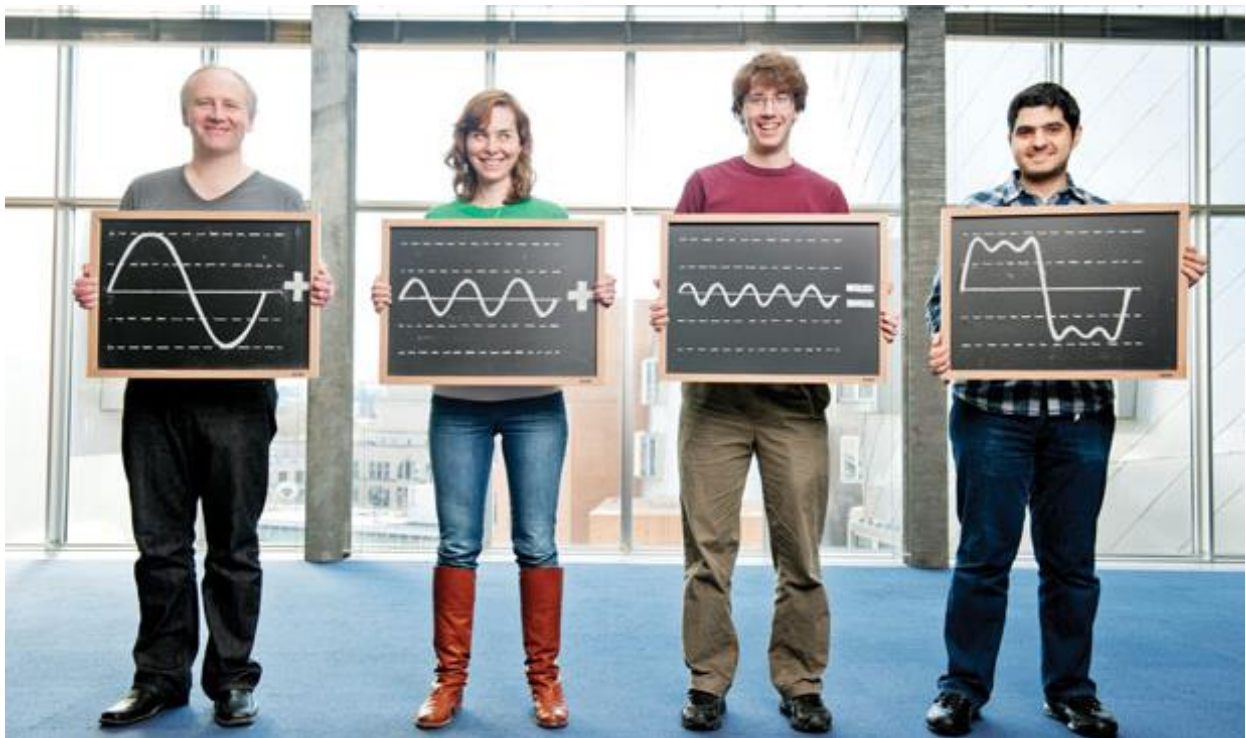


**BACHELOR UNIVERSITAIRE DE TECHNOLOGIE**

**Ressource R2-04 : OUTILS MATHEMATIQUES ET LOGICIELS**

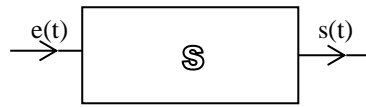
**Chapitre 9 : Initiation aux séries de Fourier**



**Enseignante : Sylvia Le Beux**  
[Sylvia.lebeux@univ-tln.fr](mailto:Sylvia.lebeux@univ-tln.fr)



Introduction : Soit S un système électrique linéaire (RC, RLC...) schématisé ci-dessous par :



Dans un tel circuit, un signal d'entrée  $e(t)$  engendre un signal de sortie  $s(t)$ , appelé aussi réponse du circuit au signal  $e(t)$ , et ces deux signaux sont reliés par une équation différentielle linéaire à coefficients constants (programme du GEII) : (les coefficients  $a_i$  et  $b_i$  sont des constantes).

$$a_n s^{(n)}(t) + a_{n-1} s^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 s'(t) + a_0 s(t) = b_n e^{(n)}(t) + \dots + b_1 e'(t) + b_0 e(t)$$

Ainsi, si le signal d'entrée est une somme finie ou non de signaux :  $e(t) = e_1(t) + e_2(t) + \dots + e_n(t)$ , alors la réponse est de la même forme :  $s(t) = s_1(t) + s_2(t) + \dots + s_n(t)$  où chaque signal  $s_i$  est la réponse du circuit au signal  $e_i$  avec  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

Lorsque le signal d'entrée est une fonction constante ou encore une fonction sinusoïdale, il est assez facile d'obtenir mathématiquement le signal de sortie et de l'analyser, puisqu'il s'agit également respectivement d'une constante ou d'une sinusoïde. Que faire alors lorsque le signal d'entrée n'est pas sinusoïdal, mais, quand même périodique ? C'est le baron Joseph Fourier (1768 – 1837), qui a résolu ce problème en montrant que l'on peut décomposer un signal périodique en somme d'une constante et de fonctions sinusoïdales.

Dans ce chapitre nous allons déterminer à quelles conditions on peut écrire un signal

T-périodique sous la forme :  $e(t) = \sum_{p=0}^{+\infty} (a_p \cdot \cos(p\omega t) + b_p \cdot \sin(p\omega t))$  où  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ .

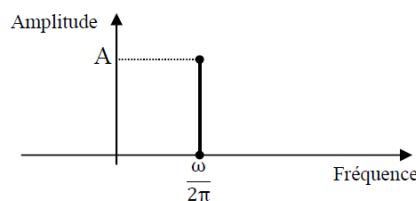
Lorsque c'est le cas, on dit que le signal  $e$  est décomposable en série de Fourier. Nous pourrons alors représenter le spectre de  $e$ .

**Rappel R1.04 :**

Spectre de signaux sinusoïdaux

Le **spectre** d'un signal est la **représentation des amplitudes** des différentes composantes présentes dans le signal **en fonction de la fréquence**.

Spectre du signal sinusoïdal  $x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$  (et donc aussi du signal  $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$ )

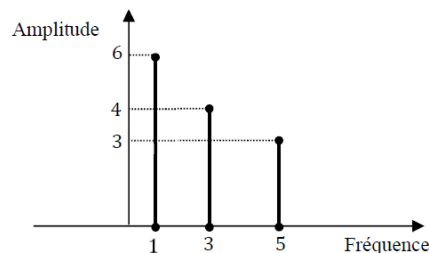
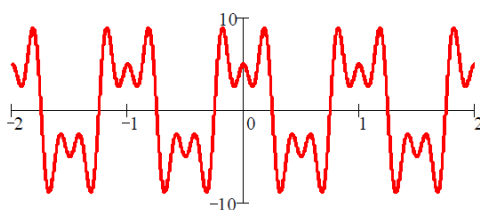


Le spectre d'une somme de sinusoïdes est la somme de leurs spectres.

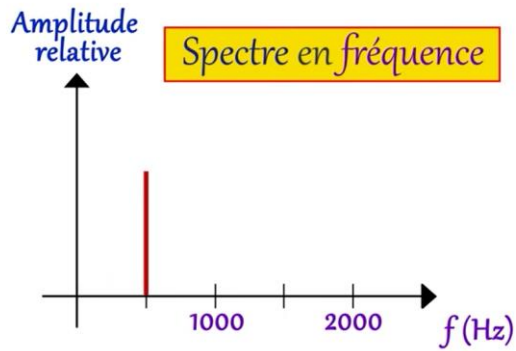
Spectre du signal périodique  $x(t) = 3\cos(10\pi t) + 6\sin(2\pi t + \frac{\pi}{2}) - 4\cos(6\pi t)$

(Remarque :  $\sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) = \cos(\alpha)$ )

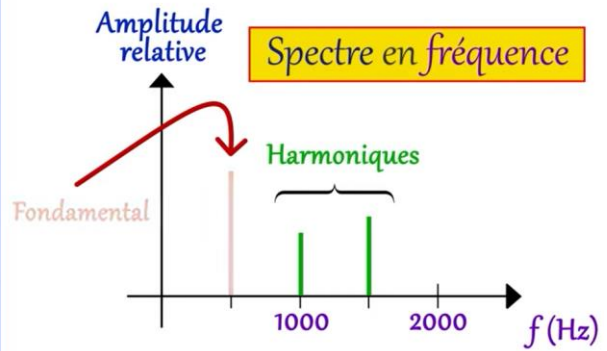
Représentation temporelle



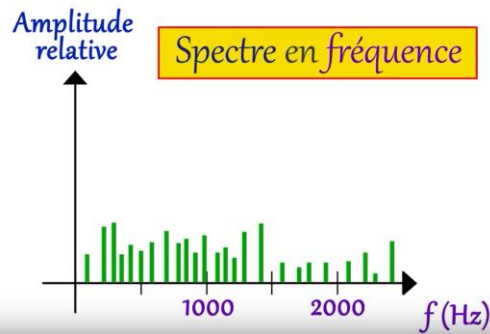
# Caractériser un son



Son pur



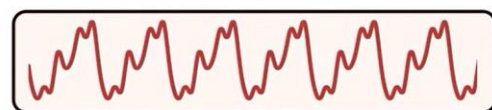
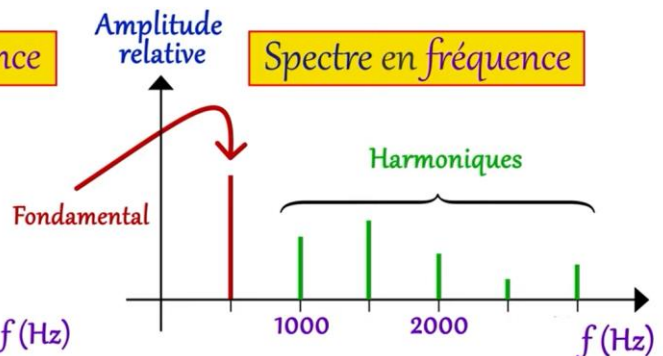
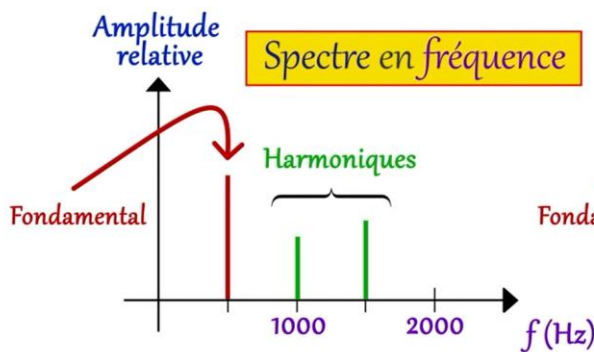
Son composé



Bruit



# Timbre



## I. Développement d'une fonction périodique en série de Fourier

### 1) Définitions

Soit  $x$  une fonction de période  $T$ , intégrable sur tout intervalle  $[t_0, t_0+T]$ .

On appelle série de Fourier réelle de  $x$  la série suivante :

$a_0 + \sum_{p=1}^{+\infty} (a_p \cdot \cos(p\omega t) + b_p \cdot \sin(p\omega t))$ , où les suites réelles  $(a_p)_p$  et  $(b_p)_p$  sont définies de la

façon suivante :

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cdot dt \quad ; \quad a_p = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cdot \cos(p\omega t) \cdot dt \quad ; \quad b_p = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cdot \sin(p\omega t) \cdot dt \quad \text{pour } p \geq 1,$$

$$\text{avec } \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

$a_0$  est la valeur moyenne du signal  $x$ .

L'harmonique de rang  $p$  est le signal :  $H_p(t) = a_p \cdot \cos(p\omega t) + b_p \cdot \sin(p\omega t)$

Le fondamental est l'harmonique de rang 1 :  $H_1(t) = a_1 \cdot \cos(\omega t) + b_1 \cdot \sin(\omega t)$

### 2) Rappels du chapitre 6 :

Soit  $f$ , une fonction  $T$ -périodique, intégrable sur tout intervalle de longueur  $T$  :  $[a, a+T]$ .

On a alors :

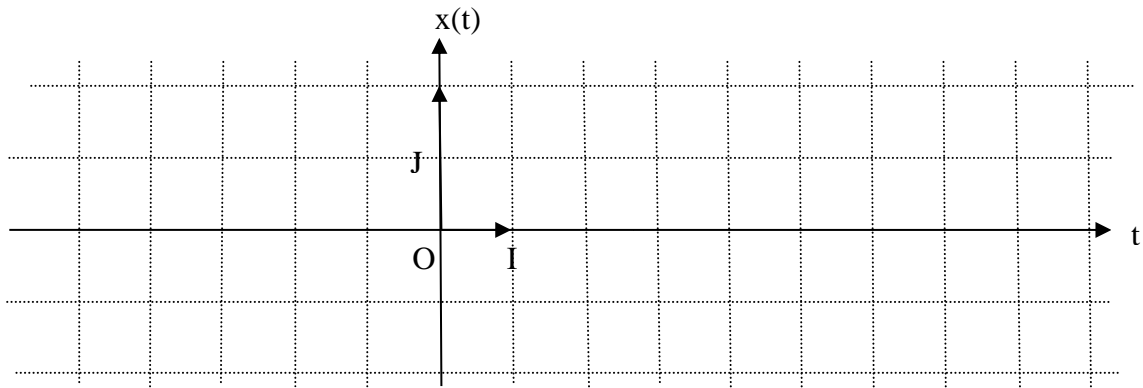
$$\int_a^{a+T} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt$$

On peut donc calculer les intégrales définissant les coefficients de Fourier sur n'importe quel intervalle de longueur  $T$ .

- Si  $f$  est une fonction paire et intégrable sur  $[-a, a]$ , alors :  $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \cdot \int_0^a f(x) dx$ .
- Si  $f$  est une fonction impaire et intégrable sur  $[-a, a]$ , alors :  $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$ .

## II. Série de Fourier et analyse spectrale d'un signal carré

Soit  $x$ , la fonction de période  $2\pi$ , définie par :  $x(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } t \in [0; \pi[ \\ -1 & \text{pour } t \in [\pi; 2\pi[ \end{cases}$



1) Représenter graphiquement le signal  $x$ , puis déterminer ses coefficients de Fourier :

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



2) Ecrire la série de Fourier du signal x :

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**La série de Fourier d'un signal pair est en cosinus :  $a_0 + \sum_{p=1}^{+\infty} a_p \cdot \cos(p\omega t)$**

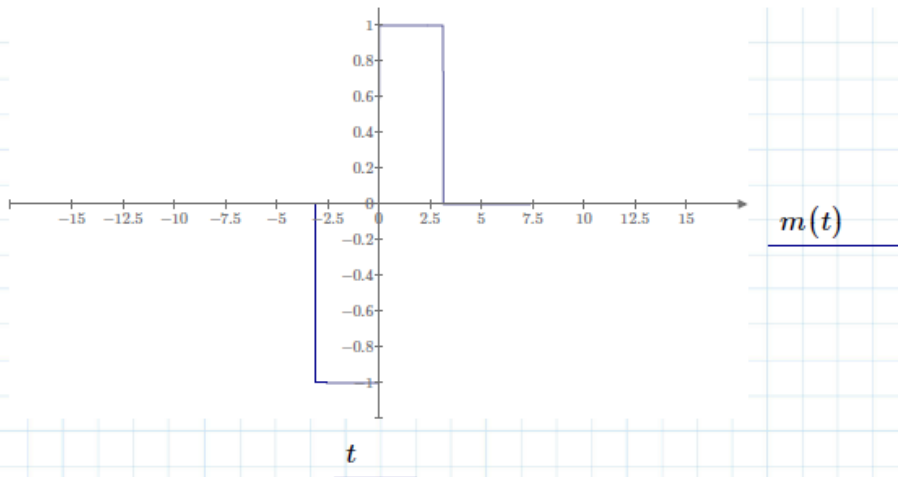
**La série de Fourier d'un signal impair est en sinus :  $\sum_{p=1}^{+\infty} b_p \cdot \sin(p\omega t)$**

3) A l'aide d'un logiciel de calcul formel (ici Mathcad)

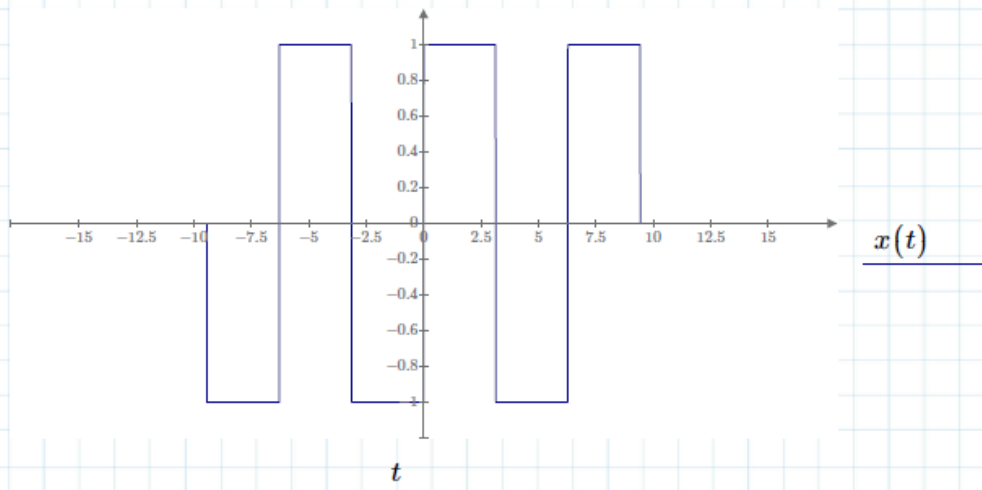
- Définir et représenter le signal x sur l'intervalle  $[-2\pi; 2\pi[$  . Pour cela on introduira m, la formule du motif de x :  $m(t) := \begin{cases} 1 & \text{pour } t \in [0; \pi[ \\ -1 & \text{pour } t \in [-\pi; 0[ \end{cases}$ , puis f, la fonction somme des motifs : m, m avancé de  $2\pi$ , et m retardé de  $2\pi$ .
- Définir les coefficients de Fourier de x.
- Définir et représenter dans un même repère sur le même intervalle que précédemment la valeur moyenne, le fondamental et les harmoniques de rang 2 à 5.
- Définir la somme de rang n de la série de Fourier de x.
- Représenter sur l'intervalle  $[-2\pi; 2\pi[$  et dans un même repère, le signal x et son développement en série de Fourier à l'ordre n pour  $n = 1, 3$  et 5, puis commenter.

$$m(t) := \begin{cases} 0 & \text{if } t < -\pi \\ -1 & \text{if } -\pi \leq t < 0 \\ 1 & \text{if } 0 \leq t < \pi \\ 0 & \text{if } t \geq \pi \end{cases}$$

$t := -4 \cdot \pi, -4 \cdot \pi + 0.01 \dots 4 \cdot \pi$



$$x(t) := m(t + 2 \cdot \pi) + m(t) + m(t - 2 \cdot \pi)$$



Coefficients de Fourier de x

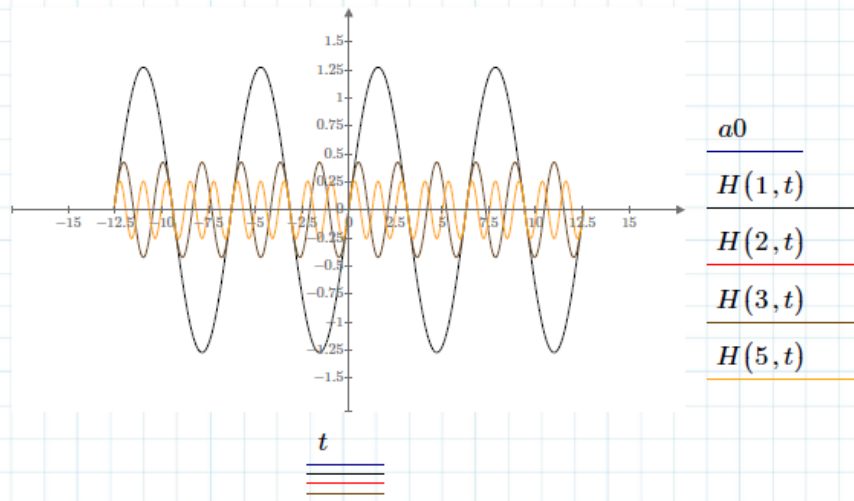
$$T := 2 \cdot \pi \quad \omega := 2 \cdot \frac{\pi}{T} \quad t_0 := 0$$

$$a_0 := \frac{1}{T} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) dt \quad a(n) := \frac{2}{T} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cdot \cos(n \cdot \omega \cdot t) dt$$

$$b(n) := \frac{2}{T} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cdot \sin(n \cdot \omega \cdot t) dt$$

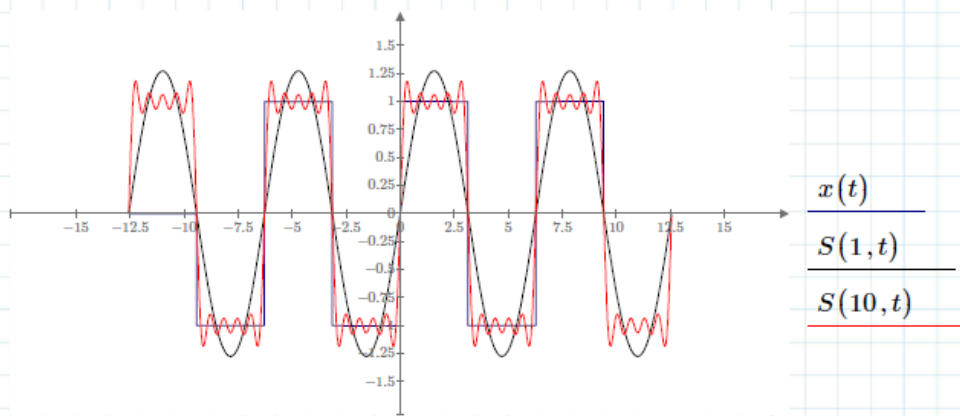
Valeur moyenne, fondamental, harmonique

$$H(n, t) := a(n) \cdot \cos(n \cdot \omega \cdot t) + b(n) \cdot \sin(n \cdot \omega \cdot t)$$



Série de Fourier de rang N

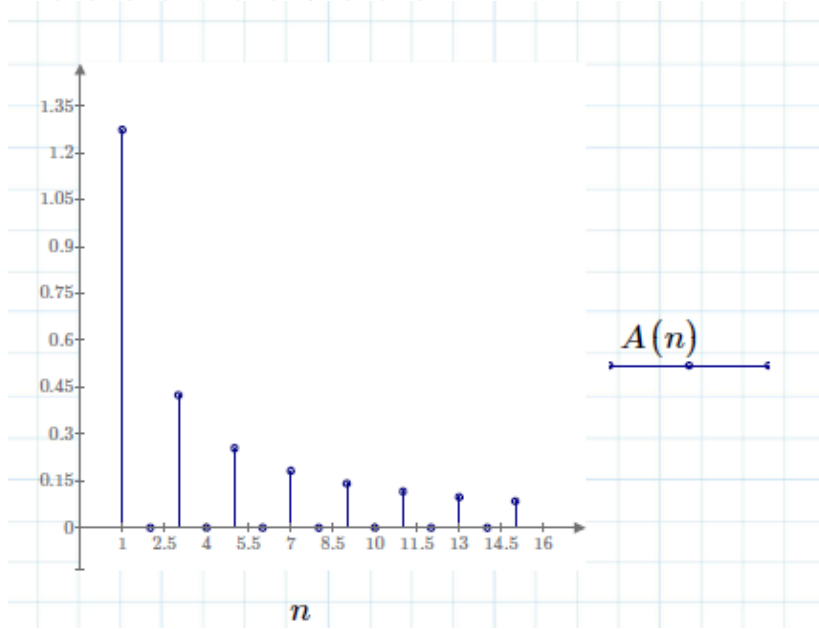
$$S(N, t) := a_0 + \sum_{n=1}^N H(n, t)$$



Spectre d'amplitude de x

$$A(n) := \sqrt{a(n)^2 + b(n)^2}$$

$$n := 1, 2, \dots, 15$$



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4) Théorème de Dirichlet et définition d'une fonction développable en série de Fourier

Soit  $x$  un signal de période  $T$ , intégrable sur tout intervalle  $[\alpha, \alpha + T]$ .

- Si  $x$  est continue sur  $[\alpha, \alpha + T]$ , sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle admet une limite finie à gauche et à droite.
- $x$  est dérivable sur  $[\alpha, \alpha + T]$ , sauf éventuellement en un nombre fini de points où sa dérivée admet une limite finie à gauche et à droite.

Alors la série de Fourier de  $x$  converge en tout point  $t$  et sa fonction somme est alors :

$$a_0 + \sum_{p=1}^{+\infty} (a_p \cdot \cos(p\omega t) + b_p \cdot \sin(p\omega t)) = \begin{cases} x(t) & \text{pour } t \text{ où } x \text{ est continue} \\ \frac{x(t_+) + x(t_-)}{2} & \text{pour } t \text{ où } x \text{ est discontinue} \end{cases}$$

On dit alors que  $x$  est développable en série de Fourier.

Vocabulaire Toute fonction vérifiant les hypothèses du théorème de Dirichlet sont dites de classe  $C^1$  par morceaux sur l'ensemble des réels.

Exemple Appliquer le théorème de Dirichlet au signal rectangle du TP page 7

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

5) Spectre d'un signal périodique

**Le terme général  $a_p \cdot \cos(p\omega t) + b_p \cdot \sin(p\omega t)$  peut aussi s'écrire  $A_p \cos(p\omega t + \phi_p)$**

**où :  $A_p = |a_p - ib_p| = \sqrt{a_p^2 + b_p^2}$  et  $\phi_p = \arg(a_p - ib_p)$ . ( $p \neq 0$ )**

**$A_p$  est l'amplitude de l'harmonique de rang  $p$**

**$\phi_p$  est la phase de l'harmonique de rang  $p$ .**

**Une autre écriture du développement en série de Fourier d'un signal périodique  $f$  est donc :**

$$A_0 + \sum_{p=1}^{\infty} A_p \cos(p\omega t + \phi_p), \text{ avec } A_0 = a_0.$$

**L'ensemble des amplitudes  $A_p$  forme le spectre d'amplitude unilatéral du signal  $x$ , ou spectre de raies (il s'agit d'un spectre discret). Il est représenté par un diagramme en bâtons obtenu en représentant les amplitudes  $A_p$  en fonction de  $p/T$ .  $A_p$  devient négligeable à partir d'un certain rang.**

Exemple Après avoir déterminé la suite des amplitudes, tracer le spectre d'amplitude unilatéral du signal carré du TP page 7

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

### III. Exercices

#### Exercice 1

Soit  $x$ , le signal 4-périodique, pair, et défini par :  $x(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } t \in [0;1[ \\ -2 & \text{pour } t \in [1;2[ \end{cases}$

- 1) Représenter  $x$  sur l'intervalle  $[-4,4]$ .
- 2) Calculer les coefficients de Fourier de  $x$ .
- 3) Ecrire la série de Fourier de  $x$ .
- 4) Appliquer le théorème de Dirichlet afin de déterminer la somme de cette série.
- 5) Tracer le spectre d'amplitude.

#### Exercice 2

Soit  $x$ , le signal  $5\pi$ -périodique, défini par :  $x(t) = \begin{cases} 3 & \text{pour } t \in [0;3\pi[ \\ 1 & \text{pour } t \in [3\pi;5\pi[ \end{cases}$

- 1) Représenter  $x$  sur l'intervalle  $[-5\pi, 5\pi]$ .
- 2) Calculer les coefficients de Fourier de  $x$ .
- 3) Ecrire la série de Fourier de  $x$ .
- 4) Appliquer le théorème de Dirichlet afin de déterminer la somme de cette série.
- 5) Tracer le spectre d'amplitude.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



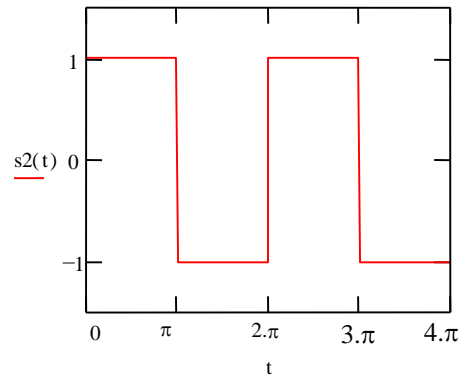
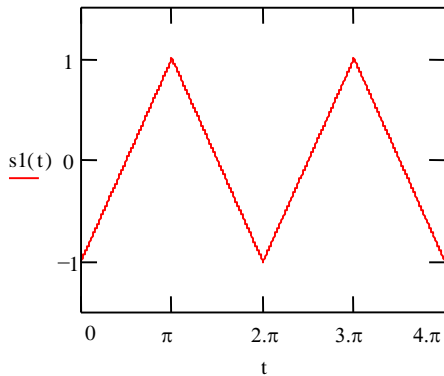


**IV. Pour aller plus loin...**

**1. Décomposition en série de Fourier de quelques signaux**

On souhaite décomposer en série de Fourier les signaux suivants :

- signal triangulaire symétrique  $s_1(t)$
- signal carré symétrique  $s_2(t)$

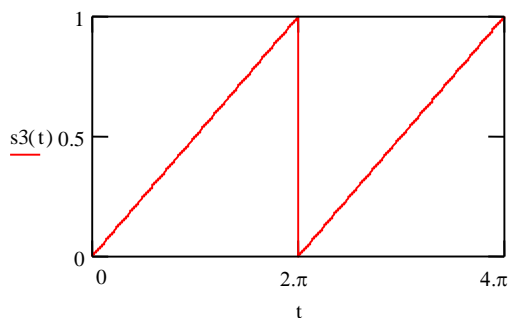


On pourra utiliser un logiciel de calcul formel pour vérifier graphiquement les séries de Fourier. On procédera alors de la façon suivante :

- a. Définir et représenter graphiquement la fonction à étudier sur une période.
- b. Définir les coefficients de Fourier (on écrira les formules générales, de façon à ce qu'elles puissent être reprises pour les deux signaux.)
- c. Définir le développement en série de Fourier à l'ordre  $n$ .
- d. Représenter sur un même graphe la fonction à étudier et son développement en série de Fourier à l'ordre  $n$  pour  $n = 1, 3$  et  $5$ .
- e. Visualiser les harmoniques de rang 1, 3 et 5.

**2. Tracé d'un spectre de fréquence**

Après avoir exprimé les coefficients de Fourier  $A_n$ , tracer le spectre en fréquence du signal rampe  $s_3$  ci-dessous jusqu'au rang 15.



.....

.....

.....





