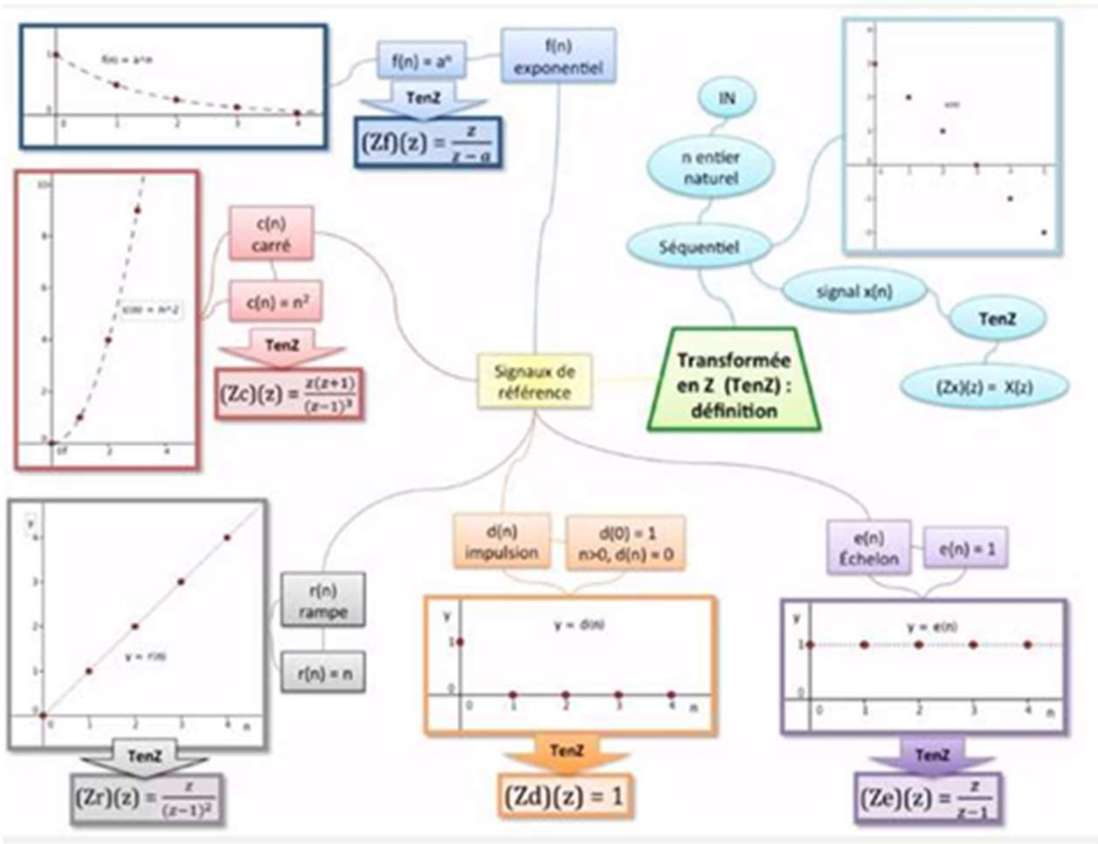
# Cours de Mathématiques

## Chapitre 4 : Transformation en Z



# Transformation de Laplace

— S'applique sur un signal analogique:
continue

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f(t) \end{array}$$

fonction

var. continue

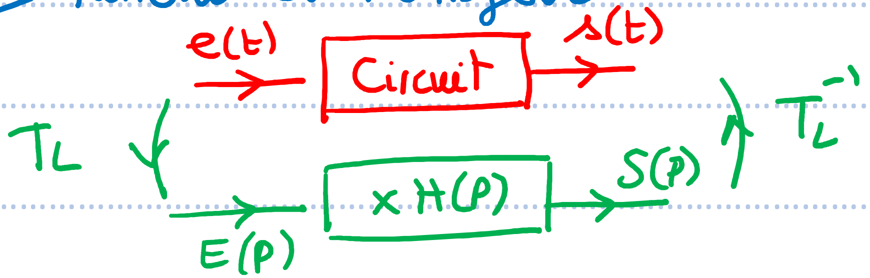
— $T_L(f(t)) = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-p.t}\, dt = F(p)$

somme continue

— Pour résoudre des ED: $ay'' + by' + cy = \dots$

$T_L(y') = p.Y(p) - CI$. $T_L(y'') = p^2 Y(p) - CI$

— Fonction de Transfert




# Transformation en Z.

— numérique

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ k & \longmapsto & f(k) \end{array}$$

suite

var. discrète

— $T_Z(f(k)) = \sum_{k=0}^{+\infty} f(k) . z^{-k}$

somme discrète

— Equations aux différences:

$a\, y(k-2) + b\, y(k-1) + c\, y(k) = \dots$

— Idem

$T_e = 1$

Page 21 chapitre 3

# Transformées en Z de séquences numériques usuelles ($T_e$ est quelconque)

| $f_e = \{f(kT_e)\} = TZ^{-1}(F)$ | $TZ(f_e) = F(z) = \sum_{k \geq 0} f(kT_e).z^{-k}$ |
|---|---|
| $\delta_n$ où n est un entier naturel | $z^{-n}$ ; $z \neq 0$ |
| $1 = U(kT_e)$  | $\dfrac{z}{z-1}$ ; $\lvert z \rvert > 1$ |
| $kT_e = kT_e.U(kT_e)$ | $\dfrac{z.T_e}{(z-1)^2}$ ; $\lvert z \rvert > 1$ |
| $a^{kT_e}.U(kT_e)$ | $\dfrac{z}{z-a^{T_e}}$ ; $\lvert z \rvert > \lvert a^{T_e} \rvert$ |
| $\cos(\omega kT_e).U(kT_e)$ | $\dfrac{z^2 - z\cos(\omega T_e)}{z^2 - 2z\cos(\omega T_e) + 1}$ ; $\lvert z \rvert > 1$ |
| $\sin(\omega kT_e).U(kT_e)$ | $\dfrac{z\sin(\omega T_e)}{z^2 - 2z\cos(\omega T_e) + 1}$ ; $\lvert z \rvert > 1$ |
| $a^{kT_e}.\cos(\omega kT_e).U(kT_e)$ | $\dfrac{z^2 - a^{T_e} z\cos(\omega T_e)}{z^2 - 2a^{T_e} z\cos(\omega T_e) + a^{2T_e}}$ ; $\lvert z \rvert > \lvert a^{T_e} \rvert$ |
| $a^{kT_e}.\sin(\omega kT_e).U(kT_e)$ | $\dfrac{a^{T_e} z\sin(\omega T_e)}{z^2 - 2a^{T_e} z\cos(\omega T_e) + a^{2T_e}}$ ; $\lvert z \rvert > \lvert a^{T_e} \rvert$ |

# Propriétés de la transformation en Z

| | |
|---|---|
| $f_e=\{f(kT_e)\}=TZ^{-1}(F)$ | $TZ(f_e)=F(z)=\sum_{k\geq 0} f(kT_e).z^{-k}$ |
| $\alpha f_e+\beta g_e$ | $\alpha F(z)+\beta G(z)$ ; $\lvert z\rvert > \max(\frac{1}{R_1};\frac{1}{R_2})$ |
| $kT_e.f(kT_e)$ | $-T_e.z.F'(z)$ ; $\lvert z\rvert > \frac{1}{R}$ |
| $a^{kT_e}.f(kT_e)$ | $F(\frac{z}{a^{T_e}})$ ; $\lvert z\rvert > \frac{\lvert a^{T_e}\rvert}{R}$ |
| Séquence retardée de $pT_e$ :<br>$f(kT_e-pT_e)$ | $z^{-p}.F(z)$ ; $\lvert z\rvert > \frac{1}{R}$ |
| Séquence avancée de $pT_e$ :<br>$f(kT_e+pT_e)$ | $z^p.\left[F(z)-f(0)-f(T_e).z^{-1}-\ldots-f((p-1)T_e).z^{-(p-1)}\right]$<br>$\lvert z\rvert > \frac{1}{R}$ |
| $\sum_{n=0}^{k} f(nT_e)$ | $\frac{z}{z-1}.F(z)$ |
| Produit de convolution :<br>$(f_e * g_e)(k)=\sum_{n=0}^{k} f(nT_e)g(kT_e-nT_e)$ | $F(z).G(z)$ ; $\lvert z\rvert > \max(\frac{1}{R_1};\frac{1}{R_2})$ |

# IV. Exercices

Exercice 1 :

Page 23 chapitre 3

Déterminer la transformées en Z des séquences $\{f(k)\}$ de période 1 définies par :

$f(k)=(2k-3)U(k)$ ; $f(k)=k.U(k-1)$ ; $f(k)=5^kU(k)$ ; $f(k)=3^{-k}U(k)$ ; $f(k)=\frac{3^k}{2^k}.U(k)$ ;

$f(k)=(k^2+2k-3)U(k-2)$ ; $f(k)=2^{-k}[U(k)-U(k-n)]$ ; $f(k)=e^{-k}\cos(k\omega)U(k)$

Exercice 2 : Trouver les originaux de :

$$F(z)=\frac{z-1}{z+3} \quad ; \quad F(z)=\frac{1}{z^2-9z+20}$$

$$F(z)=\frac{z}{z^2+4} \quad ; \quad F(z)=\frac{1}{z^3-1}$$

Exercice 3 : Soit l'équation :

$$(E)\begin{cases} y(k)-ay(k-1)=x(k), k\geq 1 \\ y(0)=x(0). \end{cases}$$

On pose X(z)=TZ(x(k)) et Y(z)=TZ(y(k)), appliquer TZ à l'équation (E), puis en déduire la fonction de transfert $H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}$.

Déterminer alors l'expression de la réponse impulsionnelle ($x=\delta$) ; de la réponse indicielle ($x=U$) ; de la réponse harmonique ($x(k)=e^{ik\omega}$).

<u>Exercice 3</u> : Soit l'équation :

$$(E)\begin{cases} y(k) - ay(k-1) = x(k), k \geq 1 \\ y(0) = x(0). \end{cases}$$

On pose X(z)=TZ(x(k)) et Y(z)=TZ(y(k)), appliquer TZ à l'équation (E), puis en déduire la fonction de transfert $H(z) = \dfrac{Y(z)}{X(z)}$.

Déterminer alors l'expression de la réponse impulsionnelle ($x=\delta$) ; de la réponse indicielle (x=U) ; de la réponse harmonique ($x(k)=e^{ik\omega}$).

<u>Exercice 4</u> : Résoudre l'équation aux différences du second ordre :

$$\begin{cases} y(k+2) - 2y(k+1) + 2y(k) = U(k) \\ y(0) = 0 , y(1) = 1. \end{cases}$$

Page 3 chapitre 3

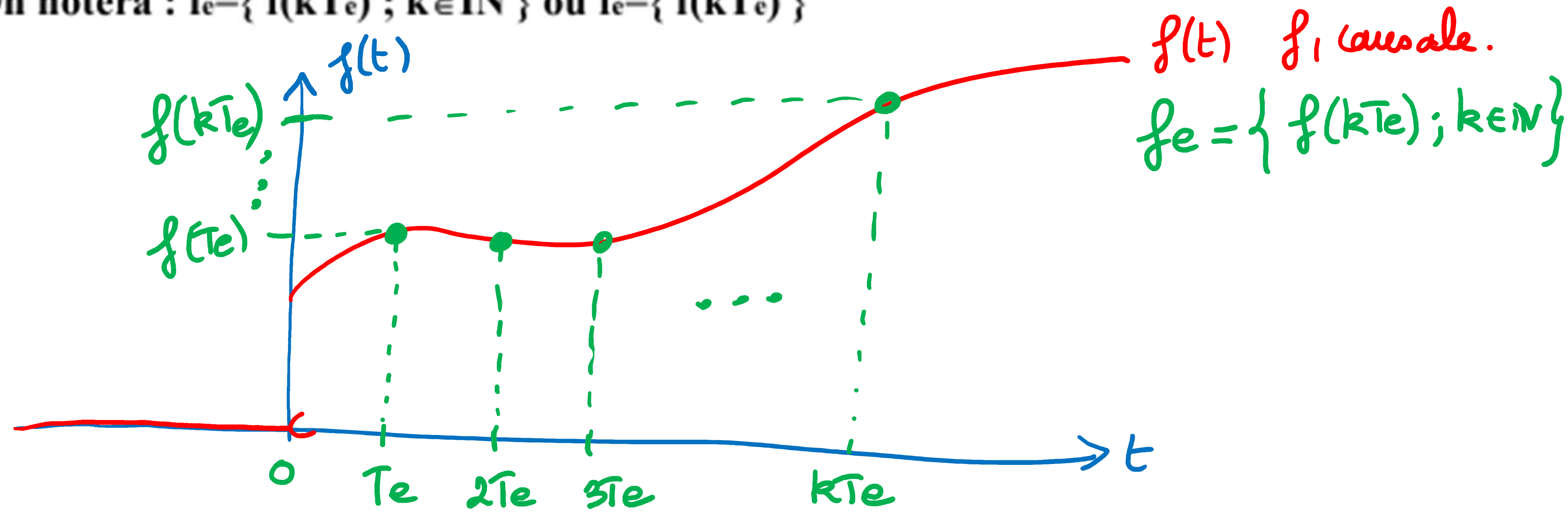
# I. Définitions et exemples :

## 1) Séquence numérique

**Soit f, une fonction causale et $T_e>0$, on appelle séquence numérique associée à f la suite des valeurs obtenues par échantillonnage de f selon la période $T_e$ :**

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ k & \mapsto & f(kT_e) \end{array}$$

**On notera : $f_e=\{ f(kT_e) \; ; k\in\mathbb{N} \}$ ou $f_e=\{ f(kT_e) \}$**




**$f_e$ est aussi appelée fonction échantillonnée de f, $T_e$ la période d'échantillonnage, et $f(kT_e)$ est l'échantillon de rang k.**

## 2) Transformée en Z .

**Soit $f_e$={ $f(kT_e)$ }, une séquence échantillonnée, on appelle transformée en Z de $f_e$ la fonction F de la variable complexe z définie par :** $F(z)=\sum_{k=0}^{\infty} f(kT_e)\, z^{-k}$ $= T_z(f(kTe))$

Page 3 chapitre 3

**On note : F=TZ($f_e$) ou encore F(z)=TZ({ $f(kT_e)$}).**
**$D_F$ est l'ensemble de définition F, c'est l'ensemble des nombres complexe z pour lesquels la série $\sum_{k=0}^{\infty} f(kT_e)\, z^{-k}$ converge.**
**On admet que F est infiniment dérivable sur $D_F$ .**

Suite géométrique de raison $a \in \mathbb{C}$ : $\left(a^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$

$\left(2^k\right)_k$ : $2^0 = 1$ ; $2$ ; $2^2$ ; $2^3$ ; ... $16$ ; $32$ ; ... $\lim\limits_{k\to+\infty} 2^k = +\infty$

La suite diverge.

$\left(\left(\frac{1}{2}\right)^k\right)_k$ : $1$ ; $\frac{1}{2}$ ; $\frac{1}{4}$ ; $\frac{1}{8}$ ; $\frac{1}{16}$ ... $\lim\limits_{k\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 0$

$\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^k\right)_k$ : $1$ ; $-\frac{1}{2}$ ; $\frac{1}{4}$ ; $-\frac{1}{8}$ ; $\frac{1}{16}$ ... $\lim\limits_{k\to+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k = 0$

la suite converge

$\left((-3)^k\right)_k$ : $1$ ; $-3$ ; $9$ ; $-27$ ; ... $\lim\limits_{k\to+\infty} (-3)^k$ n'existe pas

la suite diverge

$\left(1^k\right)_k$ : $1$ ; $1$ ; $1$ ; ... $\lim\limits_{k\to+\infty} 1^k = 1$.

$\lim\limits_{k\to+\infty} a^k = \Bigg\{$

$a \in \mathbb{C}$ **Série** géométrique de raison $a$ : $\sum_{k=0}^{\infty} a^k = 1+a+a^2+\dots+a^k+\dots$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a^k = 1+a+a^2+\dots+a^n \Longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a^k = \lim_{n\to+\infty} S_n$$

Si $a \neq 1$

$$(1-a)(1+a+a^2+\dots+a^n) = 1+a+a^2+\dots+a^n - (a+a^2+\dots+a^{n+1})$$

$$(1-a)\cdot S_n = 1-a^{n+1} \Longleftrightarrow S_n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \quad \text{si } a \neq 1$$

Si $a=1$ $\quad S_n = n+1$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \begin{cases} \lim_{n\to+\infty} \frac{1-a^{n+1}}{1-a} & \text{si } a\neq 1 \\ +\infty & \text{si } a=1 \end{cases}$$

La série géométrique **elle** converge si et seulement si $|a|<1$, et a pour somme $\frac{1}{1-a}$.

page 3

<u>Rappel</u> Suite géométrique de raison a : $\left(a^k\right)_k$

$\lim_{k\to\infty} a^k =$ 0 si et seulement si $|a|<1$ $(a\in\mathbb{C})$

Série géométrique de raison a : $\sum_{k=0}^{\infty} a^k$

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \begin{cases} \dfrac{1-a^{n+1}}{1-a} & \text{si } a\neq 1 \\ n+1 & \text{si } a=1 \end{cases}$$

donc

La série :

$$\boxed{\sum_{k\in\mathbb{N}} a^k = \frac{1}{1-a} \text{ ssi } |a|<1 \quad (a\in\mathbb{C})}$$

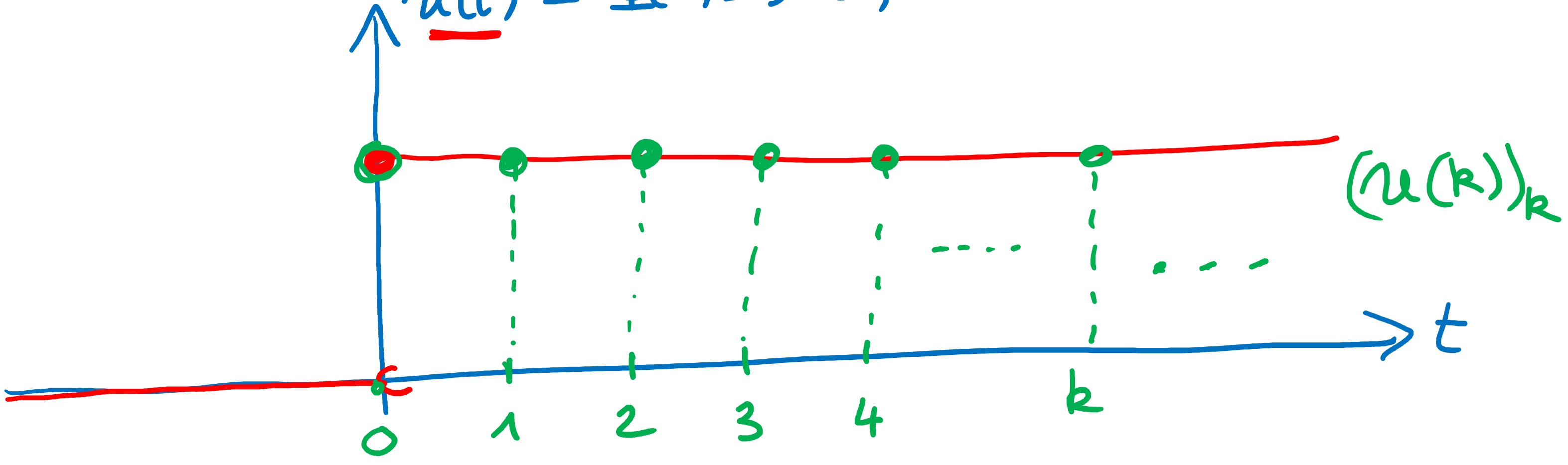
Page 5 chapitre 3

### 3) Transformée en Z de séquences usuelles

- Suite échelon unité : en supposant $T_e=1$, $U_e=\{U(k)\ ;\ k\in IN\}$

U(k)= $1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$

$u(t) = \Gamma(t) = \mathcal{H}(t)$



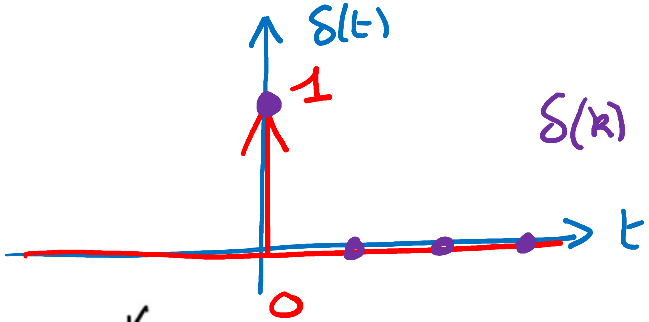

Donc F(z)=

$$F(z) = T_Z(u(k)) = T_Z(1) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \underbrace{u(k)}_{1} . z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = \underbrace{\sum_{k\in\mathbb{N}} (z^{-1})^k}_{\text{série géo de raison } z^{-1}}$$

$$F(z) = \frac{1 \times z}{(1-z^{-1}) \times z} \text{ ssi } |z^{-1}| < 1 \iff \boxed{T_Z(1) = \frac{z}{z-1} \text{ ssi } |z|>1}$$

- Suite de Dirac : en supposant $T_e$=1, la suite de Dirac, notée $\delta$ est définie par :

$$\delta(k)=\begin{cases}1 \text{ si } k=0\\ 0 \text{ si } k\in \mathbb{N}^*\end{cases}$$

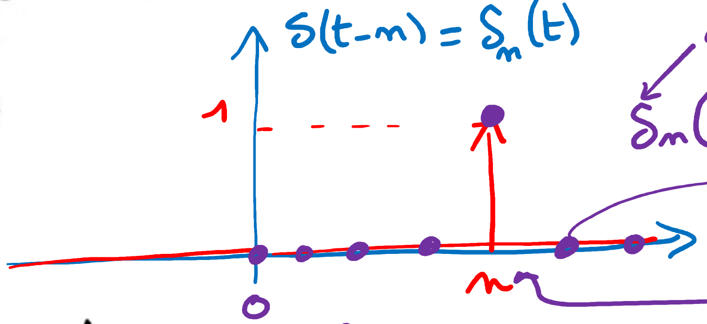



Donc F(z)= $\sum_{k=0}^{\infty} \delta(k) \cdot z^{-k} = \delta(0).z^{0} + \delta(1)z^{-1} + \delta(2)z^{-2} + \delta(3).z^{-3} + \dots\dots$

en $k=0$ $\quad F(z) = \delta(0) \cdot z^{0} = 1.1 = 1$

maj $\Delta$ } delta
min. $\delta$ }

- Suite de Dirac retardé : en supposant $T_e$=1, la suite de Dirac retardée de n, notée $\delta_n$ est définie par : $\delta_n(k)=\begin{cases}1 \text{ si } k=n\\ 0 \text{ si } k\neq n\end{cases}$




delta

$\delta_n(k) = \delta(k-n)$

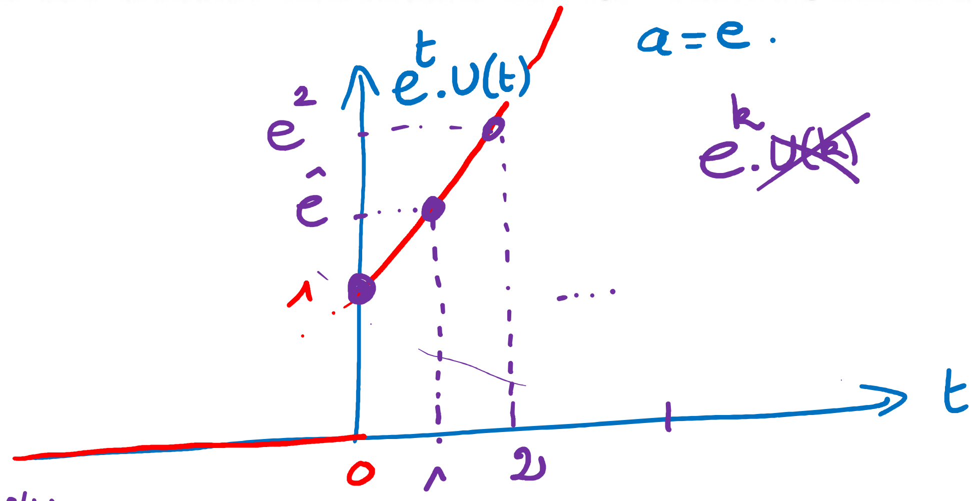
$T_z(\delta_n(k)) = F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta_n(k) \cdot z^{-k} = \underbrace{\delta_n(0)z^{-0} + \delta_n(1)z^{-1}}_{0} + \dots + \overset{1}{\delta_n(n)}z^{-n} + \delta_n(n+1)z^{-(n+1)} + \dots$

$F(z) = 1 \cdot z^{-n} = z^{-n} \qquad T_z(\delta_n(k)) = z^{-n} \qquad z\neq 0$

- Suite exponentielle : Soit $f(x) = a^{x}.U(x)$ $\quad a \in \mathbb{C}$ alors $f_e = \{a^{kT_e}.U(kT_e)\}$ est la séquence numérique associée.

Page 7 chapitre 3

$a = e.$




$e^k.\cancel{U(k)}$

$$a^k.z^{-k} = a^k.\left(\frac{1}{z^k}\right) = \frac{a^k}{z^k} = \left(\frac{a}{z}\right)^k$$

$T_z(a^k)$

$f(k)$

Donc $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a^{kT_e}.z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{a^{T_e}}{z}\right)^k$ $\qquad \left|\frac{a^{T_e}}{z}\right| < 1$

suite géométrique de raison $q = \frac{a^{T_e}}{z}$ converge si $|z| > |a^{T_e}|$

$F(z) = \frac{1 \times z}{\left(1 - \frac{a^{T_e}}{z}\right) \times z} = \frac{z}{z - a^{T_e}}$ donc $TZ\left(a^{kT_e}.U(k)\right) = \frac{z}{z - a^{T_e}}$ $\quad |z| > |a^{T_e}|$

En particulier si $T_e=1$ : et $a^{T_e} = a$

## II. Propriétés de la transformation en Z :

### 1) Linéarité

Page 7 chapitre 3

> **Soient $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$, Soient $f_e = \{f(kT_e), k \in \mathbb{N}\}$ et $g_e = \{g(kT_e), k \in \mathbb{N}\}$ deux fonctions échantillonnées de même période d'échantillonnage.**
>
> $$TZ(\alpha f_e + \beta g_e) = \alpha\ TZ(f_e) + \beta\ TZ(g_e).$$

Exemples $T_e = 1$

- $TZ(\{\cos(k\omega T_e)U(kT_e)\}) = T_Z(\cos(k\omega)) = T_Z\left(\frac{e^{jk\omega} + e^{-jk\omega}}{2}\right)$

$$= \frac{1}{2}\left\{\underbrace{T_Z(e^{jk\omega})}_{a = e^{j\omega}} + \underbrace{T_Z(e^{-jk\omega})}_{a = e^{-j\omega}}\right\}$$

$|a| = 1$ $\quad$ $|a| = 1$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{z}{z-e^{j\omega}} + \frac{z}{z-e^{-j\omega}}\right\} \quad \text{ssi } |z| > 1$$

$$= \frac{1}{2}\ \frac{z(z-e^{-j\omega}) + z(z-e^{j\omega})}{(z-e^{j\omega})(z-e^{-j\omega})}$$

$\longrightarrow z^2 - ze^{-j\omega} + z^2 - ze^{j\omega} = 2z^2 - 2z\cos\omega$

$\longrightarrow \underbrace{z^2 - ze^{j\omega} - ze^{-j\omega}}_{} + \underbrace{e^{j\omega}.e^{-j\omega}}_{}$

$z^2 - z\underbrace{(e^{j\omega} + e^{-j\omega})}_{2\cos\omega} + e^0 = 1$

$$= \frac{1}{\cancel{2}}\ \frac{\cancel{2}(z^2 - z\cos\omega)}{z^2 - 2z\cos\omega + 1}$$

Page 8 chapitre 3

$\boxed{T_e=1}$

$$T_z(\sin(k\omega)) = T_z\left(\frac{e^{jk\omega} - e^{-jk\omega}}{2j}\right)$$

$$= \frac{1}{2j}\left\{ \underbrace{T_z(e^{jk\omega})}_{\substack{a=e^{j\omega} \\ |a|=1}} - \underbrace{T_z(e^{-jk\omega})}_{\substack{a=e^{-j\omega} \\ |a|=1}} \right\}$$

$$= \frac{1}{2j}\left\{ \frac{z}{z-e^{j\omega}} - \frac{z}{z-e^{-j\omega}} \right\} \quad \text{ssi } |z|>1$$

$$\longrightarrow z(z-e^{-j\omega}) - z(z-e^{j\omega})$$

$$= z(-e^{-j\omega}+e^{j\omega})$$

$$T_z(\sin k\omega) = \frac{1}{\cancel{2j}} \; \frac{z\,\cancel{2j}\sin\omega}{z^2-2z\cos\omega+1}$$

## 2) Séquence numérique retardée

f est causale

> Soient $f_e = \{f(kT_e), k \in IN\}$ et $n \in IN$. On note $f_{ret} = \{f(kT_e - nT_e), k \in IN\}$, le signal numérique retardé de n du signal $f_e$.
> Alors : $TZ(f_{ret}) = z^{-n}.TZ(f_e)$

$Tz(f(k-n)) = z^{-n}.\,Tz(f(k))$ facteur retard de n.

f est causale : $f(k)=0 \ \forall \ k<0$

Démonstration $Te=1$

On connaît $Tz(f(k)) = \sum_{k=0}^{+\infty} f(k).z^{-k} = F(z)$

On cherche $Tz(f(k-n)) = \sum_{k=0}^{+\infty} f(k-n).z^{-k}$

On pose $p = k-n \iff k = p+n$

$\begin{cases} k=0 \iff p=-n \\ k \to +\infty \iff p \to +\infty \end{cases}$

$= \sum_{p=-n}^{+\infty} f(p).\underbrace{z^{-(p+n)}}_{z^{-p}.z^{-n}}$

$= z^{-n}.\sum_{p=\cancel{-n}\ 0}^{+\infty} f(p).z^{-p}$ car f est causale

$Tz(f(k-n)) = z^{-n}.\,Tz(f(k))$

Page 9 chapitre 3

Cas particulier pour $T_e=1$ et $n=1$, on obtient :

$$T_z(f(k-1)) = z^{-1} \cdot T_z(f(k))$$

**Le retard se traduit donc par la multiplication par $z^{-1}$.**

Page 10 chapitre 3

Exemple

$$TZ(U(k-3)) = z^{-3} \cdot T_z(U(k)) = z^{-3} \cdot \frac{z}{z-1} = \frac{z^{-2}}{z-1} = \frac{1}{z^2(z-1)}$$

### 3) Séquence numérique avancée

**Soient $f_e = \{f(kT_e), k \in IN\}$ et $n \in IN$. On note $f_{av} = \{f(kT_e + nT_e), k \in IN\}$, le signal numérique avancé de n du signal $f_e$. On a alors :**

$$TZ(f_{av}) = z^n.[\, TZ(f_e) - f(0) - f(T_e)z^{-1} - f(2T_e)z^{-2} - \ldots - f((n-1)T_e)z^{-n+1}]$$

Page 11 chapitre 3

Démonstration

Cas particulier pour $T_e$=1, on obtient :

TZ( $\{f(k+1)\}$ )=………………………………………………………………………………

TZ( $\{f(k+2)\}$ )=………………………………………………………………………………

Si en plus f(0)=0, alors TZ( $\{f(k+1)\}$ )=……………………………………………………...

**L'avance se traduit donc par la multiplication par z.**

Exemple

TZ(U(k+3))=……………………………………………………………………………………..

### 3) Transformée de $\{a^{kT_e}.f(kT_e)\}$

$$\boxed{TZ\left(\{a^{kT_e}.f(kT_e)\}\right)=F\left(\frac{z}{a^{T_e}}\right) \text{ où } F(z)=TZ\ (f_e)}$$

Page 12 chapitre 3

Page 13 chapitre 3

Exemple

$TZ(\{e^{-k}\cos(k\omega)U(k)\}) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Page 13 chapitre 3

## 4) Transformée de $\{kT_e.f(kT_e)\}$

$$\boxed{TZ(\{kT_e.f(kT_e), k \in IN\}) = -zT_e.F'(z) \text{ où } F(z) = TZ\ (f_e)}$$

$$Tz(k.f(k)) = -z.F'(z) \text{ où } F(z) = Tz(f(k))$$

Démonstration

On connaît $F(z) = Tz(f(k)) = \sum_{k=0}^{+\infty} f(k).z^{-k}$

Alors $F'(z) = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} f(k)\, z^{-k}\right)'_z$

On admet $= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(f(k).z^{-k}\right)'_z$

$$F'(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} -k\, f(k).\underbrace{z^{-k-1}}_{z^{-k}.z^{-1}}$$

$$F'(z) = -z^{-1}.\underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} k.f(k)\, z^{-k}}_{Tz(k.f(k))}$$

$$Tz(k.f(k)) = -z.F'(z)$$

Exemples

$TZ(\{kU(k)\})=$……………………………………………………………………………

$TZ(\{k^2U(k)\})=$……………………………………………………………………………

$TZ(\{(k^2+2k-3)U(k-2)\})=$…………………………………………………………………

Page 14 chapitre 3

Exemples

$TZ(\{kU(k)\}) = -z\,F'(z)$ où $F(z) = Tz(U(k)) = \frac{z}{z-1} \Rightarrow Tz(k) = \frac{z}{(z-1)^2}$

Page 14 chapitre 3

$TZ(\{k^2U(k)\}) = -z\,F'(z)$ où $F(z) = Tz(kU(k)) = \frac{z}{(z-1)^2} \Rightarrow Tz(k^2) = \frac{z^2+z}{(z-1)^3}$

$k \leftarrow k+2$

$TZ(\{(k^2+2k-3)U(k-2)\}) = z^{-2} \cdot Tz\left((k+2)^2 + 2(k+2) - 3\right) \leftarrow Tz\left(f(k-2) \cdot U(k-2)\right) = z^{-2} \cdot Tz\left(f(k) \cdot U(k)\right)$

retard de 2

$= z^{-2} \cdot Tz\left(k^2 + 6k + 5\right)$

$Tz\left((k^2+2k-3) \cdot U(k-2)\right) = z^{-2} \cdot \left(\frac{z^2+z}{(z-1)^3} + 6\frac{z}{(z-1)^2} + 5\frac{z}{z-1}\right)$

## III. Transformation en Z inverse :

$T_Z^{-1}(1) = \delta(k).$

Page 15

### 1) Définition / Théorème

**On admet que la transformation en Z est inversible, et on note $TZ^{-1}$ la transformation en Z inverse. On a donc :**

$$TZ(f_e)=F \Leftrightarrow f_e=TZ^{-1}(F) \text{ ou encore : } TZ(f(kT_e))=F(z) \Leftrightarrow f(kT_e)=TZ^{-1}(F(z))$$

Exemples On posera, lorsque cela n'est pas précisé $T_e=1$. Tableau page 21.

notation abusive.

$$TZ^{-1}\left(\frac{z}{z-1}\right) = U(k) = 1$$

$$TZ^{-1}\left(\frac{z}{z-a^{T_e}}\right) = a^{kT_e} \cdot U(k) = a^{kT_e}$$

$$TZ^{-1}\left(\frac{z}{z-3}\right) = 3^k \cdot U(k) = 3^k$$

$$TZ^{-1}\left(\frac{z/2}{z^2 - z\sqrt{3}+1}\right) = \ldots$$

$$TZ^{-1}\left(\frac{z}{(z-1)^2}\right) = k \cdot U(k) = k$$

$$TZ^{-1}\left(\frac{1}{z^3}\right) = \delta_3(k) = \delta(k-3)$$

$$= T_Z^{-1}(z^{-3})$$

## 2) Propriétés

page 15 à 16.

| |
|---|
| **Linéarité : Soient $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$, $TZ^{-1}(\alpha F+\beta G)=\alpha\, TZ^{-1}(F)+\beta\, TZ^{-1}(G)$** |
| **Retard de n : $TZ^{-1}(z^{-n}.F(z)) = f(kT_e-nT_e)$ où $f(kT_e)=TZ^{-1}(F(z))$** |
| **Etc…** |

$T_Z^{-1}(z^{-n}.F(z)) = f(k-n)$

Exemples On posera $T_e=1$

page 21 à 22. ASTUCE.

$T_Z(U(k)) = \frac{z}{z-1}$

$TZ^{-1}\left(\frac{1}{z-1}\right) = T_Z^{-1}\left(z^{-1} \frac{z}{z-1}\right) = U(k-1)$

Facteur retard de 1

$T_Z^{-1}\left(\frac{z}{z-3}\right) = 3^k \cdot U(k)$

retardé de 2.

$TZ^{-1}\left(\frac{1}{z(z-3)}\right) = T_Z^{-1}\left(z^{-1}z^{-1}\frac{z}{z-3}\right)$

$= T_Z^{-1}\left(z^{-2} \cdot \frac{z}{z-3}\right) = 3^{k-2} \cdot U(k-2)$

Facteur retard de 2.

$TZ^{-1}\left(\frac{z^2-z}{z^2-2z+4}\right) = \ldots$

**3)** Deux méthodes pour déterminer $TZ^{-1}(F)$ sur un exemple

On souhaite calculer $TZ^{-1}(F)$ où $TZ^{-1}\left(\frac{1}{(z-1).(z-2)}\right)$

- Méthode 1 On décompose F en somme d'éléments simples dans IR :

.........................................................................................................

.........................................................................................................

.........................................................................................................

.........................................................................................................

.........................................................................................................

.........................................................................................................

.........................................................................................................

.........................................................................................................

.........................................................................................................

.........................................................................................................

.........................................................................................................

.........................................................................................................

**3)** <u>Deux méthodes pour déterminer $TZ^{-1}(F)$ sur un exemple</u>

page 17 .

On souhaite calculer $TZ^{-1}(F)$ où $TZ^{-1}\left(\dfrac{1}{(z-1).(z-2)}\right)$

- <u>Méthode 1</u> On décompose F en somme d'éléments simples dans IR :

$$F(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{a}{z-1} + \frac{b}{z-2}$$

où $a = \left[\dfrac{1}{z-2}\right]_{z=1} = \dfrac{1}{1-2} = -1$

$b = \left[\dfrac{1}{z-1}\right]_{z=2} = \dfrac{1}{2-1} = 1$

retard de 1

$$F(z) = z^{-1}\,\frac{-1.z}{z-1} + z^{-1}\,\frac{1.z}{z-2}$$

$$f(k) = -U(k-1) + 2^{k-1}.U(k-1) = \left(2^{k-1} - 1\right).U(k-1)$$

<u>Remarque</u> : $f(0) = 0$ $f(1) = 0$ $f(2) = 1$ $f(3) = 3$

$f(4) = 7$ $f(5) = 15$ . . .

- Méthode 2 Par définition : $F(z) = TZ(f(k)) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k}$ . On écrit donc $F(z) = \dfrac{1}{(z-1).(z-2)}$ sous la forme $\sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k}$ , afin d'obtenir les valeurs de f(k). Pour cela on effectue la division suivant les puissances décroissantes de 1 par (z-1)(z-2).

- <u>Méthode 2</u> Par définition : $F(z) = TZ(f(k)) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k}$ . On écrit donc

$F(z) = \dfrac{1}{(z-1).(z-2)}$ sous la forme $\sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k}$ , afin d'obtenir les valeurs de f(k). Pour cela on effectue la <u>division suivant les puissances décroissantes</u> de 1 par (z-1)(z-2).

$$F(z) = Tz(f(k)) = \sum_{k=0}^{+\infty} f(k).z^{k} = \underbrace{f(0) + f(1).z^{-1} + f(2).z^{-2} + f(3)z^{-3} + \ldots\ldots}$$

$$\frac{A}{B} = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{BQ+R}{B} = \boxed{Q} + \frac{R}{B}$$

$$A = 1 \qquad z^2 - 3z + 2 = B$$

$$-\left(1 - 3z^{-1} + 2z^{-2}\right) \qquad 1z^{-2} + 3z^{-3} + 7z^{-4} \ldots\ldots = Q$$

$$1 = f(2) \qquad 3 = f(3) \qquad 7 = f(4)$$

$$3z^{-1} - 2z^{-2}$$

$$-\left(3z^{-1} - 9z^{-2} + 6z^{-3}\right)$$

$$7z^{-2} - 6z^{-3}$$

$$\vdots$$

$$R$$

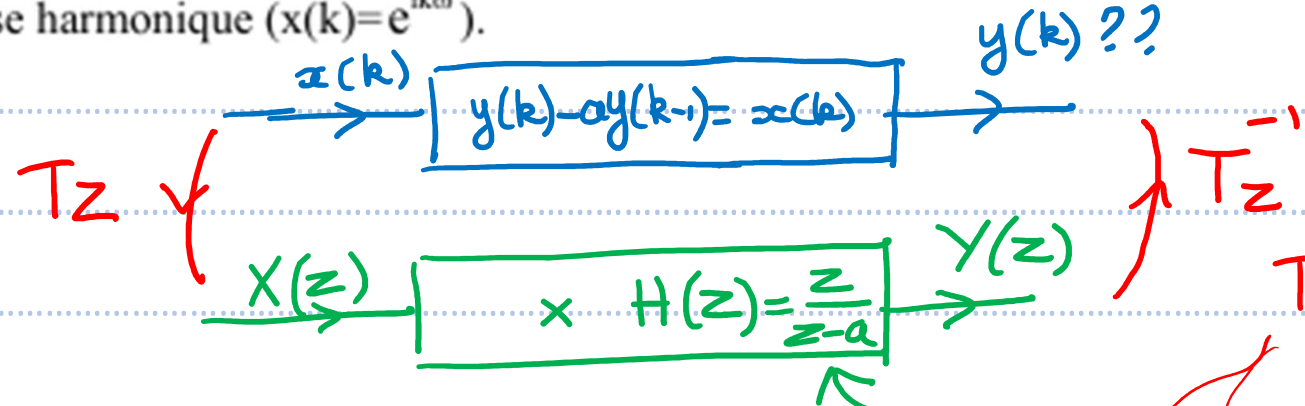
$$f(0) = f(1) = 0$$

Exercice 3 : Soit l'équation : $a \neq 1$ $\boxed{a \in \mathbb{R}}$ page 23

$$(E)\begin{cases} y(k) - ay(k-1) = x(k),\ k \geq 1 \\ y(0) = x(0). \end{cases}$$

1. On pose X(z)=TZ(x(k)) et Y(z)=TZ(y(k)), appliquer TZ à l'équation (E), puis en déduire la fonction de transfert $H(z) = \dfrac{Y(z)}{X(z)}$. $\Leftrightarrow Y(z) = H(z) \times X(z)$

2. Déterminer alors l'expression de la réponse impulsionnelle ($x=\delta$) ; de la réponse indicielle (x=U) ; de la réponse harmonique ($x(k)=e^{ik\omega}$).




$Tz(f(k-n)) = z^{-n}.F(z)$

1. Fonction de transfert : $Tz(y(k)) - aTz(y(k-1)) = Tz(x(k)) \Leftrightarrow Tz(E)$

$$Y(z) - a.z^{-1}.Y(z) = X(z)$$

$$\Leftrightarrow Y(z).(1 - az^{-1}) = X(z) \Leftrightarrow H(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} \times \frac{z}{z} = \frac{z}{z-a}$$

② Réponse impulsionnelle : Si $x(k) = \delta(k)$ Alors $X(z) = 1$

et $Y(z) = H(z) \cdot X(z) = \dfrac{z}{z-a}$

donc $y(k) = a^k$ est la réponse impulsionnelle.

③ Réponse indicielle : Si $x(k) = U(k)$ Alors $X(z) = \dfrac{z}{z-1}$.

et $Y(z) = H(z) \cdot X(z) = \dfrac{z^2}{(z-a)(z-1)}$

Méth 1 longue

DSES $Y(z) = \dfrac{z^2 = A}{(z-a)(z-1) = B}$

Y est irréductible et a une partie entière

car $\deg A = 2 = \deg B$

$$\begin{array}{c|l} A & B \\ \hline R & Q \end{array}$$

$Y = \dfrac{BQ + R}{B} = Q + \dfrac{R}{B}$

DSES

$z^{-1} \dfrac{b.z}{z-a} + z^{-1} \dfrac{c.z}{z-1} \xrightarrow{Tz^{-1}} b\, a^{k-1} U(k-1) + c\, U(k-1)$

Méth 2 courte

ASTUCE

$Y(z) = z \cdot \dfrac{z}{(z-a)(z-1)} = G(z) = \dfrac{b}{z-a} + \dfrac{c}{z-1}$

$$\boxed{\begin{array}{l} b = \left[G(z) \cdot (z-a)\right]_{z=a} \\ c = \left[G(z) \cdot (z-1)\right]_{z=1} \end{array}}$$

1er Cas si $a \neq 1$

$b = \dfrac{-a}{1-a}$ et $c = \dfrac{1}{1-a}$

$Y(z) = \dfrac{1}{1-a}\left(-a \cdot \dfrac{z}{z-a} + 1 \cdot \dfrac{z}{z-1}\right)$

$y(k) = \dfrac{1}{1-a}\left(-a \cdot a^k + 1\right)$ est la réponse indicielle.