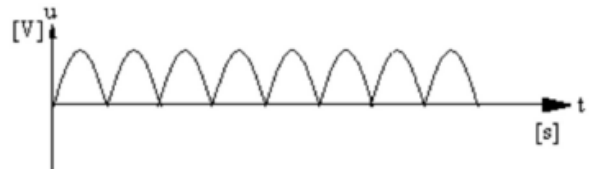
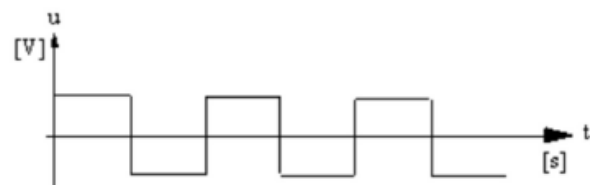


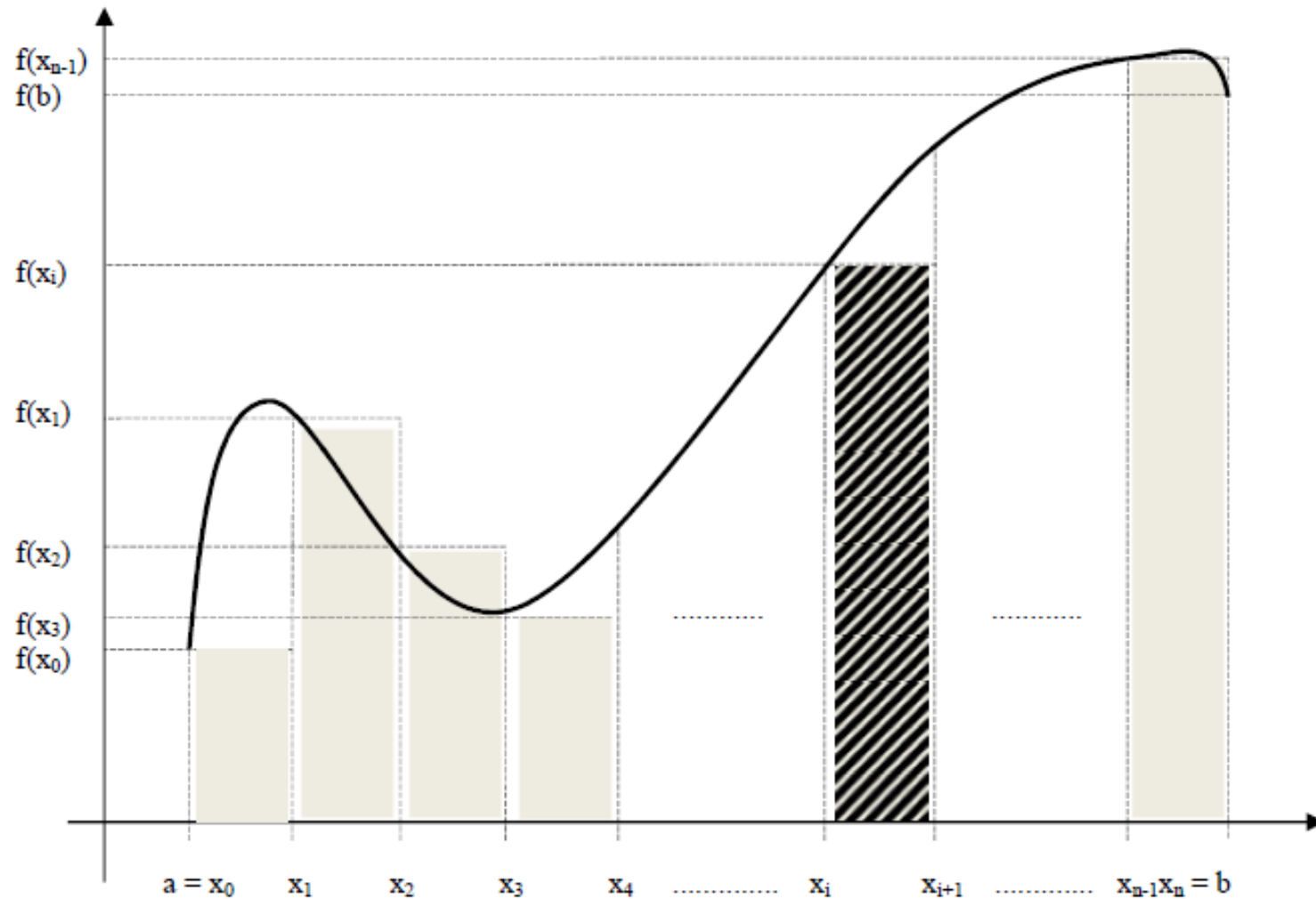
Chapitre 4 : Les bases du calcul intégral pour le GEII

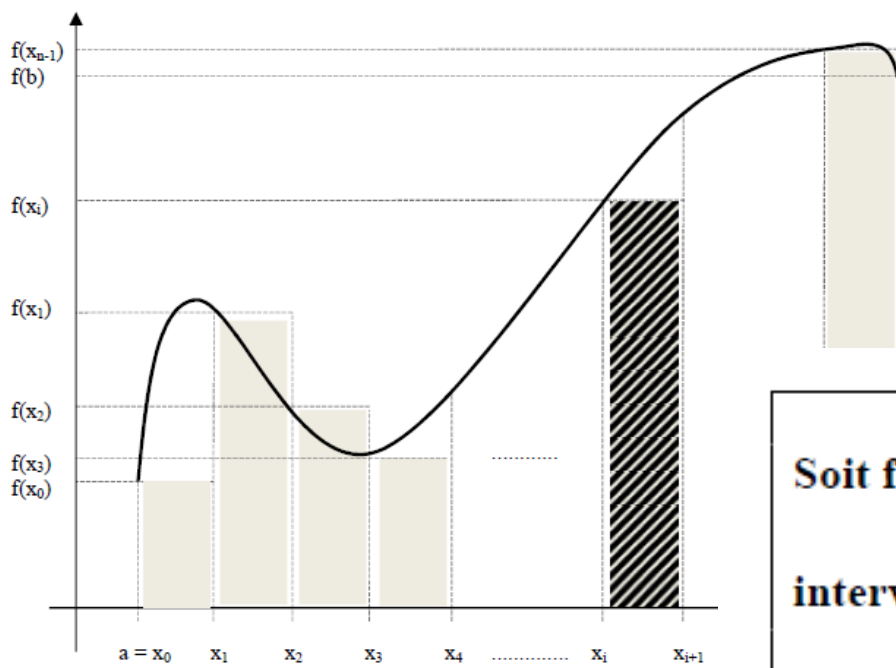


signal	U_m	U_{eff}
carré symétrique	0	U_{max}
carré positif	$\frac{U_{max}}{2}$	$\frac{U_{max}}{2}$
alternatif sinusoïdal	0	$\frac{U_{max}}{\sqrt{2}}$
pulsé redressement simple alternance	$\frac{U_{max}}{p}$	$\frac{U_{max}}{2}$
pulsé redressement double alternance	$\frac{2 \times U_{max}}{p}$	$\frac{U_{max}}{\sqrt{2}}$

I. Généralités

1) Sommes de Riemann





Soit f , une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$. On divise l'intervalle $[a, b]$ en n sous

intervalles de même longueur h , on a alors : $h = \frac{b-a}{n}$

On note $[x_0, x_1]$; $[x_1, x_2]$; $[x_2, x_3]$; $[x_3, x_4]$; ... ; $[x_i, x_{i+1}]$; ... ; $[x_{n-1}, x_n]$, ces n intervalles, on a alors :

$$x_0 = a ; x_1 = a+h ; x_2 = a+2h ; \dots ; x_i = a+ih ; \dots x_{n-1} = a+(n-1)h ; x_n = a+nh$$

$h \cdot f(x_i)$ est l'aire algébrique du rectangle hachuré.

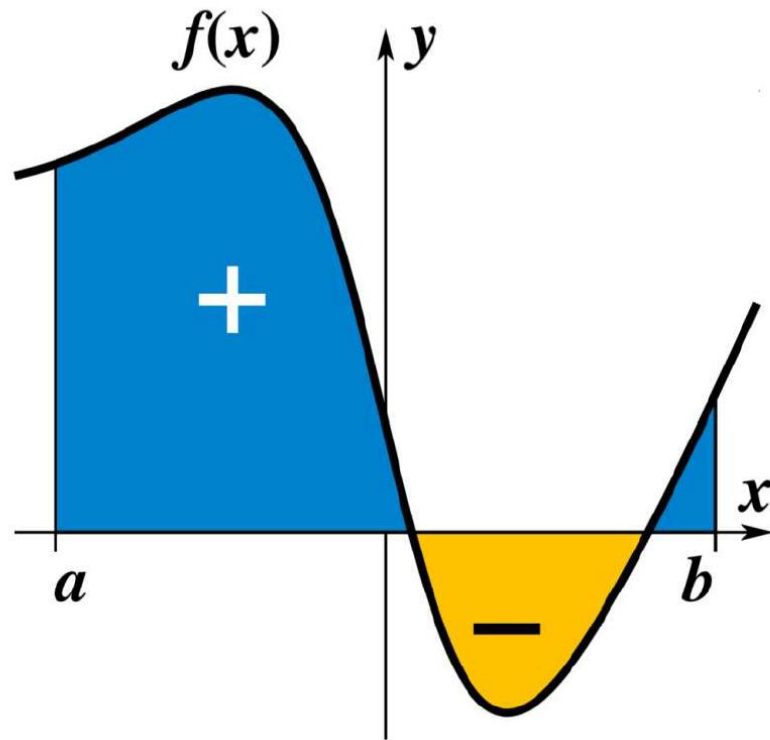
Donc $S_n = \sum_{i=0}^{n-1} h \cdot f(x_i)$ est l'aire algébrique de tous les rectangles.

Si n , le nombre de sous-intervalle tend vers l'infini, alors h tend vers 0.

On dit que la fonction f est intégrable sur $[a, b]$ lorsque $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ existe et est finie, on note

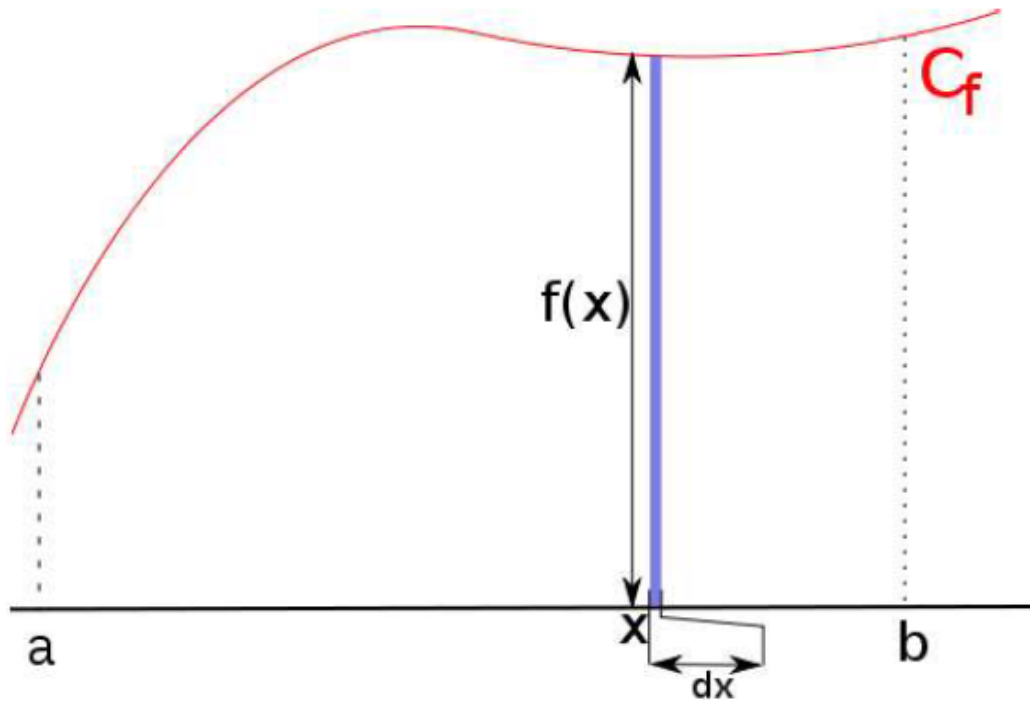
$$\text{alors : } \int_a^b f(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n .$$

- Conséquence : La valeur de $\int_a^b f(t)dt = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ est donc l'aire algébrique du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe C_f et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$.
- Théorème : Toute fonction continue sur $[a,b]$ est intégrable sur $[a,b]$



Notes3) Remarques :

- ✓ Notation de l'intégrale : Il ne faut pas oublier dx !!!



dx est une variation infinitésimale de x .
 $f(x)dx$ est donc l'aire algébrique infinitésimale du rectangle de côtés $f(x)$ et dx .

$\int_a^b f(x)dx$ est la somme continue des aires algébriques de ces rectangles lorsque x parcourt l'intervalle $[a,b]$

$\int_a^b f(x)dx$ est donc l'aire algébrique du domaine compris entre l'axe des abscisses, la courbe C_f et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$.

2) Exemple

a) Pré-requis 1 : Somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de raison $q \neq 1$.

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

b) Pré-requis 2 : Limite à connaître : $\lim_{X \rightarrow 0} \frac{e^X - 1}{X} = 1$

c) A l'aide de la définition de l'intégrale ci-dessus, calculer $I = \int_0^1 e^x dx$

$a = 0$; $b = 1$; $h = 1/n$; $f(x) = e^x$; $x_0 = 0$; $x_1 = 1/n$; $x_2 = 2/n$; ... ; $x_i = i/n$; ... ; $x_n = 1$.

$$\text{Aire algébrique de tous les rectangles : } S_n = \sum_{i=0}^{n-1} h f(x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} \cdot e^{\frac{i}{n}} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \left(e^{\frac{1}{n}} \right)^i$$

Il s'agit de la somme des n premiers termes de la suite géométrique de raison $q = e^{\frac{1}{n}}$, on applique donc la formule du a)

$$1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}, \text{ et on obtient : } S_n = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \left(e^{\frac{1}{n}} \right)^i = \frac{1}{n} \cdot \frac{1 - \left(e^{\frac{1}{n}} \right)^n}{1 - e^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1 - e}{1 - e^{\frac{1}{n}}}$$

Calculons alors $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{1 - e}{1 - e^{\frac{1}{n}}} \right)$, ce qui donne la forme indéterminée « $0 \times \infty$ ».

Pour lever cette indéterminée, on pose le changement de variable $X = \frac{1}{n}$, et on utilise le b).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{1 - e}{1 - e^{\frac{1}{n}}} \right) = \lim_{X \rightarrow 0} \left(X \cdot \frac{1 - e}{1 - e^X} \right) = (1 - e) \lim_{X \rightarrow 0} \left(\frac{X}{1 - e^X} \right)$$

$$\text{Comme } \lim_{X \rightarrow 0} \frac{e^X - 1}{X} = 1, \text{ alors } \lim_{X \rightarrow 0} \left(\frac{X}{1 - e^X} \right) = - \frac{1}{\lim_{X \rightarrow 0} \left(\frac{1 - e^X}{X} \right)} = -1,$$

Ainsi, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = (1 - e) \lim_{X \rightarrow 0} \left(\frac{X}{1 - e^X} \right) = e - 1$, il s'agit donc d'une limite finie.

La fonction exponentielle est donc intégrable sur $[0 ; 1]$, et : $\int_0^1 e^t dt = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = e - 1$.

4) Fonctions primitives

Théorème Soit f , une fonction intégrable sur $[a,b]$. On appelle fonction primitive de f sur $[a,b]$ toute fonction notée F , définie par : $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b]$.

Notes

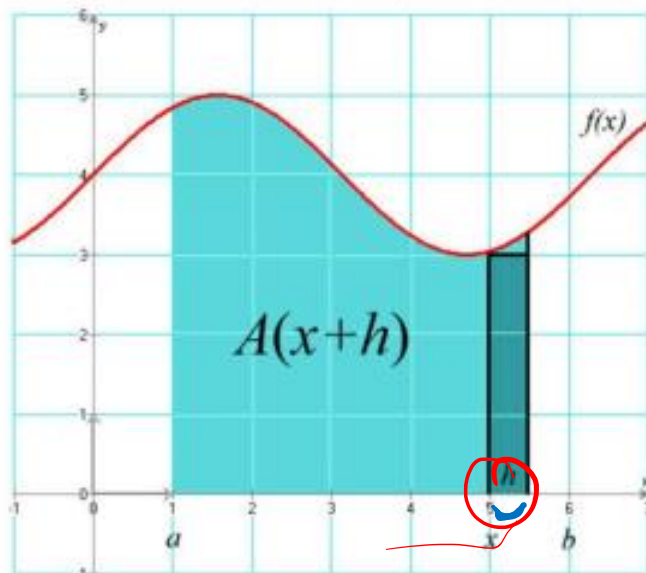
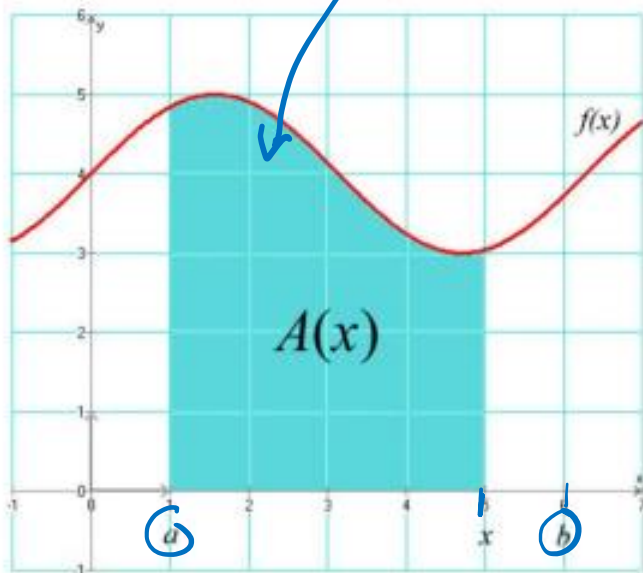
$$\underbrace{\int_a^b f(x) dx}_{\text{aire algébrique}} = \left[F(x) \right]_a^b = F(b) - F(a)$$

$\downarrow$
 $F'(x) = f(x)$

$A(x)$ = aire algébrique sous f $A(a) = 0$ $A(b) = F(b) - F(a)$ $\leftarrow$

$$A(x+h) \approx A(x) + h \cdot f(x)$$

$$A(x+h) - A(x) \approx h \cdot f(x) \Leftrightarrow \frac{A(\overset{x}{\cancel{x+h}}) - A(\overset{a}{\cancel{x}})}{\underset{x-a}{h}} \approx f(x)$$



$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{A(x+h) - A(x)}{x+h-x} = f(x)$$

$\underbrace{\quad}_{x-a}$

$A'(x) = f(x)$ donc A primitive de f

$$A(x) = F(x) + cte = F(x) - F(a)$$

$$A(a) = F(a) + cte \Rightarrow cte = -F(a)$$

I. Fonctions primitives

Théorème/définition Soit f , une fonction continue sur $[a,b]$. On appelle fonction primitive de f sur $[a,b]$ toute fonction notée F , définie par : $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a,b]$.

Remarque Si $G(x) = F(x) + Cte$, alors $G'(x) = F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a,b]$. G est donc aussi une primitive de f sur $[a,b]$.

Notation On notera : $\int f(x)dx$ toutes les fonctions primitives de f , on a donc :

$$\int f(x)dx = F(x) + cte$$

Exemples

$$* \quad g(x) = 3x + 2 \quad \Rightarrow \quad g'(x) = 3$$

$$f(x) = 3 \quad \Rightarrow \quad F(x) = 3x + cte$$

$$\text{Notation: } \int (3x + 2) dx = 3x + cte$$

* Notes $g(t) = t^3 \Rightarrow g'(t) = 3t^2$

$f(t) = \frac{3t^2}{3} \Rightarrow F(t) = \frac{1}{3} \cdot t^3 + cte$

$\int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + cte$

$\int t^\alpha dt = \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} + cte ; \alpha \neq -1$

* $\int 5t^4 dt = 5 \cdot \frac{t^5}{5} + cte$ car

* $\int t^{13} dt = \frac{t^{14}}{14} + cte$ car

* $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + cte$ in $\alpha \neq -1$ et $\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + cte$

* $(U+V)' = U' + V'$ et $(\alpha U)' = \alpha \cdot U'$ où $\alpha \in \mathbb{R}$

$\int (U+V) dt = \int U dt + \int V dt$ et $\int \alpha U dt = \alpha \cdot \int U dt$

* $\int (5x^3 + 2x + 7) dx = 5 \frac{x^4}{4} + x^2 + 7x + cte$

* $\int e^x dx = e^x + cte$ $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + cte$ $\int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \sqrt{x} + cte$

Notes $\int \cos t \, dt = \sin t + \text{cte}$

$$\int \sin t \, dt = -\cos t + \text{cte}.$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 \theta} \, d\theta = \tan \theta + \text{cte}$$

$$\int (1 + \tan^2 \theta) \, d\theta = \tan \theta + \text{cte}.$$

Remarque Il ne faut pas oublier dx !!



$$I(x) = \int x^2 \, dx = \frac{x^3}{3} + \text{cte}.$$

$$I(t) = \int x^2 \, dt = x^2 \int 1 \, dt = x^2 t + \text{cte}$$

$\underbrace{\text{cte}}_{\text{cte par rapport à } t}$

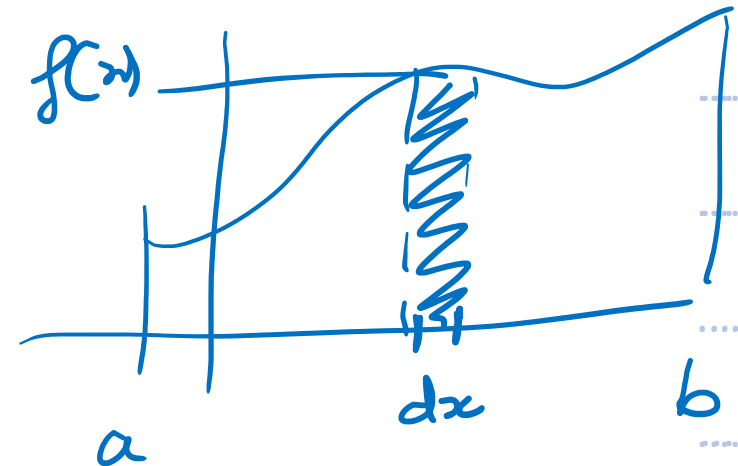


Tableau des Primitives

Chapitre 4 page 9

$\int x^\alpha .dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + cte ; \alpha \neq -1$	$\int \underline{U'} . U^\alpha dx = \frac{U^{\alpha+1}}{\alpha+1} + cte ; \alpha \neq -1$
$\int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \sqrt{x} + cte$	$\int \frac{U'}{2\sqrt{U}} dx = \sqrt{U} + cte$
$\int e^x .dx = e^x + cte$	$\int U' . e^U .dx = e^U + cte$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln(x) + cte$	$\int \frac{U'}{U} dx = \ln(U) + cte$
$\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + cte$	$\int \frac{U'}{U^2} dx = -\frac{1}{U} + cte$
$\int \cos(x) .dx = \sin(x) + cte$	$\int U' . \cos(U) .dx = \sin(U) + cte$
$\int \sin(x) .dx = -\cos(x) + cte$	$\int U' . \sin(U) .dx = -\cos(U) + cte$
$\int \frac{1}{\cos^2(x)} .dx = \tan(x) + cte$	$\int \frac{U'}{\cos^2(U)} .dx = \tan(U) + cte$
$\int (1 + \tan^2(x)) .dx = \tan(x) + cte$	$\int U' . (1 + \tan^2(U)) .dx = \tan(U) + cte$
$\int \frac{1}{1+x^2} .dx = \arctan(x) + cte$	$\int \frac{U'}{1+U^2} .dx = \arctan(U) + cte$

$$(U^\alpha)' = \alpha U^{\alpha-1} \cdot U'$$

$$\int U' U^{-1} dx = \int \frac{U'}{U} dx$$

Exemples : Compléter en s'aidant du tableau des primitives :

Chapitre 4 page 10

$$I(x) = \int x^3 \underbrace{\sqrt{x}}_{x^{1/2}} dx = \int x^{3,5} dx = \frac{x^{4,5}}{4,5} + cte \quad (\text{ou}) \quad \frac{x^{9/2}}{9/2} + cte = \frac{2}{9} x^{9/2} + cte$$

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + cte \quad \alpha \neq -1 \quad = \frac{2}{9} x^4 \sqrt{x} + cte.$$

$$J(x) = \int \underbrace{3}_{u \Rightarrow u' = 3} \cos(3x-1) dx = \sin(3x-1) + cte.$$

$$\int u' \cos u dx = \sin u + cte$$

$$K(x) = \int \underbrace{2}_{u \Rightarrow u' = 2} (2x+5)^{10} dx = \frac{(2x+5)^{11}}{11} + cte$$

$$\int u' u^n dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + cte ; n \neq -1.$$

$$Q(x) = \int \frac{1}{1+x^2} dx \quad \text{Arctan } x + \text{cte.}$$

Chapitre 4 page 10

$$L(x) = \int \frac{3x^2 - 1}{x^3 - x + 10} dx \quad \Rightarrow \quad u = x^3 - x + 10 \Rightarrow u' = 3x^2 - 1 \quad \text{donc } L(x) = \ln|x^3 - x + 10| + \text{cte}$$

$$\int \frac{u'}{u} dx = \ln|u| + \text{cte}$$

$$M(x) = \int 5 \cdot e^{5x} dx = e^{5x} + \text{cte}$$

$$\int u' \cdot e^u dx = e^u + \text{cte}$$

$$N(x) = \int \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} dx = \sqrt{x^2+1} + \text{cte}$$

$$\int \frac{u'}{2\sqrt{u}} dx = \sqrt{u} + \text{cte}$$

$$P(x) = \int \frac{1}{(x+3)^2} dx = -\frac{1}{x+3} + \text{cte}$$

$$\frac{u^{-1}}{-1} = -\frac{1}{u}$$

$$\int \frac{u'}{u^2} dx = -\frac{1}{u} + \text{cte} \quad \text{ou} \quad \int u' \cdot u^{-2} dx = \frac{u^{-2+1}}{-2+1} + \text{cte}$$

$$P(x) = \int (1 + \tan^2(3x)) dx$$

$u = 3x \Rightarrow u' = 3$ $\leftarrow \frac{3}{3} (1 + \tan^2(3x)) dx$

ASTUCE

Chapitre 4 page 10

$$\int u'(1 + \tan^2 u) dx = \tan u + cte$$

$$p(x) = \frac{1}{3} \tan(3x) + cte$$

Tableau des Primitives

Chapitre 4 page 9

$\int x^{\alpha} .dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + cte ; \alpha \neq -1$	$\int U'.U^{\alpha} dx = \frac{U^{\alpha+1}}{\alpha+1} + cte ; \alpha \neq -1$
$\int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \sqrt{x} + cte$	$\int \frac{U'}{2\sqrt{U}} dx = \sqrt{U} + cte$
$\int e^x .dx = e^x + cte$	$\int U'.e^U .dx = e^U + cte$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln(x) + cte$	$\int \frac{U'}{U} dx = \ln(U) + cte$
$\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + cte$	$\int \frac{U'}{U^2} dx = -\frac{1}{U} + cte$
$\int \cos(x).dx = \sin(x) + cte$	$\int U'.\cos(U).dx = \sin(U) + cte$
$\int \sin(x).dx = -\cos(x) + cte$	$\int U'.\sin(U).dx = -\cos(U) + cte$
$\int \frac{1}{\cos^2(x)} .dx = \tan(x) + cte$	$\int \frac{U'}{\cos^2(U)} .dx = \tan(U) + cte$
$\int (1 + \tan^2(x)).dx = \tan(x) + cte$	$\int U'.(1 + \tan^2(U)).dx = \tan(U) + cte$
$\int \frac{1}{1+x^2} .dx = \arctan(x) + cte$	$\int \frac{U'}{1+U^2} .dx = \arctan(U) + cte$

II. Calcul intégral

Chapitre 4 page 11

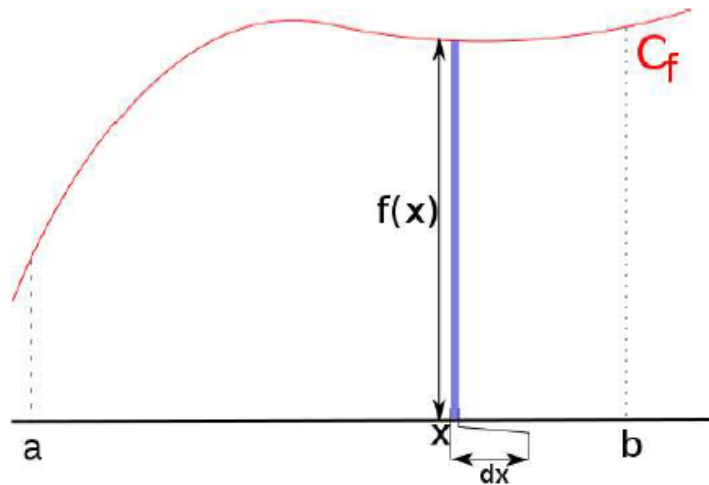
Théorème / définition : Soit f , une fonction continue sur $[a,b]$, soit F , une fonction primitive de f . On appelle intégrale de la fonction f sur l'intervalle $[a,b]$, le nombre noté $\int_a^b f(x)dx$ et tel que :

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Borne du haut - Borne du bas.

Interprétation graphique : $\int_a^b f(x)dx$ est l'aire algébrique du domaine compris entre la courbe représentant f , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.

Remarque Il ne faut pas oublier dx !!



dx est une variation infinitésimale de x .
 $f(x)dx$ est donc l'aire algébrique infinitésimale du rectangle de côtés $f(x)$ et dx .

$\int_a^b f(x)dx$ est la somme continue des aires algébriques de ces rectangles lorsque x parcourt l'intervalle $[a,b]$

$\int_a^b f(x)dx$ est donc l'aire algébrique du domaine compris entre l'axe des abscisses, la courbe C_f et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$.

Exemples et applications

✓ Compléter :

$$I = \int_0^1 e^t dt = [e^t]_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1.$$

$$J = \int_0^{e-1} \frac{1}{x+1} dx = [\ln|x+1|]_0^{e-1} = \ln|e| - \underbrace{\ln 1}_0 = 1.$$

$\text{circled } \frac{1}{x+1} = u \Rightarrow u' = 1$

$$\int \frac{u'}{u} dx = \ln|u| + \text{cte}$$

III. Propriétés

Chapitre 4 page 12

1) Linéarité

Soit f, g deux fonctions continues sur $[a, b]$. Soit α et β deux nombres réels. On a alors :

$$\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t)) dt = \alpha \int_a^b f(t) dt + \beta \int_a^b g(t) dt$$

Exemples et applications

$$\checkmark \quad I = \int_{-1}^1 (3x^7 + 2x^6 - 1) dx = \left[3 \frac{x^8}{8} + 2 \frac{x^7}{7} - x \right]_{-1}^1$$

$$I = \frac{3}{8} + \frac{2}{7} - 1 - \left(\frac{3}{8} - \frac{2}{7} + 1 \right) = \frac{4}{7} - 2 = -\frac{10}{7}$$

ASTUCE

$$J = \int_0^1 \frac{x}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{x+1-1}{x+1} dx = \int_0^1 \left(\frac{x+1}{x+1} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \left[x - \ln|x+1| \right]_0^1$$

$$\int \frac{U'}{U} dx = \ln|U| + cte$$

$$J = 1 - \ln 2 - (0 - \ln 1) = 1 - \ln 2$$

$$L(x) = \int (5 \cdot \cos(2x) - e^{5x} + 9) dx = \dots$$

$$= \frac{5}{2} \int \underbrace{2 \cos(2x)}_{u \Rightarrow u' = 2} dx - \frac{1}{5} \int \underbrace{5 e^{5x}}_{u \Rightarrow u' = 5} dx + 9 \int 1 dx$$

$$L(x) = \frac{5}{2} \sin(2x) - \frac{1}{5} e^{5x} + 9x + C$$

$$\int u' \cdot \cos u \, dx = \sin u + C \quad \text{ou} \quad \int \cos(ax) \, dx = \frac{\sin(ax)}{a} + C \quad a \neq 0$$

$$\int u' \cdot e^u \, dx = e^u + C \quad \text{ou} \quad \int e^{ax} \, dx = \frac{e^{ax}}{a} + C \quad a \neq 0$$

2) Relation de Chasles

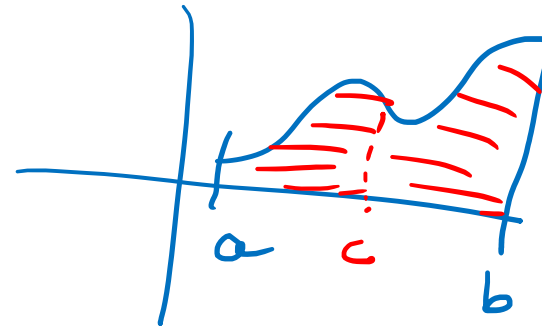
Chapitre 4 page 13

Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé I . Soit a, b, c trois réels de I . On a

alors :

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$$



Exemple Signal défini par morceaux : $f(x) = \begin{cases} x \text{ si } 0 \leq x < 1 \\ -x + 4 \text{ si } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

Chapitre 4 page 13

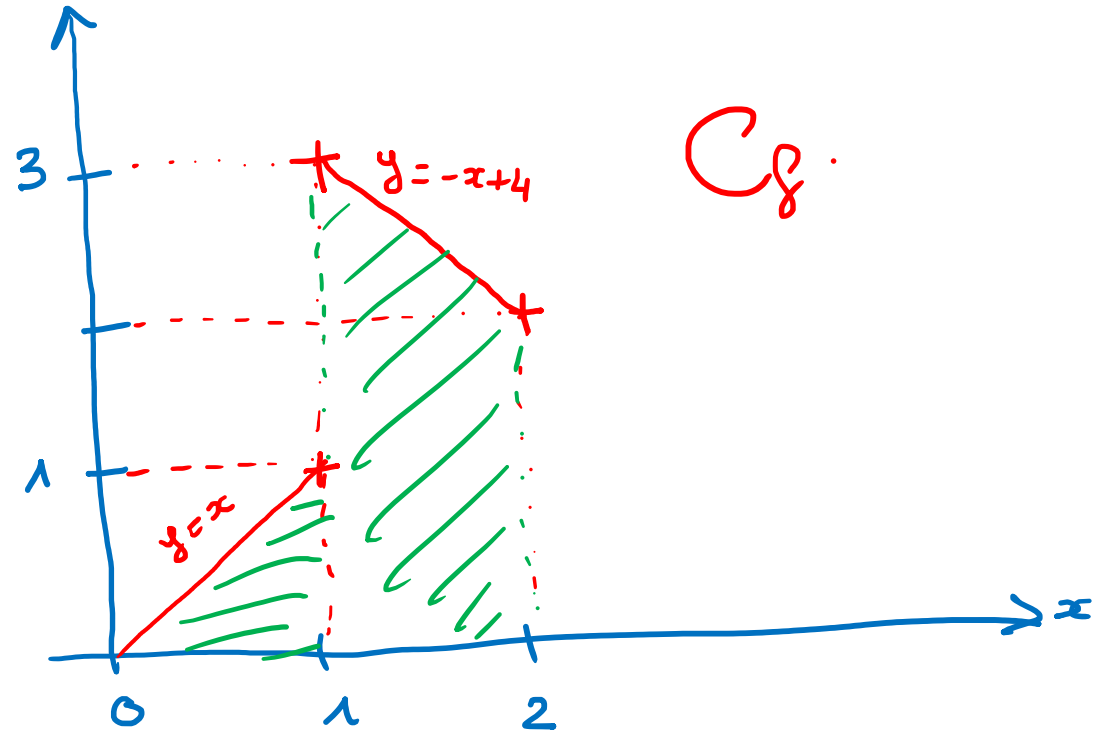
$$I = \int_0^2 f(x) dx = \dots \int_0^1 \underbrace{f(x)}_x dx + \int_1^2 \underbrace{f(x)}_{-x+4} dx \dots$$

$$I = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 + \left[-\frac{x^2}{2} + 4x \right]_1^2$$

$$= \frac{1}{2} - 0 + \frac{-4}{2} + 8 - \left(\frac{-1}{2} + 4 \right)$$

$$= -\frac{3}{2} + \frac{16}{2} + \frac{1}{2} - \frac{8}{2}$$

$$I = \frac{6}{2} = 3.$$



Cas particulier $\int_a^b f(t)dt + \int_b^a f(t)dt = \overset{\text{Charles}}{\int_a^a f(t)dt} = 0$

Donc : $\boxed{\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt}$

.....

.....

.....

.....

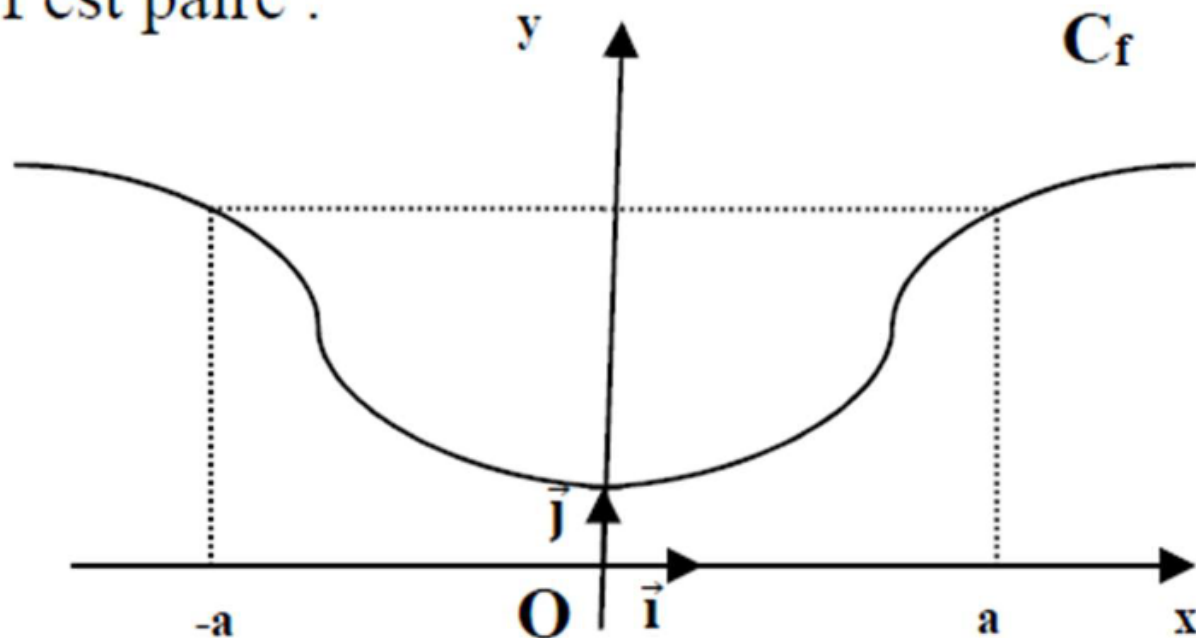
I. Intégrale de fonctions paires / impaires

1) Intégrale d'une fonction paire sur un intervalle centré en 0

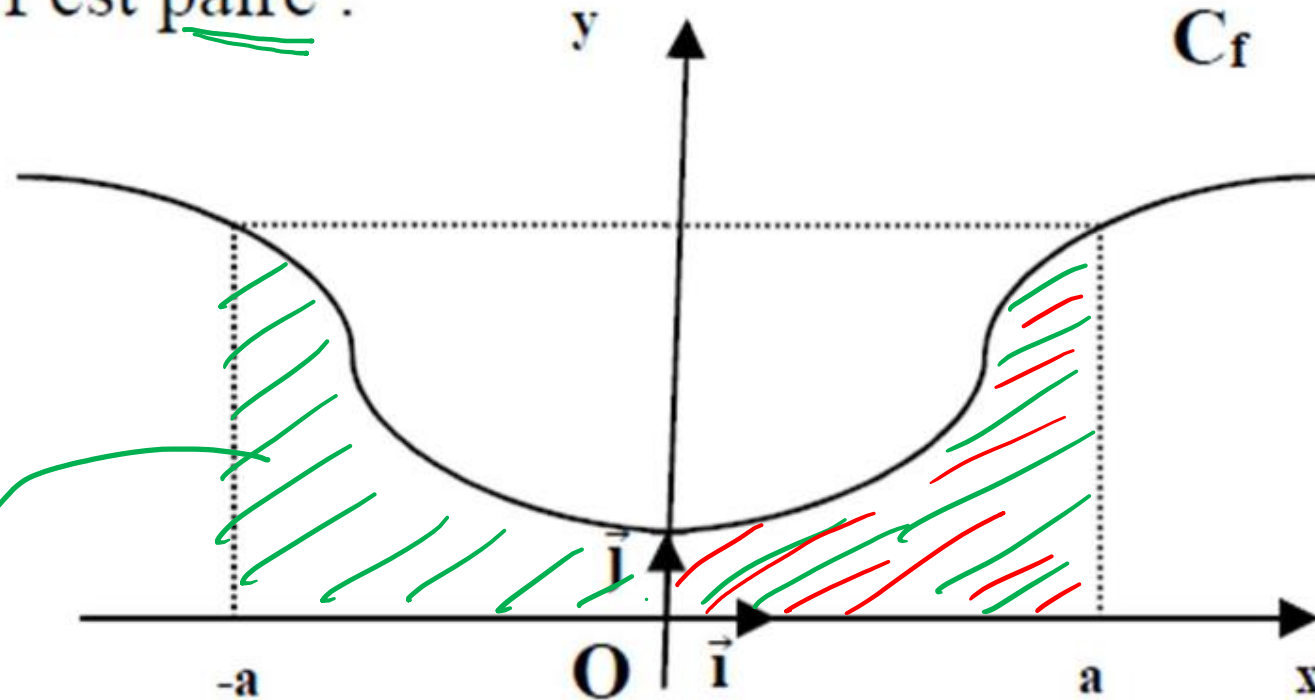
Rappel : Une fonction f , définie sur D , un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ centré en 0, est dite paire lorsque : $\forall x \in D \ f(-x) = f(x)$.

Sa représentation graphique est alors symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

f est paire :



f est paire :



$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

Soit f , une fonction paire et continue sur $[-a, a]$. On a alors : $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$

Exemple $I = \int_{-\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{9}} \underbrace{\cos(3t)}_{\text{paire}} \cdot \underbrace{\sin^4(3t)}_{(\text{impaire})^4 = \text{paire}} dt = \frac{2}{3} \times \int_0^{\frac{\pi}{9}} \underbrace{3\cos(3t)}_{U'} \cdot \underbrace{\sin^4(3t)}_{U^4} dt = \frac{2}{3} \times \left[\frac{\sin^5(3t)}{5} \right]_0^{\frac{\pi}{9}}$

$$\int U' \times U^4 dx = \frac{U^5}{5} + C$$

ici $U = \sin(3t) \Rightarrow U' = 3 \times \cos(3t)$

$$I = \frac{2}{15} \times \left(\sin^5\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin^5(0) \right) = \frac{2}{15} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^5 = \frac{2}{15} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2^5} = \frac{2}{15} \cdot \frac{\sqrt{3}}{32} = \frac{2\sqrt{3}}{480} = \frac{\sqrt{3}}{240}$$

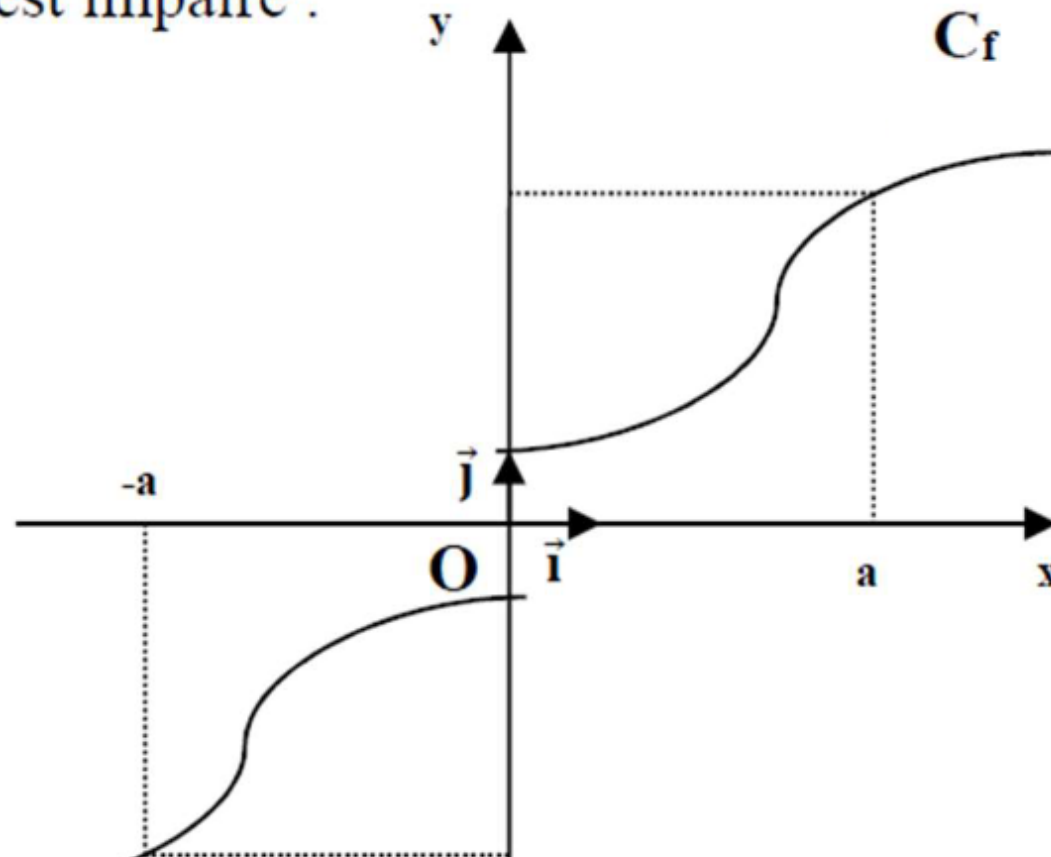
$\sqrt{3} = \cancel{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3}^2 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3} \cdot 3 \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$

2) Intégrale d'une fonction impaire sur un intervalle centré en 0

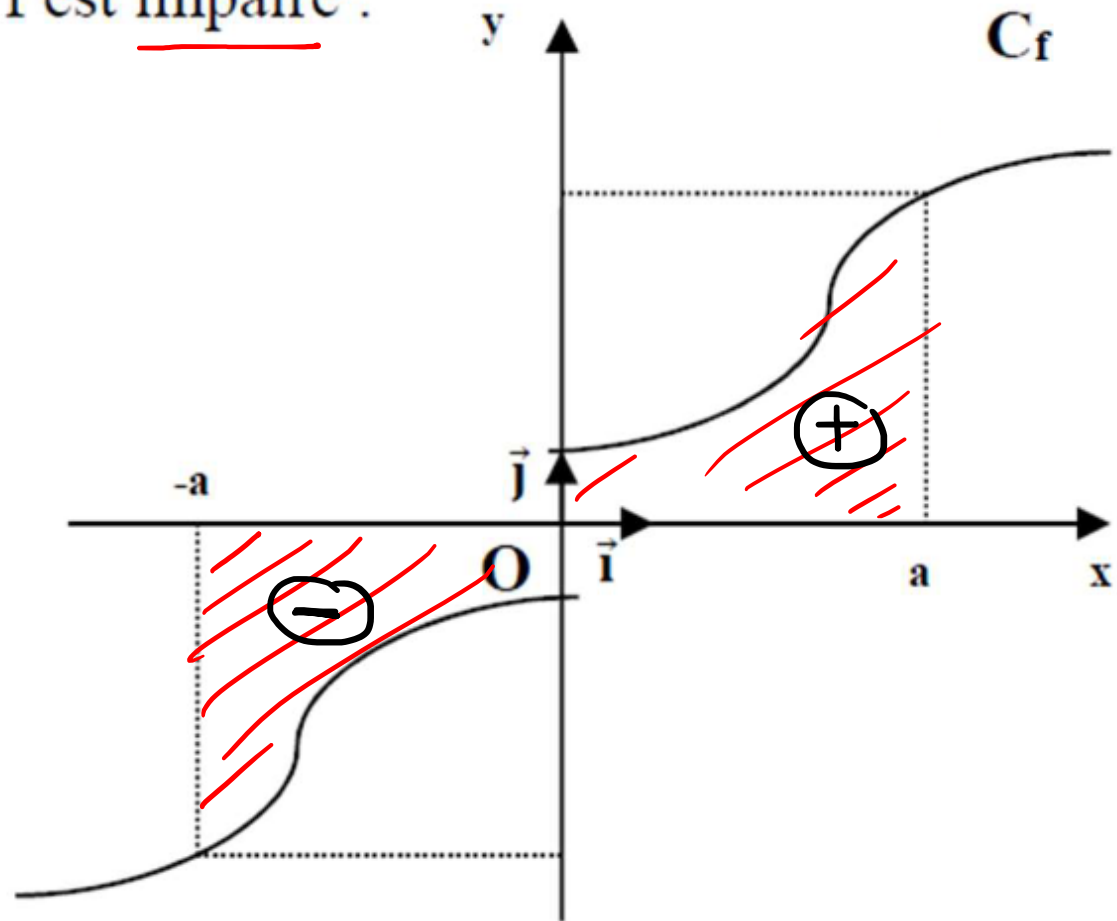
Rappel : Une fonction f , définie sur D , un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ centré en 0, est dite impaire lorsque : $\forall x \in D \quad f(-x) = -f(x)$.

Sa représentation graphique est alors symétrique par rapport à l'origine du repère.

f est impaire :



f est impaire :



$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

Soit f , une fonction impaire et continue sur $[-a, a]$. On a alors : $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$

Exemple $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} t \cdot \cos(t) \cdot \sin^4(t) dt = \dots$

impaire $\times$ paire $\times$ (impaire)⁴ = impaire.

$f(t)$

$$f(-t) = -t \cdot \cos(-t) \cdot \sin^4(-t) = -t \cdot \cos t \cdot (\sin(-t))^4$$

$$= -t \cdot \cos t \cdot (-\sin t)^4$$

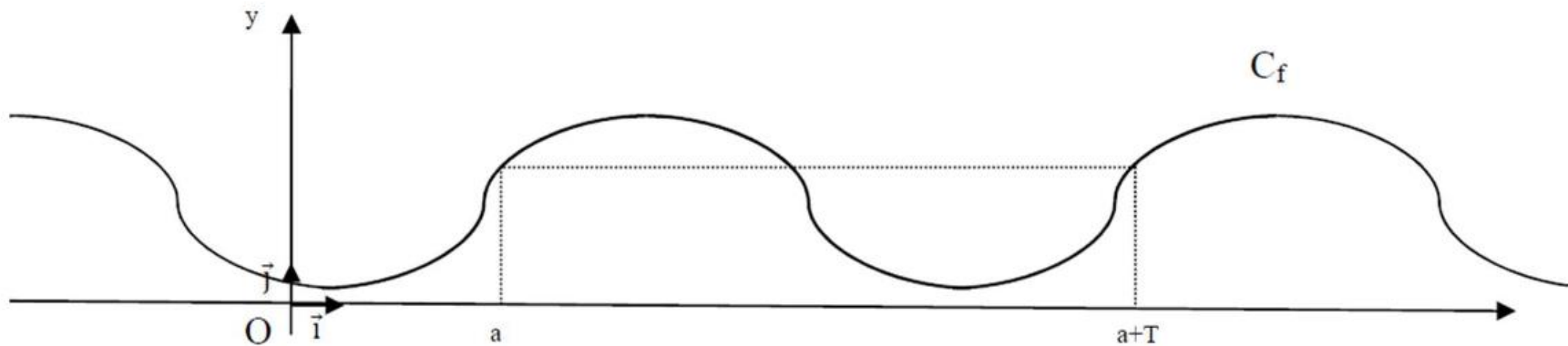
$$f(-t) = -t \cdot \cos t \cdot \sin^4 t = -f(t)$$

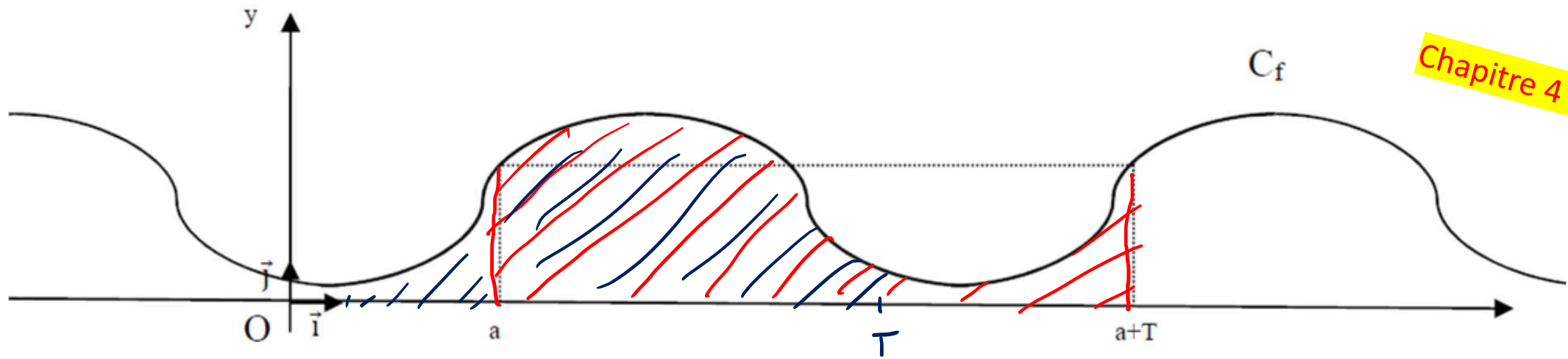
donc f est impaire sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et $I = 0$.

II Intégrale d'une fonction périodique sur un période

Chapitre 4 page 17&18

Rappel : Une fonction f , définie sur D , un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ est dite périodique lorsqu'il existe un réel $T > 0$, le plus petit possible tel que : $\forall x \in D \ f(x + T) = f(x)$. Sa représentation graphique est obtenue par translation on étudie f sur un intervalle de longueur T .





$$\int_a^{a+T} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt$$

Soit f , une fonction T -périodique, continue sur tout intervalle $[a ; a+T]$. On a alors :

$$\int_a^{a+T} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt$$

Exemple $\int_0^{2\pi} \cos^2(t) \cdot \sin^3(t) dt =$

$\overbrace{\cos^2(t)}^{\text{pair}} \times \underbrace{\sin^3(t)}_{\text{impair}} = \text{impair}$

$I \neq 0$ 2π -périodique car:

$$f(t+2\pi) = \cos^2(t+2\pi) \times \sin^3(t+2\pi)$$

$$= \cos^2 t \times \sin^3 t$$

$$f(t+2\pi) = f(t)$$

f est 2π -périodique, $I = \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(t)}_{\text{impair}} dt = 0$.

Exercice 4 Un circuit comprend un générateur de force contre électromotrice E (en Volt), bobine de résistance R (en Ohm) et d'inductance L (en Henry). L'intensité du courant $i(t)$ (en Ampères) à l'instant t (en secondes) est donnée par la relation : $i(t) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}} \right)$. Calculer la quantité d'électricité Q , en Coulombs, mise en jeu entre les temps 0 et 0,1 secondes. On rappelle que $Q = \int_0^{0,1} i(t)dt$

Corrigé du DM11

DM 11;

Exercice 4 page 19:

$$Q = \int_0^{0,1} i(t) dt \Leftrightarrow Q = \int_0^{0,1} \frac{E}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t}) dt$$

$$Q = \frac{E}{R} \int_0^{0,1} (1 - e^{-\frac{R}{L}t}) dt$$

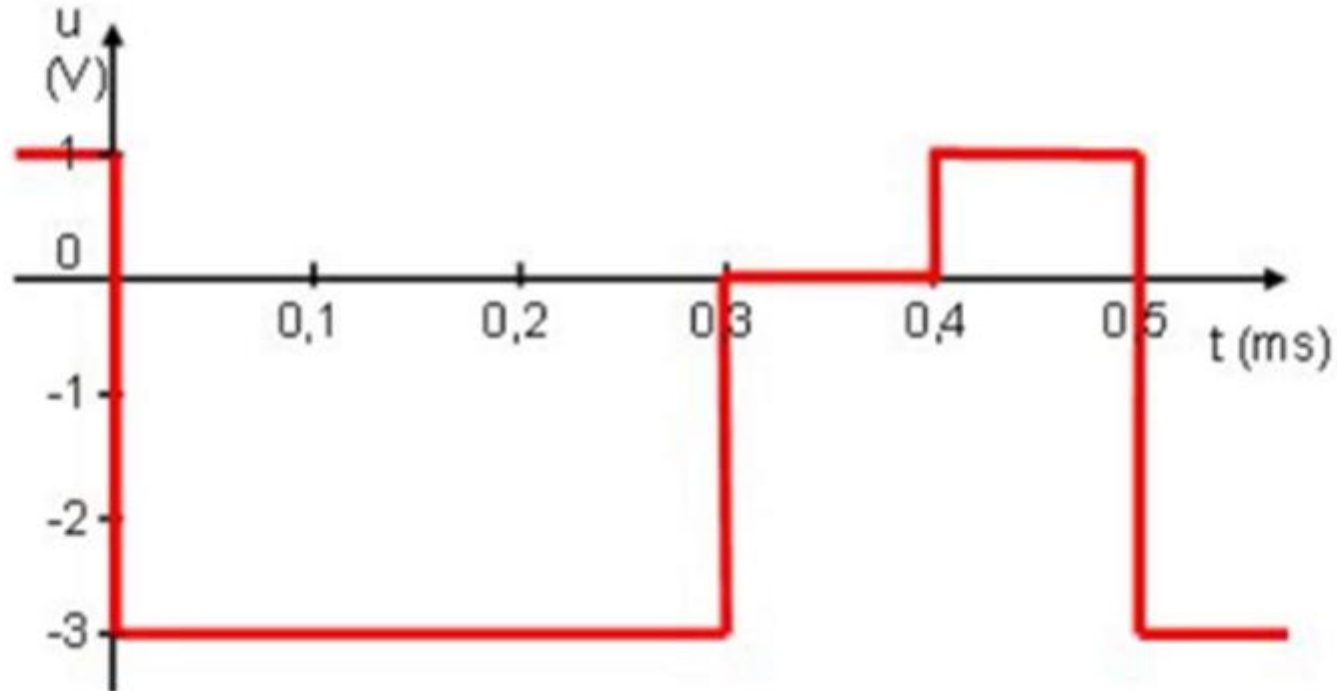
$$Q = \frac{E}{R} \left[t + \frac{L}{R} e^{-\frac{R}{L}t} \right]_0^{0,1}$$

$$Q = \frac{E}{R} \left[(0,1 + \frac{L}{R} e^{-\frac{R \times (0,1)}{L}}) - (0 + \frac{L}{R} e^{-\frac{R \times 0}{L}}) \right]$$

$$Q = \frac{E}{R} (0,1 + \frac{L}{R} e^{-\frac{R \times 0,1}{L}} - \frac{L}{R})$$

Exercice 5 Déterminer les valeurs moyenne et efficace du signal 0,5-périodique représenté ci-dessous :

Chapitre 4 page 19



.....

.....

.....

Exercice 5 page 19

Valeur moyenne $= \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt \rightarrow$ Somme des aires divisée par la période

De $t=0$ à $t=0,3\text{ ms}$ $u(t) = -3\text{ V}$ A1

De $t=0,3$ à $t=0,4\text{ ms}$ $u(t) = \cancel{0\text{ V}}$ 0V A2

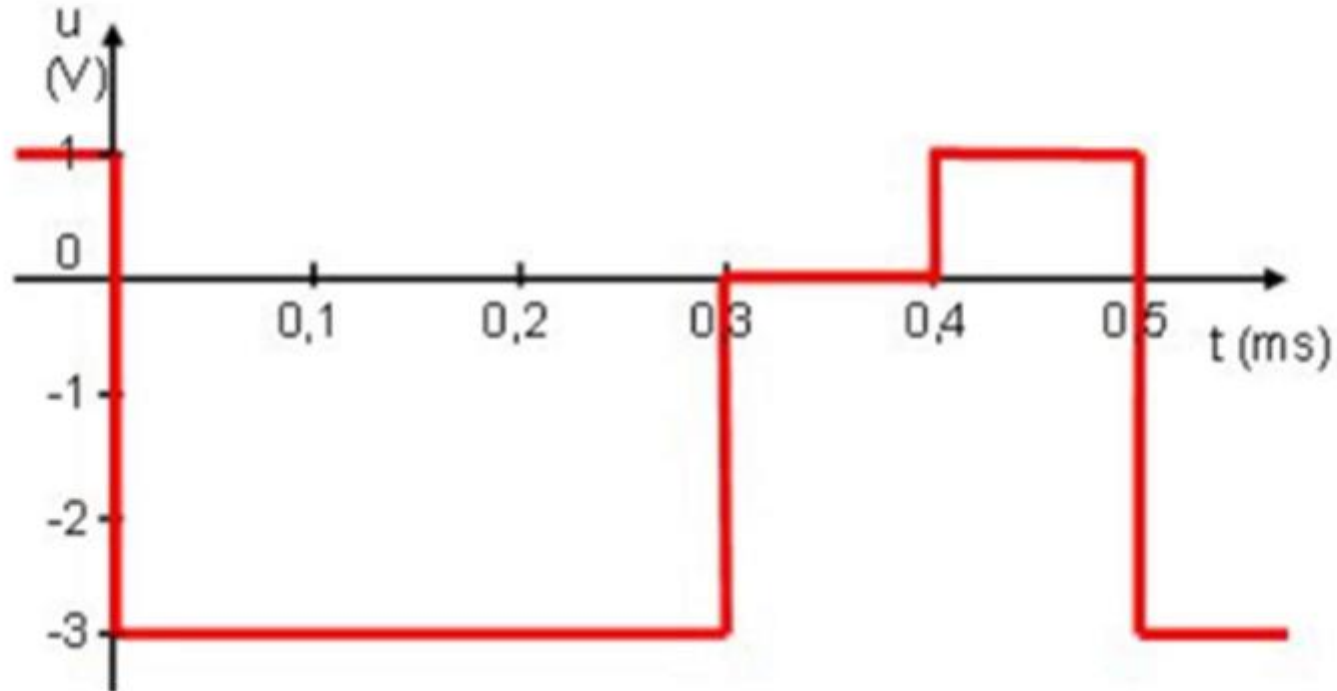
De $t=0,4\text{ ms}$ à $t=0,5\text{ ms}$ $u(t) = 1\text{ V}$ A3

$$\text{Aire totale} = (-3 \times 0,3) + 0 + (1 \times 0,1) = -0,8\text{ V.ms}$$

$$\text{Valeur moyenne} = \frac{-0,8}{0,5} = -1,6\text{ V}$$

Exercice 5 Déterminer les valeurs moyenne et efficace du signal 0,5-périodique représenté ci-dessous :

Chapitre 4 page 19



.....

.....

.....

$$V_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \times \int_0^T u^2(t) dt} \quad \text{done}$$

$$A1 = (-3V)^2 = 9 \quad A2 = 0V \quad A3 = 1$$

$$A_{\text{moy}} = (9 \times 0,3) + 0 + (1 \times 0,1) = 2,8$$

$$V_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{2,8}{0,5}} = \sqrt{5,6} \simeq 2,37V$$