

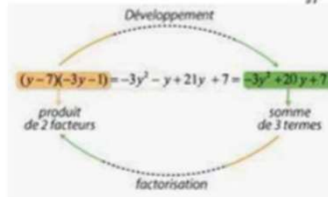
Chapitre 5 : Compléments sur les nombres complexes, Polynômes,

Factorisation dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
Fractions

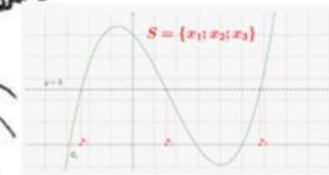
Applications

On divise des polynômes !

$$\begin{array}{r} x^3 + 3x^2 - x - 7 \\ x + 2 \end{array} \quad \begin{array}{r} ?? \\ ?? \end{array}$$



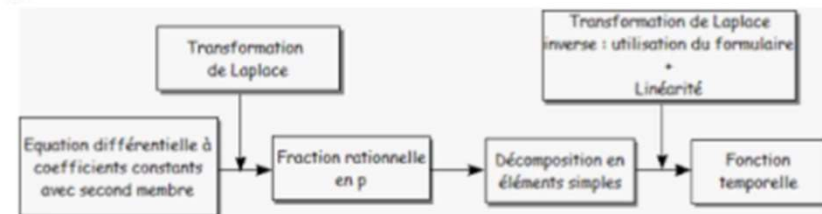
$$\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{?}{x-1} - \frac{?}{x+1}$$



$$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\lambda = 3$
 $\lambda = 2$
 $\lambda = 1$

v_1 v_2 v_3



Partie A : Complément sur les nombres complexes

I. Rappels

$$\underline{Z} = x + j.y \text{ où } x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \text{ et } j^2 = -1$$

x est la partie réelle de $\underline{Z}$

On note : $x = \operatorname{Re}(\underline{Z})$

y est la partie imaginaire de $\underline{Z}$

On note : $y = \operatorname{Im}(\underline{Z})$

Le **module** de $\underline{Z}$ est noté $|\underline{Z}|$ ou encore $|\underline{Z}|$, c'est la distance de O à M , donc $|\underline{Z}| = Z = \sqrt{x^2 + y^2}$

L'**argument** de $\underline{Z}$ est noté $\arg(\underline{Z})$, c'est la mesure en radians de l'angle de vecteur orienté $(\vec{OI}, \vec{OM})$, déterminée à $2k\pi$ près ($k \in \mathbb{Z}$). On note $\theta = \arg(\underline{Z})$, on a alors :

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{x}{Z} = \frac{\text{partie réelle de } \underline{Z}}{\text{module de } \underline{Z}} = \frac{\operatorname{Re}(\underline{Z})}{Z} \\ \sin(\theta) = \frac{y}{Z} = \frac{\text{partie imaginaire de } \underline{Z}}{\text{module de } \underline{Z}} = \frac{\operatorname{Im}(\underline{Z})}{Z} \end{cases} \text{ si } Z \neq 0.$$

Détermination d'un argument à l'aide de la fonction arctangente

Soit $\underline{Z} = a + j.b$ un nombre complexe non nul, tel que $a \neq 0$.

$$\arg(\underline{Z}) = \begin{cases} \operatorname{Arctan}\left(\frac{b}{a}\right) & \text{si } a > 0 \\ \operatorname{Arctan}\left(\frac{b}{a}\right) \pm \pi & \text{si } a < 0 \end{cases} \text{ et } \arg(j.b) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } b > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } b < 0 \end{cases}$$

Partie A : Complément sur les nombres complexes

Page 5 chapitre 5

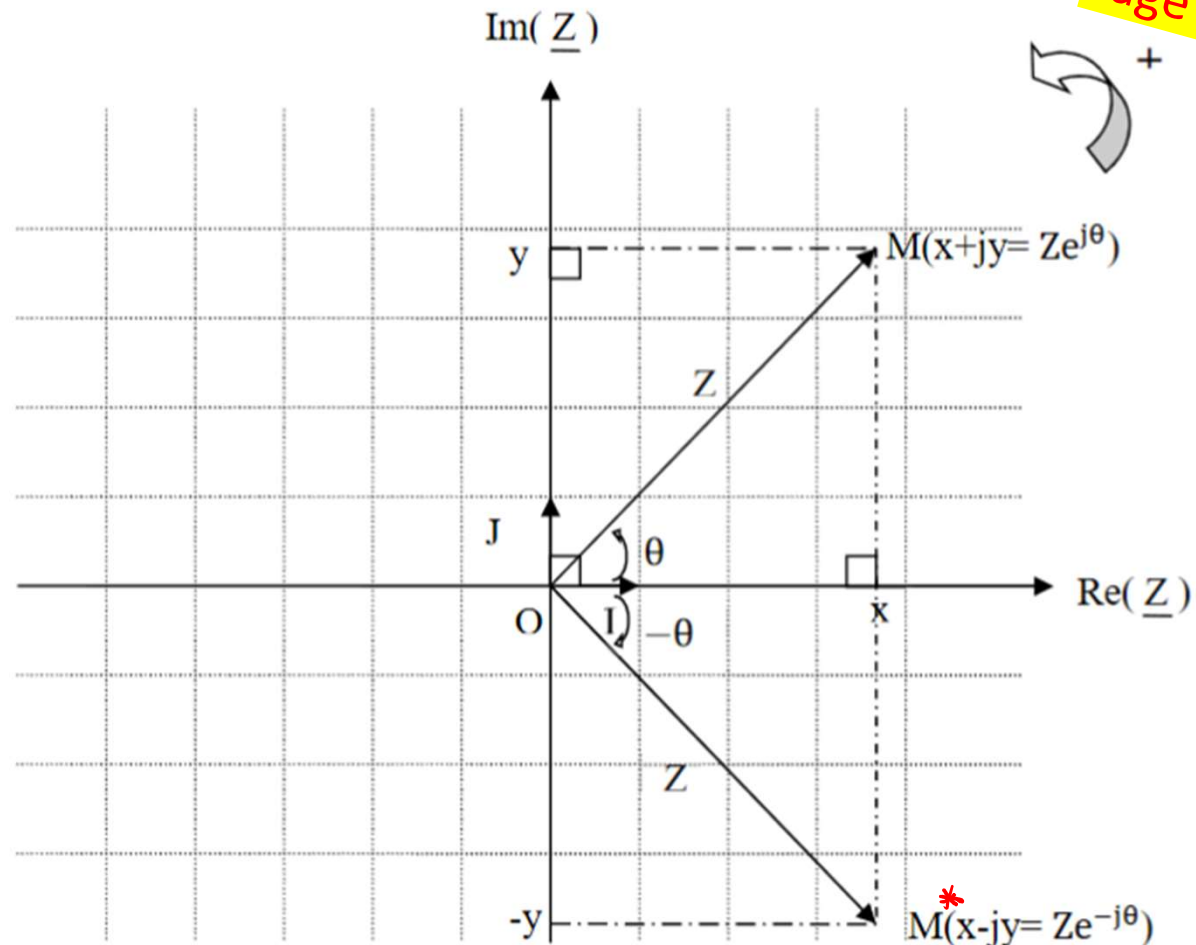
Le plan complexe est muni
d'un RON ($O ; \vec{OI}, \vec{OJ}$)
orienté dans le sens direct.
 $\underline{Z} = x + j.y$ où $x, y \in \mathbb{R}$

Le point $M(x, y)$ est appelé
image de $\underline{Z}$.

$\underline{Z}$ est appelé l'affixe du
point M.

$\underline{Z}$ est aussi appelé l'affixe
du vecteur $\vec{OM}$.

$$\vec{OM} = x. \vec{i} + y. \vec{j}$$



Forme algébrique de $\underline{Z}$: (coordonnées cartésiennes)

$$\underline{Z} = x + j.y \quad \leftarrow$$

Forme trigonométrique et forme polaire de $\underline{Z}$:

$$\underline{Z} = Z.\cos(\theta) + j.Z.\sin(\theta) = Z.(\cos(\theta) + j.\sin(\theta)) \quad \text{aussi noté : } \underline{Z} = [Z, \theta] \quad \leftarrow$$

module *arg.*
 ↓ ↓

Forme exponentielle, géométrique : Euler a noté $e^{j\theta} = \cos(\theta) + j.\sin(\theta)$ $\leftarrow$

$$\underline{Z} = \boxed{Z.e^{j\theta}} = \underbrace{Z\cos\theta}_{\text{Re}} + j \underbrace{Z\sin\theta}_{\text{Im.}}$$

Nombre complexe conjugué de $\underline{Z}$: Soit $\underline{Z} = x + j.y$, on appelle conjugué de $\underline{Z}$, et on note $\underline{Z}^*$, le nombre complexe défini par : $\underline{Z}^* = x - j.y$. Si $\underline{Z} = Z.e^{j\theta}$, alors $\underline{Z}^* = Z.e^{-j\theta} = [Z, -\theta]$

Produit, quotient et puissance

Page 6 chapitre 5

$$\arg(\underline{Z} \cdot \underline{Z}') = \arg(\underline{Z}) + \arg(\underline{Z}') + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \text{et} \quad |\underline{Z} \cdot \underline{Z}'| = |\underline{Z}| \cdot |\underline{Z}'|$$

$$[Z, \theta] \times [Z', \theta'] = [ZZ', \theta + \theta']$$

Le module d'un produit de nombres complexes est le produit des modules, l'argument d'un produit de nombres complexes est la somme des arguments (à $2k\pi$ près)

$$\arg\left(\frac{\underline{Z}}{\underline{Z}'}\right) = \arg(\underline{Z}) - \arg(\underline{Z}') + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \text{et} \quad \left|\frac{\underline{Z}}{\underline{Z}'}\right| = \frac{|\underline{Z}|}{|\underline{Z}'|}$$

$$\frac{[Z, \theta]}{[Z', \theta']} = \left[\frac{Z}{Z'}, \theta - \theta'\right]$$

Le module d'un quotient de nombres complexes est le quotient des modules, l'argument d'un quotient de nombres complexes est la soustraction des arguments (à $2k\pi$ près)

$$\arg(\underline{Z}^n) = n \times \arg(\underline{Z}) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \text{et} \quad |\underline{Z}^n| = |\underline{Z}|^n$$

$$[\underline{Z}, \theta]^n = [\underline{Z}^n, n \cdot \theta]$$

Le module de $\underline{Z}^n$ est le module de $\underline{Z}$ à la puissance n , l'argument de $\underline{Z}^n$ est n fois l'argument de $\underline{Z}$ (à $2k\pi$ près)

Notes

$$\textcircled{1} \quad \underset{\text{Euler}}{z} = \underset{\text{polaire}}{[2; 30^\circ]} = 2 \cdot \overset{j\frac{\pi}{6}}{e} = 2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{expo} \\ \text{ou Euler}}}{\cos \frac{\pi}{6}} + j 2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ trigo}}}{\sin \frac{\pi}{6}} = 2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{algébrique}}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + j 2 \frac{1}{2} = \sqrt{3} + j$$

Page 7 chapitre 5

$$\textcircled{2} \quad \operatorname{Re}([3; 90^\circ]) = 3 \cos 90^\circ = 0$$

$$\operatorname{Im}([5; 60^\circ]) = 5 \sin 60^\circ = 5 \sin \frac{\pi}{3} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

$$\textcircled{3} \quad \underline{z} = \frac{[2; 30^\circ]}{[2; 30^\circ]^*} = \frac{[2; 30^\circ]}{[2; -30^\circ]} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Quotient des modules}}}{[1; 30+30]} = [-1; 60^\circ]$$

$$\textcircled{4} \quad \underline{z} = [3; 50^\circ] \times [2; -20^\circ] = [6; 30^\circ]$$

$$\operatorname{Re}(\underline{z}) = 6 \cos 30^\circ = \overset{3\sqrt{3}}{6 \frac{\sqrt{3}}{2}} \quad \operatorname{Im}(\underline{z}) = 6 \sin 30^\circ = 6 \frac{1}{2} = 3$$

$$\textcircled{5} \quad \underline{z} = [3; 20^\circ]^9 = [3^9; 9 \times 20] = [3^9; 180^\circ] = [3^9; \pi]$$

$$\textcircled{6} \quad \underbrace{[z; \theta] \times [z; \theta]^*}_{\underline{z} \times \underline{z}^*} = \underbrace{[z; \overset{\downarrow}{\theta}] \times [z; -\theta]}_{= z^2} = [z^2; 0] = z^2$$

$$\underline{z} \times \underline{z}^* = z^2 \iff (a+jb)(a-jb) = a^2 + b^2$$

L'écriture d'Euler: $e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$ ♥

conjugué $\oplus$ $e^{-j\theta} = \cos\theta - j\sin\theta$ $\oplus$

$$\begin{aligned} * \quad e^{j\theta} + e^{-j\theta} &= 2\cos\theta \\ * \quad e^{j\theta} - e^{-j\theta} &= 2j\sin\theta \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} \\ \sin\theta &= \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j} \end{aligned}$$

Formules d'Euler

$$\underline{Z} + \underline{Z}^* = e^{j\theta} + e^{-j\theta} = 2\text{Re}(e^{j\theta}) = 2\cos\theta \quad ; \quad \underline{Z} - \underline{Z}^* = e^{j\theta} - e^{-j\theta} = 2j\text{Im}(e^{j\theta}) = 2j\sin\theta$$



$$\text{Formules d'Euler : } \cos \theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} \text{ et } \sin \theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$



$$\sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$$

$$2j \sin x = e^{jx} - e^{-jx}$$

Page 11 chapitre 5

Compléter =

$$1) e^{jx} + e^{-jx} = 2 \cos x$$

$$3) e^{3j\theta} + e^{-3j\theta} = 2 \cos(3\theta)$$

$$5) 2e^{j\theta} + 2e^{-j\theta} = 2(e^{j\theta} + e^{-j\theta}) = 4 \cos \theta$$

$$7) \cos(4\theta) = \frac{e^{4j\theta} + e^{-4j\theta}}{2}$$

$$9) e^{j\theta} \times e^{-j\theta} = e^{j\theta - j\theta} = e^0 = 1$$

$$11) 7e^{j\theta} - 7e^{-j\theta} = 7(e^{j\theta} - e^{-j\theta}) = 14j \sin \theta$$

$$\rightarrow (\cos \theta + j \sin \theta)(\cos \theta - j \sin \theta) = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$2) e^{jx} - e^{-jx} = 2j \sin x$$

$$4) e^{5j\theta} - e^{-5j\theta} = 2j \sin(5\theta)$$

$$6) e^{-j\theta} - e^{j\theta} = -e^{j\theta} + e^{-j\theta} = -(e^{j\theta} - e^{-j\theta}) = -2j \sin \theta$$

$$8) 3 \sin(7\theta) = \frac{3}{2j} (e^{7j\theta} - e^{-7j\theta})$$

$$10) e^{-3j\theta} \times e^{5j\theta} = e^{-3j\theta + 5j\theta} = e^{2j\theta}$$

$$12) -5e^{3j\theta} - 5e^{-3j\theta} = -5(e^{3j\theta} + e^{-3j\theta}) = -10 \cos(3\theta)$$

$$3 \times \frac{e^{7j\theta} - e^{-7j\theta}}{2j} = \frac{3}{2j} (e^{7j\theta} - e^{-7j\theta})$$

4) Applications

Page 8 chapitre 5

- En GEII :

La puissance instantanée dissipée dans un dipôle linéaire, qui est soumis à une tension $v(t) = V_{eff}\sqrt{2}\cos\omega t$ et parcouru par un courant $i(t) = I_{eff}\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi)$ est définie par la relation : $p(t) = v(t) \cdot i(t)$.

En utilisant les relations d'Euler, montrer que cette puissance instantanée est la somme d'un terme constant et d'un terme sinusoïdal de pulsation double.

$$\begin{aligned}
 p(t) &= V_{eff}\sqrt{2} I_{eff}\sqrt{2} \times \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} \times \frac{e^{j(\omega t + \varphi)} + e^{-j(\omega t + \varphi)}}{2} \\
 &= \frac{2 V_{eff} I_{eff}}{4} (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) \times (e^{j(\omega t + \varphi)} + e^{-j(\omega t + \varphi)}) \\
 &= \frac{V_{eff} I_{eff}}{2} \left(\underbrace{e^{j(2\omega t + \varphi)}}_{\text{sinusoidal}} + \underbrace{e^{-j\varphi}}_{\text{constant}} + \underbrace{e^{j\varphi}}_{\text{constant}} + \underbrace{e^{-j(2\omega t + \varphi)}}_{\text{sinusoidal}} \right)
 \end{aligned}$$

EULER.

$$= \frac{V_{eff} I_{eff}}{2} \left(\underbrace{2 \cos(2\omega t + \varphi)}_{\text{sinusoidal}} + 2 \cos(\varphi) \right) = V_{eff} I_{eff} \left(\cos \varphi + \cos(2\omega t + \varphi) \right)$$

Handwritten notes and arrows:

- Green arrow from $e^{j\varphi}$ and $e^{-j\varphi}$ to $2 \cos(\varphi)$.
- Green arrow from $e^{j(2\omega t + \varphi)}$ and $e^{-j(2\omega t + \varphi)}$ to $2 \cos(2\omega t + \varphi)$.
- Handwritten green text: $\cos \varphi + \cos(2\omega t + \varphi)$
- Handwritten blue text: $e^{-j\omega t} e^{j\omega t + j\varphi} = e^{j\varphi}$

EF

Completer

$$\textcircled{1} \begin{cases} e^{jx} + e^{-jx} = \cos x + j \sin x + \cos x - j \sin x = 2 \cos x. \\ X=3\theta \Rightarrow e^{3j\theta} + e^{-3j\theta} = 2 \cos(3\theta) \\ 5e^{3j\theta} + 5e^{-3j\theta} = 10 \cos(3\theta). \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} e^{jt} - e^{-jt} = \cos t + j \sin t - (\cos t - j \sin t) = \underline{2j \sin t} \\ t=5x \Rightarrow \underline{e^{5jx} - e^{-5jx}} = \cos(5x) + j \sin(5x) - (\cos(5x) - j \sin(5x)) = \underline{2j \sin(5x)}. \\ 3e^{5jx} - 3e^{-5jx} = 6j \sin(5x) \end{cases}$$

$$\textcircled{3} \begin{cases} -e^{7jx} + e^{-7jx} = -(e^{7jx} - e^{-7jx}) = -2j \sin(7x) \\ 2j \sin(7x) = e^{7jx} - e^{-7jx} \end{cases}$$

$$\textcircled{4} e^{4j\theta} \times e^{-4j\theta} = e^0 = 1 \\ 5e^{4j\theta} \times e^{-4j\theta} = 5.$$

$$\textcircled{5} \frac{7e^{j\theta}}{5e^{-3j\theta}} = \frac{7}{5} e^{4j\theta}.$$

Ex

$$\textcircled{6} \quad \left[7, \frac{\pi}{6} \right] \times \left[3, \frac{5\pi}{6} \right] = [21; \pi] = [21; 180^\circ].$$

$$\frac{[3; 30^\circ]}{[2; -20^\circ]} = \left[\frac{3}{2}, 50^\circ \right] \quad ; \quad [2; -\frac{\pi}{7}]^* = [2; \frac{\pi}{7}]$$

$$\left[4; \frac{\pi}{8} \right]^8 = \left[4^8; \frac{8\pi}{8} \right] \quad \arg(z^n) = n \times \arg(z).$$

$$\textcircled{1} \quad \begin{cases} e^{jx} + e^{-jx} = \cos x + j \sin x + \cos x - j \sin x = 2 \cos x \\ X=3\theta \quad e^{3j\theta} + e^{-3j\theta} = 2 \cos(3\theta) \end{cases} \quad \underline{(a+jb)^* = a-jb}$$

$$5e^{3j\theta} + 5e^{-3j\theta} = 10 \cos(3\theta)$$

$$\textcircled{2} \quad \begin{cases} e^{jx} - e^{-jx} = \cos x + j \sin x - (\cos x - j \sin x) = 2j \sin x \\ X \rightarrow 5x \quad e^{5jx} - e^{-5jx} = 2j \sin(5x) \end{cases}$$

$$4e^{3j\theta} - 4e^{-3j\theta} = 8j \sin(3\theta)$$

$$-e^{10j\theta} - e^{-10j\theta} = -(e^{10j\theta} + e^{-10j\theta}) = -2 \cos(10\theta)$$

$$\textcircled{3} \quad \begin{aligned} e^{3j\theta} \times e^{7j\theta} &= e^{10j\theta} & 5e^{-j\theta} \times e^{j\theta} &= 5 \cdot e^0 = 5 & \frac{e^{5j\theta}}{e^{3j\theta}} &= e^{2j\theta} \\ x^3 \times x^7 &= x^{10} & \left(\frac{7e^{3j\theta}}{5e^{-j\theta}} \right) &= \frac{7}{5} e^{3j\theta - (-j\theta)} = \frac{7}{5} e^{4j\theta} \end{aligned}$$

$$[5; 30^\circ] \times [2; -20^\circ] = [10; 10^\circ]$$

$$(a+jb)^* = a-jb$$

$$[2; \pi/2] \times [2; \pi/2]^* = [2; \pi/2] \times [2; -\pi/2] = [4; 0] = 4$$

$$(z \cdot e^{j\theta})^* = z e^{-j\theta}$$

$$\operatorname{Re}([3; \frac{2\pi}{3}]) = 3 \cos(\frac{2\pi}{3}) = 3 \times (-\frac{1}{2}) = -\frac{3}{2}$$

$$[z; \theta]^* = [z; -\theta]$$

$$\operatorname{Im}(5; 40^\circ) = 5 \sin(40^\circ)$$

$$\frac{[2; 20^\circ]}{[2; 50^\circ]} = [1; -30^\circ]$$

$$[3; 40]^\circ = [9; 80]$$

$$\textcircled{1} e^{jx} + e^{-jx} = 2\cos x$$

$$x=30 \left\{ e^{3j0} + e^{-3j0} = 2\cos(30) \right.$$

$$5e^{3j0} + 5e^{-3j0} = 5(e^{3j0} + e^{-3j0}) = 10\cos(30)$$

$$\begin{aligned} e^{jx} + e^{-jx} &= \cos x + j\sin x + \cos x - j\sin x \\ &= 2\cos x \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} e^{jx} - e^{-jx} = 2j\sin x$$

$$e^{5jt} - e^{-5jt} = 2j\sin(5t)$$

$$7e^{5jt} - 7e^{-5jt} = 7(e^{5jt} - e^{-5jt}) = 14j\sin(5t)$$

$$\begin{aligned} e^{jx} - e^{-jx} &= \cancel{\cos x} + j\sin x - \cancel{\cos x} + j\sin x \\ &= 2j\sin x \end{aligned}$$

$$\textcircled{3} e^{7jt} \times e^{2jt} = e^{9jt}$$

$$\frac{5e^{jt}}{3e^{-2jt}} = \frac{5}{3} e^{jt - (-2jt)} = \frac{5}{3} e^{3jt}$$

$$5e^{4jt} \times e^{-4jt} = 5e^0 = 5$$

$$\begin{aligned} 5e^{-j0} \ominus 5e^{j0} &= -5(e^{j0} - e^{-j0}) \\ &= -5(2j\sin 0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$5(e^{-j0} - e^{j0}) = 10j\sin(-0) = -10j\sin 0 = 0$

- Linéarisation et calcul intégral

Page 9 chapitre 5

En appliquant les formules d'Euler, linéariser $\cos^2(t)$ puis calculer l'intégrale :

$$I = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2(t) dt$$

$$(\cos t)^2 = \left(\frac{e^{jt} + e^{-jt}}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} \cdot (e^{jt} + e^{-jt})^2$$

$(a+b)^2 = a^2 + \underline{\underline{2ab}} + b^2$

$$\cos^2 t = \frac{1}{4} \cdot ((e^{jt})^2 + \underbrace{2e^{+jt-jt}}_{e^0=1} + (e^{-jt})^2)$$

$$= \frac{1}{4} \left(\underbrace{e^{2jt}} + 2 + \underbrace{e^{-2jt}} \right)$$

$$e^{jx} + e^{-jx} = \cos x + j\sin x + \cos x - j\sin x = 2\cos x$$

$$\cos^2 t = \frac{1}{4} \left(2\cos(2t) + 2 \right) = \frac{1}{2} \cos(2t) + \frac{1}{2}$$

$\cos^2 t = \frac{\cos(2t) + 1}{2}$

EF - Linéarisation et calcul intégral

Page 9 chapitre 5

En appliquant les formules d'Euler, linéariser $\cos^2(t)$ puis calculer l'intégrale :

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \underbrace{\cos^2(t)}_{\text{paire}} dt = 2 \times \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 t dt. \\
 \cos^2 \theta &= \left(\frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} \right)^2 = \frac{(e^{j\theta} + e^{-j\theta})^2}{4} \\
 &= \frac{1}{4} \cdot (e^{j\theta} + e^{-j\theta})^2 \quad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\
 &= \frac{1}{4} \left((e^{j\theta})^2 + 2 \underbrace{e^{j\theta} \times e^{-j\theta}}_{e^0} + (e^{-j\theta})^2 \right) \\
 &= \frac{1}{4} \left(e^{2j\theta} + 2 + e^{-2j\theta} \right) \\
 &= \frac{1}{4} (2\cos(2\theta) + 2) \\
 \cos^2 \theta &= \frac{2}{4} (\cos(2\theta) + 1) \\
 \cos^2 \theta &= \frac{1}{2} (\cos(2\theta) + 1)
 \end{aligned}$$

- Linéarisation et calcul intégral

Page 9 chapitre 5

En appliquant les formules d'Euler, linéariser $\cos^2(t)$ puis calculer l'intégrale :

$$I = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2(t) dt$$

$$I = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \underbrace{\cos^2 t}_{\text{paire}} dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 + \cos(2t)}{2} dt$$

$$= \frac{2}{2} \times \int_0^{\frac{\pi}{3}} (1 + \cos(2t)) dt$$

$$\frac{1 + \cos(2t)}{2} = \frac{1}{2} (1 + \cos(2t))$$
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2t)$$

$$= \left[t + \frac{\sin(2t)}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \frac{\pi}{3} + \frac{\sin(2\pi/3)}{2} - \underbrace{\left(0 + \frac{\sin 0}{2} \right)}_0$$

$$I = \frac{\pi}{3} + \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}$$

$$\boxed{I = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}}$$

EF

$$I = 2 \int_0^{\pi/3} \frac{1 + \cos(2t)}{2} dt = \frac{2}{2} \int_0^{\pi/3} (1 + \cos(2t)) dt = \left[t + \frac{\sin(2t)}{2} \right]_0^{\pi/3}$$

$$I = \frac{\pi}{3} + \frac{\sin(\frac{2\pi}{3})}{2} - \left(0 + \frac{\sin 0}{2} \right) = \frac{\pi}{3} + \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Ex 3 page 14:

$$\text{Lineariser: } \sin x \cdot \cos(2x) \cdot \sin(3x) = (\text{---}) \times (\text{---}) \times (\text{---})$$

Ex 3 page 14

$$\sin x \times \cos(2x) \times \sin(3x) =$$

$$= \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} \times \frac{e^{2jx} + e^{-2jx}}{2} \times \frac{e^{3jx} - e^{-3jx}}{2j}$$

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

$$= \frac{1}{8j^2} \left(e^{3jx} + e^{-jx} - e^{jx} - e^{-3jx} \right) \times \left(e^{3jx} - e^{-3jx} \right)$$

$$e^{jx} \times e^{2jx} = e^{3jx}$$

$$e^{jx} \times e^{-2jx} = e^{-jx}$$

$$-e^{-jx} \times e^{-2jx} = -e^{-3jx}$$

$$= \frac{1}{-8} \left(\underbrace{e^{6jx}} - \underbrace{e^0}_{\frac{1}{1}} + e^{2jx} - e^{-4jx} - e^{4jx} + e^{-2jx} - \underbrace{e^0}_{\frac{1}{1}} + \underbrace{e^{-6jx}} \right)$$

$$\boxed{j^2 = -1}$$

$$= -\frac{1}{8} \left(-2 + \underbrace{e^{6jx} + e^{-6jx}} + e^{2jx} + e^{-2jx} - \underbrace{(e^{-4jx} + e^{4jx})} \right)$$

$$= -\frac{1}{8} \left(-2 + 2\cos(6x) + 2\cos(2x) - 2\cos(4x) \right)$$

$$\sin x \times \cos(2x) \times \sin(3x) = \frac{1}{4} \left(1 - \cos(6x) - \cos(2x) + \cos(4x) \right)$$

Notes

$$J = \int_0^{\pi/3} \sin x \cdot \cos(2x) \cdot \sin(3x) dx = \frac{1}{4} \int_0^{\pi/3} (1 - \cos(6x) - \cos(2x) + \cos(4x)) dx$$

$$= \frac{1}{4} \times \left[x - \frac{\sin(6x)}{6} - \frac{\sin(2x)}{2} + \frac{\sin(4x)}{4} \right]_0^{\pi/3}$$

$$2 \times 3 \\ \frac{6\pi}{3} =$$

$$= \frac{1}{4} \times \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sin(2\pi)}{6} - \frac{\sin(\frac{2\pi}{3})}{2} + \frac{\sin(\frac{4\pi}{3})}{4} - (0) \right)$$

$$= \frac{1}{4} \times \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} - \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{4} \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$J = \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{3\sqrt{3}}{8} \right)$$

Le triangle de Pascal - $(a+b)^n$

Page 30 chapitre 5

$$n=1 \quad 1 \quad 1$$

$$(a+b)^1 = 1.a + 1.b$$

$$n=2 \quad 1 \quad \textcircled{+} 2 \quad \textcircled{+} 1$$

$$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$$

$$n=3 \quad 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1$$

$$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$$

$$n=4 \quad 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1$$

$$(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$$

$$n=5 \quad 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1$$

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

$$(a-b)^3 = (a+(-b))^3 = a^3 + 3a^2(-b) + 3a(-b)^2 + (-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Exercice 2 Notations Maths.

Ex2 Page 14 chapitre 5

Effectuer les différentes opérations proposées (mettre ces résultats sous la forme (ρ, θ)) ...

1. $z = (10, -40^\circ)$

calculer : $z \cdot \bar{z} = |z|^2$

2. $z = (20, -53, 1^\circ)$

calculer : $z + \bar{z} = 2\text{Re}(z)$

3. $z = 2,5 e^{-j\pi/4}$

calculer : $z \cdot \bar{z}$

4. $z = 2 + j8$

calculer : $z - \bar{z} = 2j\text{Im}(z)$

5. $z = (r, \hat{\theta})$

calculer : $z/\bar{z}$

$$ze^{j\theta} \times ze^{-j\theta} = z^2 e^{j\theta - j\theta} = z^2 e^0 = z^2$$

① $\underline{z} = [10; -40^\circ]$

$\underline{z} \times \underline{z}^* = [10; -40^\circ] \times [10; 40^\circ] = [100; 0^\circ] = 100 = z^2$

② $\underline{z} = [20; -53, 1^\circ]$

$\underline{z} + \underline{z}^* = 2\text{Re}(\underline{z})$

$\underline{z} = [z; \theta] = ze^{j\theta}$

$a+jb + a-jb = 2a$

$= z(\cos\theta + j\sin\theta)$

$\underline{z} + \underline{z}^* = 2\text{Re}(\underline{z}) = 2z \cos\theta$

$\underline{z} = \underbrace{z \cos\theta}_{\text{Re}(\underline{z})} + j \underbrace{z \sin\theta}_{\text{Im}(\underline{z})}$

$\underline{z} + \underline{z}^* = 2 \times 20 \cos(-53, 1^\circ) = 40 \cos(-53, 1^\circ)$

③ $\underline{z} = 2,5 \cdot e^{-j\pi/4} = [2,5; -\pi/4]$

$\underline{z} \times \underline{z}^* = z^2 = 2,5^2$

$[2,5; -\pi/4] \times [2,5; \pi/4] = [2,5^2; 0]$

Exercice 2

Ex2 Page 14 chapitre 5

Effectuer les différentes opérations proposées (mettre ces résultats sous la forme (ρ, θ))

1. $z = (10, -40^\circ)$ calculer : $z \cdot \bar{z} = |z|^2$
2. $z = (20, -53, 1^\circ)$ calculer : $z + \bar{z} = 2\text{Re}(z)$
3. $z = 2,5 e^{-j\pi/4}$ calculer : $z \cdot \bar{z}$
4. $z = 2 + j8$ calculer : $z - \bar{z} = 2j\text{Im}(z)$
5. $z = (r, \hat{\theta})$ calculer : $z/\bar{z}$

④ $z = 2 + 8j$ $z - \bar{z}^* = 2 + 8j - (2 - 8j) = 16j = 2j \text{Im}(z)$

$a + jb - (a - jb) = a + jb - a + jb = 2jb$

⑤ $z = (r; \theta)$ $\frac{z}{\bar{z}^*} = \frac{[r; \theta]}{[r; -\theta]} = \left[\frac{r}{r}; 2\theta \right]$

Corrigé des tests

Test 1

1) Complexes sous forme polaire : (9pts) 9
 Soit $\underline{Z} = [3; -40^\circ]$ et $\underline{Z}' = [2; 80^\circ]$. Compléter :

$\underline{Z} \cdot \underline{Z}^* = [6; 40^\circ]$ ✓

$\frac{\underline{Z}}{\underline{Z}^*} = [3; -100^\circ]$ ✓

$\underline{Z} + \underline{Z}^* = 2 \times 3 \cos(-40^\circ) = 6 \cos(-40^\circ)$ ✓

$\underline{Z} - \underline{Z}^* = 2j \times 3 \sin(-40^\circ) = 6j \sin(-40^\circ)$ ✓

$\underline{Z} \cdot \underline{Z}^* = Z^2 = 9$ ✓

$\frac{\underline{Z}}{\underline{Z}^*} = [1; 2 \times (-40^\circ)] = [1; -80^\circ]$ ✓

$\text{Re}(\underline{Z}') = 2 \cos(80^\circ)$ ✓ $\frac{15}{15}$ TB

Test 2

1) Complexes sous forme polaire : (9pts) 9
 Soit $\underline{Z} = [5; 80^\circ]$ et $\underline{Z}' = [3; -20^\circ]$. Compléter :

$\underline{Z} \cdot \underline{Z}^* = [5; 80^\circ] \times [3; -20^\circ] = [5 \times 3; 80^\circ - 20^\circ] = [15; 60^\circ]$ ✓

$\frac{\underline{Z}}{\underline{Z}^*} = \frac{[5; 80^\circ]}{[5; -20^\circ]} = [\frac{5}{5}; 80^\circ + 20^\circ] = [\frac{5}{5}; 100^\circ]$ ✓

$\underline{Z} + \underline{Z}^* = 2 \text{Re}(\underline{Z}) = 2 \times 5 \cos(80^\circ) = 10 \cos(80^\circ)$ ✓

$\underline{Z} - \underline{Z}^* = 2j \text{Im}(\underline{Z}) = 2 \times 5 \sin(80^\circ) = 10j \sin(80^\circ)$ ✓

$\underline{Z} \cdot \underline{Z}^* = Z^2 = 5^2 = 25$ ✓

$\frac{\underline{Z}}{\underline{Z}^*} = \frac{[5; 80^\circ]}{[5; -80^\circ]} = [\frac{5}{5}; 80^\circ + 80^\circ] = [1; 160^\circ]$ ✓

$\text{Re}(\underline{Z}') = 3 \cos(-20^\circ)$ ✓ $\frac{13}{15}$ TB

Corrigé des tests

Test 1

Test 2

$$\text{Im}(\underline{Z}') = 2 \sin(80^\circ)$$

$$\underline{Z}^6 = [3^6; 6 \times (-40^\circ)] = [729; -240^\circ]$$

2) Formules d'Euler : (6 points)

(6)

a) Compléter :

$$e^{j\theta} + e^{-j\theta} = 2 \cos \theta$$

$$\sin \theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

$$e^{3j\theta} - e^{-3j\theta} = 2j \sin 3\theta$$

$$-7e^{2j\theta} - 7e^{-2j\theta} = -14 \cos 2\theta$$

$$\text{Im}(\underline{Z}') = 3 \sin(-20^\circ)$$

$$\underline{Z}^6 = [5; 80^\circ]^6 = [5^6; 80 \times 6] = [5^6; 480^\circ] = [5^6; 120^\circ]$$

2) Formules d'Euler : (6 points)

(4)

Compléter :

$$e^{j\theta} - e^{-j\theta} = 2j \sin(\theta)$$

$$\cos \theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

$$e^{5j\theta} + e^{-5j\theta} = 2 \cos(5\theta)$$

$$-3e^{2j\theta} - 3e^{-2j\theta} = -6 \cos(2\theta)$$

Corrigé des tests

Test 3

1) Complexes sous forme polaire : (9pts) (9)
Soit $\underline{Z} = [7; 15^\circ]$ et $\underline{Z}' = [2; -40^\circ]$. Compléter :

$$\underline{Z} \cdot \underline{Z}' = [7 \times 2; 15 - 40] = [14; -25^\circ] \quad \checkmark$$

$$\frac{\underline{Z}}{\underline{Z}'} = \frac{[7; 15^\circ]}{[2; -40^\circ]} = \left[\frac{7}{2}; 15 + 40\right] = \left[\frac{7}{2}; 55^\circ\right] \quad \checkmark$$

$$\underline{Z} + \underline{Z}' = 2 \times 7 \cos(15^\circ) = 14 \cos(15^\circ) \quad \checkmark$$

$$\underline{Z} - \underline{Z}' = 2j \times 7 \sin(15^\circ) = 14j \sin(15^\circ) \quad \checkmark$$

$$\underline{Z} \cdot \underline{Z}' = [7 \times 7; 15 + (-15)] = [49; 0] = 49 \quad \checkmark$$

$$\frac{\underline{Z}}{\underline{Z}'} = \frac{[7; 15^\circ]}{[7; -15^\circ]} = \left[\frac{7}{7}; 15 + 15\right] = [1; 30^\circ] \quad \checkmark$$

$$\text{Re}(\underline{Z}') = 2 \cos(-40^\circ) \quad \checkmark \quad \left(\frac{15}{15}\right) \text{ Excellent}$$

$$\text{Im}(\underline{Z}') = 2 \sin(-40^\circ) \quad \checkmark$$

$$\underline{Z}^6 = [7; 15^\circ]^6 = [7^6; 6 \times 15] = [7^6; 90^\circ] \quad \checkmark$$

2) Formules d'Euler : (6 points) (6)

$$e^{j\theta} - e^{-j\theta} = 2j \sin \theta \quad \checkmark$$

$$\cos \theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} \quad \checkmark$$

$$e^{9j\theta} - e^{-9j\theta} = 2j \sin(9\theta) \quad \checkmark$$

$$\begin{aligned} -5e^{3j\theta} - 5e^{-3j\theta} &= -5(e^{3j\theta} + e^{-3j\theta}) = -5 \times 2 \cos(3\theta) \\ &= -10 \cos(3\theta) \quad \checkmark \end{aligned}$$

II. Formules d'Euler et de Moivre

1) Opérations sur le conjugué d'un nombre complexe

$$(\underline{Z} + \underline{Z}')^* = \underline{Z}^* + \underline{Z}'^* \quad (\underline{Z} \cdot \underline{Z}')^* = \underline{Z}^* \cdot \underline{Z}'^* \quad \left(\frac{\underline{Z}}{\underline{Z}'} \right)^* = \frac{\underline{Z}^*}{\underline{Z}'^*} \quad (\underline{Z}^n)^* = (\underline{Z}^*)^n$$

2) Formules d'Euler

$$\underline{Z} + \underline{Z}^* = a + jb + a - jb = 2a \quad ; \quad \underline{Z} - \underline{Z}^* = a + jb - (a - jb) = 2jb \quad ; \quad \underline{Z} \cdot \underline{Z}^* = \underline{Z} \cdot e^{j\theta} \underline{Z} \cdot e^{-j\theta} = \underline{Z}^2$$

$$\heartsuit. \quad \underline{Z} + \underline{Z}^* = 2 \cdot \text{Re}(\underline{Z}) \quad ; \quad \underline{Z} - \underline{Z}^* = 2 \cdot j \cdot \text{Im}(\underline{Z}) \quad ; \quad \underline{Z} \cdot \underline{Z}^* = \underline{Z}^2 \quad \heartsuit$$

Cas particulier : $\underline{Z} = e^{j\theta}$

$$\underline{Z} + \underline{Z}^* = e^{j\theta} + e^{-j\theta} = 2\text{Re}(e^{j\theta}) = 2\cos\theta \quad ; \quad \underline{Z} - \underline{Z}^* = e^{j\theta} - e^{-j\theta} = 2j\text{Im}(e^{j\theta}) = 2j\sin\theta$$

$$\heartsuit. \quad \text{Formules d'Euler : } \cos \theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j} \quad \heartsuit$$

DM13

Ex1 Page 14 chapitre 5

f	1 Hz	5 Hz	10 Hz	20 Hz	100 Hz
Module	$\frac{1}{\sqrt{1,01}}$	$\frac{1}{\sqrt{1,25}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{5}}$	$\frac{1}{\sqrt{101}}$
Argument	$-\arctan(0,1)$	$-\arctan(0,5)$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\arctan(2)$	$-\arctan(10)$

DM13

Ex1 Page 14 chapitre 5

$$|H(f)| = \frac{1}{\sqrt{1+(0,1f)^2}}$$

$$\arg(H(f)) = -\arctan(0,1f)$$

f (Hz)	1	5	10	20	100
Module	0,995	0,894	0,707	0,447	0,099
Argument(°)	-5,7	-26,6	-45	-63,4	-84,3

DM13

Ex1 Page 14 chapitre 5

$$|HCF| = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (0,1F)^2}}$$

$$\arg(HCF) = -\arctan(0,1F)$$

fréquence (Hz)	1	5	10	20	100
Module	0,95	0,32	0,71	0,58	0,3
Argument	-0,09	-0,46	$-\frac{\pi}{4}$	-1,11 ^{-1,11}	-1,47

$$-\arctan\left(\frac{1}{10}\right) \simeq -0,09 ; -\arctan\left(\frac{1}{2}\right) \simeq 0,46 ; -\arctan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{-\pi}{4} ;$$

$$-\arctan(2) \simeq -1,11 ; -\arctan(10) \simeq 1,47 .$$

DM13

Ex1 Page 14 chapitre 5

Exercice 1 p 14 :

f	1Hz	5Hz	10Hz	20Hz	100Hz
Module	$= \frac{ V_S }{ V_E }$ $= \frac{1}{\sqrt{1^2 + (0,1 * 1)^2}}$ $= \frac{1}{\sqrt{1 + 0,01}}$ $= \frac{1}{\sqrt{1,01}} = \frac{\sqrt{1,01}}{1,01}$	$= \frac{1}{\sqrt{1 + (0,1 * 5)^2}}$ $= \frac{1}{\sqrt{1 + 0,5^2}}$ $= \frac{1}{\sqrt{1 + 0,25}}$ $= \frac{1}{\sqrt{1,25}} = \frac{\sqrt{5}}{\frac{5}{2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$	$= \frac{1}{\sqrt{1 + (0,1 * 10)^2}}$ $= \frac{1}{\sqrt{1 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $= \frac{\sqrt{2}}{2}$	$= \frac{1}{\sqrt{1 + (0,1 * 20)^2}}$ $= \frac{1}{\sqrt{1 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ $= \frac{\sqrt{5}}{5}$	$= \frac{1}{\sqrt{1 + (0,1 * 100)^2}}$ $= \frac{1}{\sqrt{1 + (10)^2}}$ $= \frac{1}{\sqrt{101}} = \frac{\sqrt{101}}{101}$
Argument s	$= \arg(V_S)$ $- \arg(V_E)$ $= \arctan\left(\frac{0}{1}\right)$ $- \arctan\left(\frac{0,1}{1}\right)$ $= -\arctan(0,1)$	$= -\arg(V_E)$ $= -\arctan\left(\frac{0,5}{1}\right)$ $= -\arctan(0,5)$	$= -\arg(V_E)$ $= -\arctan\left(\frac{1}{1}\right)$ $= -\arctan(1)$ $= -\frac{\pi}{4}$	$= -\arg(V_E)$ $= -\arctan\left(\frac{2}{1}\right)$ $= -\arctan(2)$	$= -\arg(V_E)$ $= -\arctan\left(\frac{10}{1}\right)$ $= -\arctan(10)$

Comme le module diminue et que l'argument diminue quand la fréquence augmente alors le filtre est de type passe bas.

Notes

Exercice 3 Calcul intégral et nombres complexe

Ex2 Page 14 chapitre 5

- 1) En utilisant les formules d'Euler, linéariser l'expression : $\sin^3 x$ (on développera
d'abord $(a-b)^3$). En déduire la valeur de l'intégrale $I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^3(t) dt$

DM14