OML2

Transformée de Laplace, TP2

Nicolas Boizot

April 27, 2026

Fonction de transfert

Instruction : tf(Num,Den)

Num et Den sont des vecteurs composés respectivement des coefficients du numérateur et du dénominateur.

Les coefficients de ces polynômes rangés par **ordre décroissant de la puissance des monômes correspondant**.

Ces informations sont disposées entre crochets et séparées par des espaces.

Exemple 1 :

$$F(s) = \frac{s+2}{3s^2+4s+5}$$

```
>> F=tf([1 2],[3 4 5])

F =
       s + 2
  ---------------
  3 s^2 + 4 s + 5
 Continuous-time transfer function.
```

Exemple 2 :

$$F(s) = \frac{s^2 + s + 1}{(s+1)(s+2)}$$

```
>>  F1 = tf([1 1 1],[1 1]); F2 = tf(1,[1 2]); F=F1*F2


F =
   s^2 + s + 1
  -------------
  s^2 + 3 s + 2
Continuous-time transfer function.
```

Possibilité de factoriser (instruction *zpk*) :

```
>> zpk(F)


ans =
  (s^2 + s + 1)
  -------------
   (s+2) (s+1)
Continuous-time zero/pole/gain model.
```

Exercice

Coder sous Matlab les fonctions de transferts suivantes:

- $F(s) = \frac{3(s+4)}{s^2+2s+1}$
- $F(s) = 10\frac{s^2+2s+1}{(s+2)(s+3)}$
- $F(s) = \frac{s+1}{s(s+2)(s+3)}$

Commande lsim

- TP2 - Réponse à une entrée quelconque (Fonction lsim)

Si on souhaite visualiser la réponse d'un système modélisé par une fonction de transfert F à une entrée quelconque, alors il convient:

- (cf. TP1) de définir le signal d'entrée. Pour cela :
  - on crée un vecteur **t** (ou *Base de temps*) où l'on range tous les instants où le signal d'entrée va être défini,
  - puis on crée un vecteur **u**, de même dimension que **t**, où l'on range les valeurs de l'entrée à chacun de ces instants.
- puis on évalue la sortie du système à ce signal d'entrée au moyen de l'instruction lsim:
  y=lsim(F,u,t);
- (cf. TP1) et il ne reste plus qu'à exécuter le tracé graphique.

Exemple :

On souhaite visualiser

- la réponse d'un système intégrateur pur ($\rightarrow \ F = \frac{1}{s}$)
- à une rampe de pente 2 ($\rightarrow \ u(t) = 2 * t$)
- appliquée depuis t = 0 s pendant 10 ($\rightarrow \ t$ ou base de temps).

```
t=0:0.1:10; % definition directe de la base de temps
u=2*t; % definition de la rampe d'entree
F=tf([1],[1 0]); % definition de la fonction de transfert
y=lsim(F,u,t); % simulation de la reponse
plot(t,y,'lineWidth',2) % trace graphique (couleur par defaut)
```

Exercice

Comme vous connaissez l'expression de l'intégrale de la rampe de pente 2, superposez le résultat du code à la dite intégrale sur le même graphe.

La **réponse impulsionnelle** d'un processus est le signal de sortie qui est obtenu lorsque l'entrée est une impulsion (de Dirac).

Exercice

Reprendre l'exemple précédent et simulez la réponse impulsonnielle.

- TP2 - Réponse Indicielle -

La **réponse indicielle** d'un processus est le signal de sortie qui est obtenu lorsque l'entrée est un échelon d'amplitude quelconque.
Unitaire : l'échelon est d'amplitude 1.

Exercice

Reprendre l'exemple précédent et simulez la réponse indicielle d'amplitude 3.

- TP2 - Réponse à un sinus -

Exercice

Reprendre l'exemple précédent et simuler la réponse à une entrée sinusoïdale

- de fréquence 0.5 Hz;
- d'amplitude 2.

On supposera que les deux signaux sont dans la même unité physique, il y aura du sens à représenter signal d'entrée et signal de sortie dans le même graphe.

Systèmes du premier ordre

$$F(s) = \frac{b_1 s + b_0}{a_1 s + a_0}$$

Forme canonique : on utilise ce terme pour nommer une *façon d'écrire* la fonction de transfert de sorte à ce que les coefficients *nous renseignent sur le comportement dynamique* du système qu'elle décrit.

$F(s) = \frac{K}{1+\tau s}$ avec $\tau > 0$

- K - gain statique (ou coefficient multiplicateur statique)

- τ - constante de temps

Graphe → Réponse indicielle d'un système du premier ordre à un échelon d'amplitude $\mathcal{A}$:

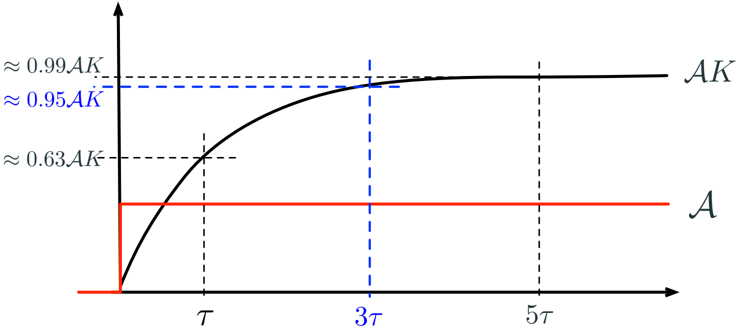


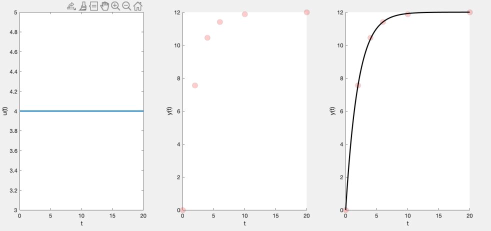
Tableau récapitulatif de l'évolution de la sortie:

t	τ	2τ	3τ	5τ	∞
$\frac{y(t)}{\mathcal{A}K}(\%)$	63	87	95	99	100

Exercice

Simulez la réponse indicielle d'amplitude 4 d'un système du premier ordre défini par $K = 3$ et $\tau = 2$, on prendra $t \in [0, 20]$.
Le résultat sera présenté dans trois fenêtres graphiques placées côte à côte.

- **Fenêtre 1 -** graphe du le signal d'entrée;
- **Fenêtre 2 -** points d'intérêts de la réponse aux temps 0, *tau*, 2*tau*, 3*tau*, 5*tau* et 10*tau* (qui fera office de point à l'infini).
- **Fenêtre 3 -** idem fenêtre 2 ainsi que le graphique de la sortie $y(t)$ (obtenu avec la commande *lsim*).



Systèmes du second ordre

$$F(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{a_1 s^2 + a_1 s + a_0}$$

Forme canonique :

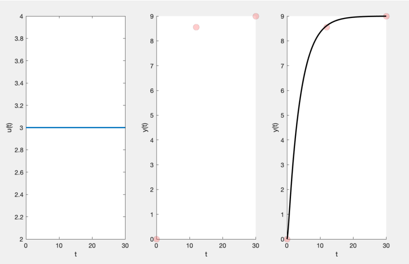
$$F(s) = \frac{K\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$$

- K - gain statique (ou coefficient multiplicateur statique)
- ζ - Coefficient d'amortissement
- $\omega_0 > 0$ - est la pulsation propre non amortie du système

La forme de la réponse indicielle, c'est à dire le comportement du système, **dépend qualitativement de la valeur de** ζ.

Régime apériodique : $\zeta > 1$

- En t = 0, la courbe admet une **tangente horizontale**.
- La courbe (monotone) ne dépasse pas son asymptote horizontale ($\mathcal{A}K$) où $\mathcal{A}$ est l'amplitude du signal entrée.
- Il n'y a pas de formule pour déterminer le temps de réponse à 5%.
- Nous pouvons remarquer cependant que le système ressemble à un système du premier ordre lorsqu'on s'éloigne de t = 0.
- Le temps de réponse à 5% peut être approché par la valeur $t_r \approx 3 \times \frac{2\zeta}{\omega_0}$.



- TP2 - Systèmes du second ordre
Régime apériodique : $\zeta > 1$

Exercice

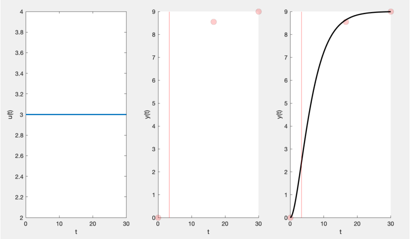
Simulez la réponse indicielle d'amplitude 3 d'un système du second ordre défini par $K = 3$ et $\zeta = 2$, $\omega_0 = 1$, on prendra $t \in [0, 30]$.
Le résultat sera présenté dans trois fenêtres graphiques placées côte à côte.

- **Fenêtre 1 -** graphe du le signal d'entrée;
- **Fenêtre 2 -** points d'intérêts de la réponse aux temps 0, $6\frac{\zeta}{\omega_0}$, 30 (qui fera office de point à l'infini).
- **Fenêtre 3 -** idem fenêtre 2 ainsi que le graphique de la sortie $y(t)$ (obtenu avec la commande *lsim*).

En faisant varier la valeur de $\zeta > 1$ vérifier dans quelle mesure l'approximation du temps de réponse à 5% est fiable.

- TP2 - Systèmes du second ordre
Régime apériodique : $\zeta = 1$

- En t = 0, la courbe admet une **tangente horizontale**.
- La courbe (monotone) ne dépasse pas son asymptote horizontale ($\mathcal{A}K$) où $\mathcal{A}$ est l'amplitude du signal entrée.
- Il n'y a pas de formule pour déterminer le temps de réponse à 5%.
- Le temps de réponse à 5% peut être approché par une valeur légèrement plus petite $t_r \approx \frac{5}{\omega_0}$.
- Abscisse du point d'inflexion : $\frac{1}{\omega_0}$.



Régime apériodique : $\zeta = 1$

Exercice

Simulez la réponse indicielle d'amplitude 3 d'un système du second ordre défini par $K = 3$ et $\zeta = 1$, $\omega_0 = 0.3$, on prendra $t \in [0, 30]$.
Le résultat sera présenté dans trois fenêtres graphiques placées côte à côte.

- **Fenêtre 1 -** graphe du le signal d'entrée;
- **Fenêtre 2 -** points d'intérêts de la réponse aux temps 0, $5\frac{\zeta}{\omega_0}$, 30 (qui fera office de point à l'infini), verticale (commande *xline*) au point d'inflexion;
- **Fenêtre 3 -** idem fenêtre 2 ainsi que le graphique de la sortie $y(t)$ (obtenu avec la commande *lsim*).

- TP2 - Systèmes du second ordre
Régime oscillatoire amorti : $\zeta < 1$

- En t = 0, la courbe admet une **tangente horizontale**.
- La courbe dépasse pas son asymptote horizontale $(\mathcal{A}K)$ où $\mathcal{A}$ est l'amplitude du signal entrée.
- $T_p = \frac{2\pi}{\omega_p}$ est la pseudo-période de la réponse oscillatoire amortie.
- $\omega_p = \omega_0\sqrt{1-\zeta^2}$ est la pulsation de la réponse oscillatoire amortie.
- Temps du premier dépassement : $\frac{T_p}{2}$
- Dépassement (en % de $\mathcal{A}K$) :

$$D_n = \exp\left(\frac{-n\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)$$

- Référence souvent utilisée : $\zeta = 0.7$ correspond à $D_1 \approx 5\%$.

- TP2 - Systèmes du second ordre
Régime oscillatoire amorti : $\zeta < 1$

Exercice

Simulez la réponse indicielle d'amplitude 3 d'un système du second ordre défini par $K = 3$ et $\zeta = 0.3$, $\omega_0 = 0.3$, on prendra $t \in [0, 80]$.
Le résultat sera présenté dans deux fenêtres graphiques placées côte à côte.

- **Fenêtre 1** - points d'intérêts de la réponse aux temps 0, $\frac{Tp}{2}$, Tp, $\frac{3Tp}{2}$ et 80 (qui fera office de point à l'infini).
- **Fenêtre 2** - idem fenêtre 2 ainsi que le graphique de la sortie $y(t)$ (obtenu avec la commande *lsim*).

Vérifiez que $D_1 \approx 5\%$ lorsque $\zeta = 0.7$.

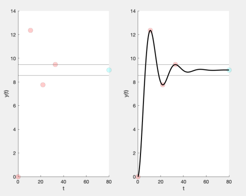


Diagramme de Bode

- TP2 -C'est quoi un diagramme de Bode

Le diagramme de bode est un outil graphique pour l'analyse fréquentielle de la fonction de transfert de notre système. Ce diagramme est composé de deux graphiques:

- un pour l'évolution de l'amplitude de la fonction de transfert en fonction de la fréquence du signal d'entrée.
- un pour l'évolution de la phase de la fonction de transfert en fonction de la fréquence du signal d'entrée.

Pour tracer ce diagramme on utilise la commande *Bode (Fonction de transfert).*

Syntaxe

Syntaxe :

```
F = .. % fonction de transfert definie avec la commande tf
WMIN = .. % pulsation min (en rad/sec)
WMAX = .. % pulsation max (en rad/sec)
bode(F,{WMIN,WMAX})
```

Exemple

Exemple :

```
clc, clear all, close all
% FILTRE 1
K = 1; % Coefficient d'amplification
tau = 0.5; %Constante de temps
F1 = tf([K],[tau,1]) % Filtre 1 (ordre 1)
% FILTRE 2
% on garde la meme valeur pour K
w_0 = 1; % rad/s
zeta = 0.6; % Coefficient d'amortissement
F2 = tf(w_0^2*K,[1,2*zeta*w_0,w_0^2]);
WMIN = 1/tau/100 % pulsation min = 100 fois mois que 1/tau
WMAX = 100/tau % pulsation max = 100 fois plus que 1/tau
hold on
bode(F1,{WMIN,WMAX},'r')
bode(F2,{WMIN,WMAX},'b')
hold off
legend('Ordre 1','Ordre 2')
```

Simulation d’un moteur CC

Simulation moteur CC

Exercice

- simuler une PWM
- passer la PWM par un filtre passe-bas ==> comparer la valeur asymptotique de la sortie à l'amplitude moyenne sur une période
- simuler le moteur CC en appliquant en entrée un échelon d'amplitude choisie
- simuler le moteur CC en appliquant en entrée une PWM équivalente
- comparer