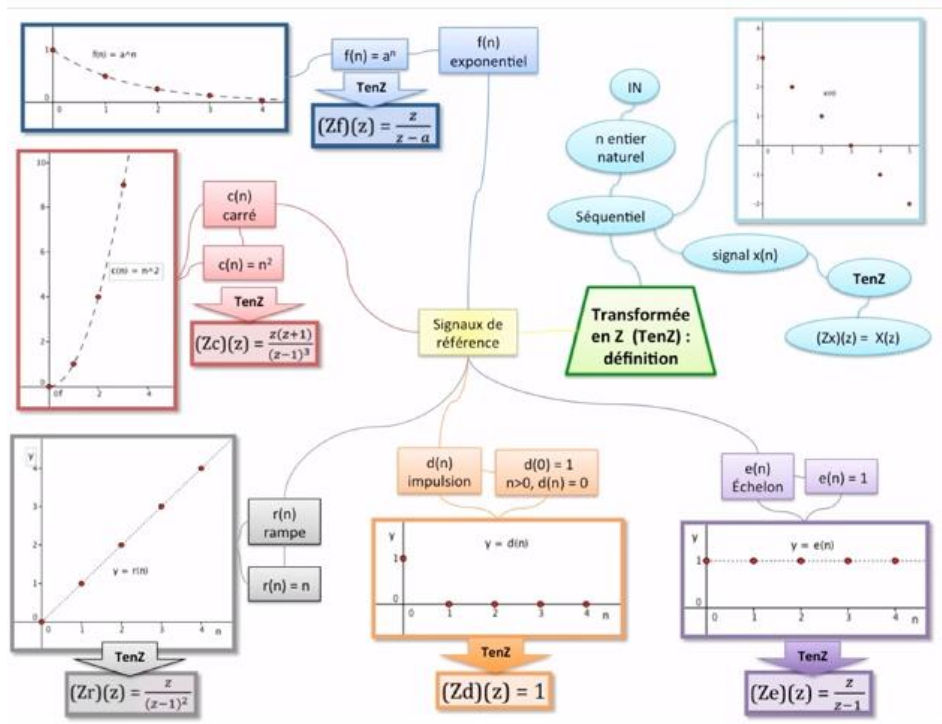


UNIVERSITE DE TOULON
IUT DE TOULON
DEPARTEMENT GEII

Cours de Mathématiques
Chapitre 4 : Transformation en Z



Enseignante : Sylvia Le Beux
Sylvia.lebeux@univ-tln.fr

Moodle : <https://moodle.univ-tln.fr/course/view.php?id=527>

Transformation en Z

I. Définitions et exemples :

1) Séquence numérique

Soit f , une fonction causale et $T_e > 0$, on appelle séquence numérique associée à f la suite des valeurs obtenues par échantillonnage de f selon la période T_e :

$$\begin{aligned} \mathbb{IN} &\rightarrow \mathbb{IR} \\ k &\mapsto f(kT_e) \end{aligned}$$

On notera : $f_e = \{ f(kT_e) ; k \in \mathbb{IN} \}$ ou $f_e = \{ f(kT_e) \}$

f_e est aussi appelée fonction échantillonnée de f , T_e la période d'échantillonnage, et $f(kT_e)$ est l'échantillon de rang k .

2) Transformée en Z.

Soit $f_e = \{ f(kT_e) \}$, une séquence échantillonnée, on appelle transformée en Z de f_e la

fonction F de la variable complexe z définie par : $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT_e) z^{-k}$

On note : $F = \text{TZ}(f_e)$ ou encore $F(z) = \text{TZ}(\{ f(kT_e) \})$.

D_F est l'ensemble de définition F , c'est l'ensemble des nombres complexe z pour lesquels

la série $\sum_{k=0}^{\infty} f(kT_e) z^{-k}$ converge.

On admet que F est infiniment dérivable sur D_F .

Rappel Suite géométrique de raison a : $(a^k)_k$

$\lim_{k \rightarrow \infty} a^k = \dots\dots\dots$

Série géométrique de raison a : $\sum_{k=0}^{\infty} a^k$

$\sum_{k=0}^n a^k = \dots\dots\dots$

3) Transformée en Z de séquences usuelles

- Suite échelon unité : en supposant $T_e=1$, $U_e=\{U(k) ; k \in \mathbb{IN}\}$

$U(k)=$

Donc $F(z)=$
.....
.....
.....

- Suite de Dirac : en supposant $T_e=1$, la suite de Dirac, notée δ est définie par :

$$\delta(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si } k \in \mathbb{IN}^* \end{cases}$$

Donc $F(z)=$
.....

- Suite de Dirac retardé : en supposant $T_e=1$, la suite de Dirac retardée de n , notée δ_n est

définie par : $\delta_n(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = n \\ 0 & \text{si } k \neq n \end{cases}$

.....
.....

- Suite exponentielle : Soit $f(x) = a^x \cdot U(x)$ $a \in \mathbb{C}$ alors $f_e = \{a^{kT_e} \cdot U(kT_e)\}$ est la séquence numérique associée.

Donc $F(z) = \dots\dots\dots$
 $\dots\dots\dots$
 $\dots\dots\dots$

En particulier si $T_e=1$: $\dots\dots\dots$

II. Propriétés de la transformation en Z :

1) Linéarité

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, Soient $f_e = \{f(kT_e), k \in \mathbb{IN}\}$ et $g_e = \{g(kT_e), k \in \mathbb{IN}\}$ deux fonctions échantillonnées de même période d'échantillonnage.

$$\mathbf{TZ}(\alpha f_e + \beta g_e) = \alpha \mathbf{TZ}(f_e) + \beta \mathbf{TZ}(g_e).$$

Exemples

- $\mathbf{TZ}(\{\cos(k\omega T_e)U(kT_e)\}) = \dots\dots\dots$
 $\dots\dots\dots$
 $\dots\dots\dots$
 $\dots\dots\dots$
 $\dots\dots\dots$
 $\dots\dots\dots$
 $\dots\dots\dots$
 $\dots\dots\dots$
 $\dots\dots\dots$

3) Séquence numérique avancée

Soient $f_e = \{f(kT_e), k \in \mathbb{IN}\}$ et $n \in \mathbb{IN}$. On note $f_{av} = \{f(kT_e + nT_e), k \in \mathbb{IN}\}$, le signal numérique avancé de n du signal f_e . On a alors :

$$TZ(f_{av}) = z^n \cdot [TZ(f_e) - f(0) - f(T_e)z^{-1} - f(2T_e)z^{-2} - \dots - f((n-1)T_e)z^{-n+1}]$$

Démonstration

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Cas particulier pour $T_e=1$, on obtient :

$TZ(\{f(k+1)\}) = \dots$

$TZ(\{f(k+2)\}) = \dots$

Si en plus $f(0)=0$, alors $TZ(\{f(k+1)\}) = \dots$

L'avance se traduit donc par la multiplication par z.

Exemple

$TZ(U(k+3)) = \dots$

3) Transformée de $\{a^{kT_e} \cdot f(kT_e)\}$

$$TZ\left(\{a^{kT_e} \cdot f(kT_e)\}\right) = F\left(\frac{z}{a}\right) \text{ où } F(z) = TZ(f_e)$$

III. Transformation en Z inverse :

1) Définition / Théorème

On admet que la transformation en Z est inversible, et on note TZ^{-1} la transformation en Z inverse. On a donc :

$$TZ(f_e)=F \Leftrightarrow f_e=TZ^{-1}(F) \text{ ou encore : } TZ(f(kT_e))=F(z) \Leftrightarrow f(kT_e)=TZ^{-1}(F(z))$$

Exemples On posera, lorsque cela n'est pas précisé $T_e=1$.

$$TZ^{-1}\left(\frac{z}{z-1}\right) = \dots\dots\dots$$

$$TZ^{-1}\left(\frac{z}{z-a^{T_e}}\right) = \dots\dots\dots$$

$$TZ^{-1}\left(\frac{z}{z-3}\right) = \dots\dots\dots$$

$$TZ^{-1}\left(\frac{z/2}{z^2-z\sqrt{3}+1}\right) = \dots\dots\dots$$

$$TZ^{-1}\left(\frac{z}{(z-1)^2}\right) = \dots\dots\dots$$

$$TZ^{-1}\left(\frac{1}{z^3}\right) = \dots\dots\dots$$

2) Propriétés

Linéarité : Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $TZ^{-1}(\alpha F + \beta G) = \alpha TZ^{-1}(F) + \beta TZ^{-1}(G)$

Retard de n : $TZ^{-1}(z^{-n}.F(z)) = f(kT_e-nT_e)$ où $f(kT_e)=TZ^{-1}(F(z))$

Etc...

Exemples On posera $T_e=1$

$$TZ^{-1}\left(\frac{1}{z-1}\right) = \dots\dots\dots$$

.....

$$TZ^{-1}\left(\frac{1}{z(z-3)}\right) =$$

.....

.....

$$TZ^{-1}\left(\frac{z^2-z}{z^2-2z+4}\right) = \dots\dots\dots$$

Transformation en Z

Soit f_e , une séquence numérique associée à la fonction réelle f de période d'échantillonnage T_e :
 $f_e = \{f(k.T_e); k \in \mathbb{N}\}$.

Transformée en Z de f_e : $TZ(f_e) = F(z) = \sum_{k \geq 0} f(k.T_e).z^{-k}$. F est définie pour tout z complexe tel que :

$$|z| > \frac{1}{R} \quad (R \text{ étant le rayon de convergence de la série entière : } \sum_{k \geq 0} f(k.T_e).z^k).$$

Z est une application inversible : $TZ(f_e) = F(z) = \sum_{n \geq 0} f(k.T_e).z^{-k} \Leftrightarrow f_e = TZ^{-1}(F)$.

Transformées en Z de séquences numériques usuelles (T_e est quelconque)

$f_e = \{f(kT_e)\} = TZ^{-1}(F)$	$TZ(f_e) = F(z) = \sum_{k \geq 0} f(kT_e).z^{-k}$
δ_n où n est un entier naturel	$z^{-n} ; z \neq 0$
$U(kT_e)$	$\frac{z}{z-1} ; z > 1$
$kT_e.U(kT_e)$	$\frac{z.T_e}{(z-1)^2} ; z > 1$
$a^{kT_e}.U(kT_e)$	$\frac{z}{z-a^{T_e}} ; z > a^{T_e} $
$\cos(\omega kT_e).U(kT_e)$	$\frac{z^2 - z \cos(\omega T_e)}{z^2 - 2z \cos(\omega T_e) + 1} ; z > 1$
$\sin(\omega kT_e).U(kT_e)$	$\frac{z \sin(\omega T_e)}{z^2 - 2z \cos(\omega T_e) + 1} ; z > 1$
$a^{kT_e} . \cos(\omega kT_e).U(kT_e)$	$\frac{z^2 - a^{T_e} z \cos(\omega T_e)}{z^2 - 2a^{T_e} z \cos(\omega T_e) + a^{2T_e}} ; z > a^{T_e} $
$a^{kT_e} . \sin(\omega kT_e).U(kT_e)$	$\frac{a^{T_e} z \sin(\omega T_e)}{z^2 - 2a^{T_e} z \cos(\omega T_e) + a^{2T_e}} ; z > a^{T_e} $

Propriétés de la transformation en Z

$f_e = \{f(kT_e)\} = \mathcal{TZ}^{-1}(F)$	$\mathcal{TZ}(f_e) = F(z) = \sum_{k \geq 0} f(kT_e) \cdot z^{-k}$
$\alpha f_e + \beta g_e$	$\alpha F(z) + \beta G(z) ; z > \max\left(\frac{1}{R_1}; \frac{1}{R_2}\right)$
$kT_e \cdot f(kT_e)$	$-T_e \cdot z \cdot F'(z) ; z > \frac{1}{R}$
$a^{kT_e} \cdot f(kT_e)$	$F\left(\frac{z}{a^{T_e}}\right) ; z > \frac{ a^{T_e} }{R}$
Séquence retardée de pT_e : $f(kT_e - pT_e)$	$z^{-p} \cdot F(z) ; z > \frac{1}{R}$
Séquence avancée de pT_e : $f(kT_e + pT_e)$	$z^p \left[F(z) - f(0) - f(T_e) \cdot z^{-1} - \dots - f((p-1)T_e) \cdot z^{-(p-1)} \right]$ $ z > \frac{1}{R}$
$\sum_{n=0}^k f(nT_e)$	$\frac{z}{z-1} \cdot F(z)$
Produit de convolution : $(f_e * g_e)(k) = \sum_{n=0}^k f(nT_e) g(kT_e - nT_e)$	$F(z) \cdot G(z) ; z > \max\left(\frac{1}{R_1}; \frac{1}{R_2}\right)$

Théorème de la valeur initiale : $\lim_{|z| \rightarrow \infty} F(z) = f(0)$.

Théorème de la valeur finale : $\lim_{z \rightarrow 1} \left(1 - \frac{1}{z}\right) \cdot F(z) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(kT_e)$.

