Préparation DS sur la transformation en Z

BUT GEII 2

Exercices sur la transformation directe

2’

La transformée en Z de U(k-10) est :

✓1 1. $Tz\big(U(k-10)\big) = \frac{1}{z^9(z-1)}$

2. $Tz\big(U(k-10)\big) = z^{-10}$

3. $Tz\big(U(k-10)\big) = \frac{1}{z^9}$

4. Aucune des réponses précédentes n'est juste.

1.	1%
2.	2%
3.	3%
4.	4%

Notes

$$T_Z\left(\underbrace{U(k-10)}_{\text{retard de } 10}\right)$$

Séquence retardée de pT_e : $f(kT_e-pT_e)$	$z^{-p}.F(z) \quad ; \quad \lvert z\rvert > \frac{1}{R}$

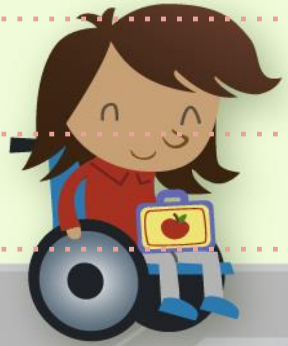
$$T_Z\big(f(k-n).U(k-n)\big) = Z^{-n}.T_Z\big(f(k).U(k)\big)$$

donc :

$$T_Z\big(1.U(k-10)\big) = Z^{-10}.T_Z\big(1.U(k)\big)$$

$$= Z^{-10}.\frac{z}{z-1}$$

$$T_Z\big(U(k-10)\big) = \frac{z^{-9}}{z-1} = \frac{1}{z^{9}(z-1)}$$



2’

La transformée en Z de (k-9).U(k-9) est :

✓ 1. $\mathrm{Tz}\big((\mathrm{k}-9).\mathrm{U}(\mathrm{k}-9)\big) = \frac{1}{z^8(z-1)^2}$ — 1%

2. $\mathrm{Tz}\big((\mathrm{k}-9).\mathrm{U}(\mathrm{k}-9)\big) = \frac{1}{z^8(z-1)}$ — 2%

3. $\mathrm{Tz}\big((\mathrm{k}-9).\mathrm{U}(\mathrm{k}-9)\big) = \frac{z^{-9}}{(z-1)^2}$ — 3%

4. Aucune des réponses précédentes n'est juste. — 4%

Notes

$$T_z\big((k-9).U(\underbrace{k-9}_{\text{retard de 9}})\big)$$

$$T_z\big(f(k-n).U(k-n)\big) = \underbrace{z^{-n}}_{\text{facteur retard}}.T_z\big(f(k).U(k)\big)$$

Donc:

$$T_z\big((k-9).U(k-9)\big) = z^{-9}.T_z\big(k.U(k)\big)$$

$$= z^{-9}.\frac{z}{(z-1)^2}$$

$$T_z\big((k-9).U(k-9)\big) = \frac{z^{-8}}{(z-1)^2} = \frac{1}{z^8(z-1)^2}$$

1’

La transformée en Z de Dirac(k) est :

1. $\mathrm{Tz}(\delta(k)) = z^{-1}$
2. ✓2 $\mathrm{Tz}(\delta(k)) = 1$
3. $\mathrm{Tz}(\delta(k)) = z$
4. Aucune des réponses précédentes n’est juste.

1	1%
2	2%
3	3%
4	4%

Notes

Transformées en Z de séquences numériques usuelles (T_e est quelconque)

$f_e=\{f(kT_e)\}=TZ^{-1}(F)$	$TZ(f_e) = F(z) = \sum_{k\geq 0} f(kT_e).z^{-k}$
δ_n où n est un entier naturel	z^{-n} ; $z \neq 0$

$$T_z(\delta(k)) = T_z(\delta_0(k)) = z^0 = 1.$$

La transformée en Z de k.U(k-3) est :

3’

✓1 1. $\mathrm{Tz}\big(\mathrm{k.\,U(k-3)}\big) = z^{-2}\left[\frac{1}{(z-1)^2} + \frac{3}{z-1}\right]$

2. $\mathrm{Tz}\big(\mathrm{k.\,U(k-3)}\big) = \frac{z^{-2}}{(z-1)^2}$

3. $\mathrm{Tz}\big(\mathrm{k.\,U(k-3)}\big) = z^{-2}\left[\frac{1}{(z-1)^2} - \frac{3}{z-1}\right]$

4. Aucune des réponses ci-dessus n’est juste

1%

2%

3%

4%

Notes

$$T_z(k.\underbrace{U(k-3)}_{\text{retard de 3}})$$

$$T_z(f(k-n).U(k-n)) = \underbrace{z^{-n}}_{\text{facteur retard}}.T_z(f(k).U(k))$$

Donc :

$$T_z(k.U(k-3)) = z^{-3}.T_z((k+3).U(k))$$

$$= z^{-3}.\left[T_z(k) + 3T_z(1)\right]$$

$$= z^{-3}\left(\frac{z}{(z-1)^2} + 3\,\frac{z}{z-1}\right)$$

$$T_z(k.U(k-3)) = z^{-2}\left(\frac{1}{(z-1)^2} + \frac{3}{z-1}\right)$$

3'

La transformée en Z de $3^k . \sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)$ est :

1. $Tz\left(3^k . \sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{3z}{z^2-9}$ — 1%

✓2 2. $Tz\left(3^k . \sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{3z}{z^2+9}$ — 2%

3. $Tz\left(3^k . \sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)\right) = 0$ — 3%

4. Aucune des réponses précédentes n'est juste — 4%

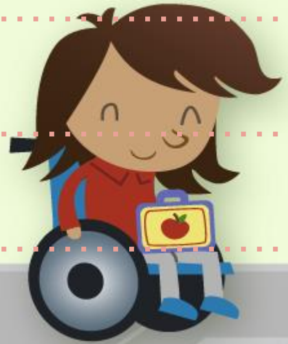
Notes

$$T_z\left(3^k \cdot \sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$\cos(\omega k T_e).U(kT_e)$	$\dfrac{z^2 - z\cos(\omega T_e)}{z^2 - 2z\cos(\omega T_e)+1}$; $\lvert z\rvert > 1$
$\sin(\omega k T_e).U(kT_e)$	$\dfrac{z\sin(\omega T_e)}{z^2 - 2z\cos(\omega T_e)+1}$; $\lvert z\rvert > 1$
$a^{kT_e}.\cos(\omega k T_e).U(kT_e)$	$\dfrac{z^2 - a^{T_e} z\cos(\omega T_e)}{z^2 - 2a^{T_e} z\cos(\omega T_e)+a^{2T_e}}$; $\lvert z\rvert > \lvert a^{T_e}\rvert$
$a^{kT_e}.\sin(\omega k T_e).U(kT_e)$	$\dfrac{a^{T_e} z\sin(\omega T_e)}{z^2 - 2a^{T_e} z\cos(\omega T_e)+a^{2T_e}}$; $\lvert z\rvert > \lvert a^{T_e}\rvert$

$a = 3$ et $\omega = \frac{\pi}{2}$

$$T_z\left(3^k \cdot \sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{3z\sin(\pi/2)}{z^2 - 6z\cos\pi/2 + 9} = \frac{3z}{z^2+9}$$



Exercices sur la transformation inverse

1’

La transformée en Z inverse de $\frac{z}{z+2}$ est :

1. $\mathrm{Tz}^{-1}\left(\frac{z}{z+2}\right) = 2^k$ — 1%
2. $\mathrm{Tz}^{-1}\left(\frac{z}{z+2}\right) = 2^k . U(k)$ — 2%
3. $\mathrm{Tz}^{-1}\left(\frac{z}{z+2}\right) = U(k-2)$ — 3%
4. ✓4 Aucune des réponses précédentes n′est juste. — 4%

Notes

$$T_z^{-1}\left(\frac{z}{z+2}\right) =$$

T_z^{-1}

$a^{kT_e}.U(kT_e)$	$\frac{z}{z-a^{T_e}}$; $\lvert z\rvert > \lvert a^{T_e}\rvert$

$a = -2$

$$(-2)^k . U(k) \xleftarrow{T_z^{-1}} \frac{z}{z+2}$$

Q

2’

La transformée en Z inverse de $\frac{1}{z-3}$ est :

1. $\mathrm{Tz}^{-1}\left(\frac{1}{z-3}\right) = 3^{k-1}$	1%
2. $\mathrm{Tz}^{-1}\left(\frac{1}{z-3}\right) = 3^{k}.U(k-1)$	2%
3. $\mathrm{Tz}^{-1}\left(\frac{1}{z-3}\right) = 3^{k}.U(k)$	3%
4.Aucune des réponses précédentes n′est juste.	4%

Notes

$$T_z^{-1}\left(\frac{1}{z-3}\right) =$$

On sait que $T_z^{-1}\left(\frac{z}{z-3}\right) = 3^k . U(k)$

Astuce : $$\frac{1}{z-3} = \underbrace{z^{-1}}_{\text{facteur retard de 1}} . \frac{z}{z-3}$$

$\downarrow$

$$T_z^{-1}\left(z^{-n} . F(z)\right) = f(k-n) . U(k-n)$$

Donc $T_z^{-1}\left(\frac{1}{z-3}\right) = 3^{k-1} . U(k-1)$

3’

La transformée en Z inverse de $\frac{1}{z^4(z-5)}$ est :

1. $\mathrm{Tz}^{-1}\left(\frac{1}{z^4(z-5)}\right) = 5^{k-4}.U(k-4)$ — 1%

2. $\mathrm{Tz}^{-1}\left(\frac{1}{z^4(z-5)}\right) = 5^{k-4}$ — 2%

3. $\mathrm{Tz}^{-1}\left(\frac{1}{z^4(z-5)}\right) = 5^{k}.U(k-4)$ — 3%

4. Aucune des réponses précédentes n′est juste. — 4%

Notes

$$T_Z\left(\frac{1}{z^4(z-5)}\right) = T_Z\left(z^{-5}\,\frac{z}{z-5}\right)$$

$$= T_Z\left(5^k \cdot U(k)\right)$$

facteur retard de 5

Donc $T_Z\left(\dfrac{1}{z^4(z-5)}\right) = 5^{k-5} \cdot U(k-5)$

Q

8’

La transformée en Z inverse de $\frac{1}{z^2-3z+2}$ est :

1. $\mathrm{Tz}^{-1}\left(\frac{1}{z^2-3z+2}\right)=\sqrt{2}^{k}.\,sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)U(k)$ — 1%
2. $\mathrm{Tz}^{-1}\left(\frac{1}{z^2-3z+2}\right)=\left(2^{k}-1\right)U(k-1)$ — 2%
3. $\mathrm{Tz}^{-1}\left(\frac{1}{z^2-3z+2}\right)=2^{k+1}-1$ — 3%
4. ✓4 $\mathrm{Tz}^{-1}\left(\frac{1}{z^2-3z+2}\right)=\left(2^{k-1}-1\right)U(k-1)$ — 4%

Notes $T_z\left(\dfrac{1}{z^2-3z+2}\right) = \left(2^{k-1}-1\right).U(k-1)$

$\cos(\omega kT_e).U(kT_e)$	$\dfrac{z^2 - z\cos(\omega T_e)}{z^2 - 2z\cos(\omega T_e)+1}$; $\lvert z\rvert > 1$
$\sin(\omega kT_e).U(kT_e)$	$\dfrac{z\sin(\omega T_e)}{z^2 - 2z\cos(\omega T_e)+1}$; $\lvert z\rvert > 1$
$a^{kT_e}.\cos(\omega kT_e).U(kT_e)$	$\dfrac{z^2 - a^{T_e}z\cos(\omega T_e)}{z^2 - 2a^{T_e}z\cos(\omega T_e)+a^{2T_e}}$; $\lvert z\rvert > \lvert a^{T_e}\rvert$
$a^{kT_e}.\sin(\omega kT_e).U(kT_e)$	$\dfrac{a^{T_e}z\sin(\omega T_e)}{z^2 - 2a^{T_e}z\cos(\omega T_e)+a^{2T_e}}$; $\lvert z\rvert > \lvert a^{T_e}\rvert$

?

$\Delta < 0$

ici $z^2-3z+2=0$ a pour $\Delta = 9-8 = 1 > 0$, on ne peut pas utiliser la formule ci-dessus

DSES de $\dfrac{1}{z^2-3z+2} = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)} = \dfrac{-1}{z-1} + \dfrac{1}{z-2}$

$$T_z^{-1}\left(\frac{1}{z^2-3z+2}\right) = -T_z^{-1}\left(z^{-1}\frac{z}{z-1}\right) + T_z^{-1}\left(z^{-1}\frac{z}{z-2}\right) = -U(k-1) + 2^{k-1}U(k-1)$$

Problèmes sur la transformation en Z

Quelle est la fonction de transfert du système caractérisé par l'équation aux différences ci-dessous :

$$16.\,y(k-2) - 4.\,y(k-1) + y(k) = x(k) - 2.\,x(k-1)$$

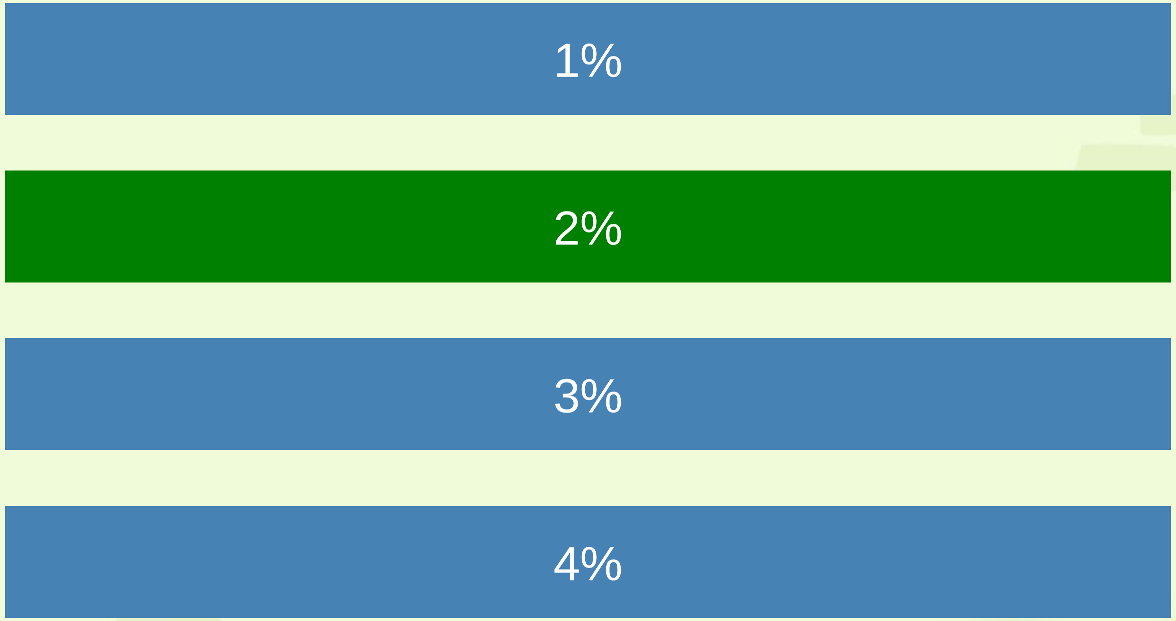
5'

1. $H(z) = \frac{z-2z^2}{16z^2-4z+1}$

✓2 2. $H(z) = \frac{1-2z^{-1}}{16z^{-2}-4z^{-1}+1}$

3. $H(z) = \frac{16z^{-2}-4z^{-1}+1}{1-2z^{-1}}$

4. $H(z) = \frac{z-2}{16z^2-4z+1}$



Notes $\quad 16\,y(k-2) - 4\,y(k-1) + y(k) = x(k) - 2\,x(k-1) \quad (E)$

Fonction de transfert : On pose $Y(z) = T_z(y(k))$ et $X(z) = T_z(x(k))$, on applique T_z à l'équation, puis on cherche $H(z) = \dfrac{Y(z)}{X(z)}$

$$T_z(E) \iff 16\,z^{-2}\cdot Y(z) - 4\cdot z^{-1}\cdot Y(z) + Y(z) = X(z) - 2\,z^{-1}\cdot X(z)$$

$$\iff \left(16\,z^{-2} - 4\,z^{-1} + 1\right) Y(z) = \left(1 - 2\,z^{-1}\right)\cdot X(z)$$

$$\iff Y(z) = \frac{1 - 2\,z^{-1}}{16\,z^{-2} - 4\,z^{-1} + 1}\cdot X(z)$$

Donc $\quad H(z) = \dfrac{Y(z)}{X(z)} = \dfrac{1 - 2\,z^{-1}}{16\,z^{-2} - 4\,z^{-1} + 1}$

3’

Une autre expression de la fonction de transfert ci-dessous $H(z) = \frac{1-2z^{-1}}{16z^{-2}-4z^{-1}+1}$ est :

1. $H(z) = \frac{z-2z^2}{16z^2-4z+1}$ — 1%

2. ✓2 $H(z) = \frac{z^2-2z}{z^2-4z+16}$ — 2%

3. $H(z) = \frac{z-2}{16z^2-4z+1}$ — 3%

4. Aucune des réponses précédentes n’est juste — 4%

Notes

$$H(z) = \frac{1 - 2z^{-1}}{16z^{-2} - 4z^{-1} + 1} \times \frac{z^2}{z^2}$$

ASTUCE

$$H(z) = \frac{z^2 - 2z}{16 - 4z + z^2}$$

$$H(z) = \frac{z^2 - 2z}{z^2 - 4z + 16}$$

2’

Quelle est l'expression de Y(z), lorsque le signal d'entrée x est une impulsion de Dirac ?

(rappel fonction de transfert : $H(z) = \frac{z^2-2z}{z^2-4z+16}$)

✓1 1. $Y(z) = \frac{z^2-2z}{z^2-4z+16}$ — 1%

2. $Y(z) = \frac{z-2}{z^2-4z+16}$ — 2%

3. $Y(z) = \frac{z^2-2z}{(z^2-4z+16)(z-1)}$ — 3%

4. Aucune des réponses précédentes n’est juste — 4%

Notes

entrée

$x(k) = \delta(k)$

$$16y(k-2) - 4y(k-1) + y(k) = x(k) - 2x(k-1)$$

sortie

$y(k)$??

Tz

$X(z) = 1$

$$\times \frac{z^2 - 2z}{z^2 - 4z + 16}$$

$$Y(z) = \frac{z^2 - 2z}{z^2 - 4z + 16}$$

4’

Quelle est alors la réponse impulsionnelle du système ?

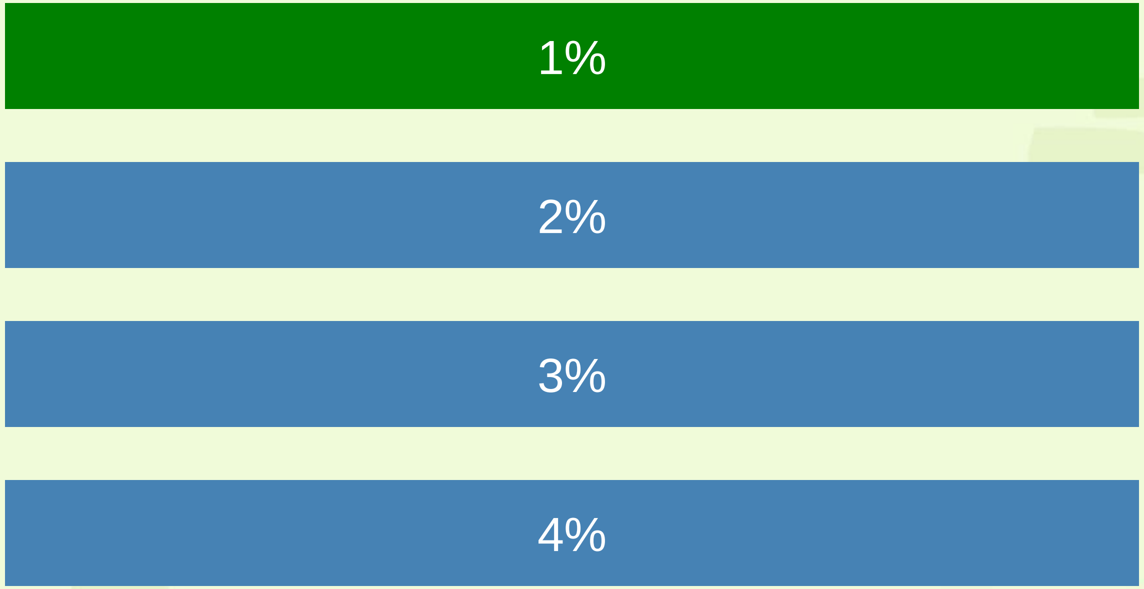
(rappel fonction de transfert : $H(z) = \frac{z^2-2z}{z^2-4z+16}$)

✓1 $1.\ y(k) = 4^k.\cos\left(k\frac{\pi}{3}\right).\mathrm{U(k)}$

$2.\ y(k) = 4^k.\sin\left(k\frac{\pi}{6}\right).\ \mathrm{U(k)}$

$3.\ y(k) = 4^k.\sin\left(k\frac{\pi}{3}\right).\ \mathrm{U(k)}$

$4.\ y(k) = 8^k.\cos\left(k\frac{\pi}{6}\right).\mathrm{U(k)}$



Notes

entrée — sortie

$$\begin{tikzcd}
x(k)=\delta(k) \arrow[r] \arrow[d, "T_z"'] & \boxed{16y(k-2)-4y(k-1)+y(k) = x(k)-2x(k-1)} \arrow[r] & y(k)\ ?? \\
X(z)=1 \arrow[r] & \boxed{\times \dfrac{z^2-2z}{z^2-4z+16}} \arrow[r] & Y(z)=\dfrac{z^2-2z}{z^2-4z+16} \arrow[u, "T_z^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

$$y(k) = T_z^{-1}\left(\frac{z^2-2z}{z^2-4z+16}\right) \quad ??$$

Notes

$\cos(\omega kT_e).U(kT_e)$	$\frac{\cancel{z^2 - z\cos(\omega T_e)}}{z^2 - 2z\cos(\omega T_e)+1}$; $\lvert z\rvert > 1$
$\sin(\omega kT_e).U(kT_e)$	$\frac{\cancel{z\sin(\omega T_e)}}{z^2 - 2z\cos(\omega T_e)+1}$; $\lvert z\rvert > 1$
$a^{kT_e}.\cos(\omega kT_e).U(kT_e)$	$\frac{z^2 - a^{T_e}z\cos(\omega T_e)}{z^2 - 2a^{T_e}z\cos(\omega T_e)+a^{2T_e}}$; $\lvert z\rvert > \lvert a^{T_e}\rvert$
$a^{kT_e}.\sin(\omega kT_e).U(kT_e)$	$\frac{a^{T_e}z\sin(\omega T_e)}{z^2 - 2a^{T_e}z\cos(\omega T_e)+a^{2T_e}}$; $\lvert z\rvert > \lvert a^{T_e}\rvert$

$\Delta < 0$

$$Y(z) = \frac{z^2 - 2z}{z^2 - 4z + 16} \longrightarrow \Delta = 16 - 4\times 16 = -48 < 0$$

Dénominateur

$z^2 - 2az\cos\omega + a^2$

On identifie : $\boxed{a = 4}$

$2a\cos\omega = 4 \iff \cos\omega = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \Leftarrow \boxed{\omega = \frac{\pi}{3}}$

Numérateur : $z^2 - az\cos\omega = z^2 - 4z\cos\frac{\pi}{3} = z^2 - 2z$. ok

Donc $y(k) = 4^k.\cos(k\frac{\pi}{3})$ est la réponse impulsionnelle.

Q

4’

Quelle est alors la réponse du même système à une impulsion de Dirac retardée de 3 ?

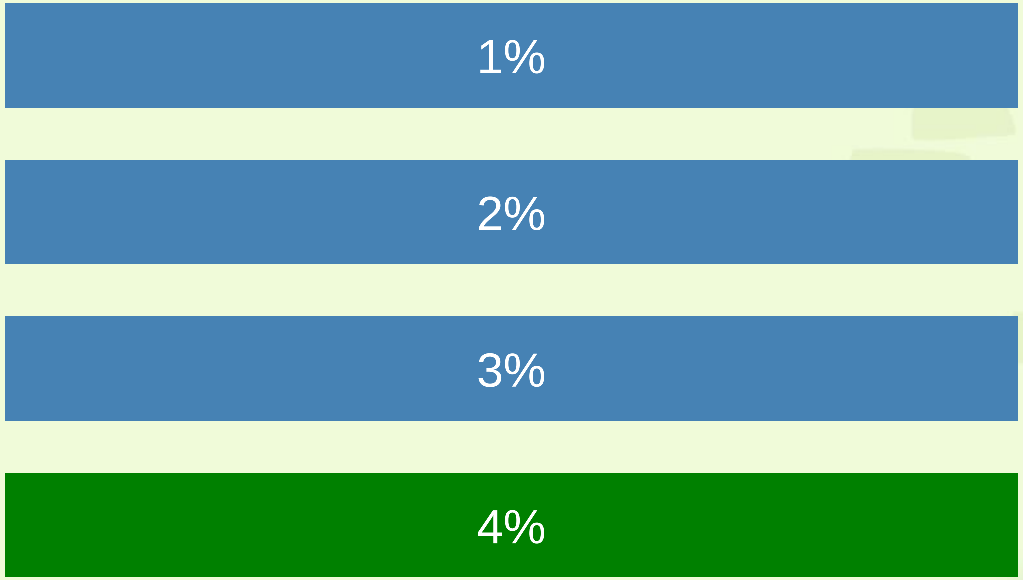
(rappel fonction de transfert : $H(z) = \frac{z^2-2z}{z^2-4z+16}$)

1. $y(k) = 4^k . \cos\left(k\frac{\pi}{3}\right)$.U(k-3)

2. $y(k) = 4^{k-3} . \cos\left(k\frac{\pi}{6}\right)$. U(k-3)

3. $y(k) = 4^{k-3} . \cos(k-\pi)$. U(k-3)

✓4 4. $y(k) = -4^{k-3} . \cos\left(k\frac{\pi}{3}\right)$. U(k-3)



Notes

$$x(k) = \delta(k-3) \longrightarrow \boxed{(E)} \longrightarrow y(k) = \ ?$$

$$\downarrow T_z \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \uparrow T_z^{-1}$$

$$X(z) = z^{-3} \longrightarrow \boxed{\times \frac{z^2-2z}{z^2-4z+16}} \longrightarrow Y(z) = z^{-3}\,\frac{z^2-2z}{z^2-4z+16}$$

$$y(k) = T_z^{-1}\left(\underbrace{z^{-3}}_{\text{facteur retard de 3}} \cdot \frac{z^2-2z}{z^2-4z+16}\right)$$

$$\frac{z^2-2z}{z^2-4z+16} = T_z\left(4^k \cdot \cos\left(k\frac{\pi}{3}\right) \cdot U(k)\right)$$

Donc $y(k) = 4^{k-3} \cdot \underbrace{\cos\left(\frac{(k-3)\pi}{3}\right)}_{= \cos\left(\frac{k\pi}{3} - \pi\right)} \cdot U(k-3)$

Notes

$$\cos\left(k\frac{\pi}{3}-\pi\right) = \cos\left(k\frac{\pi}{3}\right)\underbrace{\cos\pi}_{=-1} + \underbrace{\sin\left(k\frac{\pi}{3}\right)\cdot\sin\pi}_{=0}$$

Donc $y(k) = -4^{k-3}\cdot\cos\left(k\frac{\pi}{3}\right)\cdot U(k-3)$ et la réponse du système à $x(k) = \delta(k-3)$