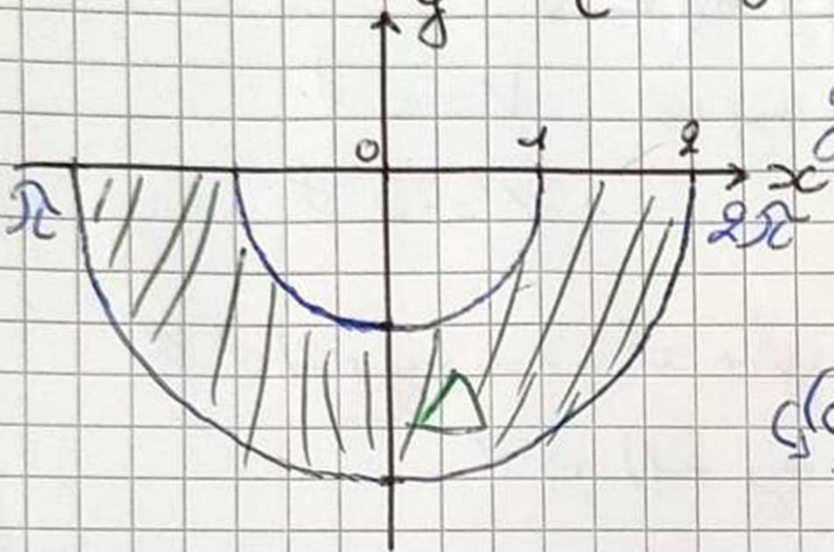
exo 1 — Corrigé du DM 7 —

$$J = \iint_D (3x + 4y^2)\,dx\,dy$$

où $D = \{ (x,y) \,/\, \underbrace{y \le 0}_{y \text{ négatif}} \,;\, \underbrace{1 \le x^2 + y^2 \le 4}_{\text{disque}} \}$



$(x-a)^2 + (y-b)^2 \le R^2$

$\Omega(a,b) = (0,0)$

$D(\Omega, R)$

$(0,1)$: $x^2 + y^2 \ge 1$ $\qquad$ $(0,2)$: $x^2 + y^2 \le 2$

$$\begin{cases} 1 \le r \le 2 \\ \pi \le \theta \le 2\pi \end{cases} \qquad \Delta = [1;2] \times [\pi, 2\pi]$$

Notes

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases}$$

$$J = \iint_\Delta f(r\cos\theta ; r\sin\theta)\, r\,dr\,d\theta$$

$$J = \int_\pi^{2\pi}\int_1^{2} (3r\cos(\theta) + 4r^2\sin(\theta)^2)\, r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_\pi^{2\pi}\int_1^{2} 3r^2\cos(\theta) + 4r^3\sin(\theta)^2\,dr\,d\theta$$

$$= \int_\pi^{2\pi} [r^3\cos(\theta) + r^4\sin(\theta)^2]_1^2\,d\theta$$

$$= \int_\pi^{2\pi} (7\cos\theta + 15\sin(\theta)^2)\,d\theta \qquad \sin(\theta)^2 = \frac{1-\cos(2\theta)}{2}$$

$$= \frac{15}{2}\left[\theta - \frac{\sin(2\theta)}{2}\right]_\pi^{2\pi}$$

$$= \frac{15}{2}\left((2\pi - 0) - (\pi - 0)\right) = \frac{15\pi}{2}$$

Exercice 2 Recherche de points critiques d'une fonction à plusieurs variables. (5 pts)

Soit f, la fonction à deux variables définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x,y) = (y^2 + x^2 - 2x + y + 2).e^{-y}$

1) Calculer les dérivées partielles premières de f :

Escercice 2

$$f(x,y) = (y^2 + x^2 - 2x + y + 2)e^{-y}$$

1) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \underline{e^{-y} \times (2x - 2)}$

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = e^{-y}(2y+1) - e^{-y}(x^2 - 2x + y^2 + y + 2)$

$= \underline{-e^{-y}(x^2 - 2x + y^2 - y + 1)}$

2) $\begin{cases} (2x-2).e^{-y} = 0 \\ (x^2 - 2x + y^2 - y + 1).e^{-y} = 0 \end{cases}$

$e^{-y} \neq 0$

donc on cherche dans le second membre

$2x - 2 = 0 \iff 2(x-1) = 0 \iff x = 1$

$x^2 - 2x + y^2 - y + 1 = 0 \implies -1 + y^2 - y + 1 = 0$

$y(y-1) = 0 \quad y = 0$ ou $y = 1$

Les points critiques sont : $(1,0)$ et $(1;1)$.

1/2

3) Calculer les dérivées partielles secondes de f :

"R" $f''_{x^2} = 2e^{-y}$ $f''_{y^2} = (-2y+1)e^{-y} - (-y^2-x^2+2x+y-1)e^{-y}$ "T"

$= (y^2+x^2-2x-3y+2).e^{-y}$

"S" $f''_{xy} = -(2x-2)e^{-y} = f''_{yx}$

4) Déterminer la nature des points critiques trouvés à la question 2).

	(1,0)	(1,1)
R	$2>0$	$2e^{-1}>0$
S	0	0
T	1	$-1e^{-1}$
$RT-S^2$	$2>0$	<0
Nature	min local	pt selle.