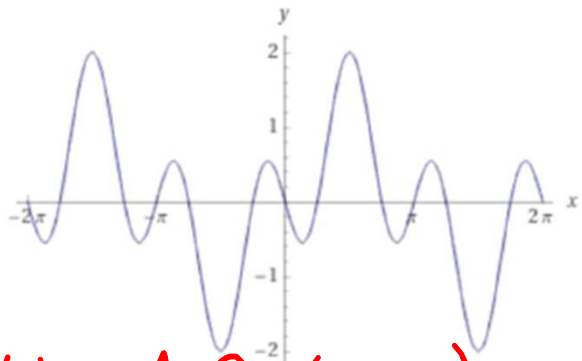
Remarque On peut alors écrire : (voir TP)
$f(t) = ... + f_0(t+2T) + f_0(t+T) + f_0(t) + f_0(t-T) + f_0(t-2T) + \cdots = \sum_{-\infty}^{\infty} f_0(t-kT)$

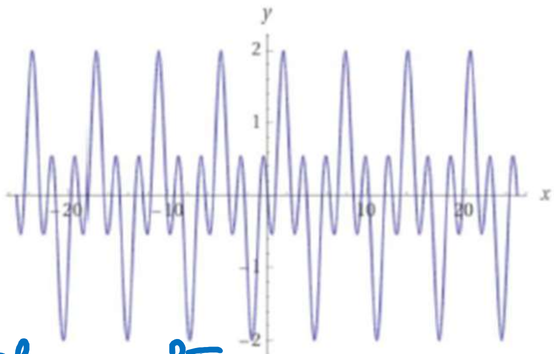
Exemples

- ✓ Les fonctions $t \mapsto \cos(\omega t + \varphi)$ et $t \mapsto \sin(\omega t + \varphi)$ sont $\frac{2\pi}{\omega}$ – périodiques. La fonction $t \mapsto \tan(\omega t + \varphi)$ est $\frac{\pi}{\omega}$ – périodique sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \,;\, k\epsilon\mathbb{Z}\right\}$
- ✓ Soit g, la fonction définie par : $g(x) = \underbrace{\sin(x)}_{2\pi\text{-périodique}} - \underbrace{\sin(3x)}_{\frac{2\pi}{3}\text{-périodique}}$, étudier la périodicité de g.

g est 2π-périodique, car :

$$g(x+2\pi) = \sin(x+\underbrace{2\pi}_{\text{1 tour de cercle}}) - \sin(3x+\underbrace{6\pi}_{\text{3 tours de cercle}}) = \sin x - \sin(3x) = g(x).$$





$$f(t) = A.\cos(\omega t+\varphi)$$

$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \iff T = \frac{2\pi}{\omega}$ car :

$$f\left(t+\frac{2\pi}{\omega}\right) = A.\cos\left(\omega\left(t+\frac{2\pi}{\omega}\right)+\varphi\right) = A.\cos(\omega t+\underbrace{2\pi}_{\text{1 tour}}+\varphi) = A.\cos(\omega t+\varphi) = f(t)$$

III. Dérivabilité

1) Définitions et opérations

Page 14 chapitre 3

Soit f, une fonction définie en a, on dit que f est dérivable en a lorsque : la limite suivante $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie. On la note alors $f'(a)$ et on l'appelle nombre dérivé de f en a.

....

$\lim_{n \to +\infty} (-1)^n$

....

....

....

....

....

$\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ **existe et est finie. On la note alors f′(a)**

Page 14 chapitre 3

Exemples

✓ Soit f, la fonction définie par : $f(x) = x^2$. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

$A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$

Dérivabilité de f en 3 : $L = \lim\limits_{x \to 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"}$ FI

$L = \lim\limits_{x \to 3} \frac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{\cancel{x-3}} = 6$ est finie donc f est dérivable en 3 et $f'(3) = 6$

Dérivabilité de f en $a \in \mathcal{D}_f = \mathbb{R}$: $L = \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim\limits_{x \to a} \frac{x^2-a^2}{x-a} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"}$ FI

$L = \lim\limits_{x \to a} \frac{\cancel{(x-a)}(x+a)}{\cancel{x-a}} = 2a$ est finie donc f est dérivable sur IR et $f'(a) = 2a$

Soit : $f'(x) = 2x$

Soit f, une fonction définie en a, on dit que f est dérivable en a lorsque : la limite suivante $\boxed{\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}}$ existe et est finie. On la note alors $f'(a)$ et on l'appelle nombre dérivé de f en a.

Page 14 chapitre 3

Soit f, une fonction définie sur I un intervalle de $\mathbb{R}$, on dit que f est dérivable sur I, lorsque f est dérivable en tout point a de I. On appelle alors fonction dérivée de f et on note f ', la fonction qui à tout élément a de I, associe son nombre dérivé $f'(a)$.

Si f et g sont dérivables sur I, alors : αf, f+g, $f \times g$ et f/g (avec $g \neq 0$) sont dérivables sur I. (α est un nombre réel) et $(\alpha f)' = \alpha f'$, $(f+g)' = f' + g'$, $(fg)' = f'g + fg'$ et $(f/g)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

cte

Si f est dérivable sur I et g est dérivable sur f(I), alors $g \circ f$ est dérivable sur I et : $(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'$

"rond"

....

....

2) Formulaire U est une fonction dérivable sur I.

Cas particulier : $U = x \Rightarrow U' = 1$

Cas général :

Page 16 chapitre 3

$(x^n)' = n.x^{n-1} \quad \forall x \in \mathbb{R} \ \forall n \in \mathbb{N} - \{1\}$	$(\mathbf{U^n})' = \mathbf{n.U'.U^{n-1}}$, $\mathbf{U(I)} \subseteq \mathbb{R}$ exple $\left((3x+5)^{10}\right)' = 10 \times 3 \times (3x+5)^9$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^* =]0;+\infty[$	$(\sqrt{\mathbf{U}})' = \frac{\mathbf{U'}}{\mathbf{2\sqrt{U}}}$, $\mathbf{U(I)} \subseteq \mathbb{R}_+^*$
$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$	$\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{U}}\right)' = \frac{\mathbf{-U'}}{\mathbf{U^2}}$, $\mathbf{U(I)} \subseteq \mathbb{R}^*$
$(e^x)' = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$	$(\mathbf{e^U})' = \mathbf{U'.e^U}$, $\mathbf{U(I)} \subseteq \mathbb{R}$
$(\ln(x))' = \frac{1}{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*$	$(\mathbf{\ln(U)})' = \frac{\mathbf{U'}}{\mathbf{U}}$, $\mathbf{U(I)} \subseteq \mathbb{R}_+^*$

Page 16 chapitre 3

$(\sin(x))' = \cos(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$	$(\sin(U))' = U'.\cos(U) \quad , \; U(I) \subseteq \mathbb{R}$
$(\cos(x))' = -\sin(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$	$(\cos(U))' = -U'.\sin(U) \quad , \; U(I) \subseteq \mathbb{R}$
$(\tan(x))' = \dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$ $\forall x \in \mathbb{R} - \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z}\right\}$	$(\tan(U))' = \dfrac{U'}{\cos^2(U)} = \left(1 + \tan^2(U)\right).U'$ $U(I) \subseteq \mathbb{R} - \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z}\right\}$

Pourquoi $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$?? $(u>0)$

Page 16 chapitre 3

$f(x) = \ln(u(x))$ est-elle dérivable en $a \in \mathcal{D}_{\ln(u)}$?

On suppose que l'on sait que ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

$$L = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{\ln(u(x))-\ln(u(a))}{x-a} \times \frac{u(x)-u(a)}{u(x)-u(a)}$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{u(x)-u(a)}{x-a} \times \frac{\ln(\overset{X}{u(x)})-\ln(u(a))}{\underset{X}{u(x)}-u(a)}$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{u(x)-u(a)}{x-a} \times \lim_{X\to u(a)} \frac{\ln X-\ln(u(a))}{X-u(a)}$$

"$\ln'(u(a))$"

$$\lim_{X\to u(a)} \frac{\ln X-\ln(u(a))}{X-u(a)} = \frac{1}{u(a)}$$

? $L = \dfrac{u'(a)}{u(a)}$?

Exemples

✓ $f(x) = (2x - 3).\cos x$

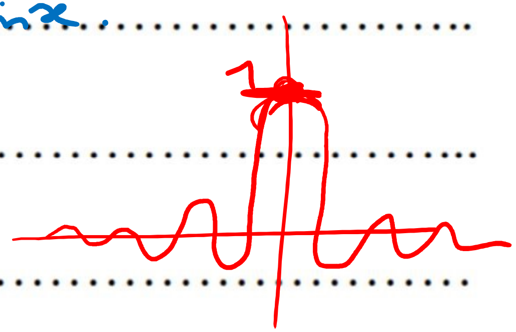
$\boxed{(U.V)' = U'V + UV'}$ $(\cos x)' = -\sin x.$

Page 16&17 chapitre 3

$D_f = \mathbb{R}.$

$f'(x) = 2.\cos x + (2x-3).(-\sin x) = 2\cos x - (2x-3)\sin x.$

$D_{f'} = \mathbb{R}$



$D_{f'} =$

✓ $g(x) = \frac{\sin x}{x}$ $\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$ $(\sin x)' = \cos x.$

$D_g = \mathbb{R}^*$

Remarque

$g'(x) = \frac{x.\cos x - \sin x}{x^2}$

$D_{g'} = \mathbb{R}^*$

$\text{sinc}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

"sinus cardinal"

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

....

$D_{g'} =$ ....

Page 17 chapitre 3

$(cte.U)' = cte.U'$

$(\cos(U))' = -U' \sin U.$

✓ $i(t) = \underbrace{V_{eff}\sqrt{2}}_{cte}.\cos(\underbrace{\omega t + \varphi}_{U \Rightarrow U' = \omega})$

$D_i =$ $\mathbb{R}$ ....

$i'(t) = -V_{eff}\sqrt{2}.\omega.\sin(\omega t+\varphi)$ ....

....

$D_{i'} =$ $\mathbb{R}$. ....

....

....

Page 17 chapitre 3

✓ $h(t) = (\underbrace{t^2 + 5}_{U})^{10}$ $\quad U \Rightarrow U' = 2t$ $\quad (U^n)' = n\,U^{n-1}\cdot \underline{U'}$ $\quad n = 10$

$D_h = \mathbb{R}$.

$h'(t) = 10\,(t^2+5)^9 \times 2t = 20t\,(t^2+5)^9$

$D_{h'} = \mathbb{R}$.

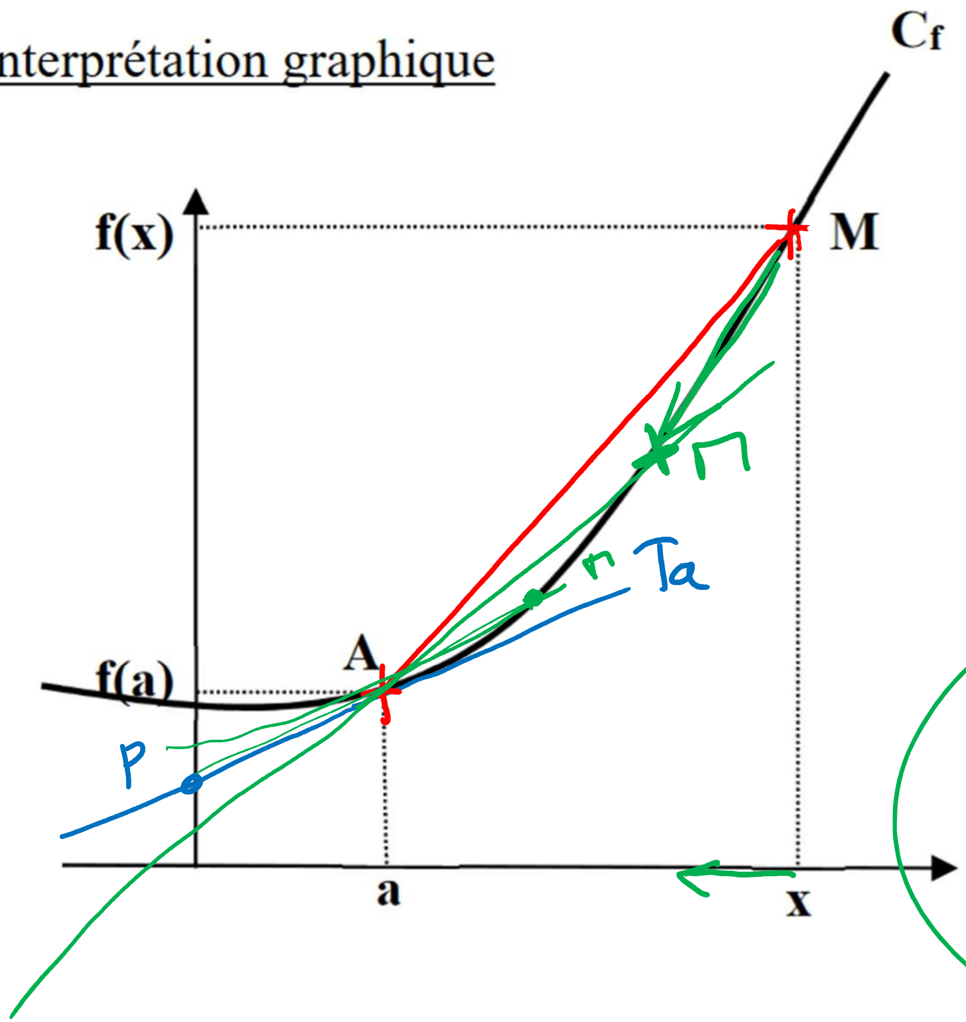
$$f'(a) = \lim_{\substack{x \to a \\ 0}} \frac{\overbrace{f(x)}^{\sin x} - \overbrace{f(a)}^{\sin 0}}{\underset{x-0}{x-a}}$$

✓ A l'aide de la définition du nombre dérivé du sinus en 0, calculer : $\lim_{t\to 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1$?? $\quad$ "$\frac{0}{0}$" FI

$$L = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t - \sin 0}{t - 0} = (\sin)'(0)$$ car sin. est dérivable en 0

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = \cos 0 = 1.$$

Interprétation graphique



Page 18 chapitre 3

$\frac{y_M - y_A}{x_M - x_A}$.

$\boxed{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}$ est la pente de la droite (AM).

Lorsque x tend vers a, M tend vers A le long de la courbe, et la droite (AM) se rapproche de la droite T_a, qui est la tangente à la courbe au point A.

Conclusion :

f est dérivable en a

$\boxed{\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)}$ **est la pente de la tangente à la courbe au point A(a,f(a)).**

B

....

....

Conséquence Equation de la tangente T_a : $y = mx + p$

Page 18 chapitre 3

la pente de T_a est : $f'(a)$ donc

$T_a : y = f'(a).x + p$

$A \in T_a \iff y_A = f'(a)\,x_A + p$ $\qquad A(a; f(a))$

$\iff f(a) = f'(a).a + p$

$\iff p = f(a) - f'(a).a$

Donc : $T_a : y = f'(a).x + f(a) - f'(a).a$

$$\boxed{y = f(a) + f'(a).(x - a)}$$

Page 19 chapitre 3

Exemples

✓ Equation de la tangente en O à la courbe représentant la fonction f définie par : $f(x) = x^3$

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad \mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

$x \longmapsto y = f(x) = x^3$.

$T_0 : y = f(0) + \underbrace{f'(0)}_{=0}.(x-0)$

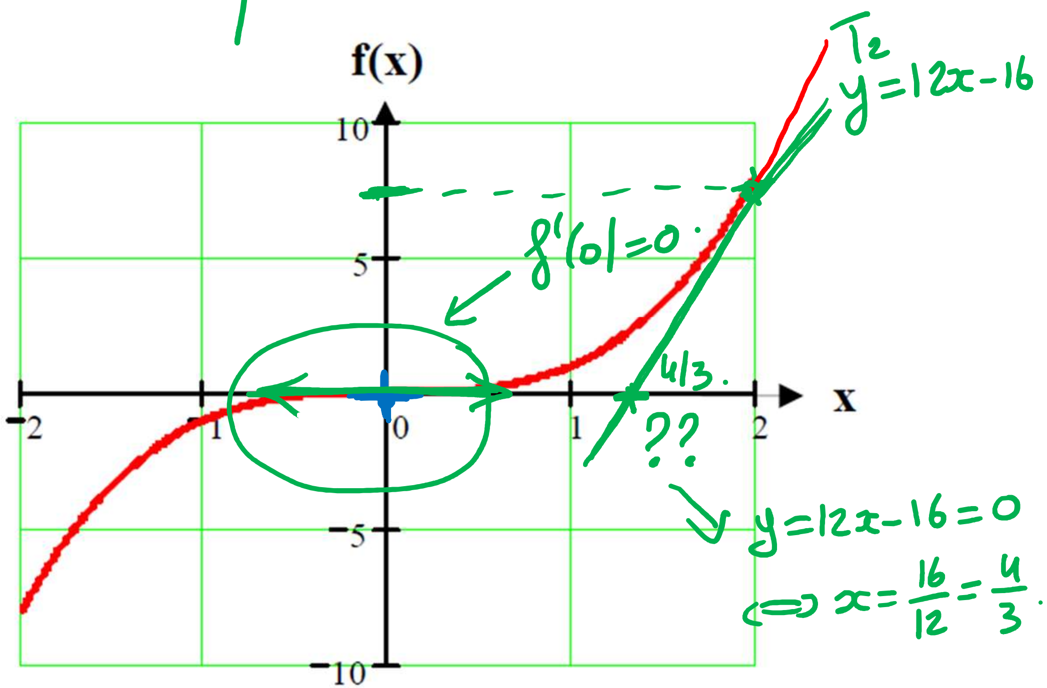
$f(0) = 0 \qquad f'(x) = 3x^2 \qquad f'(0) = 0$

$T_0 : y = 0$

$T_2 : y = f(2) + f'(2)(x-2)$

$T_2 : y = 8 + 12(x-2) \qquad 8-24$

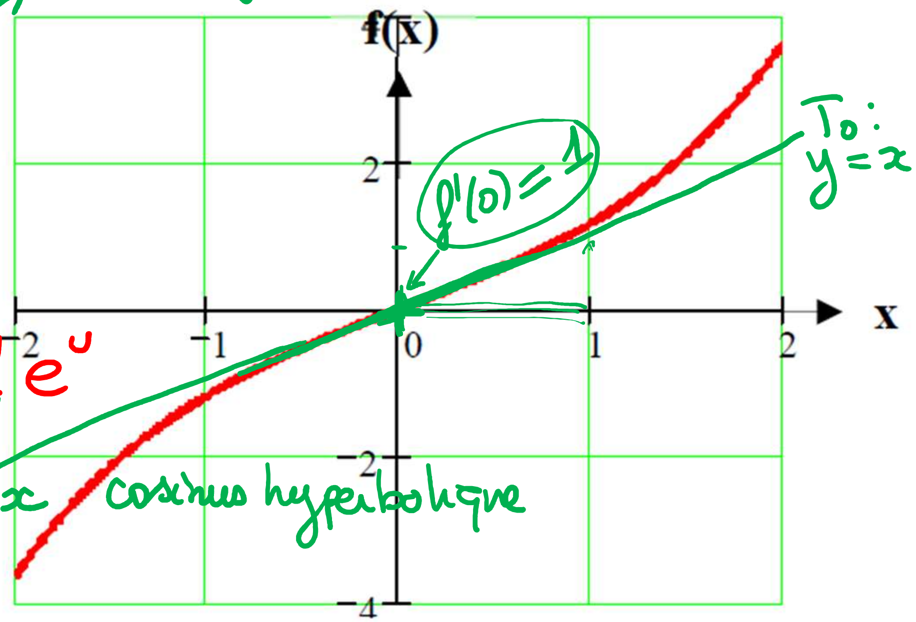
$y = 12x - 16$



$|X| = \begin{cases} X \text{ si } X \geq 0 \\ -X \text{ si } X \leq 0. \end{cases}$

- ✓ Equation de la tangente en O à la courbe représentant la fonction f définie par : $f(x) = sh(x) = \dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}$

sinus hyperbolique.



$T_0 : y = f(0) + f'(0).x$

$f(0) = \dfrac{1-1}{2} = 0$

$(e^x)' = e^x \quad (e^{u})' = \underbrace{u'}_{-1} e^{u}$, $u = -x$

$f'(x) = \dfrac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right)' = \boxed{\dfrac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right)} = chx$ cosinus hyperbolique

$f'(0) = 1$.

$T_0 : y = x$

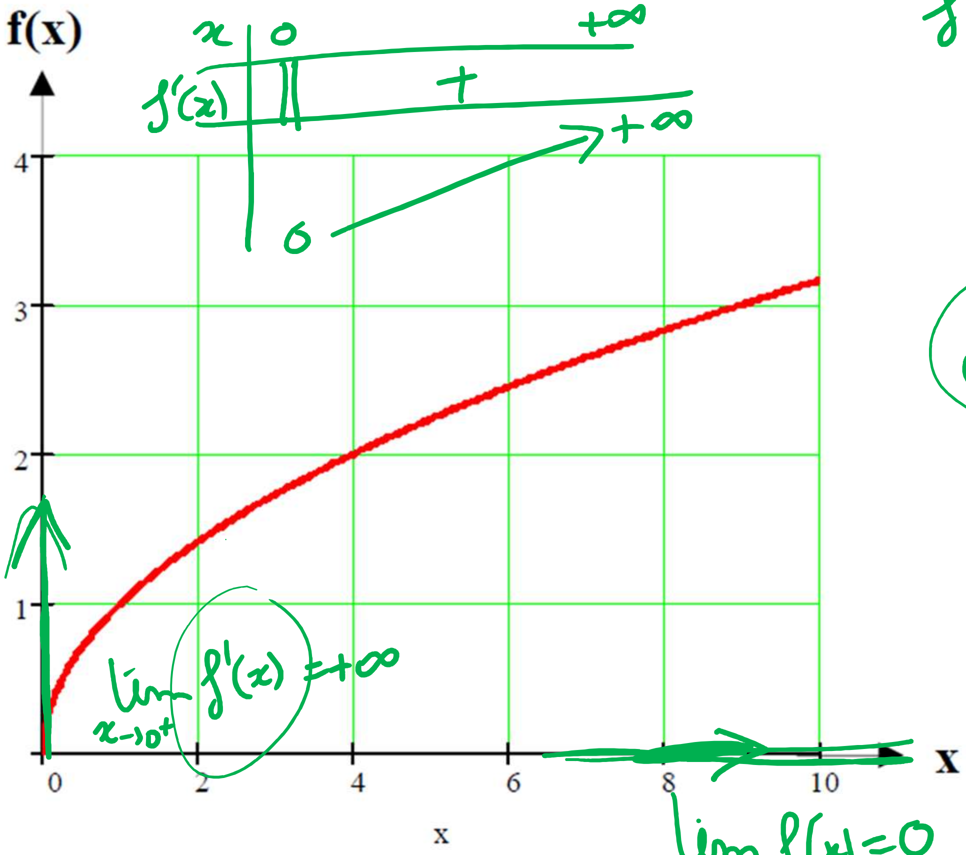
✓ La fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0.

$f(x) = \sqrt{x}$ $\quad D_f = \mathbb{R}_+ = [0;+\infty[$.

$f'(x) = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2} . x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \frac{1}{x^{1/2}}$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\quad D_{f'} = \mathbb{R}_+^* =]0;+\infty[$.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	+	
f	0	↗	$+\infty$



$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2\sqrt{x}} = +\infty$.

En O, la tangente à la courbe est donc verticale tournée vers les ordonnées positives.

$\frac{1}{2\sqrt{10^{-16}}} = \frac{1}{2.10^{-8}} = \frac{1}{2} . 10^{8}$

$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ et $\frac{1}{x^{-n}} = x^n$

✓ Redressement double alternance : $V(t) = |\sin(t)|$.

Page 20 chapitre 3

Dérivabilité de V en 0 : $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{V(t)-V(0)}{t-0} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{|\sin t|-0}{t-0} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{|\sin t|}{t}$

$f'(a) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

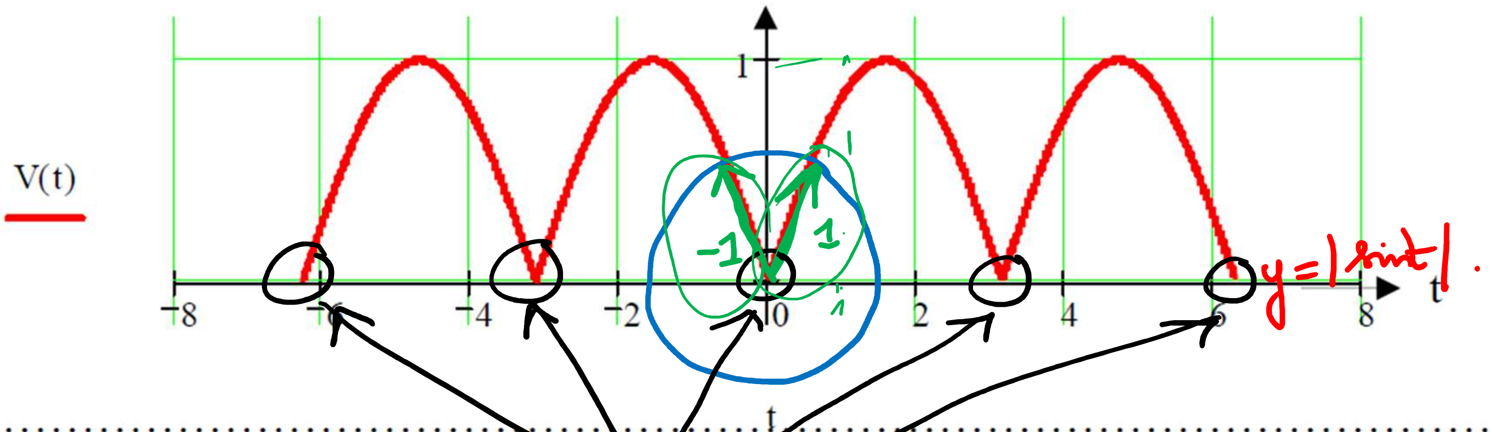
$\lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{|\sin t|}{t} = \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{\sin t}{t} = 1$ voir page 17

$\neq$ donc V n'est pas dérivable en 0

$\lim\limits_{t\to 0^-} \dfrac{|\sin t|}{t} = \lim\limits_{t\to 0^-} \dfrac{-\sin t}{t} = -1$

$t\to 0^+$ ou $\begin{cases} t\to 0 \\ t>0 \end{cases}$

$t\to 0^-$ ou $\begin{cases} t\to 0 \\ t<0 \end{cases}$



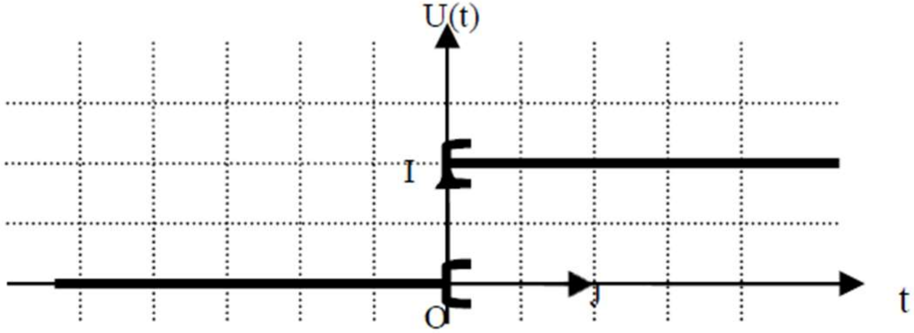
points anguleux où V n'est pas dérivable. $k\pi, k\in\mathbb{Z}$

✓ U, la fonction échelon-unité définie et représentée ci-dessous est-elle dérivable sur son ensemble de définition ?

Page 20 chapitre 3

$$U(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ 1 \text{ si } t \geq 0 \end{cases} . = \Phi(t) \text{ échelon de Heaviside.}$$

$U(0) = 1$ $\quad \mathcal{D}_U = \mathbb{R}$.



U est continue sur $\mathbb{R}^*$ se note : $U \in C^0(\mathbb{R}^*)$

U est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

Dérivabilité $\Longrightarrow$ Continuité.

$\not\Longleftarrow$ c'est faux.

Page 21 chapitre 3

3) Sens de variation

Soit f, une fonction dérivable sur un intervalle I :
Si $f' \geq 0$, f est croissante sur I
Si $f' \leq 0$, f est décroissante sur I

4) Extremum d'une fonction

<u>Définitions</u> :
- Une fonction f admet un maximum en x_0 sur un intervalle I où elle est définie, si pour tout x de I, on a : $f(x) \leq f(x_0)$
- Une fonction f admet un minimum en a sur un intervalle I où elle est définie, si pour tout x de I, on a : $f(x) \geq f(x_0)$
<u>Théorème</u> : Si une fonction f est dérivable sur un intervalle I contenant x_0 et si f' s'annule en x_0 en changeant de signe alors la fonction f présente un extremum en x_0.

x	a		x_0		b
$f'(x)$		+	0	−	
f		↗	M Maximum	↘	

x	a		x_0		b
$f'(x)$		−	0	+	
f		↘	m Minimum	↗	

Page 22 chapitre 3

6) Dérivées successives – Fonction de classe C^n

Définitions Si f est continue sur l'intervalle I, on note : $f \in C^0(I)$
Si f est dérivable sur l'intervalle I, et si $f' \in C^0(I)$, alors on note : $f \in C^1(I)$

Si f' est dérivable sur I, alors on note $f'' = (f')'$ que l'on appelle dérivée seconde de f. Si de plus $f'' \in C^0(I)$, alors on note $f \in C^2(I)$

Plus généralement on définit la dérivée $n^{\text{ième}}$ de f, notée $f^{(n)}$. Lorsque $f^{(n)} \in C^0(I)$, on note $f \in C^n(I)$.

Exemple

$$i(t) = \cos(\omega t + \varphi)$$

$(\cos u)' = -u' \sin u$ ici $u = \omega t + \varphi \Rightarrow u' = \omega$

$(\sin u)' = u' \cos u$

$i'(t) = -\omega \sin(\omega t + \varphi)$

$i''(t) = -\omega^2 \cos(\omega t + \varphi)$

$i''(t) + \omega^2 i(t) = -\omega^2 \cos(\omega t + \varphi) + \omega^2 \cos(\omega t + \varphi) = 0$

On dit que i est une solution de l'équation différentielle : $y''(t) + \omega^2 y(t) = 0$.

Page 39 chapitre 3

Exercices

Exercice 1 Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer son ensemble de définition, calculer sa fonction dérivée et son ensemble de définition :

$f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 1$; $f(x) = x + \frac{1}{x}$ avec $x \neq 0$; $g(t) = \frac{t+1}{t-1}$ avec $t \neq 1$;

$h(t) = \sqrt{t^2 + 1}$; $I(\omega) = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + 1}}$; $\boxed{X(\omega)} = \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2$; $Z(\omega) = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2}$;

$i(t) = I\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi)$; $f_0(C) = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$; $W(C) = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$; $W(Q) = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$;

$V(x) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{x^2 + R^2} - x\right)$

$X(\omega) = (\underbrace{L\omega - \frac{1}{C\omega}}_{=U})^2$ $\quad \mathcal{D}_X = \mathbb{R}^*$. $\quad (U^2)' = 2U'U$

$U' = \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)' = L.(\omega)' - \frac{1}{C}.\left(\frac{1}{\omega}\right)' = L - \frac{1}{C}.\frac{-1}{\omega^2}$

$U' = L + \frac{1}{C\omega^2}$

$X'(\omega) = 2\left(L + \frac{1}{C\omega^2}\right)\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$ $\quad \mathcal{D}_{X'} = \mathbb{R}^*$.

Notes

$$Z(\omega) = \underbrace{\sqrt{R^2+L^2\omega^2}}_{\geqslant 0} = U \qquad D_Z = \mathbb{R}.$$

Page 39 chapitre 3

$$\left(\sqrt{U}\right)' = \frac{U'}{2\sqrt{U}}$$

$$\left(U^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2} \cdot U' \cdot U^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} U' \cdot U^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot U' \frac{1}{U^{1/2}}$$

$$U' = \left(R^2 + L^2 \cdot \omega^2\right)'_\omega = \underbrace{\left(R^2\right)'_\omega}_{0} + L^2 \cdot \left(\omega^2\right)'_\omega = L^2 \cdot 2\omega$$

$$Z'(\omega) = \frac{\cancel{2}L^2 \cdot \omega}{\cancel{2}\underbrace{\sqrt{R^2+L^2\omega^2}}_{>0}}$$

$$\sqrt{R^2 + L^2 \cdot 10^{18}}$$

ω	$-\infty$		0		$+\infty$
$Z'(\omega)$		$-$	0	$+$	
Z	$+\infty$	$\searrow$	minimum	$\nearrow$	$+\infty$

$$Z(0) = \sqrt{R^2} = R \text{ car } R > 0$$

Page 39 chapitre 3

Notes $i(t) = \underbrace{I\sqrt{2}}_{cte} \times \cos(\overbrace{\omega t + \varphi}^{U})$ $\quad \mathcal{D}_i = \mathbb{R}.$

$(\cos U)' = -U' \cdot \sin U$

$U' = \omega$

$i'(t) = -I\sqrt{2} \cdot \omega \cdot \sin(\omega t + \varphi) \quad \mathcal{D}_{i'} = \mathbb{R}.$

$$\boxed{(\alpha \cdot f)' = \alpha' f + \alpha f' \qquad \alpha\ cte \qquad \alpha' = 0}$$

$(L > 0)$

$f_0(C) = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{L.C}}$

$L.C > 0 \iff C > 0 \qquad \mathcal{D}_{f_0} = \mathbb{R}_+^* = \mathbb{R}^{+*}$

$f_0'(C) = \dfrac{1}{2\pi} \dfrac{1}{\sqrt{LC}} = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{L}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{C}} = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{L}} \cdot C^{-\frac{1}{2}} \qquad (x^n)' = n.x^{n-1}$

$f_0'(C) = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{L}} \times \dfrac{-1}{2} \cdot C^{-\frac{1}{2}-1 = -\frac{3}{2}} = \dfrac{-C^{-\frac{3}{2}}}{4\pi\sqrt{L}} = -\dfrac{1}{4\pi\sqrt{L}.C^{\frac{3}{2}}} = -\dfrac{1}{4\pi C\sqrt{LC}}$

$C^{3/2} = (C^{\frac{1}{2}})^3 = (\sqrt{C})^3 \qquad C^{3/2} = C^{1+0,5} = C.\sqrt{C}$

Page 39 chapitre 3

$\mathbb{R} \neq 0$

Notes

$$V(x) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \times \left(\underbrace{\sqrt{x^2+R^2}}_{\geqslant 0} - x \right) \qquad \mathcal{D}_V = \mathbb{R}.$$

$$V'(x) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \cdot \left(\sqrt{\underbrace{x^2+R^2}_{U}} - x \right)' \longrightarrow \left(\sqrt{U}\right)' = \frac{U'}{2\sqrt{U}}$$

$$V'(x) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+R^2}} - 1 \right) \qquad \mathcal{D}_{V'} = \mathbb{R}.$$

Page 39 chapitre 3

Notes $g(t) = \dfrac{t+1}{t-1}$ $\qquad g'(t) = \dfrac{-2}{(t-1)^2}$

$$\frac{2}{-0{,}0001} = -2\times 10000$$

t	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(t)$		$-$	$\Vert$	$-$	
g	1	$\searrow$	$-\infty \ \Vert \ +\infty$	$\searrow$	1

$$\lim_{t\to 1^-} g(t) = \lim_{\substack{t\to 1\\ t<1}} \frac{t+1}{t-1} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

$t-1<0$

$$\lim_{t\to 1^+} g(t) = \lim_{t\to 1^+} \frac{t+1}{t-1} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{t\to -\infty\\ +\infty}} g(t) = \lim_{\substack{t\to -\infty\\ +\infty}} \frac{t+1}{t-1} = \text{“}\frac{-\infty}{-\infty}\text{”} \ \text{FI} \qquad \text{“}\frac{+\infty}{+\infty}\text{”}$$

$$= \lim_{t\to -\infty} \frac{t\left(1+\frac{1}{t}\right)}{t\left(1-\frac{1}{t}\right)}$$ Lycée

$$= \lim_{t\to -\infty} \frac{1+\frac{1}{t}}{1-\frac{1}{t}} = \frac{1}{1} = 1$$

IUT

$$\lim_{\substack{t\to -\infty\\ +}} \frac{t}{t} = 1$$

1

Exercice 4 Soit un générateur de force électromotrice E, de résistance interne r et le circuit ci-dessous. Déterminer la valeur de la résistance R pour que la puissance dissipée y soit maximum (on trouve $P(R) = E^2.\frac{R}{(R+r)^2}$)

$r>0$ >0 page 39

$$P(R) = E^2.\frac{R}{(R+r)^2} \qquad \mathcal{D}_P = \mathbb{R}_+^* \quad \text{Contexte GE11}$$

$$P'(R) = E^2.\left(\frac{R}{(R+r)^2}\right)' \qquad \left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V-UV'}{V^2}$$

$$= E^2.\frac{1.(R+r)^2 - R.2(R+r).1}{(R+r)^4} \longrightarrow (U^2)' = 2UU'$$

$$= E^2\,\frac{(R+r).[R+r-2R]}{(R+r).(R+r)^3} \qquad (R+r)' = 1$$

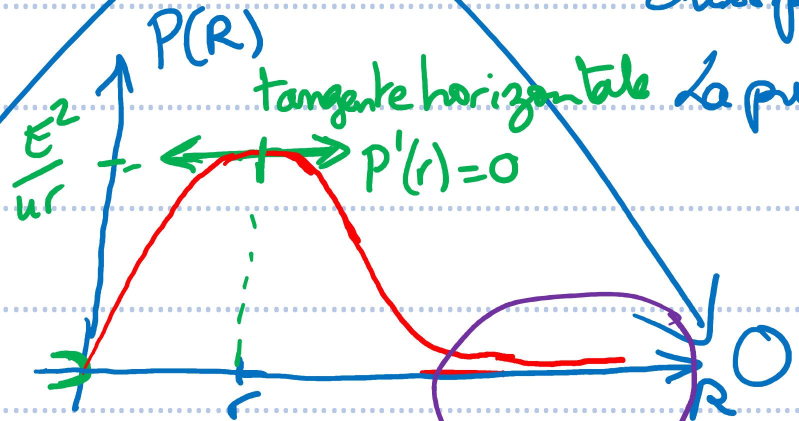
$$P'(R) = \overset{>0}{E^2}.\frac{r-R}{\underbrace{(R+r)^3}_{>0}} \geq 0 \iff r-R \geq 0 \iff -R \geq -r \overset{\times(-1)<0}{\iff} R \leq r$$

Notes

R	0		r		$+\infty$
$P'(R)$		$+$	0	$-$	
P	0	$\nearrow$	$\frac{E^2}{4r}$	$\searrow$	0

$P'(r)=0$: la tangente à C_p est horizontale en r

$$P(R) = E^2 \frac{R}{(R+r)^2}$$



Conclusion : La puissance dissipée est maximale pour $R=r$

La puissance maximale est $\frac{E^2}{4r}$.

asymptote horizontale en $+\infty$ d'équation $y=0$.

$$\lim_{R \to 0^+} P(R) = E^2 \times \frac{0}{r^2} = 0$$

$$P(r) = E^2 \times \frac{r}{(2r)^2} = \frac{E^2 r}{4r^2} = \frac{E^2}{4r}$$

$$\lim_{R \to +\infty} P(R) = \text{"} E^2 \times \frac{\infty}{\infty} \text{"} \; FI = \lim_{R \to +\infty} E^2 \frac{R}{R^2} = \lim_{R \to +\infty} \frac{E^2}{R} = 0$$

Exercice 4 Soit un générateur de force électromotrice E, de résistance interne r et le circuit ci-dessous. Déterminer la valeur de la résistance R pour que la puissance dissipée y soit maximum (on trouve $P(R) = E^2.\frac{R}{(R+r)^2}$)

on cherche P'(R) : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$u = R \quad u' = 1$

$v = (R+r)^2 \quad v' = 2(R+r)$

$\Rightarrow P'(R) = E^2\,\frac{(R+r)^2 - 2R(R+r)}{(R+r)^4}$

$$P'(R) = \frac{E^2((R+r)[-R+r])}{(R+r)(R+r)^3} = \frac{r-R}{(R+r)^3} \times E^2$$

$E^2 > 0$ car au carré

$(R+r)^3 > 0$ car somme de 2 résistances

donc le signe de P'(R) dépend de $r-R$:

$r - R < 0$

$-R < -r$

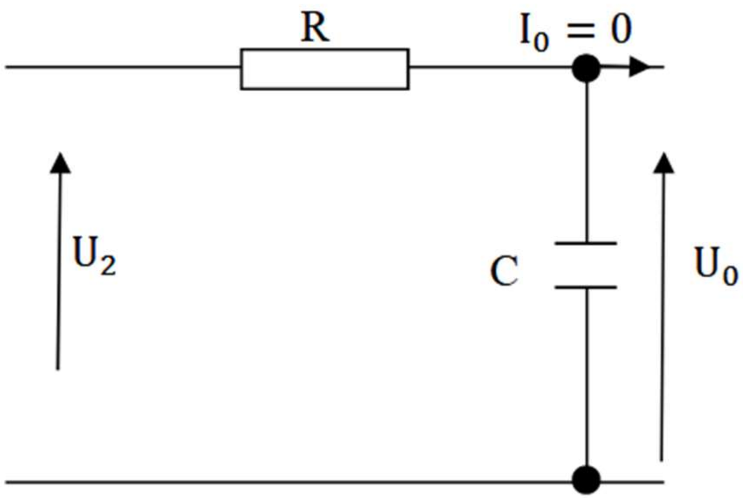
$R > r$

R	0		r		$+\infty$
$r-R$		+	0	−	
E^2			+		
$(R+r)^3$			+		
P'(R)		+	0	−	
P(R)	+0	↗	P(r)	↘	0

La valeur que doit prendre R est r (R = r) pour que la puissance dissipée soit au maximum c'est-à-dire que

$$P(r) = \frac{r}{(r+r)^2} \times E^2 = \frac{E^2 r}{4r^2} = \frac{E^2}{4r}$$

Exercice 2 On considère le filtre passe-bas suivant :



Sa fonction de transfert a pour module : $T = \frac{1}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}} = \left|\frac{U_1}{U_2}\right|$

1) Exprimer le module T en fonction de $\Omega = \frac{\omega}{\omega_0}$ avec $\omega_0 = \frac{1}{RC}$.
2) Etudier les variations et représenter graphiquement la fonction $\Omega \longmapsto T(\Omega)$ sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

Page 39 chapitre 3

n°2 page-39:

① $$T = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{\omega_0}\cdot\omega\right)^2}}$$

$$T(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{1+\Omega^2}} = (1+\Omega^2)^{-1/2}$$

②

$$T'(\Omega) = -\frac{1}{2}(1+\Omega^2)^{-3/2} \times 2\Omega \qquad (u^n(x))' = n\,u(x)^{n-1}\,u'(x)$$

$$T'(\Omega) = -\frac{\Omega}{(1+\Omega^2)^{3/2}}$$

▲ $\lim\limits_{\Omega \to +\infty} T(\Omega) = \lim\limits_{\Omega \to +\infty} (1+\Omega^2)^{-1/2} = 0$

▲ $T(0) = (1+0)^{-1/2}$

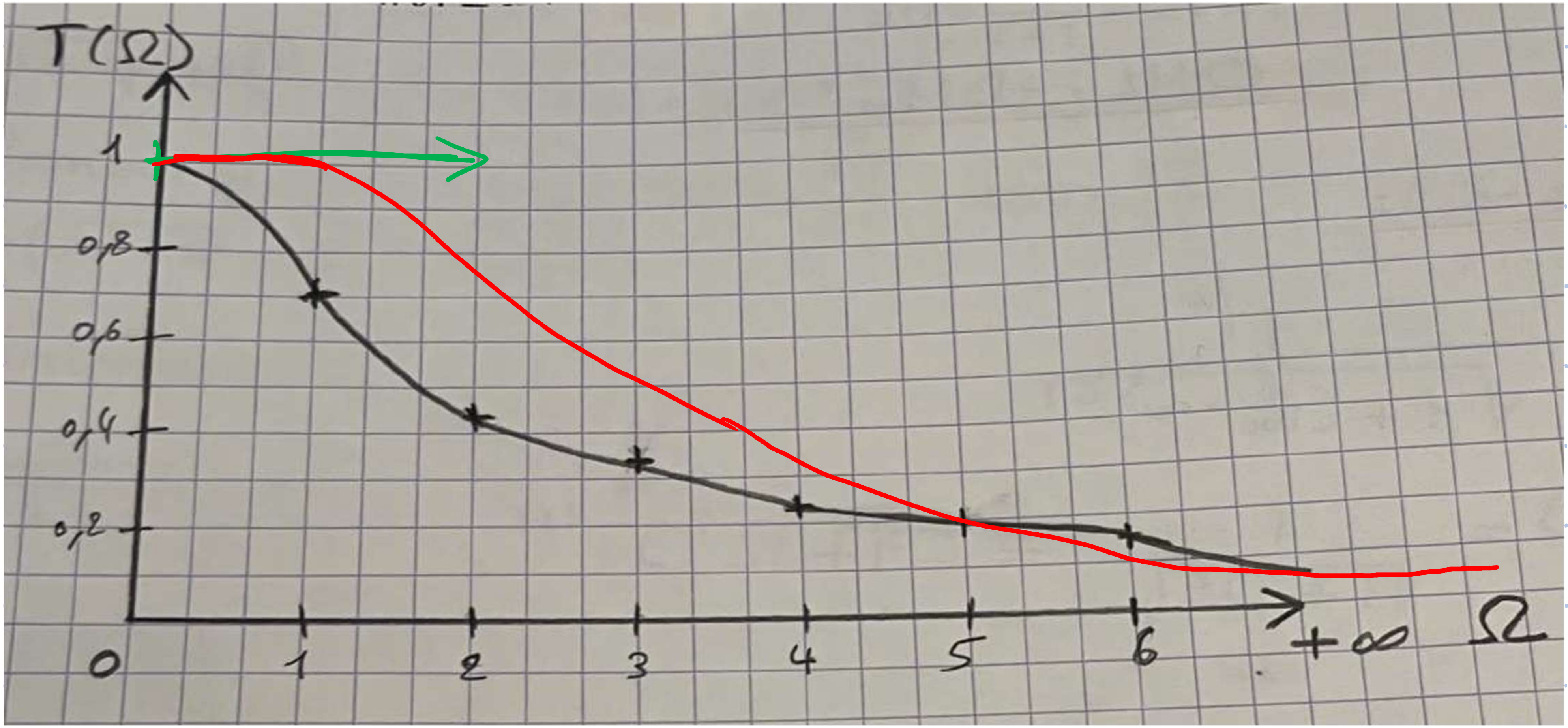
$= 1^{-1/2}$

$= 1$

Ω	0		$+\infty$
$T'(\Omega)$		$-$	
T	1	$\searrow$	0

Page 39 chapitre 3

Notes



Page 39 chapitre 3

Exercice 3 L'impédance d'un dipôle R, L, C sous une tension alternative de fréquence f est :

$Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$ avec : $\omega = 2\pi f$.

1) Déterminer le signe de la dérivée de la fonction $\omega \mapsto Z(\omega)$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
2) Etudier la fonction $\omega \mapsto I(\omega) = \frac{U}{Z(\omega)}$ où U est l'amplitude constante de la tension, puis la tracer.

1 $\mathcal{D}_Z = \mathbb{R}_+^*$.

$Z'(\omega) = \dfrac{U'}{2\sqrt{U}}$ où $U(\omega) = R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2 \Rightarrow U'(\omega) = \left(\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2\right)'$

$(f^2)' = 2f \cdot f'$

$U'(\omega) = 2\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)\underbrace{\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)'}_{= L - \frac{1}{C}\left(-\frac{1}{\omega^2}\right)}$

$U'(\omega) = 2\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)\left(L + \frac{1}{C\omega^2}\right)$

$Z'(\omega) = \dfrac{\cancel{2}\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) \cdot \left(L + \frac{1}{C\omega^2}\right)}{\cancel{2}\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} \geqslant 0 \iff L\omega - \frac{1}{C\omega} \geqslant 0$

Page 39 chapitre 3

$$Z'(\omega) \geq 0 \iff L\omega - \frac{1}{C\omega} \geq 0 \qquad \omega > 0$$

$$\iff L\omega \geq \frac{1}{C\omega} \underset{\times C\omega > 0}{\iff} LC\omega^2 \geq 1 \iff \omega^2 \geq \frac{1}{LC} \iff \omega \leq -\sqrt{\frac{1}{LC}} \text{ ou } \omega \geq \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

ω	0		$\frac{1}{\sqrt{LC}}$		$+\infty$
$Z'(\omega)$	||	$-$	0	$+$	

(2) $\omega \longmapsto I(\omega) = \frac{U}{Z(\omega)}$ où $U > 0$

$I'(\omega) = -\frac{U \cdot Z'(\omega)}{Z^2(\omega)}$ est donc du signe opposé à celui de $Z'(\omega)$.

ω	0		$\frac{1}{\sqrt{LC}}$		$+\infty$
$I'(\omega)$	||	$+$	0	$-$	
I	|| 0	$\nearrow$	$\frac{U}{R}$	$\searrow$	0

$$\lim_{\substack{\omega \to 0^+ \\ +\infty}} I(\omega) = \lim_{\substack{\omega \to 0^+ \\ +\infty}} \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} = 0 \quad 0$$

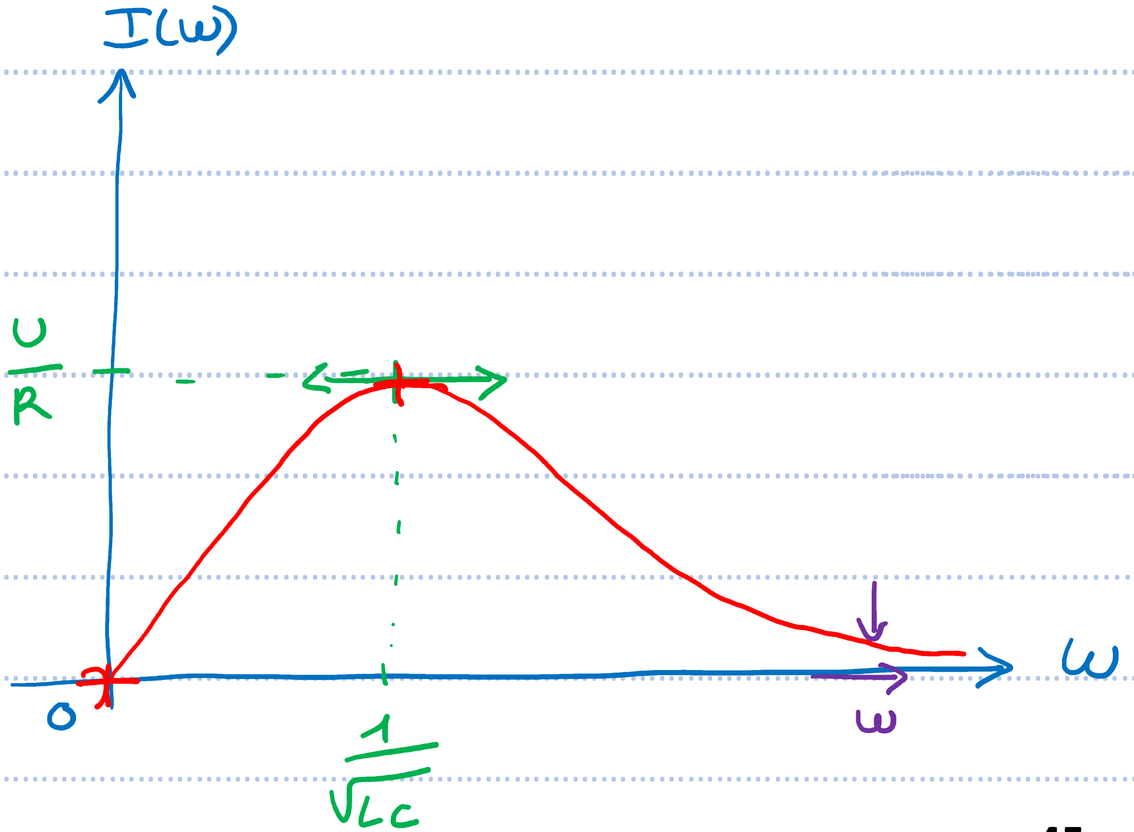
$$I\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}\right) = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{L}{\sqrt{LC}} - \frac{\sqrt{LC}}{C}\right)^2}} = \frac{U}{R}$$

ω	0		$\frac{1}{\sqrt{LC}}$		$+\infty$
$I'(\omega)$		$+$	0	$-$	
I	0	$\nearrow$	$\frac{U}{R}$	$\searrow$	0

Page 39 chapitre 3

$I'\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}\right) = 0 \Rightarrow$ tangente horizontale en $\frac{1}{\sqrt{LC}}$

asymptote horizontale en $+\infty$, d'équation $y = 0$



Page 26 chapitre 3

Partie B : Calcul de limites

Formes indéterminées FI **Soit x_0, un nombre réel ou $\pm\infty$.**

$$\frac{0}{0} \quad , \quad \frac{\infty}{\infty} \quad , \quad 0\cdot\infty \quad , \quad \boxed{\infty - \infty}$$

$$\boxed{0^0 \quad , \quad \infty^0 \quad , \quad 1^\infty}$$

$\frac{1}{\infty}$ $\frac{1}{\infty}$ $\frac{1}{\infty}\times\infty$ $x^2 - x^3$

$\frac{x^2}{x^3} = \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

$\frac{3x^3}{x^2} = 3x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$

$\frac{3x^5}{4x^5} = \frac{3}{4} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{3}{4}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2(1-x) = -\infty$

$+\infty(-\infty)$

$\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

<u>Remarque</u> $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \exp\big(g(x).\ln(f(x))\big)$ cette écriture permet de « lever » les formes indéterminées suivantes : $"L^\infty", "0^0" \text{ et } "\infty^0"$

Voici quelques techniques permettant de « lever » une forme indéterminée :

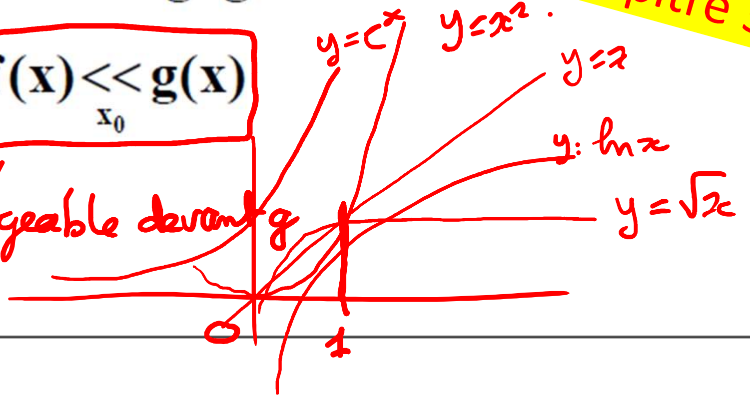
Technique 1 : Croissance comparée

Page 26 chapitre 3

Définition Soit x_0 un réel ou $\pm\infty$. On dit que la fonction f est négligeable devant la fonction g en x_0 lorsque : $\boxed{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0}$. On note alors : $\boxed{f(x) \underset{x_0}{<<} g(x)}$

$g(x) \to +\infty$

"f est négligeable devant g en x_0"



Théorèmes Soient : $0 < \alpha < \beta$

$$\ln(x) \underset{\infty}{<<} x^{\alpha} \underset{\infty}{<<} x^{\beta} \underset{\infty}{<<} e^{x}$$

$0 < x < 1$ $\quad x^2 > x^3$.

Exemples : Calculer $\lim_{x\to\infty} f(x)$ où $f(x) = x.e^{x} - x^{2}$

$e^x - x$

FI "$\infty - \infty$"

Lycée

$f(x) = xe^x\left(1 - \frac{x^2}{xe^x}\right)$

$= xe^x\left(1 - \frac{x}{e^x}\right)$ $\quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$

$= \lim_{x\to+\infty} xe^x$

IUT

$x \underset{\infty}{<<} e^x$

$x^2 \underset{\infty}{<<} xe^x$ donc

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} xe^x = +\infty$.

Page 26 chapitre 3

Calculer $\lim_{x \to \infty} f(x)$ où $f(x) = \dfrac{\ln(4x)}{x}$ FI "$\dfrac{\infty}{\infty}$" $\ln(A.B) = \ln A + \ln B$.

$f(x) = \dfrac{\ln 4 + \ln x}{x} = \dfrac{\ln 4}{x} + \dfrac{\ln x}{x}$

Comme $\ln x \underset{\infty}{<<} x$ alors $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

Donc $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

$\lim_{x \to +\infty} x.\ln x = +\infty \times +\infty$

$= +\infty.$

Technique 2 : Expression conjuguée

$$\boxed{(A-B)(A+B) = A^2 - B^2}$$

Page 27 chapitre 3

Exemples : Calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ où $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$ FI "$\dfrac{0}{0}$"

$$f(x) = \frac{\overset{A}{\sqrt{1+x^2}} - \overset{B}{1}}{x} \times \frac{\sqrt{1+x^2}+1}{\sqrt{1+x^2}+1} = \frac{\overset{A^2}{\sqrt{1+x^2}^2} - \overset{B^2}{1^2}}{x\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}$$

$$f(x) = \frac{1+x^2-1}{x\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)} = \frac{x^2}{x\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{0}{2} = 0$$

donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

Calculer $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ où $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+3x-3}-x}{x-1}$ $\quad \lim\limits_{x\to 1} f(x) =$ "$\dfrac{0}{0}$" FI

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+3x-3}-x}{x-1} \times \frac{\sqrt{x^2+3x-3}+x}{\sqrt{x^2+3x-3}+x} = \frac{x^2+3x-3-x^2}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3x-3}+x\right)}$$

$$f(x) = \frac{3\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}\left(\sqrt{x^2+3x-3}+x\right)} \qquad \text{donc } \lim_{x\to 1} f(x) = \frac{3}{\sqrt{1}+1} = \frac{3}{2}$$

Technique 3 : Théorèmes de comparaison

Page 27 chapitre 3

Soient f, g et h trois fonctions définies sur [a,b[où b est un réel ou $\pm\infty$

1) Si $\forall x \in [a,b[\ f(x) \le g(x)$ **et** $\lim_{x\to b} g(x) = -\infty$, **alors** $\lim_{x\to b} f(x) = -\infty$

2) Si $\forall x \in [a,b[\ f(x) \ge g(x)$ **et** $\lim_{x\to b} g(x) = \infty$, **alors** $\lim_{x\to b} f(x) = \infty$

3) Si $\forall x \in [a,b[\ |f(x)| \le g(x)$ **et** $\lim_{x\to b} g(x) = 0$, **alors** $\lim_{x\to b} f(x) = 0$

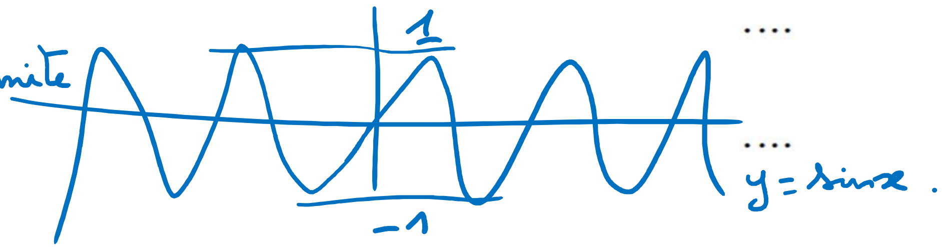
4) Si $\forall x \in [a,b[\ h(x) \le f(x) \le g(x)$ **et** $\lim_{x\to b} h(x) = \lim_{x\to b} g(x) = L$, **alors** $\lim_{x\to b} f(x) = L$ (théorème des gendarmes)

FI

L

Exemples : Calculer $\lim_{x\to\infty} f(x)$ où $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

n'a pas de limite en $+\infty$



On sait que $-1 \le \sin x \le 1$

$\boxed{x>0}$

$\times \frac{1}{x} > 0$ $\quad -\frac{1}{x} \le \frac{\sin x}{x} \le \frac{1}{x}$ $\quad \times \frac{1}{x} > 0$

D'après le th. des Gendarmes, comme $\lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

Technique 4 : Equivalence

Page 29 chapitre 2

Définition **Soit x_0 un réel ou $\pm\infty$. On dit que la fonction f est équivalente à la fonct[illegible]**
en x_0 lorsque : $\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1}$. On note alors : $f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$

$\sim$

Exemples : Montrer que les fonctions f et g suivantes sont équivalentes en ∞ :

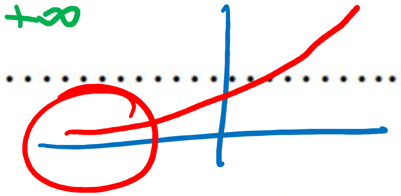
ch x "cosinus hyperbolique"

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ // et } g(x) = \frac{e^x}{2} :$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{e^x + e^{-x}}{2}}{\frac{e^x}{2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x}$$

$e^x \to +\infty$, $e^{-x} \to 0$, $e^x \to +\infty$

FI "$\frac{\infty}{\infty}$"

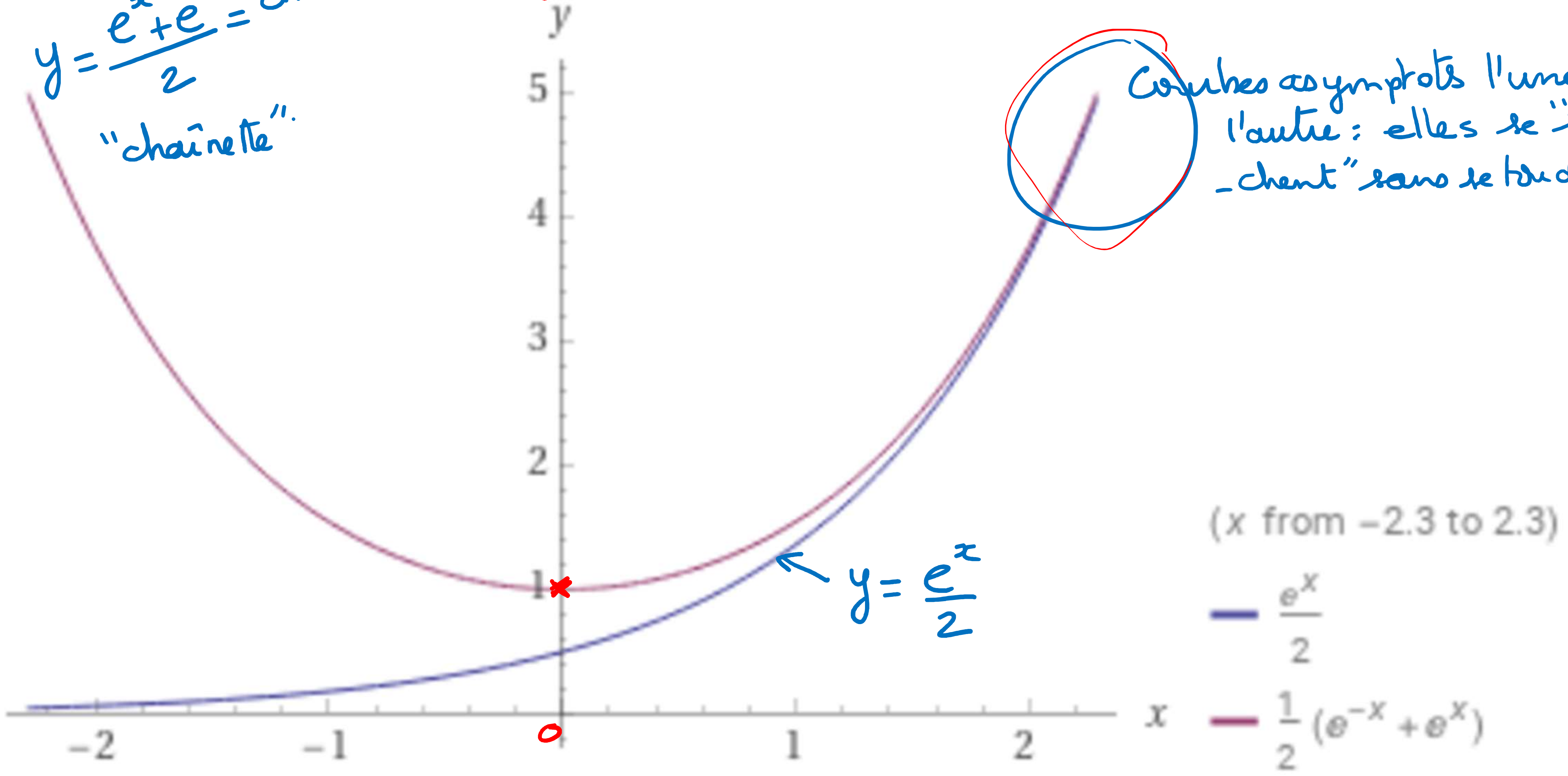


$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{e^x}{e^x} + \frac{e^{-x}}{e^x} = 1 + e^{-2x} \quad \text{donc} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

alors $f(x) \underset{+\infty}{\sim} g(x)$.

$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \text{ch}\, x$ cosinus hyperbolique.

"chaînette".



$y = \frac{e^x}{2}$

Courbes asymptotes l'une de l'autre : elles se "rapprochent" sans se toucher.

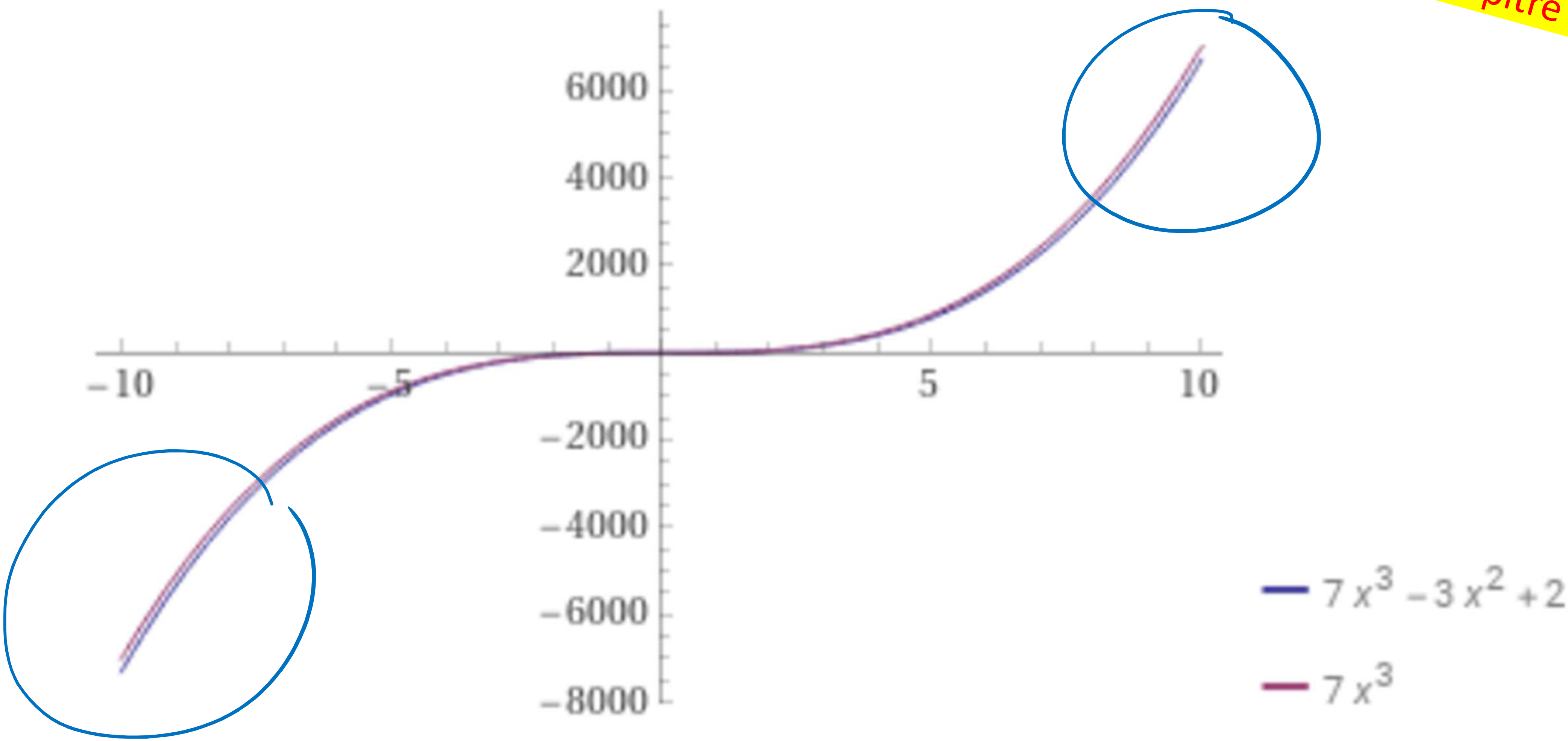
Page 29 chapitre 2

Chercher un équivalent de f en ∞ où $f(x) = 7x^3 - 3x^2 + 2$

$- f(x) \underset{+\infty}{\sim} 7x^3$ car :

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{7x^3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{7x^3 - 3x^2 + 2}{7x^3} = \lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \frac{3}{7x} + \frac{2}{7x^3} = 1$

Page 29 chapitre 2



Page 29 chapitre 2

Ne pas oublier le coefficient !

Tout polynôme est équivalent en $\pm\infty$ à son terme de plus haut degré.
Tout polynôme est équivalent en 0 à son terme de plus bas degré.

....

....

....

$f(x) \underset{0}{\sim} f(0) + x.f'(0)$

Page 29 chapitre 2

Si f est dérivable en x_0, alors : $f(x) \underset{x_0}{\sim} \boxed{f(x_0) + (x - x_0).f'(x_0)}$

équation de la tangente à C_f en x_0.

Compléter :

$\sin(x) \underset{0}{\sim} \sin 0 + x.\cos 0$ donc $\boxed{\sin x \underset{0}{\sim} x}$

$(\sin x)' = \cos x$

$e^x \underset{0}{\sim} e^0 + x.e^0$ donc $\boxed{e^x \underset{0}{\sim} 1 + x}$

$(e^x)' = e^x$

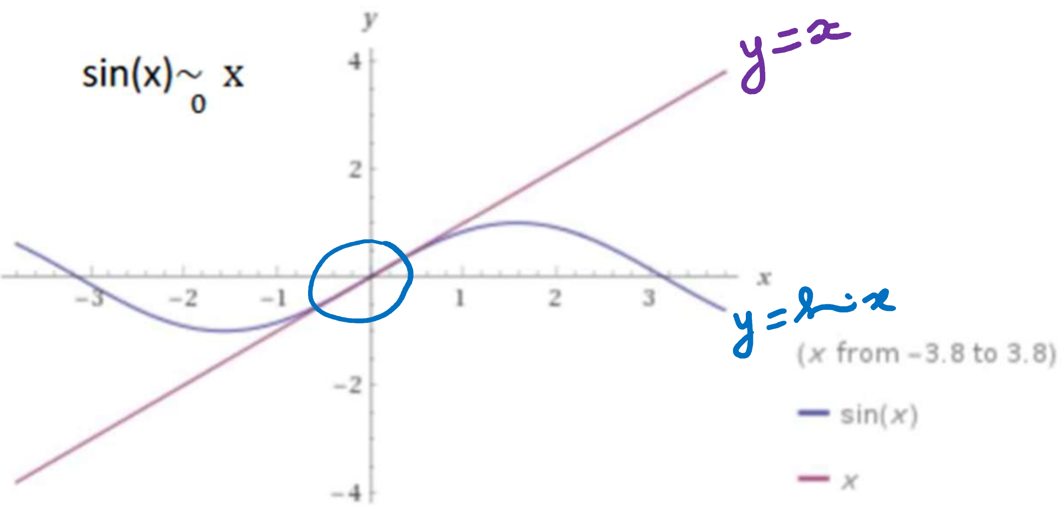
$\ln(1+x) \underset{0}{\sim} \ln(1+0) + \frac{1}{1+0}.x$ donc $\boxed{\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x}$

$(\ln(1+x))' = \frac{1}{1+x}$ $\quad (\ln u)' = \frac{u'}{u}$.

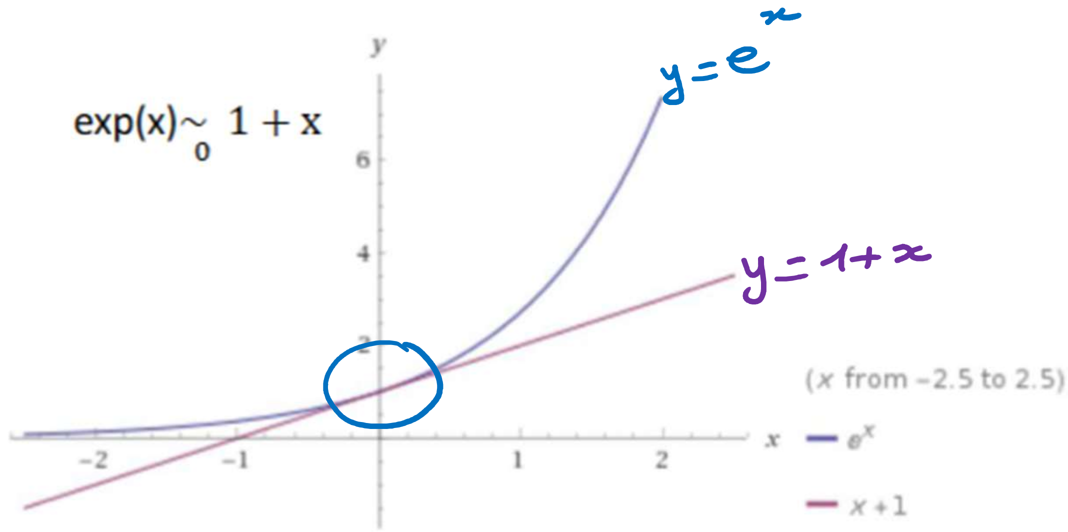
$\sqrt{1+x} \underset{0}{\sim} \sqrt{1+0} + x.\frac{1}{2\sqrt{1+0}}$ donc $\boxed{\sqrt{1+x} \underset{0}{\sim} 1 + x.\frac{1}{2}}$

$(\sqrt{1+x})' = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$ $\quad u \Rightarrow u' = 1$ $\quad (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

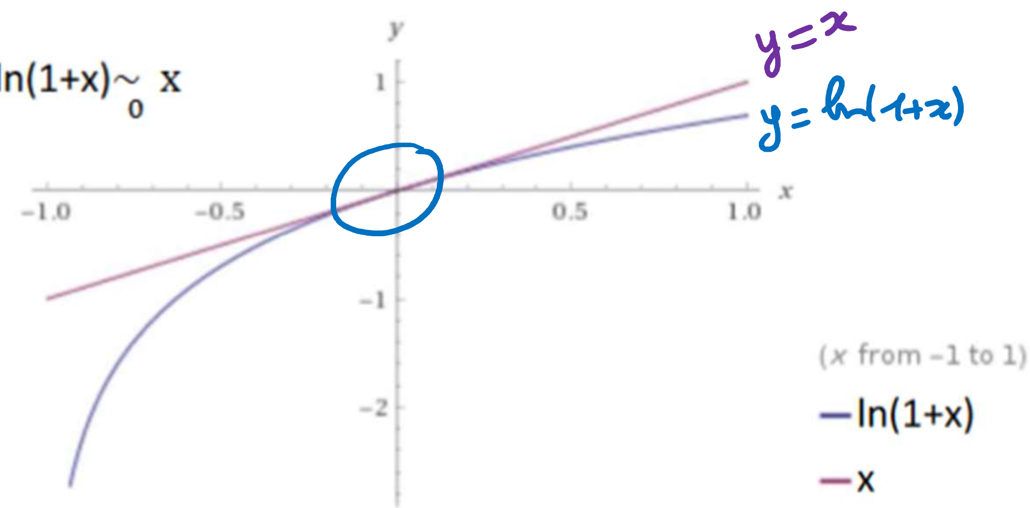
$\sin(x) \underset{0}{\sim} x$



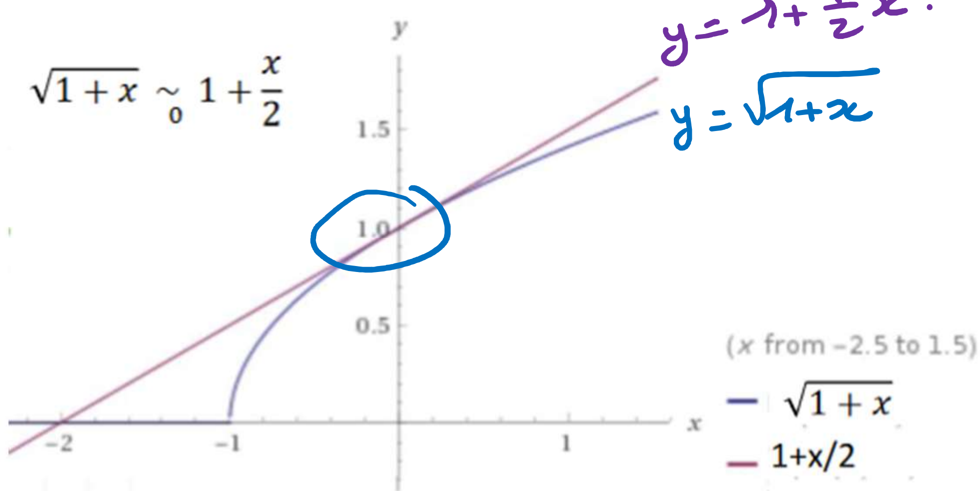
$\exp(x) \underset{0}{\sim} 1 + x$



$\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$



$\sqrt{1+x} \underset{0}{\sim} 1 + \frac{x}{2}$

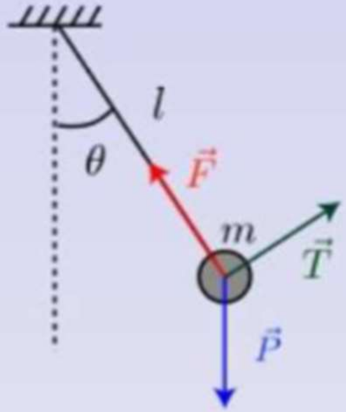


Applications en physique :

Le pendule pesant

- Equation en θ
- Mise en équation :

$$\ddot{\theta} + k\dot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$



- Equation différentielle :
    - Non linéaire !
    - Résolution analytique compliquée
- Solutions possibles :
    - Si θ petit alors $\sin\theta \simeq \theta$: oscillateur harmonique

$$\ddot{\theta} + k\dot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

    - Résolution numérique

$(1+x)^{\alpha} \underset{0}{\sim} (1+0)^{\alpha} + x \cdot \alpha \cdot (1+0)^{\alpha-1} \cdot 1$ donc $\boxed{(1+x)^{\alpha} \underset{0}{\sim} 1+\alpha x}$ Page 30 chapitre 2

$\alpha \in \mathbb{R}$

$(U^{\alpha})' = \alpha \cdot U^{\alpha-1} \cdot U'$ ici $U = 1+x \Rightarrow U' = 1$ $\left((1+x)^{\alpha}\right)' = \alpha(1+x)^{\alpha-1} \cdot 1$

$\tan(x) \underset{0}{\sim} \underbrace{\tan 0}_{0} + x \cdot \frac{1}{\cos^2 0}$ donc $\boxed{\tan x \underset{0}{\sim} x}$

$f(x) \underset{0}{\sim} f(0) + x \cdot f'(0)$ - Exple $\underbrace{(1+x)^{1/2}}_{\sqrt{1+x}} \underset{0}{\sim} 1 + \frac{1}{2}x$

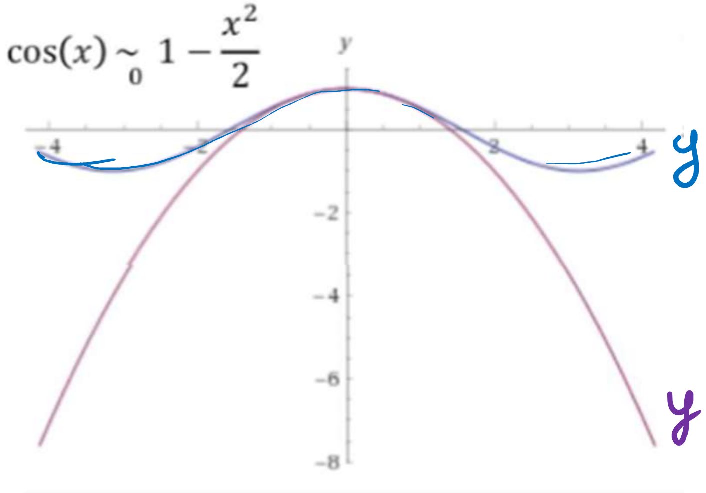
$\cos(x) \underset{0}{\sim} \underbrace{\cos 0}_{1} + x \cdot (-\underbrace{\sin 0}_{0})$ donc $\cos x \underset{0}{\sim} 1$

Page 30 chapitre 2

Si f est 2 fois dérivable en x_0, alors : $f(x) \underset{x_0}{\sim} \underbrace{f(x_0)+(x-x_0).f'(x_0)}_{\text{tangente.}} + \frac{(x-x_0)^2}{2}.f''(x_0)$

$\cos(x) \underset{0}{\sim} \cos 0 - x\sin 0 + \frac{x^2}{2}.(-\cos 0)$ donc $\cos x \underset{0}{\sim} 1 - \frac{x^2}{2}$

$(\cos x)'' = (-\sin x)' = -\cos x$

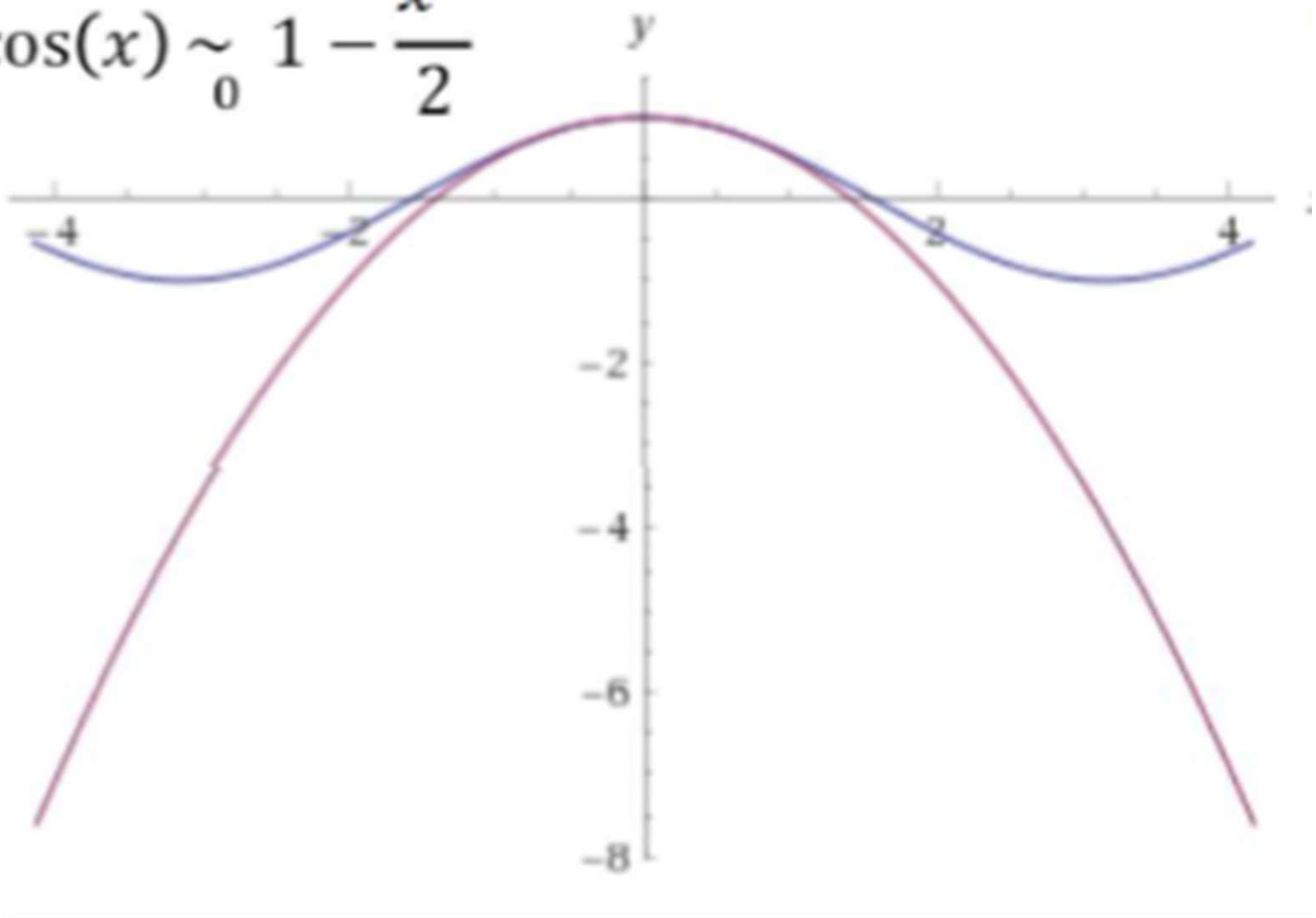


$y = \cos x$

$y = 1 - \frac{x^2}{2}$

Page 30 chapitre 2

$$\cos(x) \underset{0}{\sim} 1 - \frac{x^2}{2}$$



Page 30 chapitre 2

Opérations

- Soient f_1, g_1, f_2, g_2 quatre fonctions et x_0 un réel ou $\pm\infty$.

$$\text{Si } \begin{cases} f_1 \underset{x_0}{\sim} g_1 \\ \text{et} \\ f_2 \underset{x_0}{\sim} g_2 \end{cases} \text{ alors } \begin{cases} f_1.f_2 \underset{x_0}{\sim} g_1.g_2 \\ \text{et} \\ \dfrac{f_1}{f_2} \underset{x_0}{\sim} \dfrac{g_1}{g_2} \end{cases}$$

(pour le quotient, f_2 et g_2 ne s'annule pas pour x voisin de x_0 sauf peut-être en x_0)

- f, g, h sont trois fonctions,

$$\text{Si } f(X) \underset{X_0}{\sim} g(X) \text{ et } \lim_{x \to x_0} h(x) = X_0 \text{, alors } f(h(x)) \underset{x_0}{\sim} g(h(x))$$

Page 30 chapitre 2

<u>Exemples</u> :

Compléter : $f(x) = \frac{-x^7 + 3x^2}{x(x-1)^3} \underset{\infty}{\sim} \frac{-x^7}{x \cdot x^3} = \frac{-x^7}{x^4} = -x^3$

donc $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (-x^3) = -\infty$.

$e^{\sqrt{x}} \underset{x \to 0}{\sim}$

On sait que $e^X \underset{X \to 0}{\sim} 1 + X$ page 29.

On pose $X = \sqrt{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$

donc $\boxed{e^{\sqrt{x}} \underset{x \to 0}{\sim} 1 + \sqrt{x}}$

$\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \underset{x \to +\infty}{\sim}$

On sait que $\ln(1 + X) \underset{X \to 0}{\sim} X$

On pose $X = \frac{1}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

donc $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{x}$

Page 31 chapitre 2

<u>Théorème</u> Soient f, g deux fonctions et x_0 un réel ou $\pm\infty$.

$$\textbf{Si } f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x) \textbf{ alors } \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x)$$

<u>Exemples</u> : Calculer $\lim_{x\to\infty} f(x)$ où $f(x) = \dfrac{(1-x)^7.(x+1)}{(x^3+2x^2-1).(3x^2-1)^2}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \text{"}\dfrac{\infty}{\infty}\text{"}$ FI

$f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{(-x)^7 \times x}{x^3 \times (3x^2)^2} = \dfrac{-x^8}{x^3 \times 9x^4}$

$f(x) \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{x}{9}$

donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{x}{9}\right) = -\infty.$

Page 31 chapitre 2

* Calculer $\lim_{x\to 0} f(x)$ où $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{\tan(x)}$

$\lim_{x\to 0} f(x) = "\frac{0}{0}"$ FI

$f(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{x}{x} = 1$ d'après page 29.

donc $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$.

* $\lim_{x\to 0} f(x)$ où $f(x) = \dfrac{\ln(1+2x)}{\tan(3x)}$ $\lim_{x\to 0} f(x) = "\frac{0}{0}"$ FI.

$\ln(1+2x) \underset{x\to 0}{\sim}$?? On sait que $\ln(1+X) \underset{X\to 0}{\sim} X$ page 29.

On pose $X = 2x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

Alors $\ln(1+2x) \underset{x\to 0}{\sim} 2x$

$\tan(3x) \underset{x\to 0}{\sim}$?? On pose $X = 3x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

$\tan(3x) \underset{x\to 0}{\sim} 3x$ car $\tan X \underset{0}{\sim} X$

donc $f(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{2\cancel{x}}{3\cancel{x}}$

$\lim_{x\to 0} f(x) = \dfrac{2}{3}$

Notes $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \text{"}1^\infty\text{"}$ FI.

Page 32 chapitre 2

$$\ln X^\alpha = \alpha \ln X$$

$$\boxed{X^\alpha} = e^{\ln X^\alpha} = \boxed{e^{\alpha \ln X}}$$

$$f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e^{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x} = e^{x.\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim}.$$

On pose $X = \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

On sait que $\ln(1+X) \underset{X\to 0}{\sim} X$ page 29.

donc $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$ et $x.\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} 1$ donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = e$

Notes

$$f(x) = \frac{h(x)}{g(x)} \qquad \lim_{x \to x_0} f(x) = \text{"}\frac{0}{0}\text{"}$$

$\to h(x_0) = 0$

$\to g(x_0) = 0.$

$$f(x) \underset{x_0}{\sim} \boxed{\frac{\cancel{h(x_0)}^{\,0} + (x - x_0) h'(x_0)}{\cancel{g(x_0)}_{\,0} + (x - x_0) . g'(x_0)}} = \frac{\cancel{(x - x_0)} h'(x_0)}{\cancel{(x - x_0)} g'(x_0)} = \frac{h'(x_0)}{g'(x_0)}$$

"$\frac{0}{0}$"

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \frac{h'(x_0)}{g'(x_0)}$$

"$\frac{\infty}{\infty}$"

Technique 5 : **Théorème de l'Hospital** ô

Page 32 chapitre 2

Si f et g sont deux fonctions dérivables sur]a,x0[, dont la limite en x0 est nulle ou infinie, si g'(x) ne s'annule pas sur]a,x0[, et si la limite : $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe, alors :

"$\frac{0}{0}$" "$\frac{\infty}{\infty}$"

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Exemples :

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x^2+3x}=$ "$\frac{0}{0}$" FI

Th de l'Hospital : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^2+3x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{(x^2+3x)'}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x}{2x+3}=\frac{1}{3}$

(autre méthode : $\frac{\sin x}{x^2+3x}\underset{0}{\sim}\frac{x}{3x}=\frac{1}{3}$ ← page 19 donc $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\frac{1}{3}$

Page 32 chapitre 2

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\ln(x)} = \text{"}\frac{+\infty}{+\infty}\text{"} \quad FI$$

D'après le th de l'Hospital : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\ln x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{x})'}{(\ln x)'} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{2\sqrt{x}}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{2} = +\infty$

(autre méthode :

$\underbrace{\ln x \underset{\infty}{<<} \sqrt{x}}_{\text{croissance comparée}}$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\ln x} = +\infty$)

Page 33 chapitre 2

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x)-1}{x^3+5x^2} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"} \quad \text{FI}$$

th de l'Hospital : $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x)-1}{x^3+5x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin(2x)}{3x^2+10x} \overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{" FI}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-4\cos(2x)}{6x+10} = \frac{-4}{10} = \frac{-2}{5}$

(autre méthode : $\cos X \underset{X\to 0}{\sim} 1 - \frac{X^2}{2}$ page 19. donc $X = 2x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, $\cos(2x) \underset{x\to 0}{\sim} 1 - \frac{4x^2}{2} = 1-2x^2$

$\frac{\cos(2x)-1}{x^3+5x^2} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1-2x^2-1}{5x^2} = \frac{-2x^2}{5x^2} = -\frac{2}{5}$)

donc $\lim_{x\to 0} f(x) = -\frac{2}{5}$

Exercice 5 Calculer la limite des fonctions suivantes au « point » a donné.

Page 40 chapitre 3

1) $f(x) = \dfrac{(x^4-1)(x^2+3)}{2x(x^3-2)(x^2+2)}$ a=∞ $\lim_{x\to+\infty} f(x) =$

2) $g(x) = \dfrac{(x^7-2x)(x-4)}{(x^6-2x)(x^3-x)}$ a=∞ $\lim_{x\to+\infty} g(x) =$

3) $h(x) = \dfrac{x^6-3x^4+1}{(x+1)(x^4+3)}$ a=∞ $\lim_{x\to+\infty} h(x) =$

4) $f(x) = \dfrac{x^2+2x-3}{x^3-1}$ a=1 $\lim_{x\to 1} f(x) =$

5) $f(x) = \dfrac{x^3+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}-2}$ a=∞ $\lim_{x\to+\infty} f(x) =$

6) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$ a=3 $\lim_{x\to 3} f(x) =$

7) $f(x) = \dfrac{3x^5 \cdot \sin(5x^4)}{(3x^2+2x)^4 \cdot \ln(1+2x)}$

a=0

$\lim_{x\to 0} f(x) =$

1) $f(x) = \dfrac{(x^4-1)(x^2+3)}{2x(x^3-2)(x^2+2)}$ a=∞

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \text{"}\dfrac{\infty}{\infty}\text{"}$ FI.

* $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{x^4 \times x^2}{2x \times x^3 \times x^2} = \dfrac{\cancel{x^6}}{2\cancel{x^6}}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{1}{2}$.

* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \text{"}\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}\text{"}$ FI

$\dfrac{3}{8\times(0{,}0001)} = \dfrac{3}{8}\cdot 1000$

$f(x) \underset{-\infty}{\sim} \dfrac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \dfrac{1}{2}$.

* $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \dfrac{-3}{-8\times 0}$ $\begin{cases} 0^+ \to +\infty \\ 0^- \to -\infty \end{cases}$.

$f(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{(-1)\times 3}{2x\times(-2)\times 2} = \dfrac{-3}{-8x} = \dfrac{3}{8x}$ et $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{3}{8x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty \end{cases}$

2) $g(x)=\dfrac{\boxed{(x^7-2x)}(x-4)}{\boxed{(x^6-2x)}(x^3-x)}$ a=∞

$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \text{"}\dfrac{\infty}{\infty}\text{"}$

$g(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{x^7 \times x}{x^6 \times x^3} = \dfrac{x^8}{x^9} = \dfrac{1}{x}$

donc $\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

3) $h(x) = \dfrac{x^6 - 3x^4 + 1}{(x+1)(x^4+3)}$ $\quad a = \infty$

$$\lim_{x \to +\infty} h(x) = \text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}. \quad \text{FI}.$$

$$h(x) \underset{\substack{+\infty \\ -}}{\sim} \frac{x^6}{x \times x^4} = \frac{x^6}{x^5} = x \quad \text{donc} \lim_{x \to +\infty} h(x) = +\infty.$$

$$\text{et} \lim_{x \to -\infty} h(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0} h(x) = h(0) = \frac{1}{3}.$$

4) $f(x) = \frac{x^2+2x-3}{x^3-1}$ a=1

$\lim_{x\to 1} f(x) = "\frac{0}{0}"$ FI .

$g(x) = x^2 + 2x - 3 \underset{x\to 1}{\sim} \underbrace{g(1)}_{0} + \underbrace{g'(1)}_{4} \cdot (x-1) = 4(x-1)$

$g'(x) = 2x+2$

$h(x) = x^3 - 1 \underset{x\to 1}{\sim} \underbrace{h(1)}_{0} + \underbrace{h'(1)}_{3} \cdot (x-1) = 3(x-1)$

$h'(x) = 3x^2$

$f(x) \underset{x\to 1}{\sim} \frac{4(x-1)}{3(x-1)} = \frac{4}{3}$ donc $\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{4}{3}$.

$$5)\ f(x)=\frac{x^3+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}-2}\quad a=\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}$$

$\frac{5}{2}=2{,}5.$

$$f(x) \underset{\infty}{\sim} \frac{x^3}{x^{1/2}} = x^{3-\frac{1}{2}} = x^2\sqrt{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

6) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1} - 2}{x-3}$ $a=3$

$A - B$

expression conjuguée $\sqrt{\ }$

$\lim_{x \to 3} f(x) = " \dfrac{0}{0} "$

$(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x-3} \times \frac{\sqrt{x+1} + 2}{\sqrt{x+1} + 2} = \frac{\sqrt{x+1}^2 - 2^2}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)} = \frac{x+1-4}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}$$

$$f(x) = \frac{\cancel{x-3}}{\cancel{(x-3)}(\sqrt{x+1}+2)} = \frac{1}{\sqrt{x+1}+2}$$

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} \frac{1}{\sqrt{x+1}+2} = \frac{1}{\underbrace{\sqrt{3+1}}_{2}+2} = \frac{1}{4}.$$

Puis faire le 2^e exple page 27.

7) $f(x) = \dfrac{3x^5 \cdot \sin(5x^4)}{(3x^2+2x)^4 \cdot \ln(1+2x)}$ $\quad a = 0$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = ??$ $\quad$ "$\frac{0}{0}$" FI

$\sin(5x^4) \underset{x \to 0}{\sim} ??$ $\quad$ On sait que $\sin X \underset{X \to 0}{\sim} X$ donc on pose $X = 5x^4 \xrightarrow[x \to 0]{} 0$

$\sin(5x^4) \underset{x \to 0}{\sim} 5x^4.$

$(3x^2+2x)^4 \underset{0}{\sim} (2x)^4 = 16x^4$

$\ln(1+2x) \underset{x \to 0}{\sim} ??$ $\quad$ On sait que $\ln(1+X) \underset{X \to 0}{\sim} X$, on pose $X = 2x \xrightarrow[x \to 0]{} 0$

et $\ln(1+2x) \underset{x \to 0}{\sim} 2x.$

$f(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{3x^5 \times 5x^4}{16x^4 \times 2x} = \dfrac{15x^9}{32 \cdot x^5} = \dfrac{15 \cdot x^4}{32}$ donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{15x^4}{32} = 0.$

7) $f(x) = \dfrac{3x^5 \cdot \sin(5x^4)}{(3x^2+2x)^4 \cdot \ln(1+2x)}$ $\quad a = 0$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \text{"}\dfrac{0}{0}\text{"}$ FI

$f(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{3x^5 \times 5x^4}{(2x)^4 \times 2x} = \dfrac{15x^9}{32x^5} = \dfrac{15x^4}{32}$

$\sin(5x^4) \underset{x \to 0}{\sim} 5x^4$ car :

$\sin X \underset{X \to 0}{\sim} X$

en posant $X = 5x^4 \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$

$\ln(1+2x) \underset{x \to 0}{\sim} 2x$ car

$\ln(1+X) \underset{X \to 0}{\sim} X$. En posant $X = 2x \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$

donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{15x^4}{32} = 0$

Partie C : Fonctions réciproques de exp et tan

Page 34 chapitre 3

Introduction

Une fonction f est définie sur D, un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, si à tout x de D on peut associer un unique nombre noté f(x), et appelé image de x par f.

ensble de définition

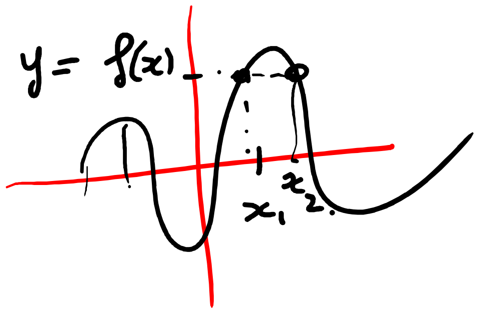
On écrit $\quad f : D \longrightarrow f(D)$ → ensble image.

$\qquad\qquad x \longmapsto y = f(x)$ unique.

D est appelé l'ensemble de définition de f, et f(D) l'ensemble image de D par f.

Peut-on déduire de f une fonction g, définie de la façon suivante ?

$$g : f(D) \longrightarrow D$$
$$\quad y \longmapsto x \;/\; y = f(x)$$



La réponse est oui, à condition que la fonction f soit bijective sur D.

Notes

I. Fonction bijective

1) Définition

On appelle fonction bijective sur D, toute fonction $f : D \longrightarrow f(D)$

$x \longmapsto y = f(x)$

pour tout   il existe   un unique   tel que

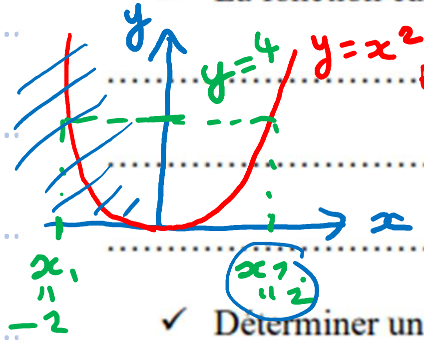
vérifiant : $\forall y \in f(D)\ \exists!\ x \in D \ / \ y = f(x)$, c'est-à-dire :

« Pour tout y, élément de f(D), il existe un unique x, élément de D tel que y=f(x) »

Exemples

$f(x) = x^2 \quad \mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

✓ La fonction carré est-elle bijective sur $\mathbb{R}$? sur $[0 ; +\infty[$?



* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $x \longmapsto y = f(x) = x^2$

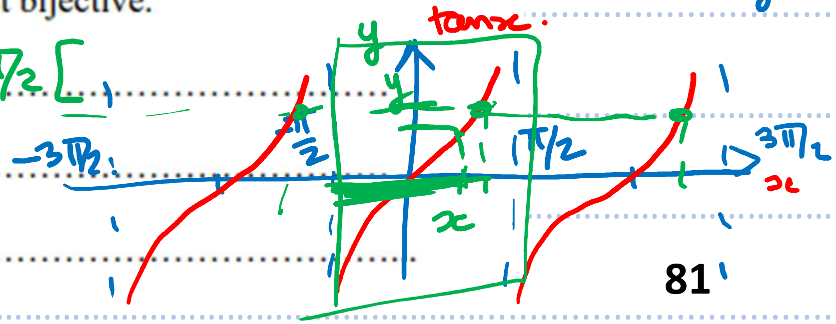
f n'est pas bijective sur $\mathbb{R}$ car $y=4$ admet deux antécédents : $x=-2$ et $x=2$

* $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $y \longmapsto y = x^2$

f est bijective sur $\mathbb{R}_+$ car $y \in \mathbb{R}_+$ admet une seul antécédent : $x = \sqrt{y}$

✓ Déterminer un intervalle sur lequel la fonction tangente est bijective.

tangente est bijective sur $]-\pi/2 ; \pi/2[$, car tout $y \in \mathbb{R}$ admet un seul antécédent $x = \arctan y$.



Dérivée de ln : $\left[f(f^{-1}(y)) = y\right]'$

Notes

$y > 0$

$$(e^{\ln y})' = y'$$

$(e^u)' = u' \cdot e^u$ ici $u = \ln y$

Page 35 chapitre 3

$$\Longleftrightarrow (\ln y)' \cdot e^{\ln y} = 1$$

$$(\ln y)' = \frac{1}{e^{\ln y}} = \frac{1}{y} \quad \forall y > 0$$

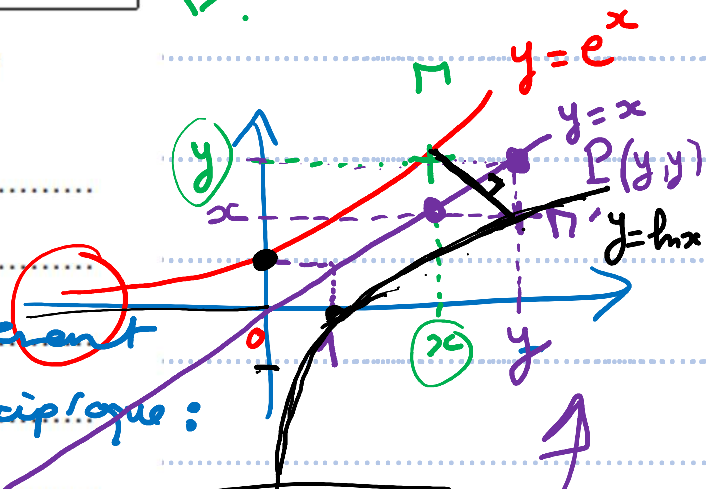
2) Théorème

Toute fonction continue et strictement monotone sur D est bijective sur D.

Exemple La fonction exponentielle est-elle bijective sur son ensemble de définition ? Pourquoi ?

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$$

$$x \longmapsto y = f(x) = e^x$$



f est bijective car f est continue et strictement croissante. f admet donc une fonction réciproque :

$$f^{-1} : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$y \longmapsto x \text{ tel que } y = f(x) = e^x \Longleftrightarrow x = \boxed{\ln y = f^{-1}(y)}$$

$$f(f^{-1}(y)) = f(\ln y) = e^{\ln y} = y \quad \forall y > 0$$

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(e^x) = \ln e^x = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

page 36

Page 35 chapitre 3

Notes

II. Fonction réciproque

1) Définition

Définition/Théorème Soit une fonction bijective $f : D \longrightarrow f(D)$
$x \longmapsto y = f(x)$

il existe alors une fonction notée f^{-1} et appelée « fonction réciproque de f »,
telle que : $f^{-1} : f(D) \longrightarrow D$
$y \longmapsto x = f^{-1}(y)$

Remarques : $\forall\ x \in D$, $\underbrace{(f^{-1} \circ f)(x)}_{f^{-1}(f(x))} = x$ et $\forall\ y \in f(D)$, $\underbrace{(f \circ f^{-1})(y)}_{f(f^{-1}(y))} = y$

Les courbes représentant f et f^{-1} sont symétriques l'une de l'autre par rapport à la droite $y = x$.

On appelle fonction tangente restreinte à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$, la fonction définie par :

P. 38

$$\begin{aligned} \tan_{/\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[} : \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = \tan(x) \end{aligned}$$

Cette fonction est strictement croissante et continue, elle est donc bijective et admet alors une fonction réciproque notée Arctan et appelée Arctangente, définie par :

$$\begin{aligned} \text{Arctan} : \mathbb{R} &\longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[\\ y &\longmapsto x = \text{Arctan}(y) \text{ tel que } y = \tan(x) \end{aligned}$$

Arctan est une fonction continue et strictement croissante.

$$\tan(\text{Arctan}(x)) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Arctan}(\tan(x)) = x \quad \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$$

Notes

Dérivée de Arctan ? $\quad f\left(f^{-1}(x)\right) = x$

$$\Big(\tan\left(\operatorname{Arctan} x\right)\Big)' = (x)' \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$(\tan u)' = u' \cdot (1+\tan^2 u) \qquad \text{ici } u = \operatorname{Arctan} x$$

$$(\operatorname{Arctan} x)' \times \Big(1 + \underbrace{\tan^2(\operatorname{Arctan} x)}_{\substack{\shortparallel \\ (\tan(\operatorname{Arctan} x))^2 \,=\, x^2}}\Big) = 1$$

$$(\operatorname{Arctan} x)' \times (1+x^2) = 1 \iff (\operatorname{Arctan} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

On appelle fonction tangente restreinte à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$, la fonction définie par :

P.38

$$\tan_{/\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[} : \left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto y = \tan(x)$$

Cette fonction est strictement croissante et continue, elle est donc bijective et admet alors une fonction réciproque notée Arctan et appelée Arctangente, définie par :

$$\text{Arctan} : \mathbb{R} \longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$$
$$y \longmapsto x = \text{Arctan}(y) \text{ tel que } y = \tan(x)$$

Arctan est une fonction continue et strictement croissante.

$$\tan(\text{Arctan}(x)) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$
$$\text{Arctan}(\tan(x)) = x \quad \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$$

$$\frac{d}{dx}(\text{Arctan}(x)) = \frac{1}{1+x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Note