QUIZZ 3APP

INTEGRALES DOUBLES et RECHERCHE D EXTREMA

Soit $\mathrm{I} = \iint_D f(x,y)dxdy$

où $f(x,y) = x^2 + y^2$ et D$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$.

Tracer D. Si on intègre d'abord par rapport à y, qu'obtient–on ?.

5'

1. $\mathrm{I} = \int_0^1 \int_0^{1-\mathrm{x}} (x^2 + y^2).\,\mathrm{dx}.\,\mathrm{dy}$

2. $\mathrm{I} = \int_0^1 \int_0^{1-\mathrm{x}} (x^2 + y^2).\,\mathrm{dy}.\,\mathrm{d}x$

3. $\mathrm{I} = \int_0^1 \int_0^{1-y} (x^2 + y^2).\,\mathrm{dx}.\,\mathrm{dy}$

4. $\mathrm{I} = \int_0^1 \int_0^{1-y} (x^2 + y^2).\,\mathrm{dy}.\,\mathrm{d}x$

5. $\mathrm{I} = \int_0^{1-\mathrm{x}} \int_0^1 (x^2 + y^2).\,\mathrm{dy}.\,\mathrm{d}x$

6. $\mathrm{I} = \int_0^{1-\mathrm{x}} \int_0^1 (x^2 + y^2).\,\mathrm{dx}.\,\mathrm{d}y$

1

2

3

4

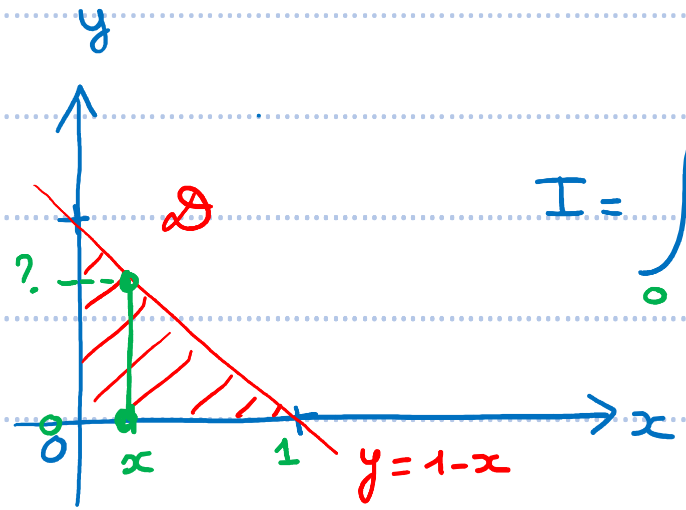
5

6

Notes

$$I = \iint_{\mathcal{D}} (x^2+y^2)\,dx\,dy \quad \text{où} \quad \mathcal{D} = \{(x,y) \,/\, x \geq 0\,;\, y \geq 0\,;\, \underbrace{x+y \leq 1}_{\iff\, y \leq 1-x}\}$$

On trace la droite d'équation $y = 1-x$



$$I = \int_0^1 \underbrace{\int_0^{1-x} (x^2+y^2)\,dy}\,dx$$

1’

$$I = \int_0^1 \int_0^{1-x} (x^2 + y^2).\,dy.\,dx$$ est alors égal à :

1. $I = \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3}\right]_0^{1-x} dx$

2. $I = \int_0^1 \left[\frac{x^3}{3} + xy^2\right]_0^{1-x} dx$

3. $I = \int_0^1 \left[\frac{x^3}{3} + xy^2\right]_0^{1-x} dy$

4. $I = \int_0^1 \left[\frac{y^3}{3} + yx^2\right]_0^{1-x} dy$

1

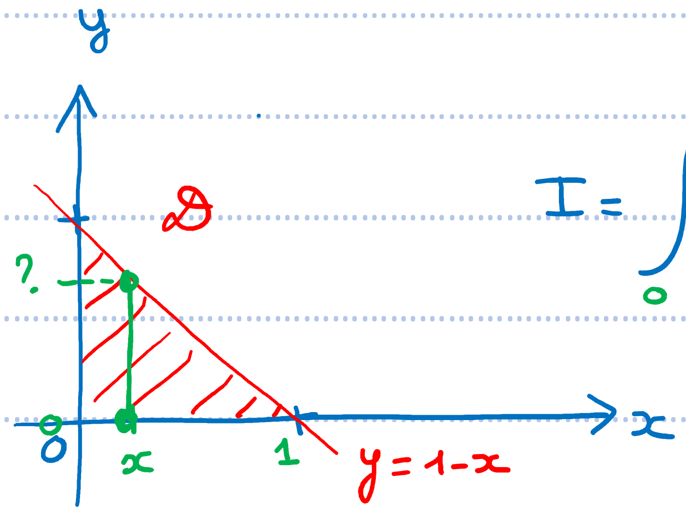
2

3

4

Notes

$$I = \iint_{\mathcal{D}} (x^2+y^2)\,dx\,dy \quad \text{où} \quad \mathcal{D} = \{(x,y) \,/\, x \geq 0 \,;\, y \geq 0 \,;\, \underbrace{x+y \leq 1}_{\iff\, y \leq 1-x}\}$$



$$I = \int_0^1 \underbrace{\int_0^{1-x} (x^2+y^2)\,dy}\,dx$$

$$I = \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_0^{1-x} dx$$

On trace la droite d'équation $y = 1-x$

$$\mathrm{I} = \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3}\right]_0^{1-x} dx$$ est alors égal à :

4’

1. $I = \frac{1}{3}[x^3 y + x y^3]_0^1$

1

2. $I = \left[x^2(1-x) + \frac{1}{3}(1-x)^3\right]_0^1$

2

3. $I = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{4}(1-x)^4\right]_0^1$

3

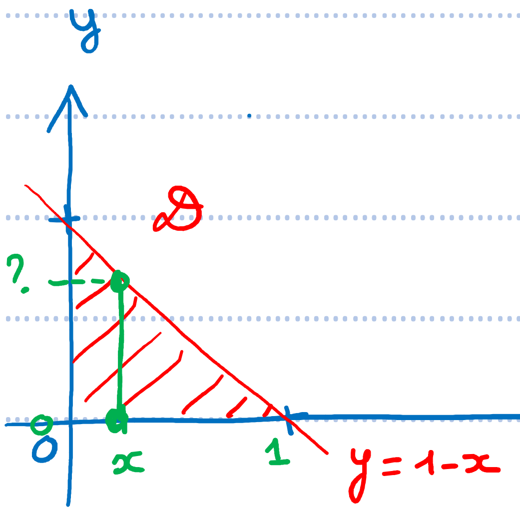
4. $I = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{12}(1-x)^4\right]_0^1$

4

Notes

$$I = \iint_{\mathcal{D}} (x^2+y^2)\,dx\,dy \quad \text{où} \quad \mathcal{D} = \{(x,y) \,/\, x \geq 0 \,;\, y \geq 0 \,;\, \underbrace{x+y \leq 1}_{\iff\ y \leq 1-x}\}$$

On trace la droite d'équation $y = 1-x$



$$I = \int_0^1 \underbrace{\int_0^{1-x} (x^2+y^2)\,dy}\,dx$$

$$I = \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_0^{1-x} dx = \int_0^1 \left[\underbrace{x^2(1-x)}_{x^2-x^3} + \frac{(1-x)^3}{3} \right] dx$$

$$\longrightarrow \int u' u^3\,dx = \frac{u^4}{4}$$

$u = 1-x$

$u' = -1.$

$$I = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{(1-x)^4}{12} \right]_0^1 =$$

2’

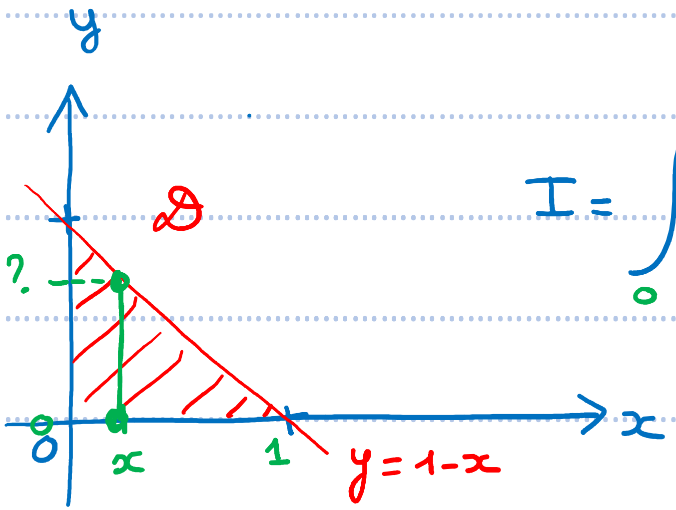
$$I = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{12}(1-x)^4\right]_0^1$$ est donc égal à :

1. 1/6	1
2. -1/6	2
3. 1/12	3
4. -1/12	4
5. Aucune des réponses ci-dessus.	5

Notes

$$I = \iint_{\mathcal{D}} (x^2+y^2)\,dx\,dy \quad \text{où} \quad \mathcal{D} = \{(x,y) \,/\, x \geq 0 \,;\, y \geq 0 \,;\, \underbrace{x+y \leq 1}_{\Leftrightarrow\ y \leq 1-x}\}$$

On trace la droite d'équation $y = 1-x$



$$I = \int_0^1 \underbrace{\int_0^{1-x} (x^2+y^2)\,dy}\,dx$$

$$I = \int_0^1 \left[x^2y + \frac{y^3}{3}\right]_0^{1-x} dx = \int_0^1 \left[\underbrace{x^2(1-x)}_{x^2-x^3} + \frac{(1-x)^3}{3}\right] dx$$

$\int u'u^3\,dx = \frac{u^4}{4}$

$u = 1-x$

$u' = -1.$

$$I = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{(1-x)^4}{12}\right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - 0 - \left(0 - 0 - \frac{1}{12}\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

Soit $\mathrm{I} = \iint_D f(x,y)dxdy$ où $f(x,y) = x$ et
D$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y \geq 0, x - y + 1 \geq 0, x + 2y - 4 \leq 0\}$. Tracer D.

5'

Quel est le meilleur choix :

1. Intégrer d'abord par rapport à x ?

   1

2. Intégrer d'abord par rapport à y ?

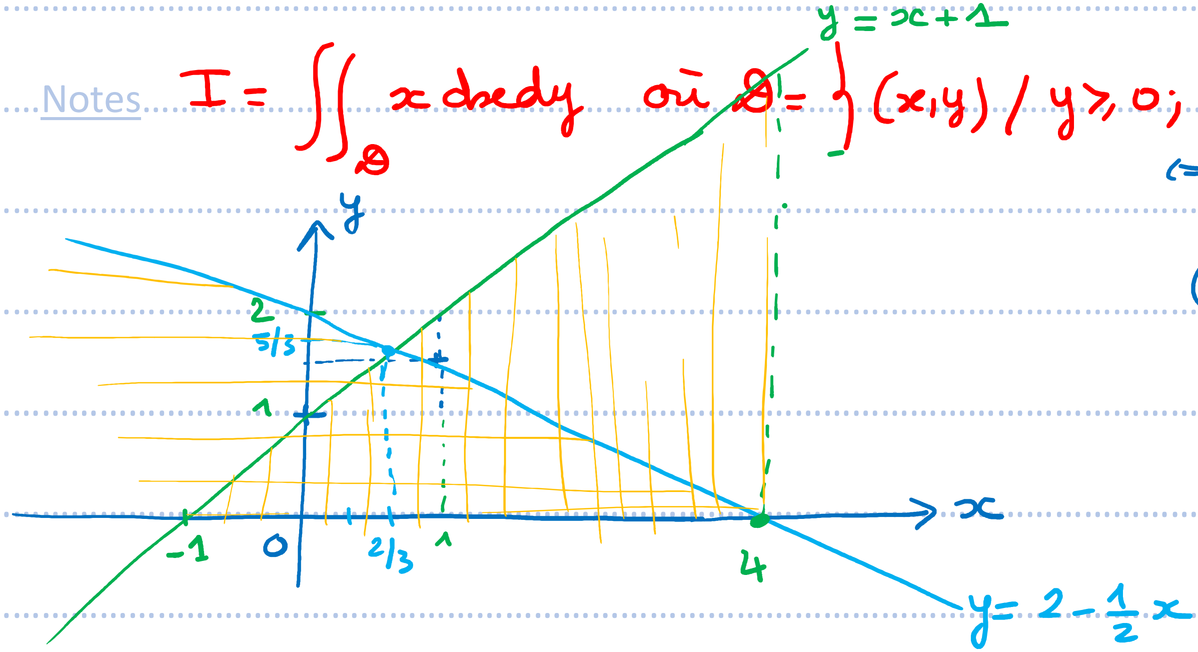
   2

3. Peu importe ?

   3

Notes $I = \iint_{\mathcal{D}} x\,dx\,dy$ où $\mathcal{D} = \{(x,y) \,/\, y \geq 0 ;\ x - y + 1 \geq 0 ;\ x + 2y - 4 \leq 0\}$

$\iff y \leq x+1 \qquad \iff y \leq 2 - \frac{1}{2}x$



On trace alors les droites d'équations :

$y = x+1$ et $y = 2 - \frac{1}{2}x$.

Intersection : $x + 1 = 2 - \frac{1}{2}x$

$\frac{3}{2}x = 1 \iff x = \frac{2}{3}$.

$y = 5/3$.

Si on intègre d'abord % y alors il faut couper le domaine $\mathcal{D}$ en deux domaines

Si c'est d'abord % x, alors cela ne sera pas nécessaire.

Soit $\mathrm{I} = \iint_D f(x,y)dxdy$ où $f(x,y) = x$ et
D= $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y \geq 0, x - y + 1 \geq 0, x + 2y - 4 \leq 0\}$.
On intègre d'abord par rapport à x. Alors :

3'

1. $\mathrm{I} = \int_0^{5/3} \int_{-1}^{4} x.dx.dy$

1

2. $\mathrm{I} = \int_0^{5/3} \int_{y-1}^{4-2} x.dx.dy$

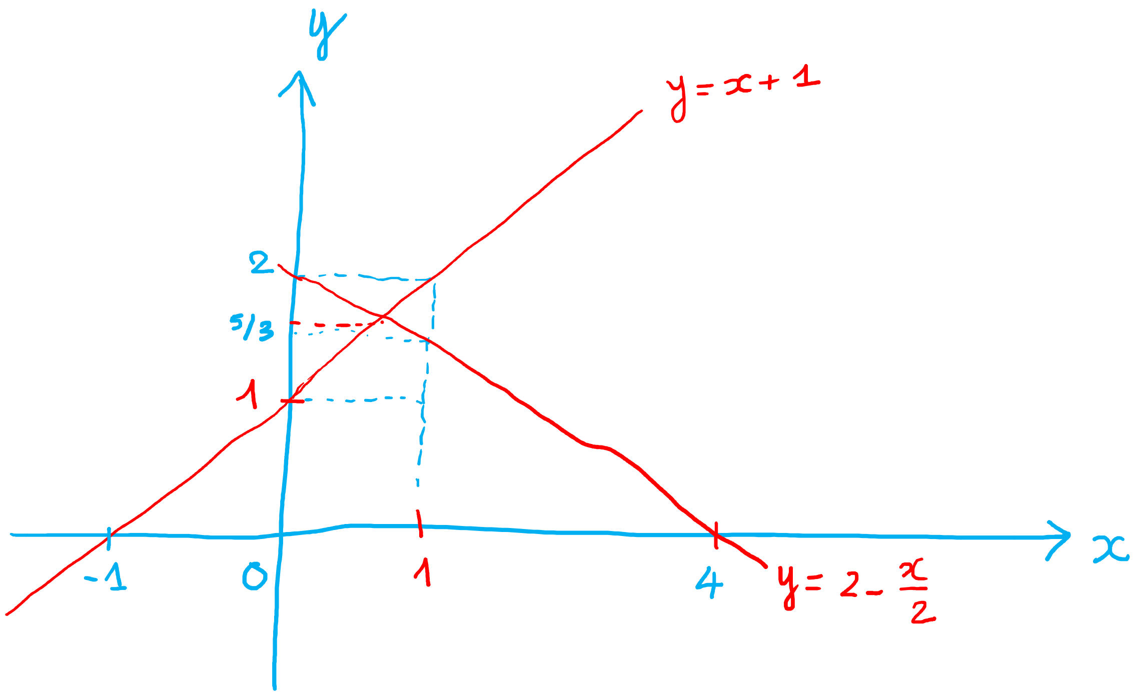
2

3. $\mathrm{I} = \int_0^{2} \int_{y-1}^{4-2y} x.dx.dy$

3

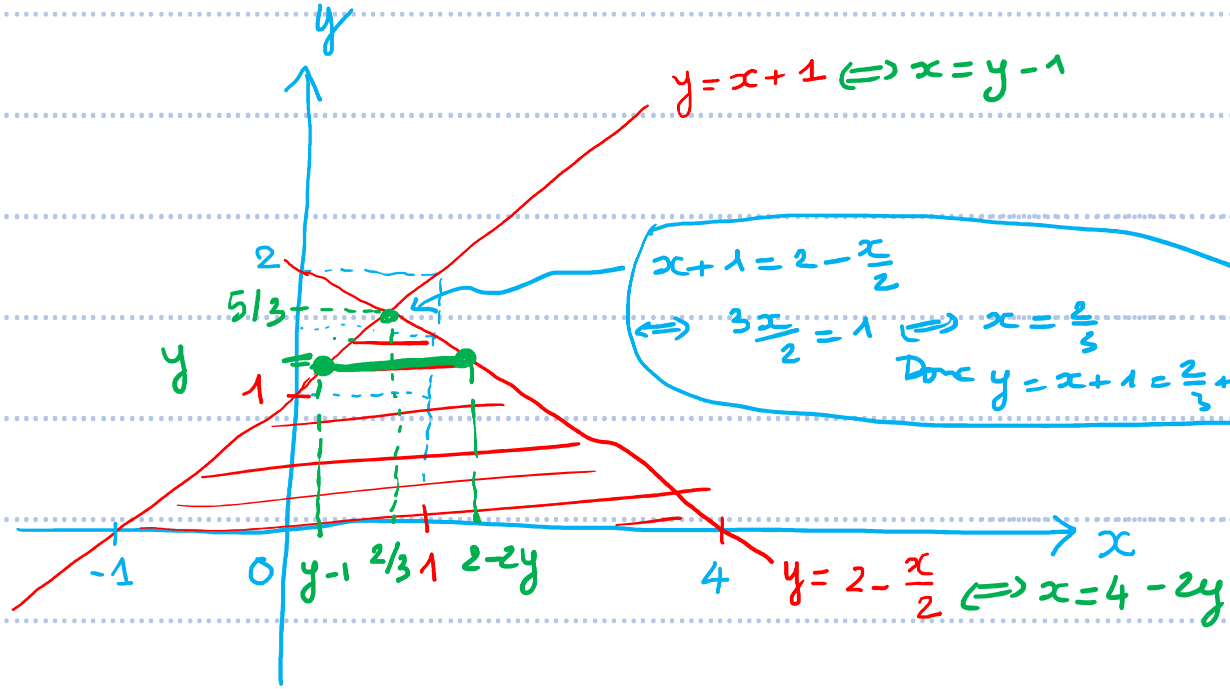
4. $\mathrm{I} = \int_0^{2} \int_{-1}^{4} x.dx.dy$

4



Notes

$$I = \iint_{\mathcal{D}} x \, dx\, dy = \int_0^{5/3} \underbrace{\int_{y-1}^{4-2y} x \, dx}\, dy$$



$x + 1 = 2 - \frac{x}{2}$

$\Longleftrightarrow \frac{3x}{2} = 1 \Longleftrightarrow x = \frac{2}{3}$

Donc $y = x + 1 = \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3}$

3’

$$\mathrm{I} = \int_0^{5/3} \int_{y-1}^{4-2y} x.\,dx.\,dy$$ est alors égale à :

1. $I = -\frac{1}{6}\left[\frac{1}{2}(4-2y)^3 + (y-1)^3\right]_0^{5/3}$

2. $I = \frac{1}{6}[(4-2y)^3 - (y-1)^3]_0^{5/3}$

3. Aucune des deux réponses précédentes n’est juste.

1

2

3

Notes

$$I = \iint_{\mathcal{D}} x\,dx\,dy = \int_0^{5/3} \underbrace{\int_{y-1}^{4-2y} x\,dx}\; dy$$

$$I = \int_0^{5/3} \left[\frac{x^2}{2}\right]_{y-1}^{4-2y} dy = \frac{1}{2}\int_0^{5/3} \left(\underbrace{(4-2y)^2}_{\substack{u=4-2y\\ u'=-2}} - \underbrace{(y-1)^2}_{\substack{u=y-1\\ u'=1}}\right) dy$$

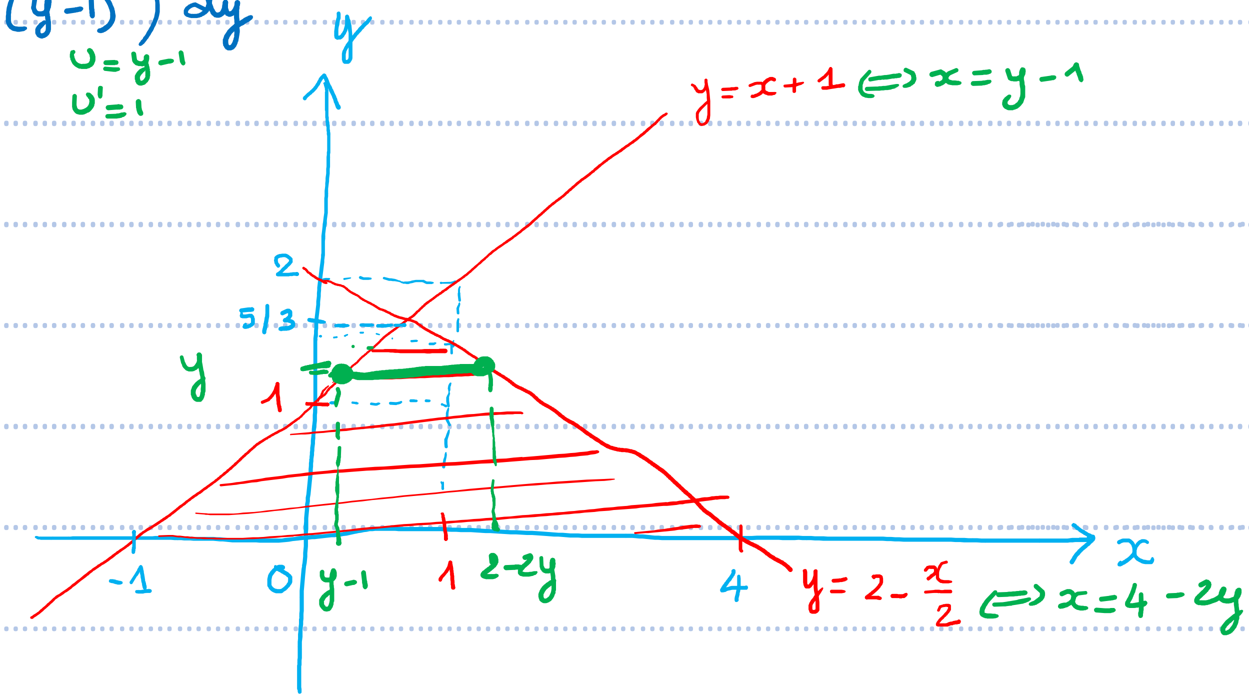
$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{(4-2y)^3}{6} - \frac{(y-1)^3}{3}\right]_0^{5/3}$$

$$I = -\frac{1}{6}\left[\frac{(4-2y)^3}{2} + (y-1)^3\right]_0^{5/3}$$

$$I = -\frac{1}{6}\left(\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^3}{2} + \left(\frac{2}{3}\right)^3 - \frac{4^3}{2} - (-1)^3\right)$$

$$= -\frac{1}{6}\left(\underbrace{\frac{4}{27} + \frac{8}{27}} - 32 + 1\right)$$

$$I = -\frac{1}{6}\left(\frac{12}{27} - \frac{31\times 27}{27}\right) = \frac{275}{54}$$



Soit $\mathrm{I} = \iint_D f(x,y)dxdy$

où $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ et D= $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \geq 0, 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}$

. Tracer D. Quelle est sa forme ?

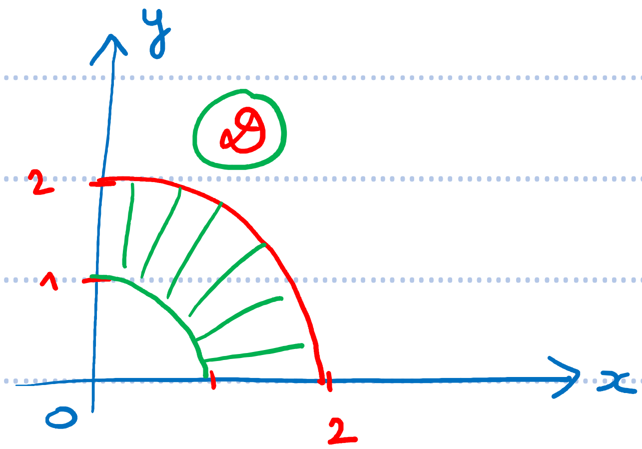
2'

1. Un haricot vert — 1
2. Une demi galette — 2
3. Un quart de donut — 3
4. Un carré de chocolat — 4
5. Un quart de tarte — 5
6. La prof est folle. — 6

Notes

$$I = \iint_{\mathcal{D}} \frac{xy}{x^2+y^2}\,dx\,dy \quad \text{où } \mathcal{D} = \{(x,y) \,/\, x \geq 0 ;\, y \geq 0 ;\, 1 \leq \overbrace{x^2+y^2}^{\text{extérieur du disque de centre O et de rayon 1.}} \leq \underbrace{4}_{2^2}\}.$$

$\underbrace{x^2+y^2 \leq 4}$: intérieur du disque de centre O et de rayon 2



Soit I $= \iint_D f(x,y)dxdy$

où $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ et D= $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \geq 0, 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}$

1'

Le plus simple pour calculer I c'est d' :

1. intégrer d'abord par rapport à x

1

2. intégrer d'abord par rapport à y

2

3. effectuer le changement de variable : $x = r.cos\theta$ et *y=r.sinθ*

3

4. effectuer le changement de variable : u= x^2+y^2 et *y=xy*

4

5. *abandonner !*

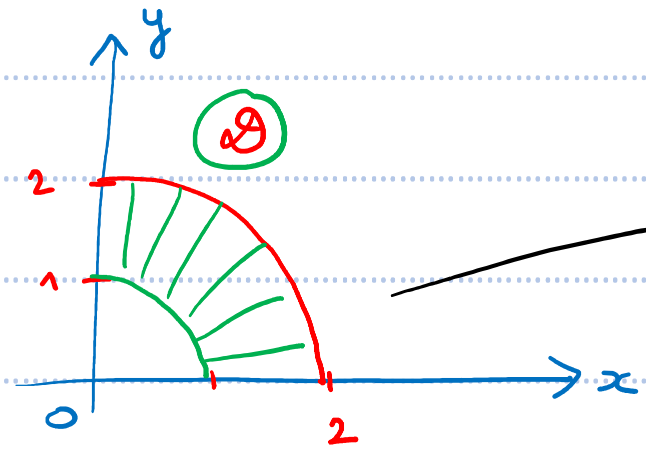
5

Notes

$$I = \iint_{\mathcal{D}} \underbrace{\frac{xy}{x^2+y^2}} \, dx\,dy \quad \text{où } \mathcal{D} = \left\{ (x,y) \,/\, x \geq 0 ; y \geq 0 ; \; 1 \leq \overbrace{\underbrace{x^2+y^2 \leq 4}}^{} \right\}.$$

extérieur du disque de centre O et de rayon 1.

intérieur du disque de centre O et de rayon 2



$\oplus$ = Coordonnées polaires

Soit $\mathrm{I} = \iint_D f(x,y)dxdy$ où $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ 2'

et D= $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \geq 0, 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}$. On effectue un passage en coordonnées polaires. Le nouveau domaine est alors :

1. $\Delta= \left[0,\frac{\pi}{2}\right] \times [1,4]$ 1
2. $\Delta= \left[0,\frac{\pi}{2}\right] \times [0,2]$ 2
3. $\Delta= [1,2] \times \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 3
4. $\Delta= \left[0,\frac{\pi}{2}\right] \times [1,2]$ 4
5. $\Delta= \left[0,\frac{\pi}{4}\right] \times [1,2]$ 5

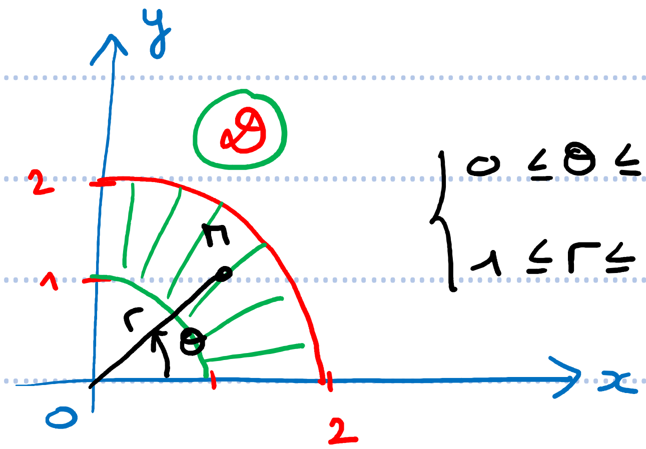
Notes

$$I = \iint_{\mathcal{D}} \frac{xy}{x^2+y^2}\,dx\,dy \quad \text{où } \mathcal{D} = \left\{ (x,y) \,/\, x \geq 0 ;\, y \geq 0 ;\, \overbrace{1 \leq \underbrace{x^2+y^2 \leq 4}}\right\}.$$

extérieur du disque de centre O et de rayon 1.

$4 = 2^2$

intérieur du disque de centre O et de rayon 2



$$\begin{cases} 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 1 \leq r \leq 2 \end{cases}$$

donc $\Delta = \left\{ (r,\theta) \,/\, 1 \leq r \leq 2 \text{ et } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\}$.

Soit $\mathrm{I} = \iint_D f(x,y)dxdy$ où $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ et D= $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \geq 0, 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}$. Après passage en coordonnées polaires, $\Delta = [1,2] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et I devient alors :

2'

1. $\mathrm{I} = \iint_\Delta cos\theta . sin\theta . rdrd\theta$

2. $\mathrm{I} = \iint_\Delta cos\theta . sin\theta drd\theta$

3. $\mathrm{I} = \iint_\Delta cos\theta . sin\theta . r^2drd\theta$

4. *Aucune des trois réponses précédentes n'est juste.*

1

2

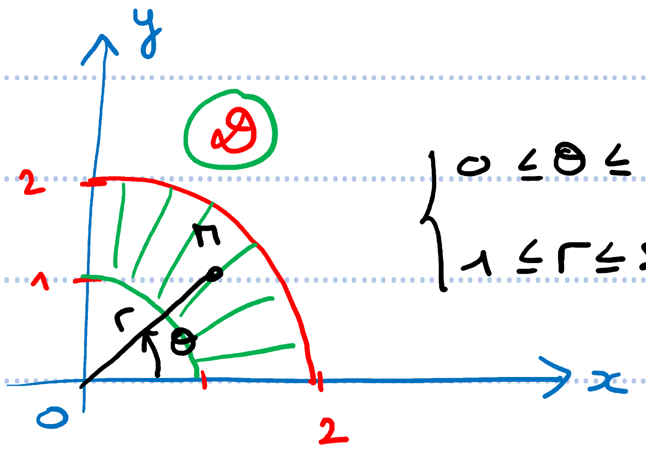
3

4

Notes

$$I = \iint_{\mathcal{D}} \frac{xy}{x^2+y^2}\,dx\,dy \quad \text{où } \mathcal{D} = \Big\{(x,y) \,/\, x \geq 0;\ y \geq 0;\ \overbrace{1 \leq \underbrace{x^2+y^2 \leq 4}_{\text{intérieur du disque de centre O et de rayon 2}}}^{\text{extérieur du disque de centre O et de rayon 1.}}\Big\}.$$

$4 = 2^2$



$$\begin{cases} 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 1 \leq r \leq 2 \end{cases} \quad \text{donc } \Delta = \Big\{(r,\theta) \,/\, 1 \leq r \leq 2 \text{ et } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\Big\}.$$

$$I = \iint_{\Delta} \frac{r\cos\theta \times r\sin\theta}{r^2} \times r\,dr\,d\theta$$

Rappel : $x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

$dx\,dy = r\,dr\,d\theta$.

$x^2+y^2 = r^2$

$$I = \iint_{\Delta} \frac{r^3}{r^2} \cos\theta \sin\theta\,dr\,d\theta = \iint_{\Delta} r \cos\theta \sin\theta\,dr\,d\theta$$

Soit $\mathrm{I} = \iint_{\Delta} f(r,\theta)drd\theta$ où $f(r,\theta) = r.cos\theta.sin\theta$ et $\Delta = \left[0,\frac{\pi}{2}\right] \times [1,2]$ alors :

4'

1. I = 3/4
2. I = 0
3. I = 1

1

2

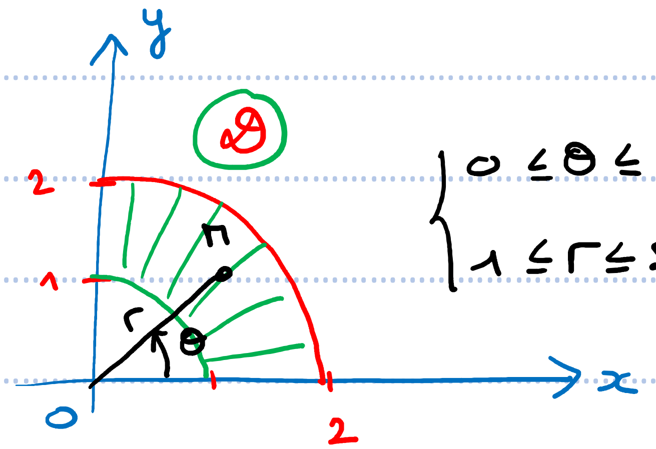
3

Notes

$$I = \iint_{\mathcal{D}} \frac{xy}{x^2+y^2}\, dx\, dy \quad \text{où } \mathcal{D} = \{(x,y) \,/\, x \geq 0 ;\, y \geq 0 ;\, \underbrace{1 \leq x^2+y^2 \leq 4}\}.$$

extérieur du disque de centre O et de rayon 1.

intérieur du disque de centre O et de rayon 2



$$\begin{cases} 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 1 \leq r \leq 2 \end{cases}$$

donc $\Delta = \{(r,\theta) \,/\, 1 \leq r \leq 2 \text{ et } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$.

Rappel : $x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

$dx\,dy = r\,dr\,d\theta$.

$x^2+y^2 = r^2$

$$I = \iint_{\Delta} \frac{r\cos\theta \times r\sin\theta}{r^2} \times r\, dr\, d\theta$$

à variables séparables.

$$I = \iint_{\Delta} \frac{r^3}{r^2} \cos\theta \sin\theta\, dr\, d\theta = \iint_{\Delta} r \cos\theta \sin\theta\, dr\, d\theta$$

$\Delta = [1;2] \times [0; \pi/2] \leftarrow$ rectangle

$$I = \int_1^2 r\,dr \times \int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta\, d\theta = \left[\frac{r^2}{2}\right]_1^2 \times \left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_0^{\pi/2} = \left(\frac{4}{2} - \frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}.$$

$\int u' u\, d\theta = \frac{u^2}{2}$

$u = \sin\theta \Rightarrow u' = \cos\theta$

Soit f, la fonction à deux variables définie par : $f(x, y) = x.\left((\ln(x))^2 + y^2\right)$.
Son ensemble de définition est :

2’

1. $D_f = \mathbb{R}^2$ 1

2. $D_f = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ 2

✓3 3. $D_f = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ 3

4. *Aucune des trois réponses précédentes n'est juste.* 4

Notes

$f(x,y) = x\left((\ln x)^2 + y^2\right)$ existe si et seulement si $\underbrace{x > 0}_{x \in \mathbb{R}_+^*}$ et $y \in \mathbb{R}$.

Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$

Soit f, la fonction à deux variables définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ par : $f(x,y) = x.\left((\ln(x))^2 + y^2\right)$.

3'

Quelle dérivée partielle est juste ?

1. $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy$

2. $\frac{\partial f}{\partial y} = (\ln(x))^2 + 2\ln(x) + y^2$

3. $\frac{\partial f}{\partial x} = 2\frac{\ln(x)}{x}$

4. $\frac{\partial f}{\partial x} = 2y$

✓5 5. *Aucune des réponses précédentes n'est juste.*

1

2

3

4

5

Notes

$f(x,y) = x\left((\ln x)^2 + y^2\right)$ existe si et seulement si $\underbrace{x > 0}_{x \in \mathbb{R}_+^*}$ et $y \in \mathbb{R}$.

Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x'_x\left((\ln x)^2 + y^2\right) + x.\left((\ln x)^2 + y^2\right)'_x$$

$$= (\ln x)^2 + y^2 + x\left(\frac{2\ln x}{x}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (\ln x)^2 + 2\ln x + y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x.\left((\ln x)^2 + y^2\right)'_y = x \times 2y$$

Soit f, la fonction à deux variables définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ par : $f(x,y) = x.\left((\ln(x))^2 + y^2\right)$.
$\frac{\partial f}{\partial x} = (\ln(x))^2 + 2\ln(x) + y^2$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy$. Quels sont alors les points critiques de f ?

4'

1. $(0;1)$ *et* $(1;0)$
2. $(1;0)$ *est le seul point critique de f*
3. Il y a 3 points critiques dont $(1;0)$ et $(e^{-2};0)$
4. *Aucune des réponses précédentes n'est juste.*

1

2

3

✓4

4

Notes

$f(x,y) = x\left((\ln x)^2 + y^2\right)$ existe si et seulement si $\underbrace{x>0}_{x\in\mathbb{R}_+^*}$ et $y\in\mathbb{R}$.

Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x'_x\left((\ln x)^2 + y^2\right) + x.\left((\ln x)^2 + y^2\right)'_x$$

$$= (\ln x)^2 + y^2 + x\left(\frac{2\ln x}{x}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (\ln x)^2 + 2\ln x + y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x.\left((\ln x)^2 + y^2\right)'_y = x \times 2y$$

Points critiques :

On résout $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} (\ln x)^2 + 2\ln x + y^2 = 0 \quad (1) \\ 2xy = 0 \iff \underbrace{x=0}_{\text{impossible}} \text{ ou } y = 0 \end{cases}$

car $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$

Donc $y=0$ et $(1) \iff (\ln x)^2 + 2\ln x = 0$

$\iff \ln x.(\ln x + 2) = 0$

$\iff \ln x = 0$ ou $\ln x + 2 = 0$

$\iff x = 1$ ou $\ln x = -2 \iff x = e^{-2}$

$\boxed{\text{Les points critiques sont donc : } (1;0) \text{ et } (e^{-2};0)}$

3'

Soit f, la fonction à deux variables définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ par : $f(x,y) = x.\left((\ln(x))^2 + y^2\right)$. $\frac{\partial f}{\partial x} = (\ln(x))^2 + 2\ln(x) + y^2$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy$. Parmi les réponse ci-dessous, quelle est la dérivée partielle du second ordre juste ?

1 1. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2}{x}(lnx + 1)$

2. $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x$

3. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y$

1

2

3

Notes

$f(x,y) = x\left((\ln x)^2 + y^2\right)$ existe si et seulement si $\underbrace{x > 0}_{x \in \mathbb{R}_+^*}$ et $y \in \mathbb{R}$.

Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x'_x\left((\ln x)^2 + y^2\right) + x.\left((\ln x)^2 + y^2\right)'_x$$

$$= (\ln x)^2 + y^2 + x\left(\frac{2\ln x}{x}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (\ln x)^2 + 2\ln x + y^2 \Longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \left((\ln x)^2 + 2\ln x + y^2\right)'_x = 2\frac{\ln x}{x} + \frac{2}{x} = \frac{2}{x}(\ln x + 1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x.\left((\ln x)^2 + y^2\right)'_y = x \times 2y \Longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (2xy)'_y = 2x$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = (2xy)'_x = 2y.$$

4’

Soit f, la fonction à deux variables définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ par : $f(x,y) = x.\left((\ln(x))^2 + y^2\right)$.
Quelle est la nature des points critiques ?

1. (1;0) est un point selle et (e^{-2};0) est un minimum
2. (1;0) est un point col et (e^{-2};0) est un maximum
3. (1;0) est un minimum et (e^{-2};0) est un point col ✓3
4. (1;0) est un maximum et (e^{-2};0) est un point selle
5. (1;0) est un point selle et (e^{-2};0) est un maximum

1
2
3
4
5

Pour résumer : Soit $(x_0,y_0) \in \mathcal{D}_f$ un point critique :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0$$

- Si $rt - s^2 > 0$ alors f admet en (x_0,y_0) un extremum local
  - si $r > 0$ " " minimum "
  - si $r < 0$ " " maximum "
- Si $rt - s^2 < 0$ alors f admet en (x_0,y_0) un pt. selle (col)
- Si $rt - s^2 = 0$ on ne peut pas conclure, il nous faut chercher le signe de $f(x,y) - f(x_0,y_0)$.

Notes

$f(x,y) = x\left((\ln x)^2 + y^2\right)$ existe si et seulement si $\underbrace{x>0}_{x\in\mathbb{R}_+^*}$ et $y\in\mathbb{R}$.

Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$

Nature des points critique :

$(1;0)$: $r = f''_{x^2} = \frac{2}{1}(\ln 1 + 1) = 2$

$s = f''_{xy} = 2\times 0 = 0$

$t = f''_{y^2} = 2\times 1 = 2$

$\left.\right\}$ $rt - s^2 = 4$

$(e^{-2};0)$: $r = f''_{x^2} = \frac{2}{e^{-2}}(\ln e^{-2} + 1) = 2e^2(-2+1) = -2e^2$

$s = f''_{xy} = 2\times 0 = 0$

$t = f''_{y^2} = 2e^{-2}$

$\left.\right\}$ $rt - s^2 = -2e^2 \times 2e^{-2} - 0 = -4$

Points critique :	$(1;0)$	$(e^{-2};0)$
$f''_{x^2} = \frac{2}{x}(\ln x + 1) = r$	$2>0$ minimum	$-2e^2$
$f''_{xy} = 2y = s$	0	0
$f''_{y^2} = 2x = t$	2	$2e^{-2}$
Signe de $\lvert H(f)\rvert$: $r.t - s^2$	$4>0$ Extremum	$-4<0$
Nature du point critique.	Minimum	Point selle.