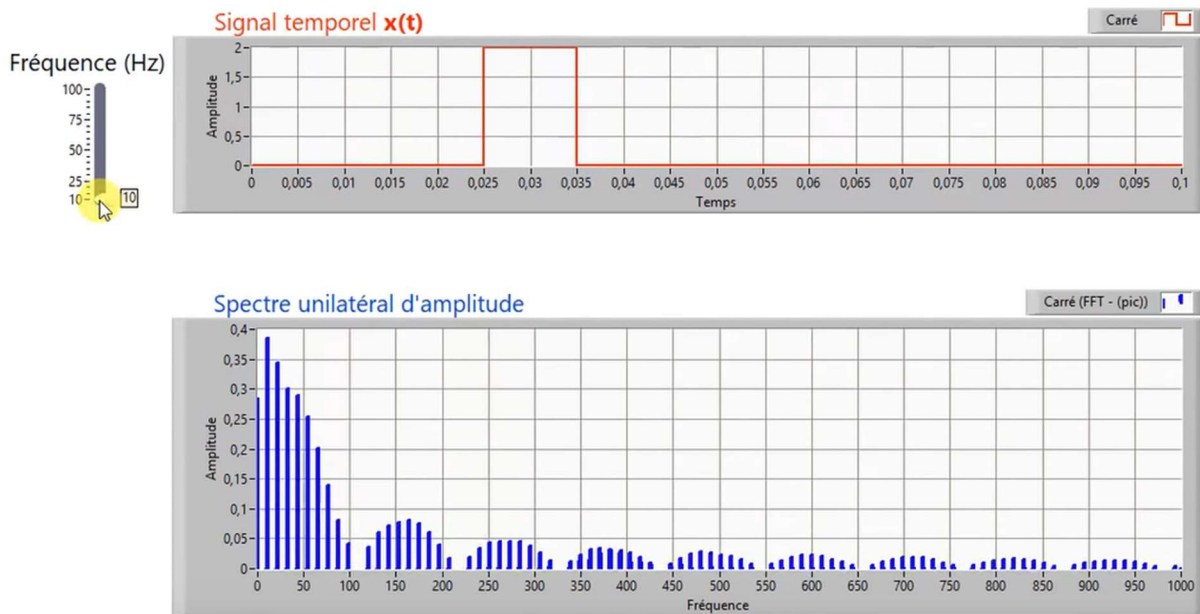


BACHELOR UNIVERSITAIRE DE TECHNOLOGIE
Ressource R3-04 : OUTILS MATHÉMATIQUES ET LOGICIELS

Chapitre 2 : Analyse spectrale d'un signal non périodique
Transformation de Fourier



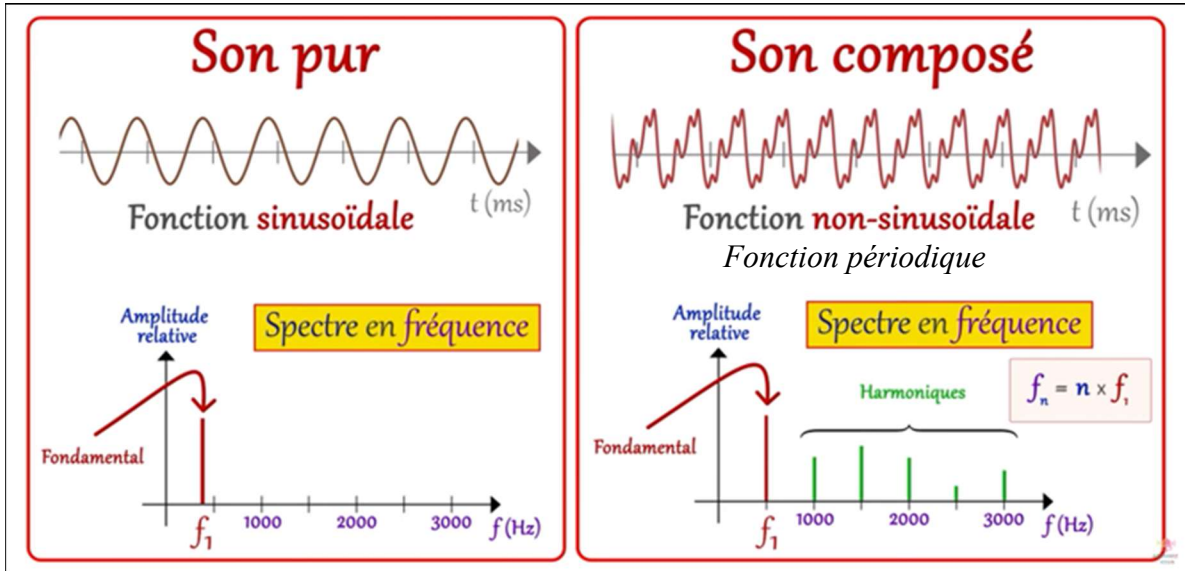
Enseignante : Sylvia Le Beux
Sylvia.lebeux@univ-tln.fr

Moodle : <https://moodle.univ-tln.fr/course/view.php?id=527>

Table des matières

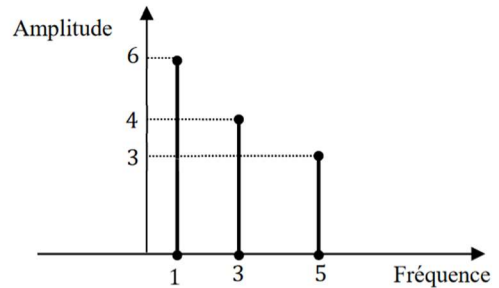
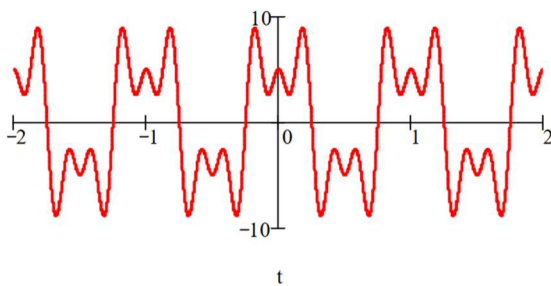
Partie A : Analyse spectrale d'un signal périodique - Séries de Fourier	5
Partie B : Analyse spectrale d'un signal non périodique - Transformation de Fourier	8
Tableau de la transformation de Fourier	26
Exercices	28
Ne pas confondre le produit et le produit de convolution	30

Partie A : Analyse spectrale d'un signal périodique – Série de Fourier - Rappels



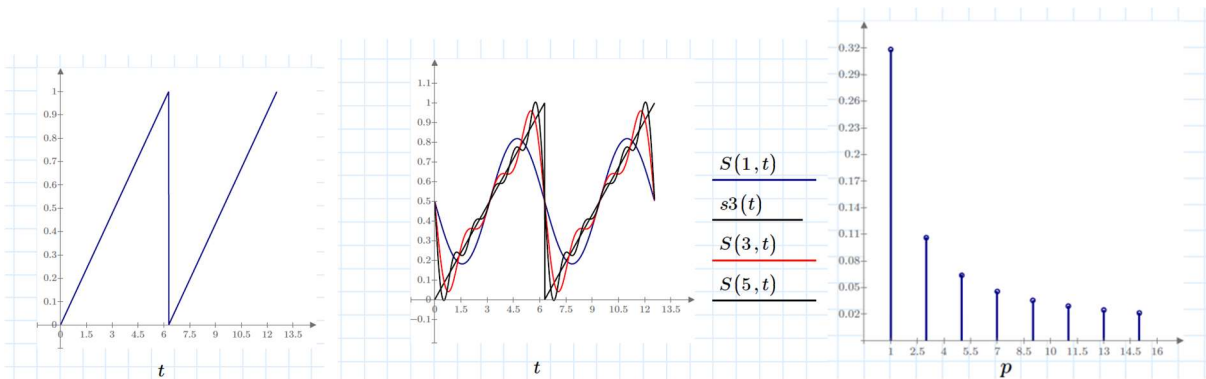
Exemple 1 : Spectre du signal périodique $x(t) = 3\cos(10\pi t) + 6\sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right) - 4\cos(6\pi t)$

Représentation temporelle et spectre d'amplitude



Remarque les composantes de fréquence paire est nulle car et le signal est à symétrie demi-onde.

Exemple 2 : Spectre d'un signal en dents de scie – décomposition en série de Fourier – spectre d'amplitude



Définitions - formules et propriétés :

1) Soit x une fonction de période T , intégrable sur tout intervalle $[t_0, t_0+T]$.

On appelle série de Fourier réelle de x la série suivante :

$a_0 + \sum_{p=1}^{+\infty} (a_p \cdot \cos(p\omega t) + b_p \cdot \sin(p\omega t))$, où les suites réelles $(a_p)_p$ et $(b_p)_p$ sont définies de la façon suivante :

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t).dt \quad ; \quad a_p = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cdot \cos(p\omega t).dt \quad ; \quad b_p = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cdot \sin(p\omega t).dt \quad \text{pour } p \geq 1,$$

$$\text{avec } \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

a_0 est la valeur moyenne du signal x .

L'harmonique de rang p est le signal : $H_p(t) = a_p \cdot \cos(p\omega t) + b_p \cdot \sin(p\omega t)$

Le fondamental est l'harmonique de rang 1 : $H_1(t) = a_1 \cdot \cos(\omega t) + b_1 \cdot \sin(\omega t)$

2) La série de Fourier d'un signal paire est en cosinus :

$$a_0 + \sum_{p=1}^{+\infty} a_p \cdot \cos(p\omega t)$$

$$\sum_{p=1}^{+\infty} b_p \cdot \sin(p\omega t)$$

La série de Fourier d'un signal impaire est en sinus :

3) Le terme général $a_p \cdot \cos(p\omega t) + b_p \cdot \sin(p\omega t)$ peut aussi s'écrire $A_p \cos(p\omega t + \phi_p)$

où : $A_p = |a_p - ib_p| = \sqrt{a_p^2 + b_p^2} = 2|c_p|$ et $\phi_p = \arg(a_p - ib_p) = \arg(c_p)$. ($p \neq 0$)

A_p est l'amplitude de l'harmonique de rang p

ϕ_p est la phase de l'harmonique de rang p .

Une autre écriture du développement en série de Fourier d'un signal périodique f est donc :

$$A_0 + \sum_{p=1}^{+\infty} A_p \cos(p\omega t + \phi_p), \text{ avec } A_0 = a_0.$$

L'ensemble des amplitudes A_p forme le spectre d'amplitude unilatéral du signal x , ou spectre de raies (il s'agit d'un spectre discret). Il est représenté par un diagramme en bâtons obtenu en représentant les amplitudes A_p en fonction de p/T . A_p devient négligeable à partir d'un certain rang.

4) On appelle série de Fourier complexe d'un signal x , T -périodique la série : $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik\omega t}$

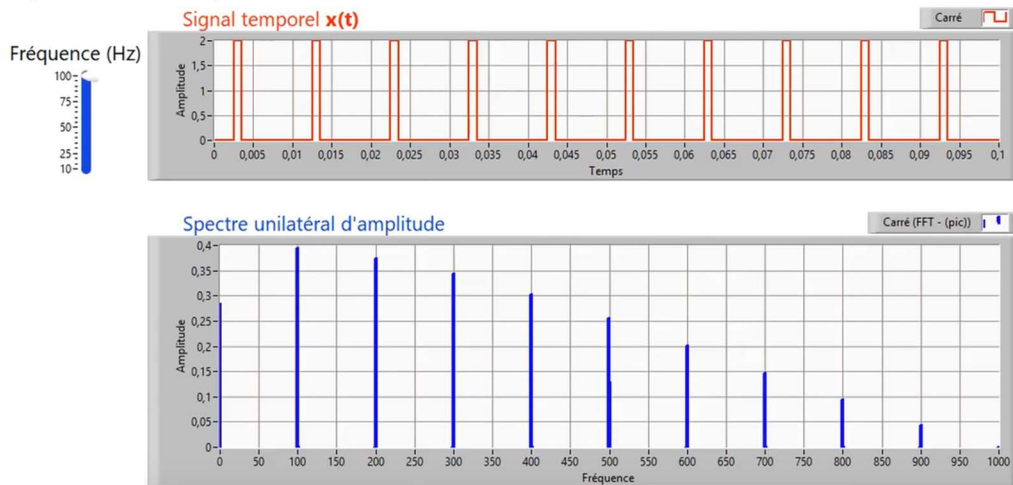
$$\text{où : } c_k = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cdot e^{-ik\omega t} dt \quad \text{pour } k \neq 0 \quad \text{et} \quad c_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t).dt \quad \text{avec } \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

On a alors les correspondances suivantes : $c_0 = a_0$ et $c_k = \frac{a_k - i \cdot b_k}{2}$ pour $k \neq 0$.

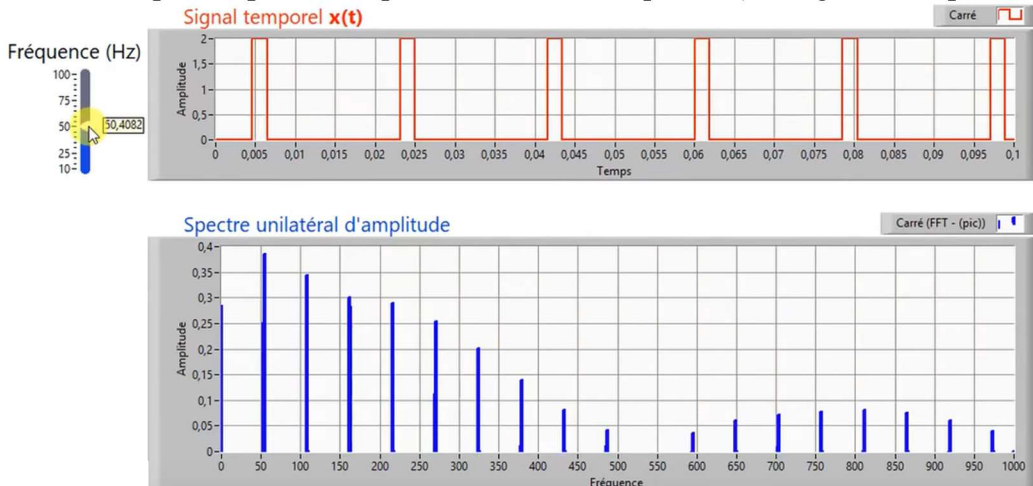
5) Le spectre fréquentiel d'amplitude d'un signal périodique est toujours discret, ses différentes raies représentent l'amplitude de ses composantes.

Spectre d'un signal non périodique :

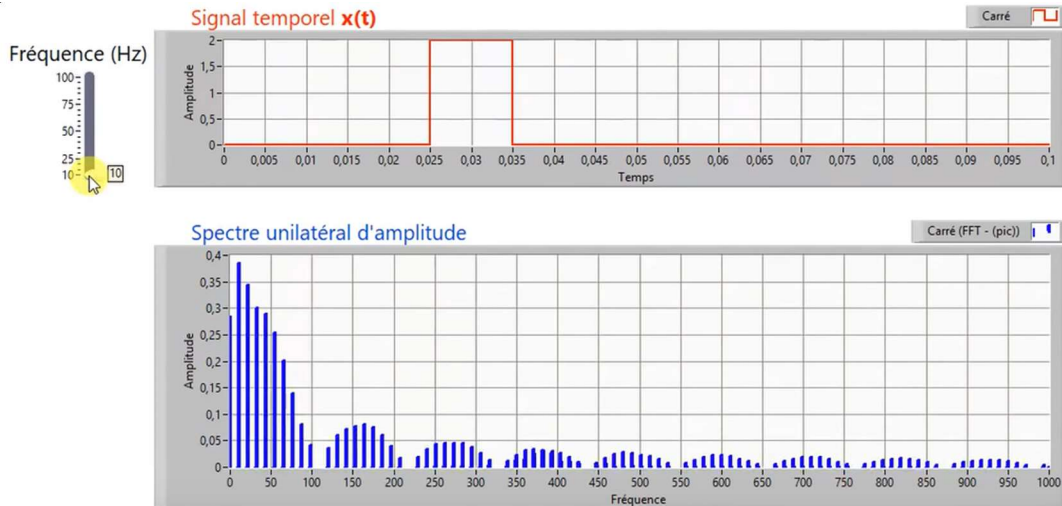
Soit x , un signal périodique, dont le motif est une impulsion rectangulaire. On peut lire sur son spectre sa fréquence (l'abscisse du fondamental) : 100 Hz, et sa période : 0,01 s par calcul inverse ou par lecture graphique sur sa représentation temporelle.



Observons ce qu'il se passe lorsqu'on diminue la fréquence (ou augmente la période) :



Les raies se rapprochent, puisqu'elles sont distantes d'une fréquence. Rappel : $f_n = n \cdot f_1$
 Lorsque la fréquence tend vers zéro, le signal n'est plus périodique, et par interpolation son spectre tend à devenir continu.



Partie B : Analyse spectrale d'un signal apériodique – Transformation de Fourier

I. Généralités sur la transformation de Fourier

1) Définitions

Soit x , un signal dépendant du temps :

$$\begin{array}{ccc} x : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & x(t) \end{array}$$

On appelle transformée de Fourier de $x(t)$, la fonction X , dépendant de la fréquence f :

$$\begin{array}{ccc} X : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ f & \longmapsto & X(f) \end{array}$$

X est définie par la formule suivante : $X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-2j\pi ft} dt$

Pour un f donné, $X(f)$ existe si et seulement si l'intégrale ci-dessus converge.

On note : $X(f) = T_F[x(t)]$ ou encore : $X = T_F[x]$.

2) Vocabulaire

Le graphe représentant la fonction :

$f \mapsto |X(f)|$ est appelé le spectre de module (ou d'amplitude) du signal x , il s'agit d'un spectre continu.

$f \mapsto \arg(X(f))$ est appelé le spectre de phase du signal x ,

$f \mapsto |X(f)|^2$ est appelée le spectre de puissance (ou d'énergie) du signal x .

II. Transformée de Fourier de signaux usuels

1) Signal rectangle $\text{rect}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } |t| > \frac{1}{2} \end{cases}$

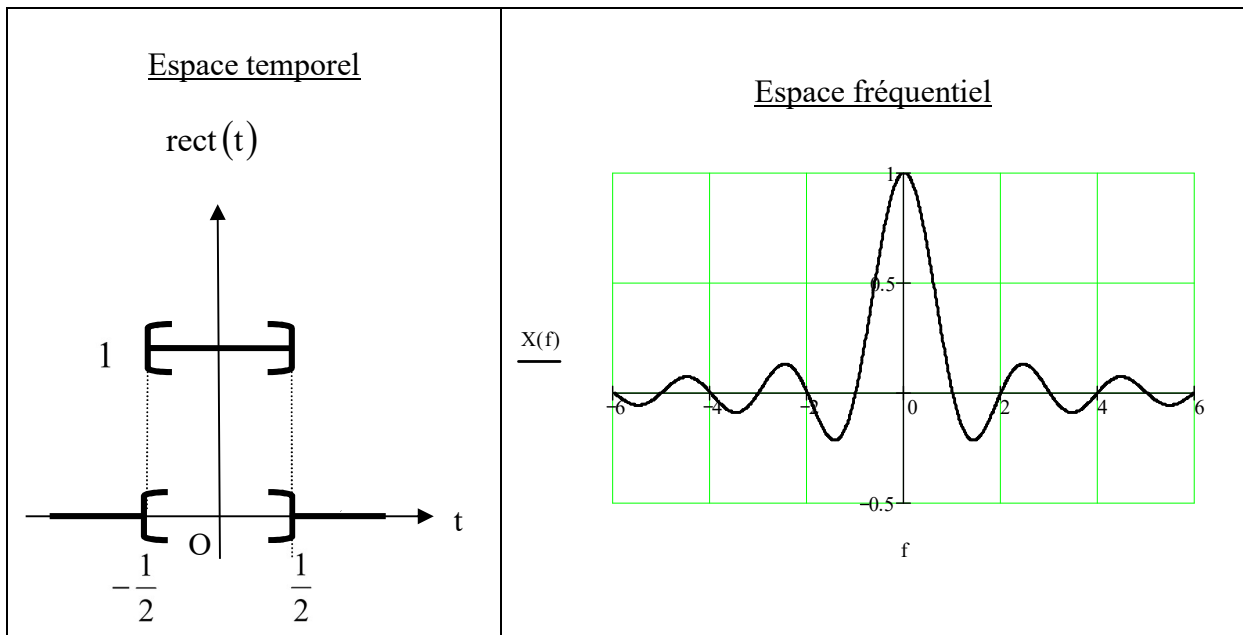
.....

.....

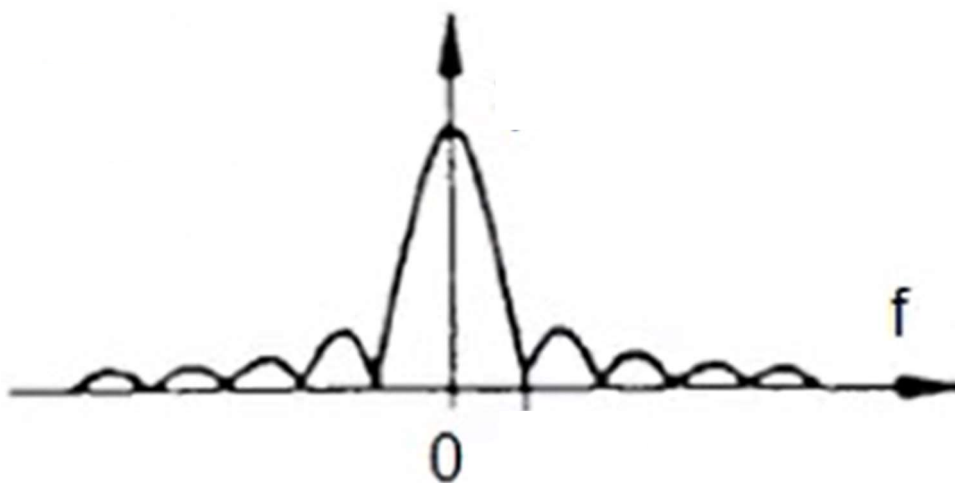
.....

.....

On obtient donc : $T_F(\text{rect}(t)) = \text{sinc}(f)$

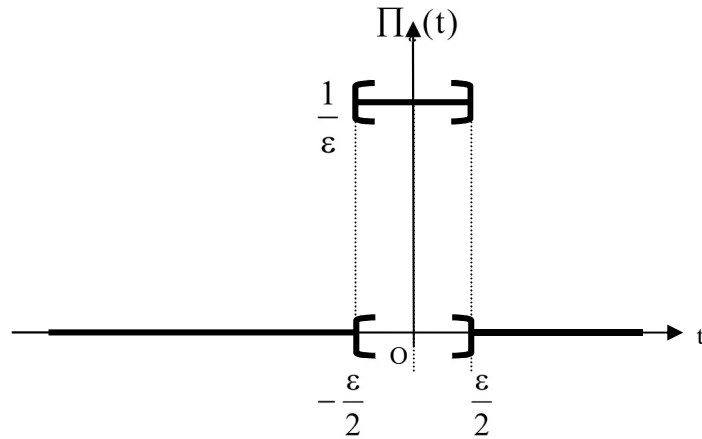


Spectre d'amplitude Tracer dans l'espace fréquentiel le spectre d'amplitude du signal rectangle. Il s'agit d'un spectre symétrique par rapport à la fréquence nulle.



2) Porte de largeur ϵ

$$\Pi_{\epsilon}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon} & \text{si } |t| \leq \frac{\epsilon}{2} \\ 0 & \text{si } |t| > \frac{\epsilon}{2} \end{cases}$$



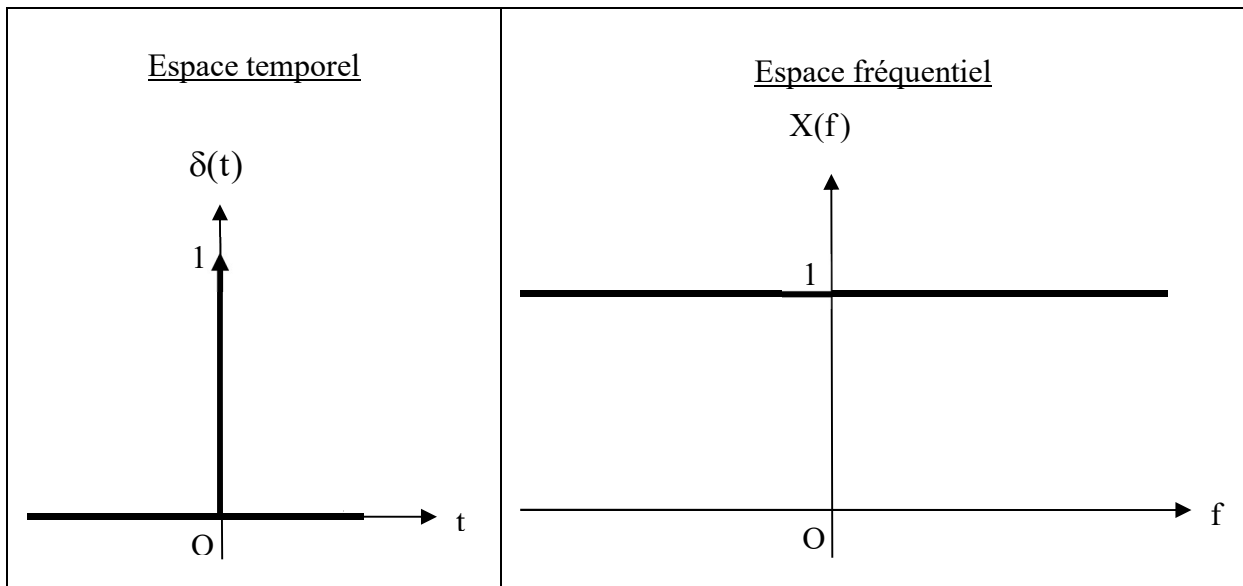
On remarque que : $\int_{-\infty}^{+\infty} \Pi_{\epsilon}(t) dt = \dots\dots\dots$

Impulsion de Dirac $\delta = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \Pi_{\epsilon}(t)$ où $\epsilon > 0$ et $\Pi_{\epsilon}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon} & \text{si } |t| \leq \frac{\epsilon}{2} \\ 0 & \text{si } |t| > \frac{\epsilon}{2} \end{cases}$

Après calcul, on obtient : $T_F[\Pi_{\epsilon}(t)] = \text{sinc}(f\epsilon) = \frac{\sin(\pi f\epsilon)}{\pi f\epsilon}$.

On admet que : $T_F[\delta(t)] = T_F\left[\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \Pi_{\epsilon}(t)\right] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} T_F[\Pi_{\epsilon}(t)] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \text{sinc}(f\epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi f\epsilon)}{\pi f\epsilon} = 1$

$T_F[\delta(t)] = 1$



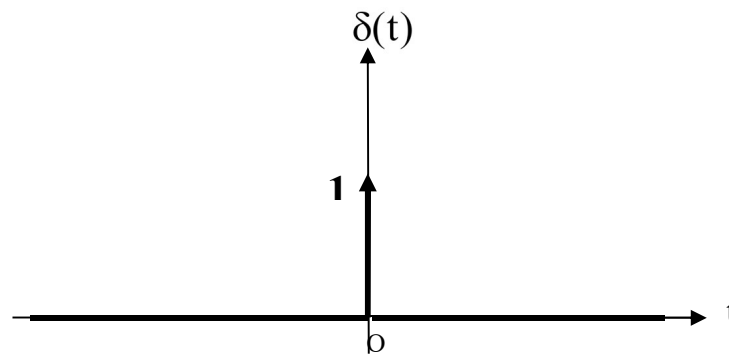
Compléments sur l'impulsion ou la distribution de Dirac

On appelle impulsion de Dirac : $\delta = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Pi_{\varepsilon}(t)$ où $\varepsilon > 0$

On définit parfois δ abusivement par : $\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \neq 0 \\ +\infty & \text{si } t = 0 \end{cases}$, et $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$

δ n'est pas une fonction, c'est une distribution, c'est pourquoi on l'appelle aussi distribution de Dirac.

Comme $\int_{-\infty}^{+\infty} \Pi_{\varepsilon}(x) dx = 1$, par convention, on note donc : $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1$, et par convention sa représentation graphique est :



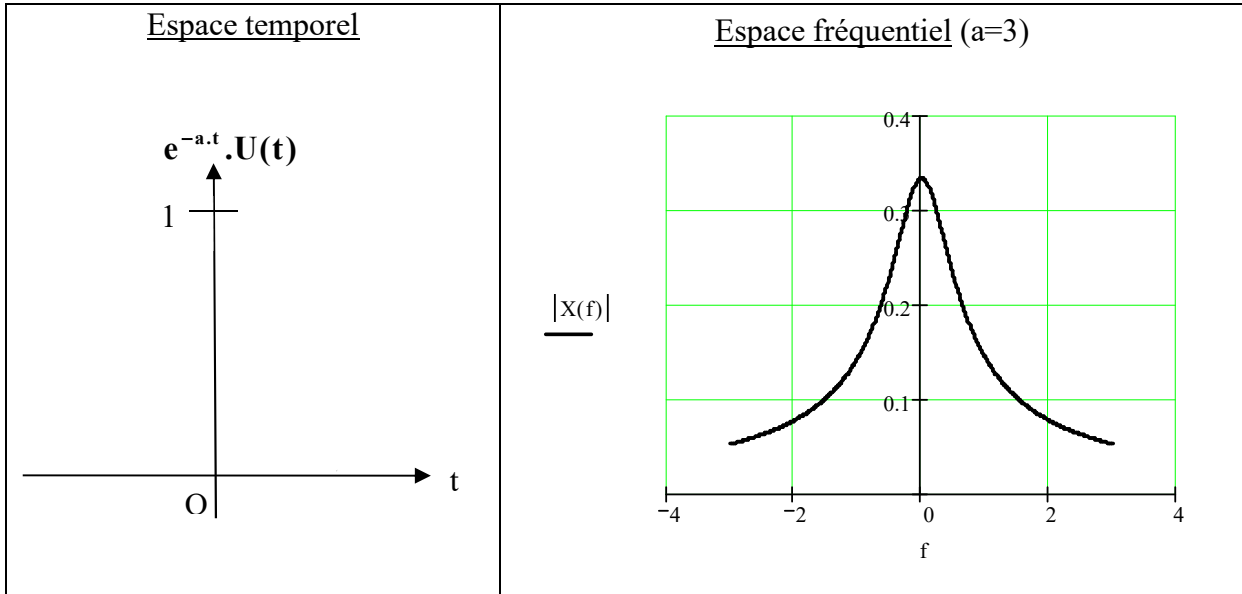
Remarque De nombreux théorèmes (convergence d'intégrales, de séries, inversion de limites en général...) reposent sur des hypothèses souvent très fortes portant sur les fonctions. Dans la majeure partie des cas, celles-ci ne sont pas vérifiées.

Le recours aux distributions permet d'élargir le champ d'application de ces théorèmes.

Une distribution est un concept plus général que celui de fonction. Il permet, entre autre, la formulation et donc le traitement de signaux discrets. Tous les calculs sur les fonctions s'appliquent aussi aux distributions.

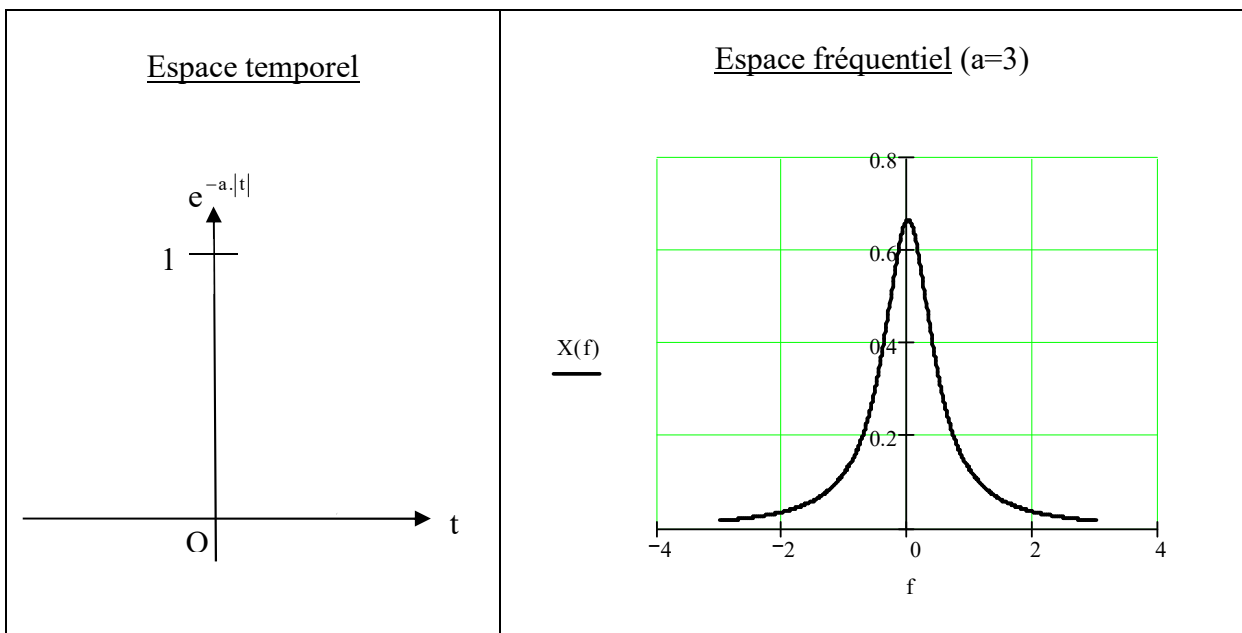
3) Signal exponentiel decroissant $x(t) = e^{-at} \cdot U(t)$ où $a > 0$.

$$\mathbf{T_F [e^{-a \cdot t} \cdot U(t)] = \frac{1}{a + 2j\pi f}}$$



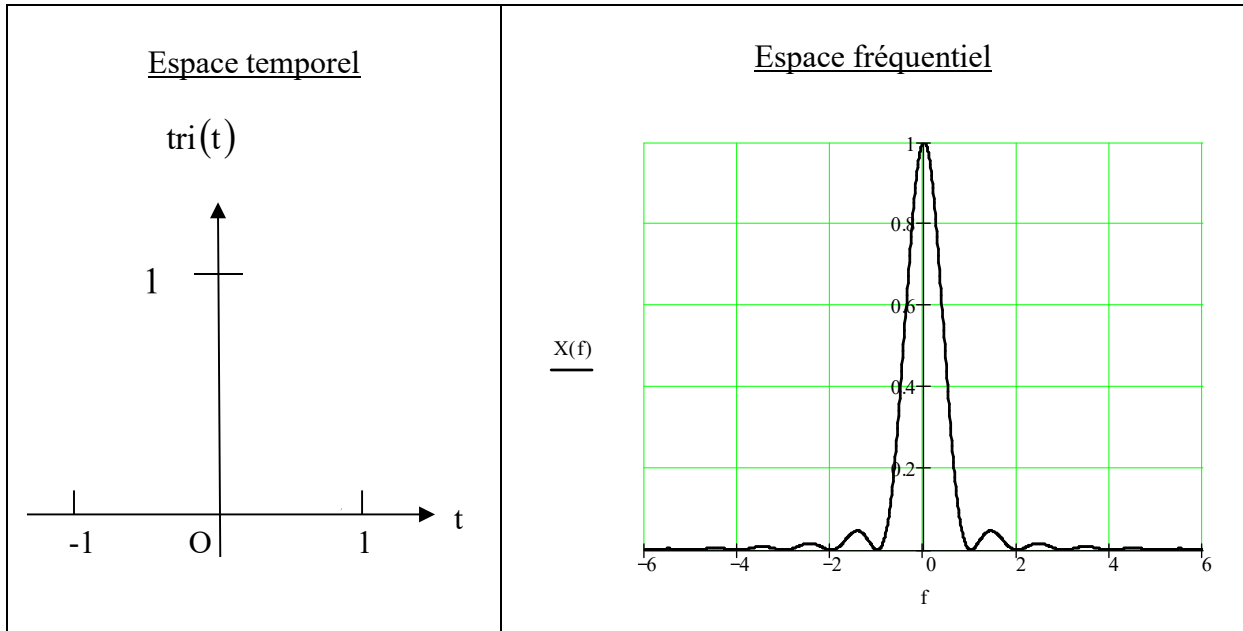
4) Signal exponentiel symetrique $x(t) = e^{-a \cdot |t|}$ où $a > 0$.

$$\mathbf{T_F [e^{-a \cdot |t|}] = \frac{2 \cdot a}{a^2 + (2 \cdot \pi \cdot f)^2}}$$

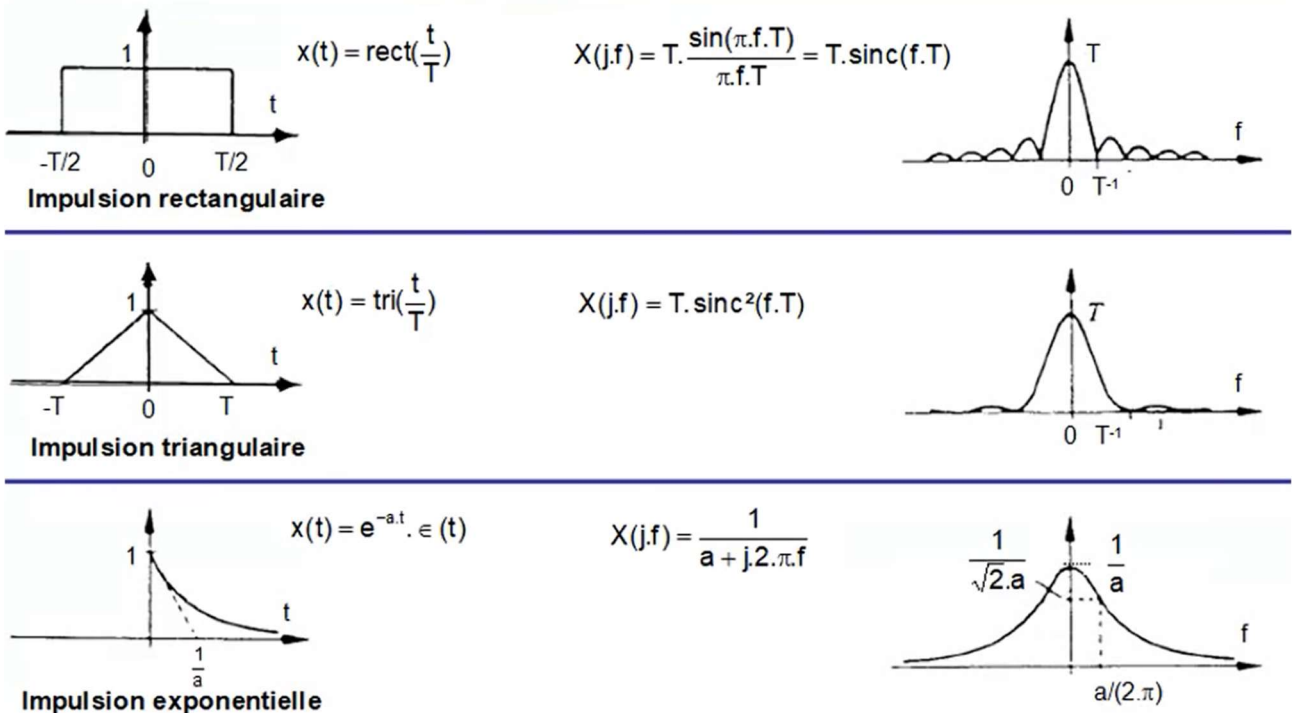


5) Signal fenêtre triangulaire $\text{tri}(t) = \begin{cases} 1 - |t| & \text{si } |t| \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$$\mathbf{T_F[\text{tri}(t)] = \text{sin}^2 c(f)}$$



Pour résumer : spectre d'amplitude de signaux non périodiques



III. Proprietes de la transformation de Fourier

1) Linearite

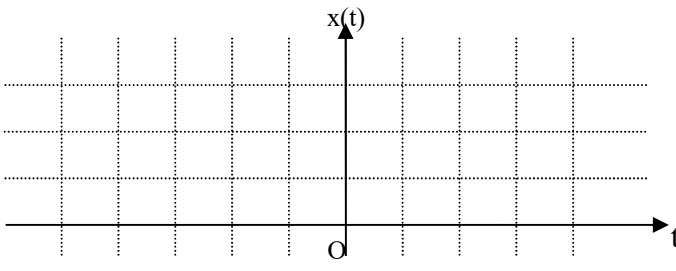
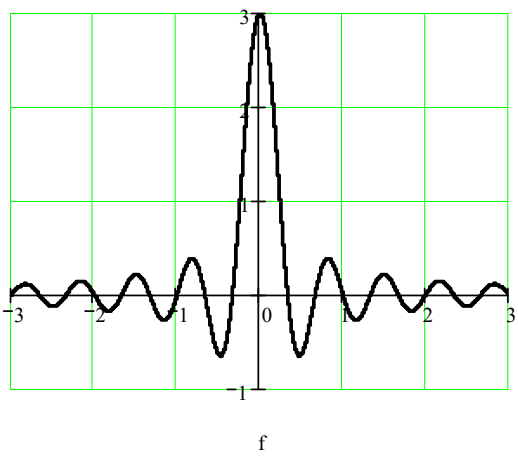
Si $X_1 = T_F [x_1]$ et $X_2 = T_F [x_2]$, alors $T_F [\lambda x_1 + \mu x_2] = \lambda T_F [x_1] + \mu T_F [x_2] = \lambda \cdot X_1 + \mu \cdot X_2$
 (λ, μ sont des nombres complexes).

✓ Exemple : $T_F [3\text{tri}(t) + \text{rect}(t)] = \dots\dots\dots$

2) Transformee de Fourier de $x(a.t)$ (Homothetie)

$$T_F [x(a.t)] = \frac{1}{|a|} \cdot X\left(\frac{f}{a}\right) \text{ o\`u } X(f) = T_F [x(t)].$$

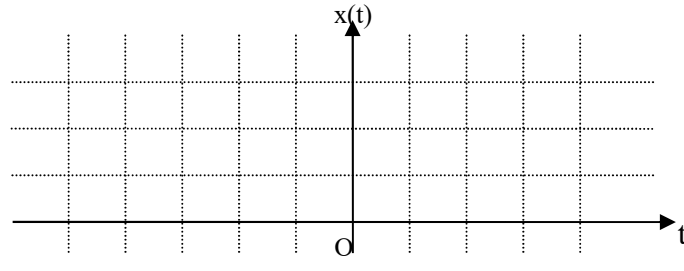
Exemples

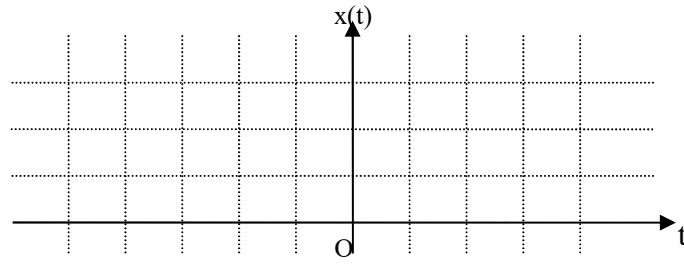
<p>$x(t) = \text{rect}(t/3)$</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p>	<p><u>Espace temporel</u></p> 
<p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p>	<p><u>Espace fr\u00e9quentiel</u></p> 

3) Transformée de Fourier d'un signal décalé $x(t-t_0)$

$$\mathbf{T_F [x(t-t_0)] = e^{-2j\pi.f.t_0} .X(f) \text{ où } X(f) = T_F [x(t)]}$$

Exemples

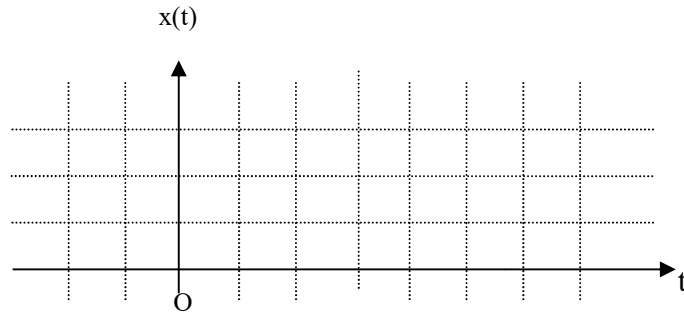
$x(t)=\text{rect}(t-2)$	
---	--

$x(t)=\text{tri}(t+2)$	
--	---

4) Transformée de Fourier d'un changement affine d'échelle $x(at+b)$

$$\mathbf{T_F [x(at+b)] = e^{2j\pi.f.b/a} . \frac{1}{|a|} . X\left(\frac{f}{a}\right) \text{ où } X(f) = T_F [x(t)]}$$

Exemple

$x(t)=\text{tri}(t/3-1)$	
--	--

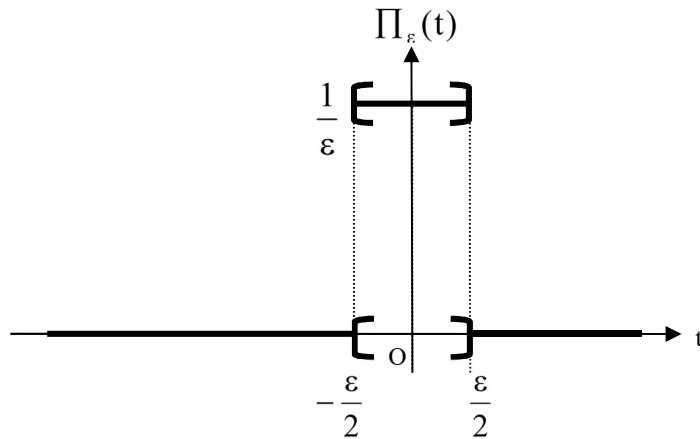
2) Proprietes Les fonctions f, g, g_1, g_2, h sont integrables sur \mathbb{R} , et $\lambda \in \mathbb{R}$

1. $f * g = g * f$
2. $f * (g_1 + \lambda \cdot g_2) = f * g_1 + \lambda \cdot f * g_2$
3. $(f_1 + \lambda f_2) * g = f_1 * g + \lambda \cdot f_2 * g$
4. $(f * g) * h = f * (g * h)$
5. $(f * g)' = f' * g + f * g'$

3) Exemples

✓ Convolution par une porte de largeur ε

$$\Pi_\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} & \text{si } |t| \leq \frac{\varepsilon}{2} \\ 0 & \text{si } |t| > \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$



On remarque que : $\int_{-\infty}^{+\infty} \Pi_\varepsilon(t) dt = \dots\dots\dots$

$(f * \Pi_\varepsilon)(t) = \dots\dots\dots$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

La convolution par une porte de largeur ε represente donc la valeur

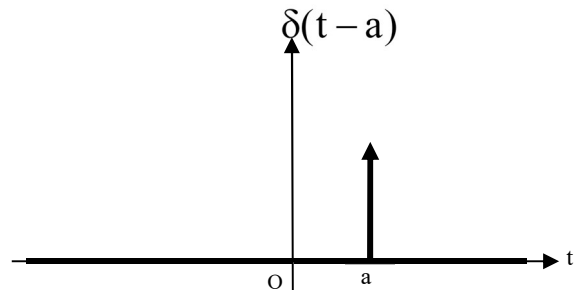
moyenne de f sur $\left[t - \frac{\varepsilon}{2}, t + \frac{\varepsilon}{2} \right]$.

Si f est continue alors : $(f * \delta)(t) = f(t)$

On dit que l'impulsion de Dirac est l'élément neutre pour le produit de convolution.

4) Convolution par une impulsion de Dirac décalée de a

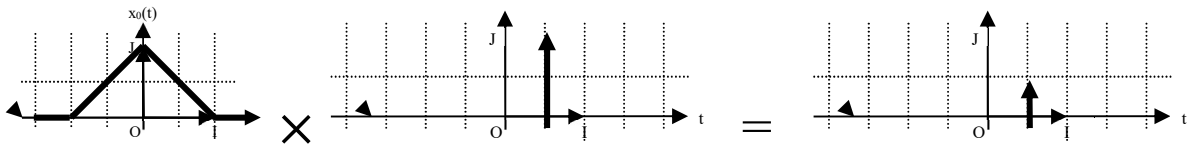
$$\delta(t-a) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \neq a \\ +\infty & \text{si } t = a \end{cases}$$



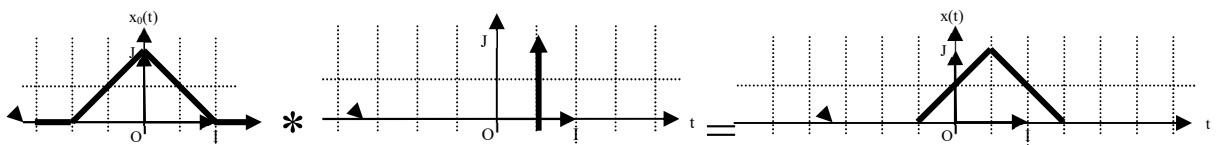
Produit de convolution Si f est continue alors : $f(t) * \delta(t-a) = f(t-a)$

Attention Ne pas confondre avec le produit classique : $f(t) \times \delta(t-a) = f(a) \times \delta(t-a)$

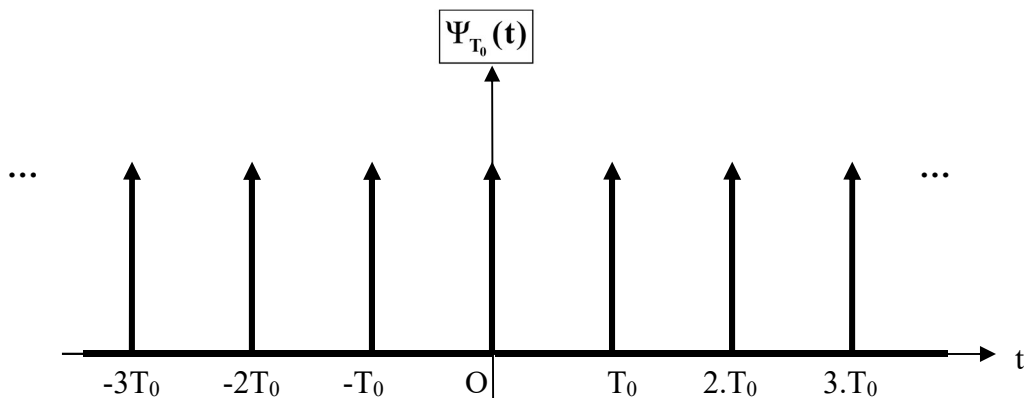
exemple : $\text{tri}(t) \times \delta(t-1/2) = \text{tri}(1/2) \cdot \delta(t-1/2)$



$$\text{tri}(t) * \delta(t-1/2) = \text{tri}(t-1/2)$$



5) Distribution en peigne de Dirac de période T_0 $\Psi_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-k.T_0)$



Produit de convolution par un peigne de Dirac

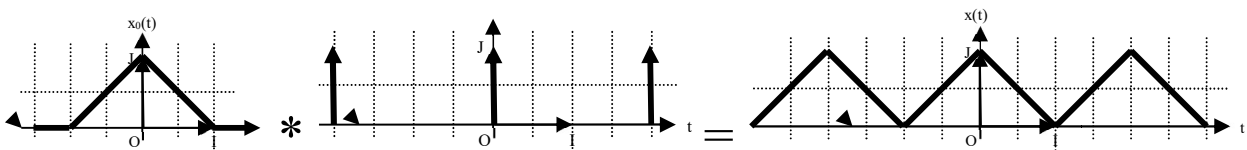
On admet que :

$$(f * \Psi_{T_0})(t) = \left(f * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - k.T_0) \right)(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(t) * \delta(t - k.T_0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(t - k.T_0)$$

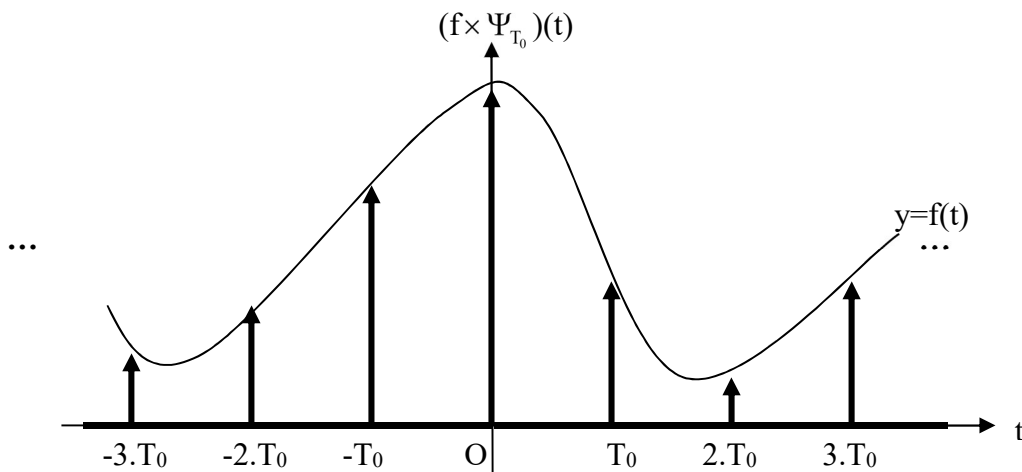
Si f est continue alors : $(f * \Psi_{T_0})(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(t - k.T_0)$

On obtient la somme des translatsés du signal f, on dit que le signal f est "périodisé".

exemple : $\text{tri}(t) * \Psi_2(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \text{tri}(t - 2k)$



Remarque Ne pas confondre avec le produit « classique » d'une fonction par le peigne de Dirac de période T_0 , et représenté graphiquement par :



On obtient ici l'échantillonnage du signal f à la période T_0 .

5) Transformée de Fourier et produit de convolution

On admet que : $\boxed{T_F[x_1 * x_2] = X_1 \times X_2 \text{ où } X_1 = T_F[x_1] \text{ et } X_2 = T_F[x_2]}$

Exemples

✓ $T_F(x * \delta) = \dots\dots\dots$

✓ $T_F(x(t) * \delta(t - a)) = \dots\dots\dots$

✓ $T_F(\text{rect}(t) * \text{rect}(t)) = \dots\dots\dots$

V. Transformation de Fourier inverse

1) Définition / Théorème

On admet que la transformation de Fourier possède une transformation réciproque notée T_F^{-1} . On a alors :

$$X(f) = T_F(x(t)) \Leftrightarrow x(t) = T_F^{-1}(X(f)) \text{ ou encore : } X = T_F(x) \Leftrightarrow x = T_F^{-1}(X)$$

Exemples

✓ $T_F^{-1}(\text{sinc}(f)) = \dots\dots\dots$; $T_F^{-1}(\text{sinc}^2(f)) = \dots\dots\dots$; $T_F^{-1}(1) = \dots\dots\dots$

- ✓ En appliquant la transformation inverse aux exemples du §III.5, on peut alors retrouver les résultats du chapitre 1 :
 $(x * \delta)(t) = x(t)$; $x(t) * \delta(t - a) = x(t - a)$; $\text{rect}(t) * \text{rect}(t) = \text{tri}(t)$

2) Propriétés

La transformation de Fourier inverse possède donc des propriétés similaires à celles de la transformation de Fourier.

✓ Si $x_1 = T_F^{-1}[X_1]$ et $x_2 = T_F^{-1}[X_2]$, alors :

$$T_F^{-1}[\lambda X_1 + \mu X_2] = \lambda T_F^{-1}[X_1] + \mu T_F^{-1}[X_2]$$

✓ On note $x = T_F^{-1}[X]$: $T_F^{-1}[X(af)] = \frac{1}{|a|} x\left(\frac{t}{a}\right)$ avec $a \neq 0$.

✓ On note $x = T_F^{-1}[X]$: $T_F^{-1}[e^{-2j\pi t_0} X(f)] = x(t - t_0)$

✓ On note $x = T_F^{-1}[X]$: $T_F^{-1}[(2j\pi f)^n X(f)] = x^{(n)}(t)$

3) Exemples

✓ $T_F^{-1}[e^{-3j\pi f} \cdot \text{sinc}(f)] = \dots\dots\dots$

✓ $T_F^{-1}[\text{sinc}(2f)] = \dots\dots\dots$

✓ $T_F^{-1}\left[\frac{1}{5 + 2j\pi f}\right] = \dots\dots\dots$

✓ $T_F^{-1}\left[\frac{e^{-4j\pi f}}{5 + 2j\pi f}\right] = \dots\dots\dots$

4) Formule de reciprocite

Soit : $X(f) = T_F(x(t)) \Leftrightarrow x(t) = T_F^{-1}(X(f))$.

On admet la formule dite de reciprocite suivante :

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-2j\pi ft} dt \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot e^{2j\pi ft} df = \frac{x(t^+) + x(t^-)}{2}$$

✓ Cas particulier : Si x est continue en t, alors $x(t^+) = x(t^-) = x(t)$ et on a alors :

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-2j\pi ft} dt \Leftrightarrow x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot e^{2j\pi ft} df$$

✓ Conséquences : Si x est continue sur \mathbb{R} , on alors :

$$T_F[x(t)] = X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-2j\pi ft} dt \Leftrightarrow T_F^{-1}[X(f)] = x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot e^{2j\pi ft} df \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

On obtient donc des propriétés et formules de T_F supplémentaires en échangeant : T_F et T_F^{-1} ; f et t ; j et -j.

Formules supplémentaires

✓ $T_F \left[\text{tri} \left(\frac{t}{T} \right) \right] = \dots\dots\dots$

.....

✓ $a > 0, T_F(e^{-a|t|}) = \dots\dots\dots$

.....

✓ $T_F(\delta(t)) = \dots\dots\dots$

✓ $T_F(\delta(t - t_0)) = \dots\dots\dots$

.....

Propriétés supplémentaires

✓ $T_F(x(t - t_0)) = \dots\dots\dots$

.....

✓ $T_F(x'(t)) = \dots\dots\dots$

.....

✓ $T_F(x_1 * x_2) = \dots\dots\dots$

.....

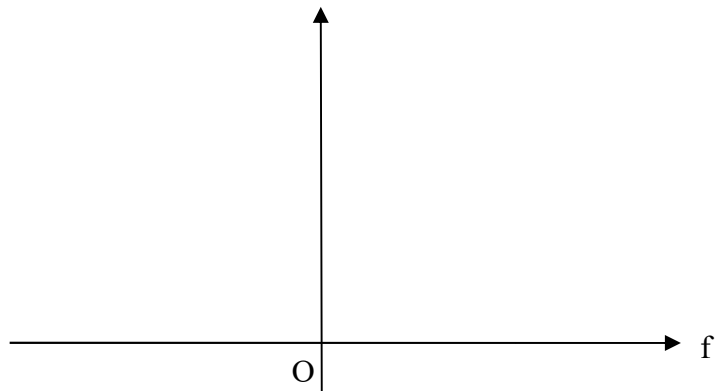
Transformation de Fourier d'un signal sinusoïdal

A l'aide de la formule d'Euler et d'une formule ci-dessus, calculons :

$T_F(\sin(2\pi t)) = \dots\dots\dots$

.....

Espace fréquentiel

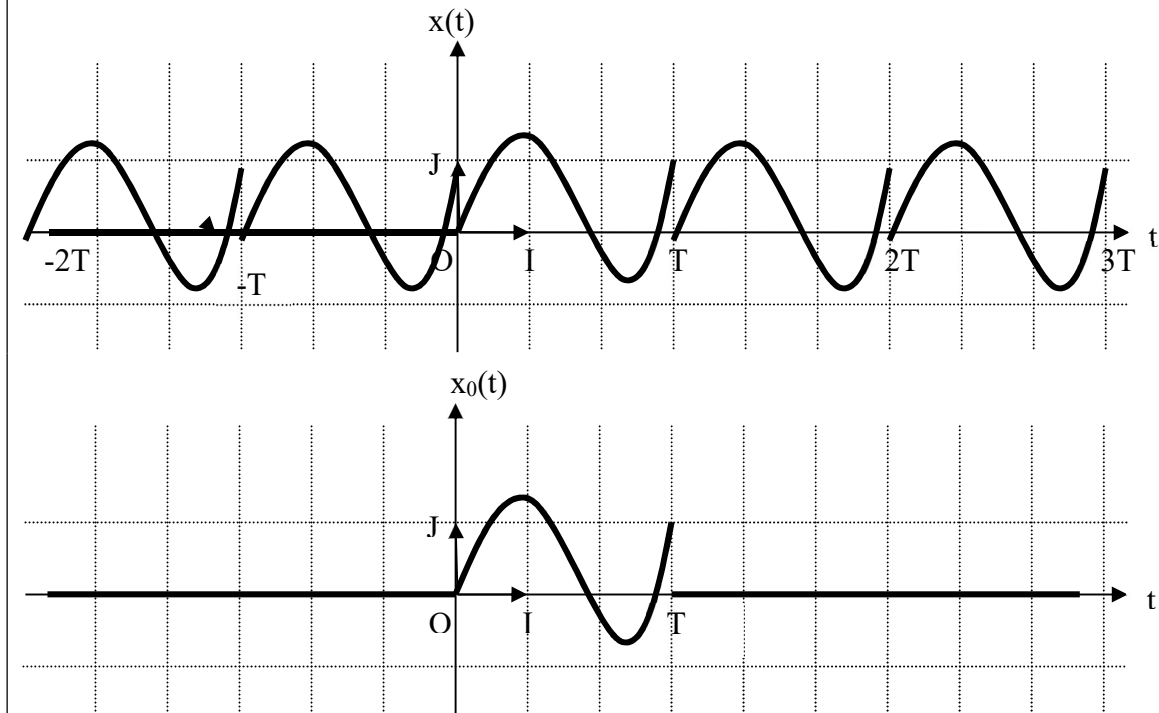


VI. Lien avec la série de Fourier

soit x un signal T -periodique, on considere le motif : $x_0(t) = \begin{cases} x(t) & \text{si } 0 \leq t < T \\ 0 & \text{sin on} \end{cases}$. Soit

X_0 , la transformee de Fourier de x_0 . Alors la transformee de Fourier de x est :

$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \cdot \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$, ou $C_n = \frac{1}{T} \cdot X_0\left(\frac{n}{T}\right)$, on retrouve alors les formules des series de Fourier.



VII. Théorème de Parseval

1) Théorème

$$\text{Soit } X(f) = T_f[x(t)], \text{ on admet que : } \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$$

Interprétation : Si x représente une onde en fonction du temps, $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$ est l'énergie totale de cette onde. La transformation de Fourier conserve donc l'énergie totale.

2) Exemple Appliquons cette formule au signal $x(t)=\text{rect}(t)$, nous pourrons alors en déduire la

valeur de l'intégrale : $\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt$

TABLEAU DE TRANSFORMEES DE FOURIER

Définitions

$$TF[x(t)]=X(f)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t).e^{-2j\pi ft} .dt = \begin{cases} 2 \int_0^{+\infty} x(t).\cos(2\pi ft).dt & \text{si } x \text{ est paire} \\ -2j \int_0^{+\infty} x(t).\sin(2\pi ft).dt & \text{si } x \text{ est impaire} \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} X(f).e^{2j\pi ft} .df = \begin{cases} x(t) & \text{si } x \text{ est continue en } t \\ \frac{x(t^-) + x(t^+)}{2} & \text{si } x \text{ n'est pas continue en } t. \end{cases}$$

Transformée de Fourier de fonctions usuelles

x(t) ou TF⁻¹ [X(f)]	TF[x(t)] ou X(f)
Distribution de Dirac : $\delta(t)$	1
Fonction rectangle : $\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$	$T \frac{\sin \pi f}{\pi f} = T \text{ sinc}(Tf) = \frac{T \sin(\pi Tf)}{\pi Tf}$
Fonction exponentielle : $e^{-a t }$, où $a > 0$.	$\frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2}$
Fonction exponentielle : $e^{-at} \cdot U(t)$, où $a > 0$.	$\frac{1}{a + 2j\pi f}$
Signal triangulaire : $\text{tri}(t) = \begin{cases} 1 - t & \text{si } t \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$\left(\frac{\sin \pi f}{\pi f}\right)^2 = \text{sinc}^2(f)$

Propriétés de la transformation de Fourier

$x(t)$ ou $TF^{-1} [X(f)]$	$TF[x(t)]$ ou $X(f)$
$ax_1(t)+bx_2(t)$	$aX_1(f)+bX_2(f)$
$x(t-t_0)$ « décalage temporel »	$e^{-2j\pi ft_0} X(f)$
$x(at)$	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{f}{a}\right)$
$x(at+b)$	$\frac{1}{ a } e^{2j\pi \frac{bf}{a}} X\left(\frac{f}{a}\right)$
$x'(t)$ « dérivation temporelle »	$2j \pi f.X(f)$
$x^{(n)}(t)$	$(2i \pi f)^n .X(f)$
$(x_1 * x_2)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(u)x_2(t-u)du$	$X_1(f).X_2(f)$
$e^{2j\pi ft_0} .x(t)$	$X(f-f_0)$ « décalage fréquentiel »
$-2j \pi t.x(t)$	$X'(f)$ « dérivation fréquentielle »
$(-2j \pi t)^n g(t)$	$X^{(n)}(f)$
$x_1(t).x_2(t)$	$(X_1 * X_2)(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} X_1(u)X_2(f-u)du$

On obtiendra des **propriétés supplémentaires** en échangeant dans les formules

précédentes : TF en TF^{-1} et $\begin{cases} x \text{ en } X \\ t \text{ en } f \\ j \text{ en } -j \end{cases}$

Formule de Parseval $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$

Exercices de la partie B

Exercice 1 : Soit x , la fonction définie par : $x(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } -3 < t < -2 \\ t - 6 & \text{si } 6 < t < 7 \\ -t + 8 & \text{si } 7 < t < 8 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Tracer la représentation graphique de x . Exprimer x à l'aide des fonction rectangle et triangle, et en déduire la transformée de Fourier de x .

Exercice 2 : Dans un circuit RC en série, on a l'équation différentielle suivante : $\tau \frac{ds}{dt} + s(t) = e(t)$ où $e(t)$ et $s(t)$ sont les signaux respectivement d'entrée et de sortie et $\tau = RC$.

- 1) Appliquer la transformation de Fourier à cette équation et en déduire la fonction de transfert du circuit : $H(f) = \frac{S(f)}{E(f)}$ où E et S sont les transformées de Fourier respectives de e et s .
- 2) On note h , la transformée inverse de H , exprimer s en fonction de e et h . Que se passe-t-il si e est une impulsion de Dirac ? On dit alors que s est la réponse impulsionnelle.
- 3) Calculer h .
- 4) Calculer s lorsque e est une porte : $e(t) = \begin{cases} E & \text{si } 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ où $T > 0$ et $E > 0$.

Exercice 3 : On considère la fonction x , définie par : $x(t) = 1$ si $|t| \leq 1$; $x(t) = 2 - |t|$ si $1 \leq |t| \leq 2$; $x(t) = 0$ sinon.

- 1) Représenter la fonction $x(t)$
- 2) Calculer sa transformée de Fourier par le calcul intégral
- 3) Calculer sa transformée en écrivant $x(t)$ comme somme de fonctions triangle
- 4) Calculer sa transformée de Fourier en utilisant la dérivée de $x(t)$.

Exercice 4 :

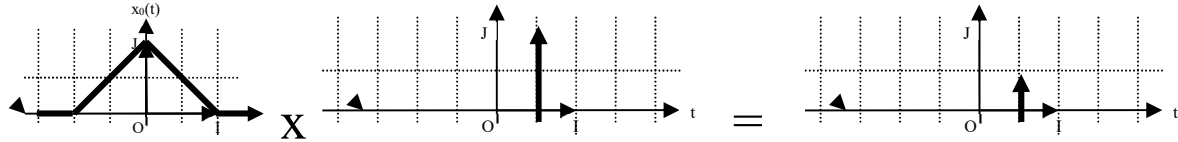
Déterminer $h(t) = \sin(3t) * \text{rect}(t)$ et $e^{-x} \cdot U(x) * x \cdot U(x)$

.....

Ne pas confondre les quatre opérations ...

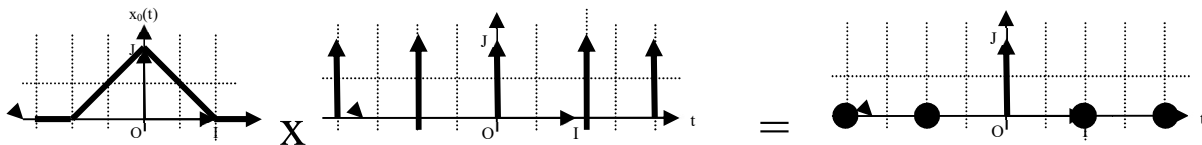
✓ **Le prélèvement** $f(t) \times \delta(t - a) = f(a) \cdot \delta(t - a)$

exemple : $\text{tri}(t) \times \delta(t - 1/2) = \text{tri}(1/2) \cdot \delta(t - 1/2)$



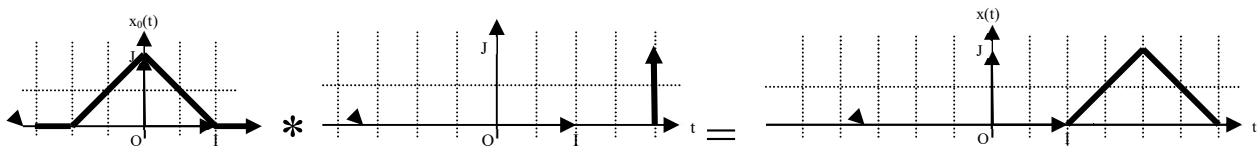
✓ **Le prélèvement multiple** $f(t) \times \Psi_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kT) \cdot \delta(t - kT)$

exemple : $\text{tri}(t) \times \Psi_1(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \text{tri}(k) \cdot \delta(t - k)$



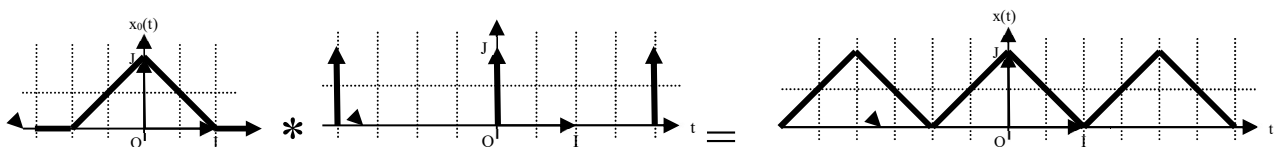
✓ **La translation** $f(t) * \delta(t - a) = f(t - a)$

exemple : $\text{tri}(t) * \delta(t - 2) = \text{tri}(t - 2)$



✓ **La translation multiple ou périodisation** $f(t) * \Psi_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(t - kT)$

exemple : $\text{tri}(t) * \Psi_2(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \text{tri}(t - 2k)$

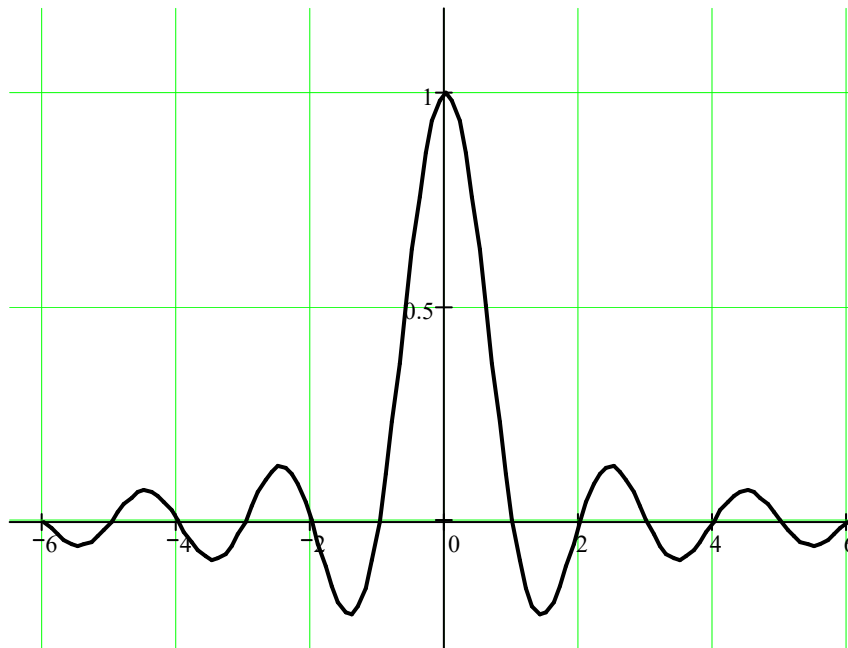


III. Sinus cardinal (sinusoïde amortie)

1) Définition

On appelle sinus cardinal, la fonction notée sinc, définie sur \mathbb{R}^* par : $\text{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$

2) Représentation graphique (voir cours de première année)



3) Produit de convolution avec le peigne de Dirac

Périodisation du sinus cardinal à la période 4 : $(\text{sinc} * \Psi_4)(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \pi(t - 4k)}{\pi(t - 4k)}$

