Devoir Maison de Mathématiques
n°15

Vidéo 1: soutien sur les EDLCC du 1er ordre

Prise de note Exercices

Rappel: Forme EDLCC: $ay' + by = f$; a et b des $\mathbb{R}$, $a \neq 0$, f 2nd membre de l'eq, fonction quelquonque (cte, equ polynome, e^{u}, sin, cos).

Pour resoudre, 3 étapes:

a) étape 1: resolution équation sans 2nd membre, $y_0(t) = K \cdot e^{-\frac{b}{a}t}$

b) étape 2: $\boxed{\text{UNE}}$ seule solution particulière de (E), on la note y_p

c) étape 3: les solutions de (E): $y(t) = y_0(t) + y_p(t)$ (solution générale)

Résoudres les équations suivantes:

$$(E1)\begin{cases} 8y' - 4y = 3t \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Etape 1: trouver, résoudre $y_0(t)$. On résout $8y' - 4y = 0$

Les solutions de l'équation sont: $y_0(t) = Ke^{-\frac{-4}{8}t} = Ke^{\frac{4}{8}t}$; $K \in \mathbb{R}$

Etape 2: On cherche une solution particulière de $8y' - 4y = 3t$

on pose $y_p = at + b$ $\quad y'p = a$ $\quad$ a ? b ?

On remplace dans (E1): $8a - 4at = 3t \times$ $8a - 4(at+b) = 3t \Leftrightarrow 8a - 4at - 4b = 3t \Leftrightarrow$

$(-4a+1)t + 8a - 4b = 3t = -4at + 8a - 4b$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} -4a = 3 \\ 8a - 4b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{-4} \\ 8 \times -\frac{3}{4} - 4b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{3}{4} \\ -6 - 4b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{3}{4} \\ -4b = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{3}{4} \\ b = \frac{6}{-4} = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Donc $y(t) = y_p(t) = -\frac{3}{4}t - \frac{3}{2}$ ← (vous vous êtes trompé sur la video :)

Etape 3: Les solutions de (E_1) sont : $y(t) = y_0 + y_p$

Donc $y(t) = Ke^{\frac{4}{8}t} - \frac{3}{4}t - \frac{3}{2}$

Etape 4: Condition Initiale ~~y(0)=1~~ $y(0)=0$

$y(0)\ Ke^0 - \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow K = \frac{3}{2}$

Conclusion: La solution de (E) est donc: $y(t) = \frac{3}{2}e^{\frac{4}{8}t} - \frac{3}{4}t - \frac{3}{2}$

$$(E2) \begin{cases} 5y' - 3y = 5 - 3t^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Etape 1: On résout $5y' - 3y = 0$

Les solutions de l'équation sont: $y_0(t) = K.e^{\frac{3}{5}t}$; $K \in \mathbb{R}$

Etape 2: On cherche une solution particulière de $5y' - 3y = 5 - 3t^2$.

$y_p = at^2 + bt + c$ $\qquad y'_p = 2at + b$

On remplace dans (E_2): $5(2at + b) - 3(at^2 + bt + c) = 5 - 3t^2 \Leftrightarrow 10at + 5b - 3at^2 - 3bt - 3c = 5 - 3t^2$

$\Leftrightarrow (10a - 3b)t - 3at^2 + 5b - 3c = 5 - 3t^2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3a = -3 \\ (10a - 3b) = 0 \\ 5b - 3c = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ 10a = 3b \Leftrightarrow b = \frac{10}{3} \\ 5 \times \frac{10}{3} - 3c = 5 \Leftrightarrow \frac{50}{3} - 3c = 5 \Leftrightarrow -3c = 5 - \frac{50}{3} \Leftrightarrow c = \frac{5 - \frac{50}{3}}{-3} = \frac{35}{9} \end{cases}$$

Donc $y_p(t) = t^2 + \frac{10}{3}t + \frac{35}{9}$

Etape 3: Les solutions de (E_2) sont: $y(t) = y_0(t) + y_p(t)$

Donc $y(t) = Ke^{\frac{3}{5}t} + t^2 + \frac{10}{3}t + \frac{35}{9}$

Etape 4: Condition Initiale $y(0) = 1$

$y(0): K.^0 + \frac{35}{9} = 1 \Leftrightarrow K = 1 - \frac{35}{9} \Leftrightarrow K = -\frac{26}{9}$

Conclusion: La solution de (E_2) est donc: $y(t) = -\frac{26}{9}e^{\frac{3}{5}t} + t^2 + \frac{10}{3}t + \frac{35}{9}$

$(E3) \begin{cases} y' - 2y = \cos(2x) \\ y(0) = 0 \end{cases}$

Etape 1: On résout $y' - 2y = 0$

~~Les solutions sont: y(0)~~

Les solutions de l'equation sont: $y_0(x) = K \cdot e^{2x}; K \in \mathbb{R}$

Etape 2: On cherche une solution particulière

$y_p = A\cos(2x) + B\sin(2x)$ $\quad y'_p = -2A\sin(2x) + 2B\cos(2t)$

On remplace:

$-2A\sin(2x) + 2B\cos(2x) - 2(A\cos(2x) + B\sin(2t)) = \cos(2x)$

$\Leftrightarrow (2B - 2A)\cos(2x) + (-2A - 2B)\sin(2x) = \cos(2x)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2A - 2B = 0 \\ 2B - 2A = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -B \\ 4B = 1 \Leftrightarrow B = 1/4 \end{cases}$

$\begin{cases} A = -1/4 \\ B = 1/4 \end{cases}$

donc: $y_p(t) = -\frac{1}{4}\cos(2x) + \frac{1}{4}\sin(x)$

Etape 3:

Les solutions de (E_3) sont donc: $y = y_0 + y_p \Leftrightarrow y(t) = ke^{2x} + \frac{1}{4}(\sin(2x) - \cos(2x))$

Etape 4: CI $y(0) = 0$

$\Leftrightarrow y(0) = k + \frac{1}{4}(0 - 1) = 0 \Leftrightarrow k = 1/4$

La solution est: $y(x) = \frac{1}{4}(e^{2x} + \sin(2x) - \cos(2x))$

Rappel nombres complexes, Euler, ses formules.

polaire: $\underline{z} = (z ; \theta)$ $\underline{z}^* = (z ; -\theta)$

expo: $\underline{z} = z e^{j\theta}$ $\underline{z}^* = z e^{-j\theta}$

cartésienne: $\underline{z} = a + jb$ $\underline{z}^* = a - jb$

$\underline{z} + \underline{z}^* = 2\,Re(\underline{z})$ $a + jb + a - jb = 2a$

$\underline{z} - \underline{z}^* = 2j\,Im(\underline{z})$ $a + jb - (a - jb) = 2jb$

$\underline{z} \times \underline{z}^* = z^2$ $z e^{j\theta} \times z e^{-j\theta} = z^2 . e^0 = z^2 \cdot 1 = z^2$

$(a + jb)(a - jb) = a^2 + b^2$ + Id. Remarquable !

$$\frac{\underline{z}}{\underline{z}^*} = \frac{(z ; \theta)}{(z ; -\theta)} = \left(\frac{z}{z} ; \theta - (-\theta)\right) = (1 ; 2\theta)$$

Euler: $\boxed{\cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}}$ $\boxed{\sin\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}}$

Application: linéariser $\sin^2 x$ en utilisant les formules d'Euler.

$$\sin^2 x = \left(\frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}\right)^2 = \frac{1}{(2j)^2}(e^{jx} - e^{-jx})^2 = -\frac{1}{4}(e^{2jx} - e^{jx}e^{-jx} + e^{-2jx}) =$$

$$-\frac{1}{4}(e^{2jx} + e^{-2jx} - 2) = \boxed{\frac{-2}{-4}(-\cos(2x) + 1)} \rightarrow \sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

$$I = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sin^2 x \, dx = 2 \times \int_0^{\pi/4} \frac{1-\cos(2x)}{2} dx = \frac{2}{2} \int_0^{\pi/4} (1-\cos(2x)) dx =$$

$$\left[x - \frac{\sin(2x)}{2}\right]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{4} - \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{4}\right)}{2} - \underbrace{\left(0 - \frac{\sin 0}{2}\right)}_{0} \Leftrightarrow I = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

Lineariser $\cos(3x) \times \sin(5x)$

$$\Leftrightarrow \frac{e^{3jx}+e^{-3jx}}{2} + \frac{e^{3jx}-e^{-5jx}}{2j} = \frac{1}{4j}\left(e^{3jx}+e^{-3jx}\right)\left(e^{5jx}-e^{-5jx}\right) = \frac{1}{4j}\left(e^{8jx}-e^{-8jx}+e^{2jx}-e^{-2jx}\right)$$

$$= \frac{1}{4j}\left(2j\sin(8x) + 2j\sin(2x)\right) = \frac{2j}{4j}\left(\sin(8x)+\sin(2x)\right)$$

$$I = \int_0^{\pi/4} \cos(3x)\sin(5x) dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} (\sin 8x + \sin 2x) dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos 8x}{8} - \frac{\cos 2x}{2}\right]_0^{\pi/4}$$

$$I = -\frac{1}{4}$$