Corrigé Exercice 1 page 29
1APP

Exercice 1

Page 29 chapitre 5

1) Ecrire les identités remarquables de la forme développée à la forme factorisée (produit de polynômes de degré 1).
2) Ecrire sous forme factorisée (factoriser) les polynômes suivants :
   $P(x) = x^2 - 9$; $P(x) = x^2 + 9$; $P(x) = 4x^2 - 25$; $P(x) = 9x^2 - 6x + 1$;
   $P(x) = (x+1)^2 - 16$; $P(x) = 3(x-2)^2 + 5$
   $P(x) = x^4 - 5x^2 + 4$
3) Factoriser les polynômes suivants :
   a) $x^2 + 10x + 21$ *b)* $6x^2 + x - 1$ *c)* $x^3 + x^2 - 6x$
   d) $x^3 - x^2 - x + 1$ *e)* $(x^2 - 1)^2$ *f)* $x^4 + 3x^2 + 2$.

factorisation .

1) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$(a+jb)(a-jb) = a^2+b^2$

2) $P(x) = x^2 - 9 \iff P(x) = (x+3)(x-3)$ est factorisé dans R et C les racines : -3 et 3.

$P(x) = x^2 + 9 \iff P(x) = (x+3j)(x-3j)$ " dans C " $3j$ et $-3j$

$P(x) = 9x^2 - 6x + 1 \iff P(x) = (3x-1)^2$ est factorisé dans R et C $\frac{1}{3}$ est racine double.

$P(x) = 4x^2 - 25 \iff P(x) = (2x+5)(2x-5)$ est factorisé dans IR et C. $-5/2$ et $5/2$ racines simple

$P(x) = (x+1)^2 - 16 \iff P(x) = ((x+1)+4)((x+1)-4)$

$= (x+5)(x-3)$ est factorisé dans IR et C -5 et 3 sont racines.

Méthode 1

Page 29 chapitre 5

$\circ\ P(x) = 3(x-2)^2 + 5 = 3\left((x-2)^2 + \frac{5}{3}\right)$

$(x-2)^2 + \frac{5}{3} = 0$

$(x-2)^2 = -\frac{5}{3} = \left(j\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^2 \iff x-2 = \pm j\sqrt{\frac{5}{3}}$

$\iff x_{1,2} = 2 \pm j\sqrt{\frac{5}{3}}$

donc $P(x) = 3\left(x - \left(2 + i\sqrt{\frac{5}{3}}\right)\right)\left(x - \left(2 - i\sqrt{\frac{5}{3}}\right)\right)$ $x = 2 \pm i\sqrt{\frac{5}{3}}$

Méthode 2

$\circ\ 3(x-2)^2 + 5 = 3\left[\underbrace{(x-2)^2}_{(x-2)^2} + \underbrace{\frac{5}{3}}_{\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^2}\right]$

$= 3\left[\left(x - 2 - i\sqrt{\frac{5}{3}}\right)\left(x - 2 + i\sqrt{\frac{5}{3}}\right)\right]$ est factorisé dans $\mathbb{C}$.

$A^2 + B^2 = (A + jB)(A - jB)$

$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$

$X^2 = 9 \iff X = \pm 3.$

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

7) $P(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ est bicarré

On pose $X = x^2$ donc $X^2 - 5X + 4$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 4$

$= 9 > 0$ donc 2 racines

$X_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 - \sqrt{9}}{2} = 1$

$X_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 + \sqrt{9}}{2} = 4$ donc $X^2 - 5X + 4 = (X-1)(X-4)$

Retour à x :

$(x^2-1)(x^2-4)$ $\quad (x^2-1) = (x-1)(x+1)$

$(x^2-4) = (x-2)(x+2)$

donc $P(x) = (x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$ est factorisé dans R et C

1 ; −1 ; 2 ; −2 sont des racines simples.

3) Factoriser les polynômes suivants :

$\overbrace{x^3+x^2-6x}^{x(x^2+x-6)}$

a) $x^2+10x+21$ b) $6x^2+x-1$ c) x^3+x^2-6x

d) x^3-x^2-x+1 e) $(x^2-1)^2$ f) x^4+3x^2+2.

Page 29 chapitre 5

a) $P(x) = x^2+10x+21$ $a=1$ $b=10$ $c=21$

$P(x) = ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$ où $P(x_1) = P(x_2) = 0$.

$\Delta = b^2-4ac = 16$ $\qquad x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-10+4}{2} = -3$

$100-84$

$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = -7$.

$P(x) = (x+3)(x+7)$ est factorisé dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

b) $P(x) = 6x^2+x-1$ $a=6$ $b=1$ $c=-1$

$\Delta = b^2-4ac = 25$ $\qquad x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-5}{12} = -\frac{1}{2}$

$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+5}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

$P(x) = 6\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)$ est factorisé dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

Page 29 chapitre 5

c) $P(x) = x^3 + x^2 - 6x = x\,(\underbrace{x^2 + x - 6})$

$P(x) = x\,(x-2).(x+3)$ est factorisé dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

$x=2$: $2^2 + 2 - 6 = 0$

$x=-3$ $(-3)^2 - 3 - 6 = 9 - 9 = 0$

d) $P(x) = x^3 - x^2 - x + 1$

$P(1) = 1 - 1 - 1 + 1 = 0$ donc P est divisible par $x-1$.

$$
\begin{array}{r|l}
A = P(x) = x^3 - x^2 - x + 1 & x - 1 = B \\ \hline
-(x^3 - x^2) \qquad\qquad & x^2 - 1 = Q \\ \cline{1-1}
-x + 1 & \\
-(-x+1) & \\ \cline{1-1}
R = 0 &
\end{array}
$$

$\boxed{A = BQ + R}$

$P(x) = (x-1)(x^2-1)$

$= (x-1)(x+1)(x-1)$

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

$P(x) = (x-1)^2(x+1)$ est factorisé dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

e) $P(x) = (x^2 - 1)^2 = \left((x-1)\cdot(x+1)\right)^2 = (x-1)^2(x+1)^2$ est factorisé dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

Page 29 chapitre 5

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ $\qquad (ab)^2 = a^2b^2$ $\qquad$ 1 et -1 sont des racines doubles.

f) $P(x) = x^4 + 3x^2 + 2$ est bicarré

On pose $X = x^2$ et on résout : $X^2 + 3X + 2 = 0$.

$(X+2)(X+1)$

$(-2)^2 + 3(-2) + 2$

$4 - 6 + 2 = 0$

$(-1)^2 + 3(-1) + 2$

$1 - 3 + 2 = 0$.

$P(x) = (x^2+2)(x^2+1)$

$a^2 + b^2 = (a+jb)(a-jb)$ $\qquad P(x) = (x+j\sqrt{2})(x-j\sqrt{2})(x+j)(x-j)$ est la factorisation de P dans $\mathbb{C}$

La factorisation de P dans $\mathbb{R}$ est donc : $P(x) = (x^2+2)(x^2+1)$