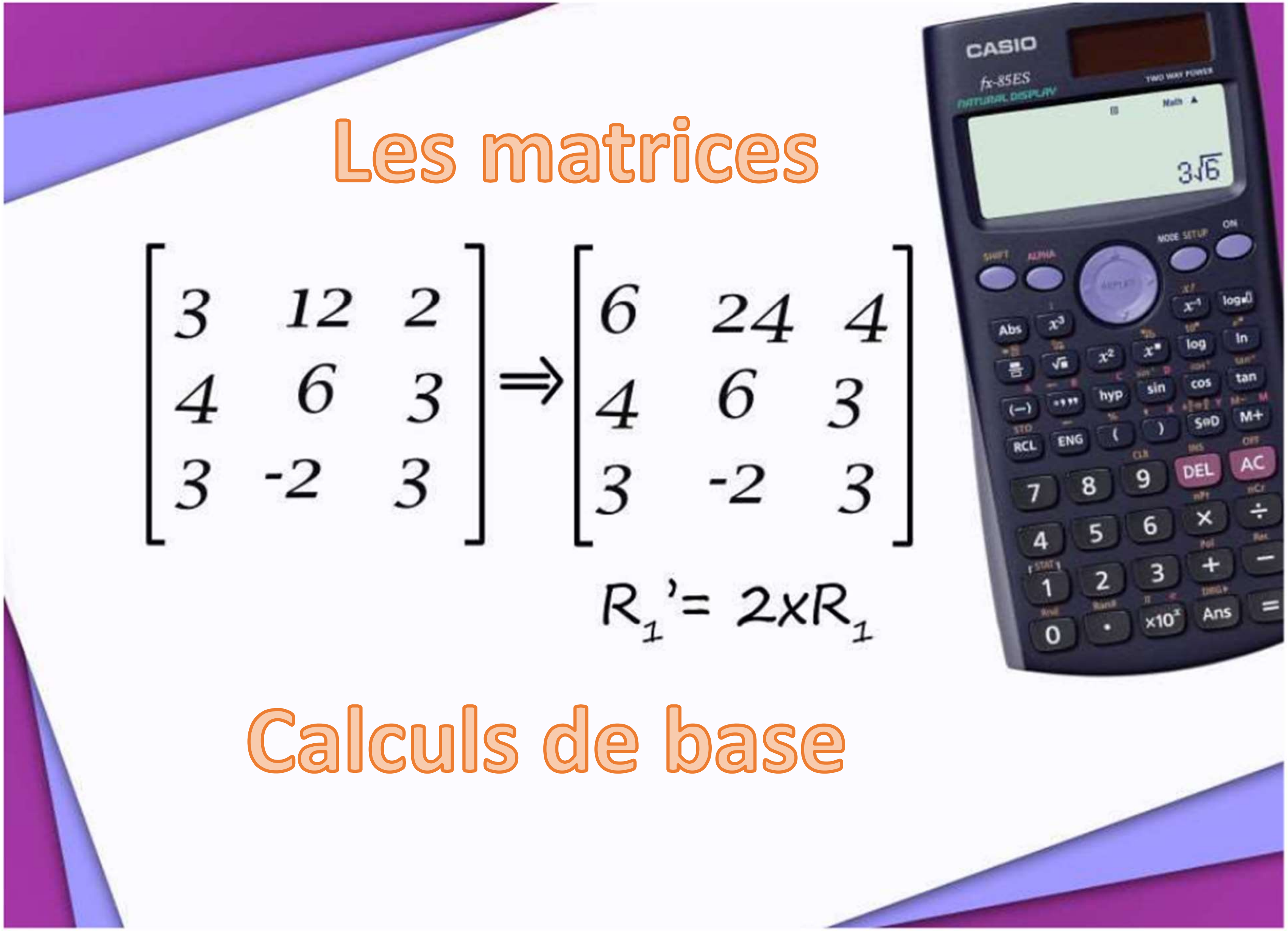

Les matrices
$\begin{bmatrix} 3 & 12 & 2 \\ 4 & 6 & 3 \\ 3 & -2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 6 & 24 & 4 \\ 4 & 6 & 3 \\ 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$
$R_1' = 2xR_1$
Calculs de base
CASIO
fx-85ES
NATURAL DISPLAY

✓ Transposée d'une matrice carrée

Soit A = $(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice carrée d'ordre n, on appelle matrice transposée de A et on note ${}^tA$, la matrice carrée d'ordre n, définie par : ${}^tA = (a_{ji})_{1\leq i,j\leq n}$
$A \in M(n, K)$ donc ${}^tA \in M(n, K)$

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 5j & 1 & -1 \\ j & 2 & 3 \\ 0 & j & 0 \end{pmatrix}$ alors ${}^tA = \begin{pmatrix} 5j & j & 0 \\ 1 & 2 & j \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

$A \in \mathcal{M}(3; \mathbb{C}) \Longrightarrow {}^tA \in \mathcal{M}(3, \mathbb{C})$

5

Notice page 25

page 26 : – Memento WxMaxima –

Page 25 chapitre 2

* Sur moodle : R3/4-04 : "tuile maxima" la "notice" est très complète

* Opérations : on la valide avec | Maj. Entrée
ou entrée pavé numérique.

⚠ le produit de matrices se fait avec • et pas avec *

MATRICES

* Créer une matrice : menu "matrix" – "créer" – "entrer une matrice"

* Puissance : A^^2 ; A^^-1 ou invert(A)

* transposer : transpose(A)

* déterminant : determinant(A)

* Complexe : %i ; 5x%i et non pas ~~5%i~~

Notes

✓ Multiplication d'une matrice et d'un vecteur

Soit $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ une matrice carrée d'ordre n, et $V = (x_i)_{1\le i\le n}$ un vecteur à n composantes réelles ou complexes.

$$A.V = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{pmatrix} = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \right)_{1\le i\le n}$$

A.V est un vecteur à n composantes.

Exemple $A = \overbrace{\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}^{\mathcal{M}(3;\mathbb{R})}$ et $V = \overbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}^{\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(3;1)}$ alors AV= $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$

$3\times1 + 0\times0 + (-1)\times2$

TP : Vérifier ce résultat à l'aide du logiciel Maxima. ATTENTION : le produit matriciel se fait avec le point (et non pas l'étoile)

Remarques - On ne peut faire le produit d'une matrice et d'un vecteur que si le nombre de composantes du vecteur est égal à l'ordre de la matrice.

- V.A est impossible.

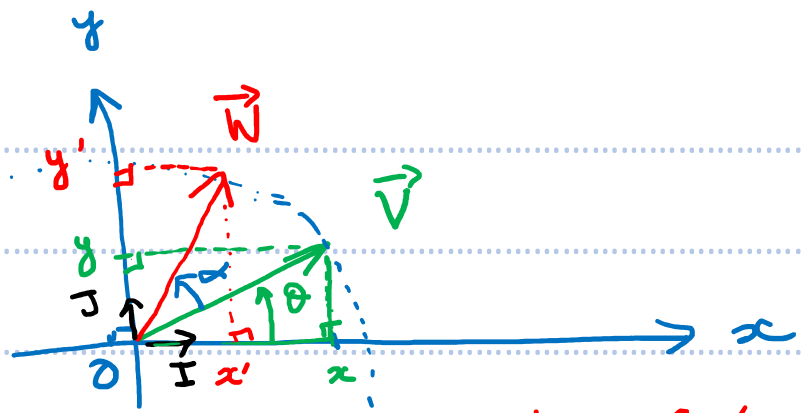
Exercice 1 : Soit A la matrice définie par $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ et V le vecteur défini par : $V = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calculer A.V.

Page 23 chapitre 2

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Application Soit $\vec{V} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, un vecteur du plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit α un angle. Cherchons $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, les coordonnées du vecteur $\vec{W}$, obtenu en effectuant la rotation d'angle α du vecteur $\vec{V}$.

Page 7 chapitre 2



? $\vec{W} = A.\vec{V}$? $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Soit $\begin{cases} \theta = mes(\vec{OI};\vec{V}) \\ V = \|\vec{V}\| \leftarrow \text{norme} \\ \quad = \sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x}{V} \\ \sin\theta = \dfrac{y}{V} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = V\cdot\cos\theta \\ y = V.\sin\theta \end{cases}$$

donc $\begin{cases} x' = W.\cos(\theta+\alpha) \\ y' = W.\sin(\theta+\alpha) \end{cases}$

$$\begin{cases} x' = V.(\underbrace{\cos\theta}_{\frac{x}{V}}.\cos\alpha - \underbrace{\sin\theta}_{\frac{y}{V}}\sin\alpha) \\ y' = V.(\underbrace{\sin\theta}_{\frac{y}{V}}.\cos\alpha + \sin\alpha.\underbrace{\cos\theta}_{\frac{x}{V}}) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$\cos\alpha$ $-\sin\alpha$

$\sin\alpha$ $\cos\alpha$

La matrice rotation d'angle α est donc $R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

Page 8 chapitre 2

✓ Produit de deux matrices

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$ deux matrices carrées d'ordre n.

Le produit $A \times B$ est une matrice carrée d'ordre n définie par :

$$A \times B = (c_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}} \quad \text{où } c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \quad \forall\ 1 \le i, j \le n$$

En pratique On dispose la matrice A sous la matrice B, de la façon suivante :

$$A \times B = \underbrace{\begin{pmatrix} - L_1 - \\ - L_2 - \\ - L_3 - \end{pmatrix}}_{A} \times \underbrace{\begin{pmatrix} | & | & | \\ V_1 & V_2 & V_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}}_{B} = \begin{pmatrix} | & | & | \\ AV_1 & AV_2 & AV_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = A \times B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

Exemple $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ A \times B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = & \begin{pmatrix} 4 & & \\ 12 & & \\ 18 & & \end{pmatrix} \end{array}$$

$B \times A =$

Page 9 chapitre 2

Remarques En général $A \times B \neq B \times A$

Exercice Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & x & y \end{pmatrix}$ où x et y sont deux réels. Pour quelles valeurs de x et y a-t-on $A \times B = B \times A$? Donner alors la matrice $A \times B$.

$$A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2+x & y-5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B \times A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & x & y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1+3x+y & 1-2x-y & 1 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} 1+3x+y=0 & (1) \\ 2+x=0 & (2) \\ 1-2x-y=0 & (3) \\ y-5=0 & (4) \end{cases} \iff \begin{cases} (2) \iff x=-2 \\ (4) \iff y=5 \\ 1+3(-2)+5=0 \quad (1) \text{ ok} \\ 1-2(-2)-5=0 \quad (3) \text{ ok} \end{cases}$$

$$B \times A = A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$ donc A est inversible et $B = A^{-1}$

Notation interdite $\cancel{\frac{1}{A}}$

Cas particulier

On appelle matrice Identité d'ordre n, la matrice I_n définie par :

On note : $$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$I_n \in M(n, K)$

Si A est une matrice carrée d'ordre n, alors $A \times I_n = I_n \times A = A$

VIDEO DM5

Page 10 chapitre 2

<u>Exemple</u> Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, calculer :

$A \times I_3 =$

$I_3 \times A =$

VIDEO DM5

4) Matrice carrée inversible

Page 10 chapitre 2

Une matrice carrée d'ordre n, à coefficients dans K est dite inversible (ou régulière) lorsqu'il existe une matrice B carrée d'ordre n, à coefficients dans K telle que :

$$\mathbf{A \times B = B \times A = I_n}$$

La matrice B est alors unique, elle est appelée matrice inverse de A et est notée $\mathbf{A^{-1}}$.

Exemple Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, calculer, si c'est possible A^{-1}.

VIDEO DM5

Exercice suite de l'exemple précédent. Soit $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$. Calculer B^2+B et en déduire que B est inversible ainsi que la matrice B^{-1}. Calculer A.B, $(A.B)^{-1}$, $B^{-1}.A^{-1}$. Comparer les deux derniers résultats obtenus.

Page 11 chapitre 2

VIDEO DM5

Page 13 chapitre 2

II. Déterminant d'une matrice carrée

1) Matrice carrée d'ordre 2

Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in M_2(K)$. On appelle déterminant de la matrice A et on note det(A) ou $|A|$ le scalaire défini par : det(A)= $|A|$=ad-bc.

Exemple Calculer le déterminant de la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

$\det A = |A| = 5\times 1 - (-2)\times 3 = 5+6 = 11.$

VIDEO DM6

Page 14 chapitre 2

Exemples

- ✓ Calculer le déterminant de la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}$ précédemment citée, en développant par rapport à la 1^{re} ligne, puis par rapport à la $2^{ème}$ colonne.

VIDEO DM6

- ✓ Calculer le déterminant de la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ précédemment citée, en développant par rapport à la $3^{ème}$ ligne :

Page 14 chapitre 2

VIDEO DM6

✓ Soit $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$, calculer $|C|$.

Page 15 chapitre 2

VIDEO DM6

✓ Soit $D = \begin{pmatrix} 110 & 2 & 15 & 8 \\ 0 & 12 & 20 & 7 \\ 0 & 0 & 30 & 56 \\ 0 & 0 & 0 & 200 \end{pmatrix}$, calculer $|D|$.

Page 16 chapitre 2

VIDEO DM6

Remarques

- ✓ En pratique, on choisira de développer le déterminant d'une matrice par rapport à la ligne ou la colonne comportant le plus de zéros.
- ✓ Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit des coefficients de sa diagonale.

Page 17 chapitre 2

3) Propriétés

Soit A, B deux matrices carrées de même ordre.
$\det(AB)=\det A.\det B$; $\det({}^tA)=\det A$.

VIDEO DM6

Exercice 5 (

$A = \begin{pmatrix} 2 & - \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

e 23 chapitre 2

Exercice 5:

$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ $\det(A) = 2 \times 3 - 5 \times (-2) = 16$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & -4 \end{pmatrix}$ Par rapport à la 1ère ligne:

$$\det(B) = 1 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = (-6) - 2(-10) + 3(2) = 20$$

$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ Par rapport à la 2ème colonne:

$$\det(C) = -1 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1(-3) = 3$$

```
(%i1) A: matrix(
        [2,-2],
        [5,3]
      );
```

$A \quad \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

```
(%i3) determinant(A);
(%o3) 16
(%i4) B: matrix(
        [1,2,3],
        [1,1,-2],
        [-3,-1,-4]
      );
```

$B \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & -4 \end{bmatrix}$

```
(%i5) determinant(B);
(%o5) 20
(%i6) C: matrix(
        [3,1,2],
        [2,0,1],
        [1,0,-1]
      );
```

$C \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

Exercice 4 Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1) Déterminer la matrice M^2
2) Vérifier que $M^2=3M-2I$
3) En déduire que M est inversible et déterminer M^{-1}
4) Résoudre le système : $\begin{cases} y - z = 6 \\ -3x + 4y - 3z = 8 \\ -x + y = 0 \end{cases}$

```
(%i1) A: matrix(
 [0,1,-1],
 [-3,4,-3],
 [-1,1,0]
 );
```

$$A \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

```
(%i2) A.A;
```

$$(\%o2) \quad \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -9 & 10 & -9 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Page 23 chapitre 2

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1)

$$M \times M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -9 & 10 & -9 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix} = M^2$$

2)

$$3M - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -9 & 12 & -9 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -9 & 10 & -9 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix} = M^2$$

Définition Soit A une matrice carrée d'ordre n. A est dite inversible (ou régulière) lorsqu'il existe une matrice B carrée d'ordre n, à coefficients dans K telle que :
$A.B=B.A=I_n$

$xy = yx = 1$. $\quad y = \frac{1}{x}$. $x \neq 0$

La matrice B est alors unique, elle est appelée matrice inverse de A et est notée A^{-1}.

$$\boxed{M^2 = 3M - 2I}$$

$\underbrace{M.3I}$

$3M - M^2 = M(3I - M)$

$2I = 3M - M^2 \iff 2I = 3I.M - M.M$

$2I = M.(3I - M) \iff 2I = (3I - M).M$

$I = \frac{1}{2} M (3I - M) \iff I = \underbrace{\frac{1}{2}(3I - M)}_{B = M^{-1}}.M$

$I = M.\underbrace{\frac{1}{2}(3I - M)}$

$BM = MB = I \qquad B = \frac{1}{2}(3I - M)$

Calculer $M^{-1} =$ puis vérifier

Notes

$$M^{-1} = \frac{1}{2}(3I - M)$$

$$M^{-1} = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right] = \underbrace{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}}_{M^{-1}} = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 & 1/2 \\ 3/2 & -1/2 & 3/2 \\ 1/2 & -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

Vérification :

$$M^{-1} \times M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I \quad \text{CQFD}$$

et on admet $M \times M^{-1} = I$

expl

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ -x + 5y = 2 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

A est inversible :

$$A^{-1}A \cdot V = A^{-1}B$$

$$I \cdot V = A^{-1}B \iff V = A^{-1}B$$

4) Résoudre le système : $\begin{cases} y - z = 6 \\ -3x + 4y - 3z = 8 \\ -x + y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -3y + 4y - 3z = 0 \iff \\ y = x \end{cases}$

$$\iff \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$x^{-1} \cdot x = 1.$

Coeff de x de y de z

$$M \cdot V = B$$

$$\iff \underbrace{M^{-1} M}_{??} \cdot V = M^{-1} B$$

M^{-1} existe

$5x = 7$

$$\iff \underbrace{I \cdot V}_{} = M^{-1} \cdot B$$

$x = \frac{7}{5}.$

$$\iff V = M^{-1} \cdot B$$

$$\iff V = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}$$

Notes

III. Calcul de l'inverse d'une matrice carrée inversible

23 chapitre 2

1) Définitions - théorème

- **On appelle matrice transposée d'une matrice carrée d'ordre n $A=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ la matrice carrée d'ordre n notée ${}^tA$ définie par : ${}^tA=(a_{ji})_{1\le j,i\le n}$.**
- **On appelle mineur d'indice (i,j) d'une matrice $A\in M_n(K)$ et on note Δ_{ij}, le déterminant de la matrice d'ordre n-1 obtenue en barrant la $i^{ème}$ ligne et la $j^{ème}$ colonne de A.**
- **On appelle cofacteur d'indice (i,j) le scalaire $(-1)^{i+j}\Delta_{ij}$**
- **On appelle comatrice d'une matrice $A\in M_n(K)$ et on note CoA, la matrice transposée de la matrice des cofacteurs : $CoA=\left((-1)^{i+j}\Delta_{ij}\right)_{1\le i,j\le n}$**

Définition Soit A une matrice carrée d'ordre n. A est dite inversible (ou régulière) lorsqu'il existe une matrice B carrée d'ordre n, à coefficients dans K telle que : $A.B=B.A=I_n$
La matrice B est alors unique, elle est appelée matrice inverse de A et est notée A^{-1}.

Théorème A est inversible si et seulement si $\det A\neq 0$, on a alors : $A^{-1}=\dfrac{{}^tCoA}{\det A}$

Exemples

- Soit $A=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ tel que $ad-bc\neq 0$. Calculer, si c'est possible A^{-1}.

Exemples

- Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ tel que $ad-bc \neq 0$. Calculer, si c'est possible A^{-1}.

Page 17 chapitre 2

* $\det A = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$ donc A est inversible.

* $A^{-1} = \dfrac{{}^{t}\mathrm{Co}A}{\det A}$ $\qquad \mathrm{Co}A = \begin{pmatrix} +d & -b \\ -c & +a \end{pmatrix} \Rightarrow {}^{t}\mathrm{Co}A = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

* Vérification : $AA^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & -bc+ad \end{pmatrix} \times \dfrac{1}{ad-bc} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$

TP : Vérifier le résultat avec le logiciel Maxima en affichant $A \times A^{-1}$ et $A^{-1} \times A$.

- Soit $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer, si c'est possible C^{-1} , et vérifier le résultat.

Page 18 chapitre 2

* $\det C = +2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2(20-9) = 22 \neq 0$ donc C est inversible.

* $CoC = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 11 \\ 10 & -6 & 3 \\ -6 & 8 & -4 \end{pmatrix}$

$^tCoC = \begin{pmatrix} 0 & 10 & -6 \\ 0 & -6 & 8 \\ 11 & 3 & -4 \end{pmatrix}$

$C^{-1} = \dfrac{^tCoC}{\det C} = \dfrac{1}{22}\begin{pmatrix} 0 & 10 & -6 \\ 0 & -6 & 8 \\ 11 & 3 & -4 \end{pmatrix}$

Vérif : $C \cdot C^{-1} = I$ ok

(%i3) **C: matrix(**
[0,1,2],
[4,3,0],
[3,5,0]
);

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

(%i4) **invert(C);** ou **C^^-1;**

(%o4) $\begin{pmatrix} 0 & \frac{5}{11} & -\left(\frac{3}{11}\right) \\ 0 & -\left(\frac{3}{11}\right) & \frac{4}{11} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{22} & -\left(\frac{2}{11}\right) \end{pmatrix}$

(%i6) **transpose(22·invert(C));**

(%o6) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 11 \\ 10 & -6 & 3 \\ -6 & 8 & -4 \end{pmatrix}$

Not

3) Application

Page 19 chapitre 2

Système d'équations linéaires et calcul matriciel

Soit le système $S_n \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$.

Soit les matrices ; $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$.

On peut écrire : $B=AX$, et $X=A^{-1}B$.

On résoudra donc le système en écrivant sa matrice A, en déterminant l'inverse A^{-1}, puis en effectuant le produit $A^{-1}B$. Ceci suppose que A est inversible, c'est à dire que $\det A \neq 0$.

Le système S_n possède donc une unique solution si et seulement si $\det A \neq 0$.

Remarque Cette méthode n'a évidemment aucun intérêt pour résoudre des systèmes numériques simples.

Exemple Soit le système : $(S)\begin{cases}2x+y-z=4\\ x-2y+z=-1\\ -x+2y+2z=-5\end{cases}$. Résoudre S. (On vérifiera les calculs intermédiaires à l'aide du logiciel Maxima)

Page 20 chapitre 2

Coef de x, de y, de z

$$* \quad (S) \iff \begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & -2 & 1\\ -1 & 2 & 2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\ -1\\ -5\end{pmatrix}$$

$+ \quad - \quad +$

??

$$\underbrace{A^{-1}A}\cdot V = A^{-1}B \quad \text{Si } A^{-1} \text{ existe.}$$

$$\underbrace{I \cdot V} = A^{-1}B$$

$$V = A^{-1}B$$

$*$ Calcul de A^{-1} : $\det A = -15$

$$\det A = -1\cdot\underbrace{\begin{vmatrix}1 & -1\\ -2 & 1\end{vmatrix}}_{-1} - 2\cdot\underbrace{\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}}_{3} + 2\cdot\underbrace{\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix}}_{-5} = 1-6-10 = -15$$

$$CoA = \begin{bmatrix}-6 & -3 & 0\\ -4 & 3 & -5\\ -1 & -3 & -5\end{bmatrix}$$

donc $${}^tCoA = \begin{pmatrix}-6 & -4 & 1\\ -3 & 3 & -3\\ 0 & -5 & -5\end{pmatrix} \text{ et } A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,{}^tCoA = \frac{1}{15}\begin{pmatrix}6 & 4 & 1\\ 3 & -3 & 3\\ 0 & 5 & 5\end{pmatrix}$$

Notes

$V = A^{-1} \cdot B$

$$V = \frac{1}{15} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 4 & 1 \\ 3 & -3 & 3 \\ 0 & 5 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} = \frac{1}{15} \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ 0 \\ -30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

Vérif : $\begin{cases} 2 \times 1 + 0 + 2 = 4 \quad \underline{\text{ok}} \\ 1 - 2.0 - 2 = -1 \quad \underline{\text{ok}} \\ -1 + 2.0 - 4 = -5 \quad \underline{\text{ok}} \end{cases}$

Exercice 8

Page 24 chapitre 2

1) Soit la matrice carrée : $A = \begin{pmatrix} a & 1 & a \\ -a & 0 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$ ou a est réel. Pour quelles valeurs de a cette matrice est-elle inversible ? Trouver A^{-1} dans le cas où a=2.

2) Résoudre par inversion de la matrice le système : $(S) \begin{cases} 2x + y + 2z = 1 \\ -2x + 2z = 0 \\ 2x + 2y + z = 2 \end{cases}$

1) A est inversible ssi $\det A \neq 0$

```
(%i17) determinant(A);
(%o17) -(2 a^3) + a^2 + a
```

CORRIGE DM8

A. La méthode du pivot de Gauss

Page 26 chapitre 2

I. Opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice carrée

Définition **On appelle opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice A, l'une des opérations suivantes :**

a) l'échange de deux lignes : $L_i \leftrightarrow L_j \quad i \neq j$

b) la multiplication d'une ligne par un scalaire α : $L_i \leftarrow \alpha.L_i$

c) la substitution d'une ligne par sa somme avec un multiple d'une autre ligne :

$$L_i \leftarrow L_i + \alpha.L_j$$

Ces opérations élémentaires peuvent aussi se faire sur les colonnes.

pour le calcul de A^{-1}

pour le calcul du déterminant

II Calcul du déterminant d'une matrice par la méthode du pivot de Gauss

1) Soient les matrices : $Sr = \begin{pmatrix} 1 & r & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $Tr = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ r & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $Ur = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ r & 0 & 1 \end{pmatrix}$ où r est un nombre réel non nul. Calculer leur déterminant.

S_r, T_r et U_r sont triangle donc $|S_r| = |T_r| = |U_r| = 1\times1\times1 = 1$

Notes

$$T_r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ r & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad U_r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ r & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Page 28&29 chapitre

2) Soit la matrice : $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & m \end{pmatrix}$, effectuer les produits suivants et donner le déterminant de la matrice obtenue en fonction de det(A) : $S_r.A$, $T_r.A$, $U_r.A$

$L_i \leftarrow L_i + rL_j$

le déterminant est inchangé.

$S_r A$

$$S_r . A = \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & r & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+rd & b+re & c+rf \\ d & e & f \\ g & h & m \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + rL_2 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

$$|S_r . A| = \underbrace{|S_r|}_{1} \times |A| = |A|$$

$T_r.A$; $L_2 \leftarrow L_2 + rL_1$

$$|T_r . A| = \underbrace{|T_r|}_{1} . |A| = |A|$$

$U_r.A$ $L_3 \leftarrow L_3 + rL_1$

$$|U_r . A| = |U_r| . |A| = |A| .$$

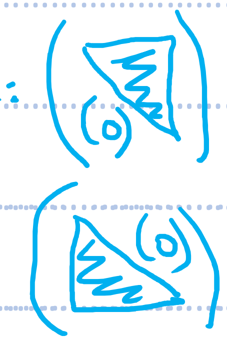
3) On en déduit le résultat ci-dessous :

<u>Théorème</u> Le déterminant d'une matrice ne change pas si l'on ajoute à l'une des lignes une combinaison linéaire des autres lignes.

Page 26 chapitre 2

L'objectif est alors de faire apparaître, à l'aide de l'opération c) le plus de 0 dans la matrice A, de façon à faciliter le calcul de son déterminant. On a en effet montré en 3) que sur des matrices de dimension 3 les opérations a) et b) précités dans la définition I. modifient la valeur du déterminant, contrairement à l'opération c).

matrice triangle:



4) Calculer le déterminant des matrices ci-dessous à l'aide de la méthode du pivot de Gauss.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & -4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -5 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

où a, b et c sont des réels. Ecrire le résultat final sous forme **factorisée**.

Remarques : • $|A| = +1 \times \begin{vmatrix} -1 & -5 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = -5 + 25 = 20.$

• ici on peut trigonaliser A

Pivot de Gauss

$$|A| = \begin{vmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & -4 \end{vmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & \boxed{-1} & -5 \\ 0 & 5 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -20 \end{vmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 5L_2 \end{matrix}$$

$= 1 \times (-1) \times (-20) = 20$

Notes

$$|B| = \left|\begin{pmatrix} -4 & \boxed{1} & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -5 & 1 & -1 \end{pmatrix}\right| \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} = \begin{vmatrix} -4 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

pivot de Gauss

Page 28&29 chapitre

$$|B| = -1 \times \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -1(4+2) = -6.$$

pivot de Gauss.

triganalisation

$$\Delta = \begin{vmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{b-a} & c-a \\ 0 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - aL_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - a^2 L_1 \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & 0 & \end{vmatrix} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - (b+a)L_2 \end{array}$$

$$c^2 - a^2 - (b+a)(c-a)$$

$$\Delta = 1 . (b-a)(c^2-a^2) - (b^2-a^2)(c-a)$$

$$= (b-a)(c-a)\left[c+a-(b+a)\right]$$

$$\Delta = (b-a)(c-a)(c-b)$$

$$\Delta = (b-a)\left[c^2-a^2-(b+a)(c-a)\right]$$

$$\Delta = (c-a)(b-a)(c+a-(b+a))$$

$$\Delta = (c-a)(b-a)(c-b).$$

III Calcul de la matrice inverse d'une matrice par la méthode du pivot de Gauss

Page 27 chapitre 2

1) Soient les matrices : $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}$

$M_k = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $N_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$ où k est un nombre réel non nul.

Montrer que ces matrices, ainsi que celles définies dans II.1 sont inversibles.

2) Soit la matrice : $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}$, effectuer les produits suivants : $E_1.A$, $E_2.A$, $E_3.A$ $M_k.A$, $N_k.A$, $P_k.A$.

1) $|E_1| = +1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$; $|E_2| = +1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$; $|E_3| = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$

$|M_k| = k = |N_k| = |P_k| \neq 0$ donc ces matrices sont toutes inversibles.

II.1 $|U_n| = |S_r| = |T_r| = 1 \neq 0$

Notes

Page 28&29 chapitre

$$E_1 \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{array}{c} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ g & h & k \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_3 \\ L_3 \leftarrow L_2 \end{array}$$

$E_1 \times I = E_1$ $\qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$E_2 \times A = L_1 \longleftrightarrow L_3$

$E_3 \times A = L_1 \longleftrightarrow L_2$

<u>Remarques</u> : $A \times E_1 : C_2 \longleftrightarrow C_3$

$A \times E_2 : C_1 \longleftrightarrow C_3$

$A \times E_3 = C_1 \longleftrightarrow C_2$

$M_k \times A = L_1 \longleftarrow k L_1$

$k \neq 0$

$N_k \times A = L_2 \longleftarrow k L_2$

$P_k \times A = L_3 \longleftarrow k L_3$

$A \times M_k = C_1 \longleftarrow k C_1$

$A \times N_k = C_2 \longleftarrow k C_2$

$A \times P_k = C_3 \longleftarrow k C_3$

Ne pas utiliser ces 6 opérations pour calculer det(A).

Pbme A $\det A \neq 0$ A^{-1} ? ?

$1.x = x.1 = x$ $x \times \frac{1}{x} = 1$

$I.B = B.I = B.$ $A \times A^{-1} = I.$

Page 28&29 chapitre

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \textcircled{2} & 3 & & \\ 5 & A & & I_3 \\ 4 & & & \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

$L_1 \leftarrow 0{,}5 L_1$

$$\left(\begin{array}{c|c} & \\ & \\ \end{array}\right)$$

$$\Pi_{0,5} \times A \qquad \Pi_{0,5} \times I$$

$$\Pi_5 \times T_r \times E_1 \times S_r \times \Pi_{0,5}\, A \quad \Big| \quad \Pi_5 . T_r . E_1 . S_r . \Pi_{0,5} \times I$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & B. \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right)$$

$$\Pi_5 T_r E_1 S_r \Pi_{0,5} \times \underbrace{A A^{-1}}_{} = \underbrace{I A^{-1}}_{}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{} \times I = A^{-1}$$

Donc $A^{-1} = \Pi_5 T_r E_1 S_r \Pi_{0,5}.$

Exple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Notes $\det A = 4-6 = -2 \neq 0$ A est donc inversible :

Page 28&29 chapitre

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & \big| & 1 & 0 \\ 3 & 4 & \big| & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \big| & 1 & 0 \\ 0 & -2 & \big| & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \big| & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & \big| & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \leftarrow -0{,}5\,L_2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}_{I} & \big| & \underbrace{\begin{matrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{matrix}}_{A^{-1}} \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ L_2 \end{array}$$

Donc $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

Vérif :

$$A^{-1} \times A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I = AA^{-1}$$

Remarque $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\det A \neq 0$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

3) Calculer la matrice inverse de A à l'aide de la méthode du pivot de Gauss. Cette méthode consiste à procéder par opérations élémentaires sur les lignes de la matrice A et simultanément sur les lignes de la matrice identité.

Page 27 chapitre 2

$$A = \left(\begin{array}{cccc|cccc} \boxed{1} & -1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \\ L_4 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ L_4 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 2L_4 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 3L_4 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_4 \\ L_4 \end{array}$$

$$\left(\underbrace{\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}}_{I} \middle| \underbrace{\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}}_{A^{-1}}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}$$

Vérif Maxima : invert(A)

(%i3) **invert(A);**

$$(\%o3) \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Notes

$$\begin{cases} \boxed{1}x - y + z = 6 & L_1 \\ 2x - 3y = 8 & L_2 \\ x + y + 2z = 0 & L_3 \end{cases} \iff \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Page 28&29 chapitre

$$A^{-1}A \cdot V = A^{-1}B$$

$$I \cdot V = A^{-1}B$$

$$V = A^{-1}B$$

$$\begin{cases} x - y + z = 6 & L_1 \\ \boxed{-}y - 2z = -4 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ 2y + z = -6 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 6 \\ 2 & -3 & 0 & 8 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \cdots \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & -14 \end{array}\right)$$

système triangle.

$$\begin{cases} x - y + z = 6 & L_1 \\ + y + 2z = +4 & L_2 \\ -3z = -14 & L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \end{cases}$$

$$z = \frac{14}{3}$$

$$y = +4 - \frac{28}{3} = \frac{-16}{3}$$

$$x = 6 + y - z = \ldots$$