ENTRAINEMENT TEST 3
EDLCC 1er Ordre

Attention, la résolution de ces exercices n'est pas bien rédigée.
Pour cela, il vous faudra étudier les exemples du cours.

Enoncés

g) $3y' - 5y = 2$ avec $y(0) = -\frac{7}{5}$

h) $-3y' + y = 2$ avec $y(3) = \cancel{2}\ 3$

Solutions

g) *La démarche est la même que dans l'exercice précédent. On trouve pour l'équation sans second membre* $f_0(x) = ke^{5x/3}$, *puis une solution particulière de l'équation complète* $\varphi(x) = -\dfrac{2}{5}$, *la condition initiale permet de trouver* $k = -1$ *et finalement* $f(x) = -e^{5x/3} - \dfrac{2}{5}$

h) $f_0(x) = ke^{x/3}$; $\varphi(x) = 2$ *est une solution particulière,* $k = \dfrac{1}{e}$ *et* $f(x) = e^{(x/3)-1} + 3$

Enoncés

II. Soit l'équation différentielle (E) :

$$-3y' + 2y = x^2 - x + 3$$

a) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E_0) :

$$-3y' + 2y = 0$$

b) Déterminer un polynôme de degré 2 $(P(x) = ax^2 + bx + c)$ solution particulière de (E)

c) En déduire les solutions générales de (E)

III. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$4y' - 5y = 15x^2 - 49x + 10$$

IV. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$-y' + 7y = 21x^2 + x - 1$$

Solutions

II. a) $f_0(x) = ke^{2x/3}$, où k est une constante.

b. $P(x) = ax^2 + bx + c$ et $P'(x) = 2ax + b$.

On a donc :

$$\begin{aligned} -3P'(x) + 2P(x) &= -6ax - 3b + 2ax^2 + 2bx + 2c \\ &= 2ax^2 + x(2b - 6a) + (2c - 3b) \end{aligned}$$

En identifiant les seconds membres de l'équation on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} 2a = 1 \\ 2b - 6a = -1 \\ -3b + 2c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ 2b = -1 + 3 \\ -3b + 2c = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ b = 1 \\ 2c = 3 + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ b = 1 \\ c = 3 \end{cases}$$

Finalement $P(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + x + 3$

c) $f(x) = ke^{2x/3} + \dfrac{1}{2}x^2 + x + 3$

III. $f_0(x) = ke^{5x/4}$ puis $P(x) = -3x^2 + 5x + 2$ et finalement $f(x) = ke^{5x/4} - 3x^2 + 5x + 2$

IV. $f_0(x) = ke^{7x}$ puis $P(x) = 3x^2 + x$ et finalement $f(x) = ke^{7x} + 3x^2 + x$

Enoncés

II. Soit l'équation différentielle (E) :
$3y' - 2y = -13 \sin x$
a) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E_0) :
$3y' - 2y = 0$
b) Déterminer les réels a et b de manière à ce que la fonction φ définie par
$\varphi(x) = a \cos x + b \sin x$ soit une solution particulière de (E)
c) En déduire les solutions générales de (E)

III. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle
$y' + 2y = 4 \cos 2x$

Solutions

II. a) $f_0(x) = ke^{2x/3}$, où k est une constante.

b) $\varphi(x) = a \cos x + b \sin x$ et

$\varphi'(x) = -a \sin x + b \cos x$.

On a donc :

$$(-3a \sin x + 3b \cos x) + (-2a \cos x - 2b \sin x) = -13 \sin x$$

$$\Leftrightarrow (-3a - 2b) \sin x + (3b - 2a) \cos x = -13 \sin x$$

On obtient le système suivant :

$$\begin{cases} -3a - 2b = -13 \\ -2a + 3b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6a - 4b = -26 \\ -6a + 9b = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 13b = 26 \\ -2a + 3b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ a = 3 \end{cases}$$

Finalement $\varphi(x) = 3 \cos x + 2 \sin x$

c) $f(x) = ke^{2x/3} + 3 \cos x + 2 \sin x$

III. $f_0(x) = ke^{-2x}$ puis $\varphi(x) = \sin 2x + \cos 2x$ et finalement $f(x) = ke^{-2x} + \sin 2x + \cos 2x$

$\sin \omega x + \cos \omega x$ et