I — Définitions et premiers exemples

Définition 1. *Soient n et p deux entiers naturels non nuls, et $A \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$. Le* ***rang de la matrice A****, noté $\operatorname{rg}(A)$ est la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ engendré par ses p colonnes.*

Exemples

- $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$
- $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$
- Plus généralement $\operatorname{rg}(\mathrm{I}_n) = n$
- $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1$
- $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} = 1$
- $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$
- $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$
- $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 5 & 5 & 1 \\ 6 & 6 & 1 \\ 5 & 5 & 1 \end{pmatrix} = 2$
- $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & -4 & -8 \\ 3 & 6 & 12 \end{pmatrix} = 1$
- $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} = 2$
- $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = 2$
- $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \alpha \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} 1 \text{ si } \alpha = 0 \\ 2 \text{ si } \alpha \neq 0 \end{cases}$
- $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = 1$

Convention : *une fois pour toutes, indiquons que n et p désigneront dans ces lignes des entiers naturels non nuls.*

Le premier énoncé ci-dessous découle directement de la définition :