TP semaine du 9 février

A

Soit a un réel. Déterminer selon les valeurs de a le rang de la matrice A suivante en utilisant des opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes de la matrice.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -3 & a & -2 \\ 1 & a & -2 & a-1 & 1 \\ 1 & 1 & a-3 & 2a-2 & 13 \end{pmatrix}$$

Pour quelles valeurs de a cette matrice est-elle inversible ?

B

Soit A_β, la matrice définie par : $A_\beta = \begin{pmatrix} 1 & \beta & \beta \\ 1 & \beta^2 & 1 \\ \beta & \beta & 1 \end{pmatrix}$ où β est un réel.

2) Pour quelles valeurs de β la matrice A_β est-elle inversible ? Quel est alors le rang de la matrice A_β ?

C

Exercice 9 page 23

D

Exercice page 22

E

Exercice 6 page 23

Question A

Soit a un réel. Déterminer selon les valeurs de a le rang de la matrice A suivante en utilisant des opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes de la matrice.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -3 & a & -2 \\ 1 & a & -2 & a-1 & 1 \\ 1 & 1 & a-3 & 2a-2 & 13 \end{pmatrix}$$

Pour quelles valeurs de a cette matrice est-elle inversible ?

On ne change pas le rang d'une matrice en effectuant des opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes.

En notant $L_i, 1 \leq i \leq 5$, la i-ème ligne de la matrice A, le rang de A est égal au rang de la matrice A' obtenue en remplaçant la ligne L_3 par la ligne $L_3 - 2L_1$, la ligne L_4 par la ligne $L_4 - L_1$ et la ligne L_5 par la ligne $L_5 - L_1$. On obtient :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & a+2 & -12 \\ 0 & a-2 & 1 & a & -4 \\ 0 & -1 & a & 2a-1 & 8 \end{pmatrix} \quad \left| \begin{array}{c|c|c} L_3 & \leftarrow & L_3 - 2L_1 \\ L_4 & \leftarrow & L_4 - L_1 \\ L_5 & \leftarrow & L_5 - L_1 \end{array} \right|$$

On garde les première et deuxième lignes et on ajoute un multiple de la seconde aux trois dernières :

On garde les première et deuxième lignes et on ajoute un multiple de la seconde aux trois dernières :

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 2a-2 & 4-4a \\ 0 & 0 & a-1 & 2a-2 & 12 \end{pmatrix} \quad \left| \begin{array}{c|c|l} \\ \\ \\ \\ \\ L_3 & \leftarrow & L_3 + 3L_2 \\ L_4 & \leftarrow & L_4 - (a-2)L_2 \\ L_5 & \leftarrow & L_5 + L_2 \end{array} \right|$$

Puis

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & a-1 & 2a-2 & 4-4a \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 2a-2 & 12 \end{pmatrix} \quad \left| \begin{array}{c|c|l} \\ \\ \\ \\ L_3 & \leftarrow & L_4 \\ L_4 & \leftarrow & L_3 \end{array} \right|$$

Puis

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & a-1 & 2a-2 & 4-4a \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8+4a \end{pmatrix} \quad \begin{array}{|c|c|c|} L_5 & \leftarrow & L_5 - L_3 \end{array}$$

(3 pts)

Alors trois cas se présentent :

- Si $a = -2$, la dernière ligne de A_4 est nulle et les quatre premières sont linéairement indépendantes. Donc le rang de la matrice A_4 est égal à 4.
- Si $a = 1$, les troisième et quatrième lignes sont nulles, les trois autres sont linéairement indépendantes. Donc le rang de A_4 est égal à 3.
- Si $a \neq 1$ et $a \neq -2$, le rang de A_4 est égal à 5.

Conclusion :

si $a=-2, \operatorname{rang}(A)=4$

si $a=1, \operatorname{rang}(A)=3$

si $a \neq 1$ et $a \neq -2 \operatorname{rang}(A)=5$

- (2 pts)

  Une matrice carrée d'ordre n est inversible si et seulement si son rang est égal à n.

  Donc A est inversible si et seulement si a est différent de -2 et de 1.

Soit A_β, la matrice définie par : $A_\beta = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & \beta & \beta \\ 1 & \beta^2 & 1 \\ \beta & \beta & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$ où β est un réel.

2) Pour quelles valeurs de β la matrice A_β est-elle inversible ? Quel est alors le rang de la matrice A_β ?

(*) $$|A_\beta| = \begin{vmatrix} 1 & \beta & \beta \\ 0 & \beta^2-\beta & 1-\beta \\ 0 & \beta-\beta^2 & 1-\beta^2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \beta L_1 \end{array} = \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & \beta & \beta \\ 0 & \beta^2-\beta & 1-\beta \\ 0 & 0 & 2-\beta-\beta^2 \end{vmatrix}}_{B_\beta} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{array}$$

$$= (\beta^2-\beta)(2-\beta-\beta^2) = \beta(\beta-1)(-\beta+1)(\beta+2) = -\beta(\beta-1)^2(\beta+2)$$

$|A_\beta| = 0 \iff \beta = 0$ ou $\beta = 1$ ou $\beta = -2$

A_β est inversible ssi $\beta \in \mathbb{R} - \{0; 1; -2\}$.

L1

(*) si $\beta = 1$, A_β est équivalente à : $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $rg\, A_1 = rg\, B_1 = 1$

Si $\beta = 0$, " " $B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ équivalente à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $rg\, A_0 = 2$

Si $\beta = -2$, " " " $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $rg(A_{-2}) = 2$

Si $\beta \neq 0; 1; -2$ $rg(A_\beta) = 3$.

Diapositive 61

L1 Lebeux; 04/02/2026

Exercice 9 : Soit $Y = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, une matrice réelle. Résoudre l'équation $Y^2 = I_2$

Exercice 9 : Soit $Y = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, une matrice réelle. Résoudre l'équation $Y^2 = I_2$

Page 24 chap

$$Y^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & ab+bc \\ 0 & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a^2 = 1 \\ ab+bc = 0 \\ c^2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = \pm 1 \\ b(a+c) = 0 \iff b = 0 \text{ ou } a+c=0 \\ c = \pm 1 \end{cases}$$

Cas 1 $a+c=0 \iff a=-c \iff (a,c)=(1;-1)$ ou $(-1;1)$

Alors $b(a+c)=0 \iff b \in \mathbb{R}$ car $a+c=0$

donc $Y = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} -1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Cas 2 $a+c \neq 0 \iff (a,c)=(1,1)$ ou $(a,c)=(-1,-1)$

Alors $b(a+c)=0 \iff b=0$ car $a+c \neq 0$

donc $Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Conclusion : $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| b \in \mathbb{R} ; I_2 ; -I_2 \right\}$

L1

Diapositive 62

L1 Lebeux; 04/02/2026

4) Résoudre le système $\begin{cases} x - y + z = 6 \\ 2x - 3y = 8 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}$ à l'aide de la méthode du pivot de Gauss. Pour cela on procède par opérations élémentaires sur les lignes de la matrice A et simultanément sur les composantes du vecteur « second membre ».

Page 28&29 chapitre

$$\begin{cases} x - y + z = 6 & L_1 \\ 2x - 3y = 8 & L_2 \\ x + y + 2z = 0 & L_3 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 6 & \\ -y - 2z = -4 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ 2y + z = -6 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 6 & \\ -y - 2z = -4 & \\ -3z = -14 & L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = 6 + y - z = \dfrac{18 - 16 - 14}{3} = \dfrac{18 - 30}{3} = \dfrac{-18}{3} = -4 \\ y = 4 - 2z = \dfrac{12 - 28}{3} = \dfrac{-16}{3} \\ z = \dfrac{14}{3} \end{cases}$$

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} -4 \\ -16/3 \\ 14/3 \end{pmatrix} \right\}$$

Diapositive 63

L1 Lebeux; 04/02/2026

Page 23 chapitre 2

Exercice 6

On considère le circuit représenté à la Fig. 1 dont on veut calculer les courants I_1, I_2 et I_3 circulant dans chaque branche.

Si on écrit la loi des noeuds au point **1** et les lois des mailles, on obtient un système linéaire de 3 équations à 3 inconnues :

$$(S)\ :\ \begin{cases} I_1 & -I_2 & -I_3 & = 0 \\ 10I_1 & & +6I_3 & = 12 \\ 10I_1 & +2I_2 & & = 18 \end{cases}$$

La résolution de ce système s'obtient en inversant la matrice des résistances:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 10 & 0 & 6 \\ 10 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

1) La matrice R est-elle inversible ?

2) Trouver les valeurs des 3 courants I_1, I_2 et I_3.

$(S) \iff R.V = B$ où $V = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 18 \end{pmatrix}$

$\iff \underbrace{R^{-1}R}_{I}.V = R^{-1}B$

$\iff V = R^{-1}B$

```
(%i1) R: matrix(
        [1,-1,-1],
        [10,0,6],
        [10,2,0]
      );
```

$$R\quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 10 & 0 & 6 \\ 10 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

```
(%i2) B: matrix(
        [0],
        [12],
        [18]
      );
```

$$B\quad \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 18 \end{pmatrix}$$

```
(%i3) invert(R).B;
```

$$(\%o3)\quad \begin{pmatrix} \frac{33}{23} \\ \frac{42}{23} \\ -\left(\frac{9}{23}\right) \end{pmatrix}$$