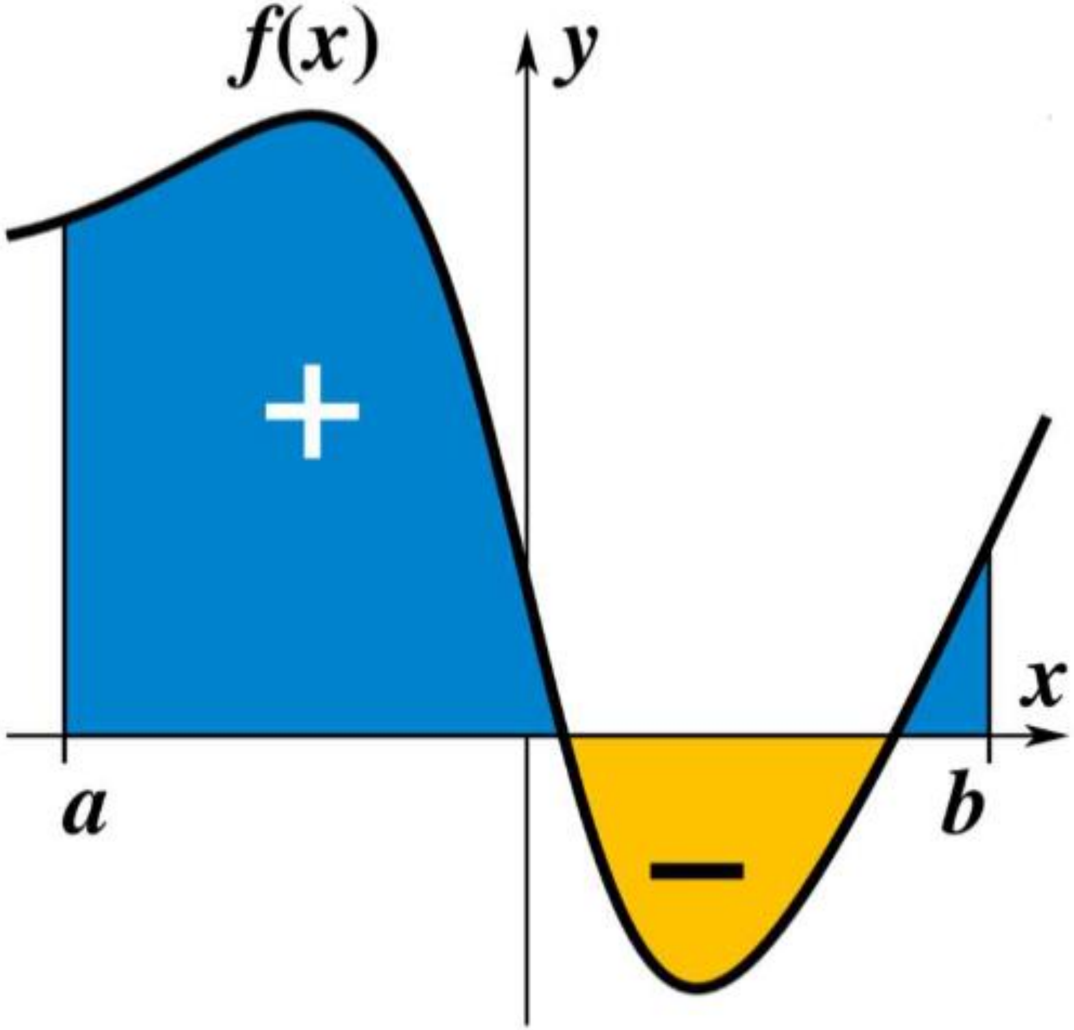
Chapitre 8 : Compléments sur le calcul intégral



Partie A : Rappels sur les propriétés et calculs de base

Page 4 chapitre 8

Théorèmes/Définitions/Notations :

1) Toute fonction continue sur [a,b] est intégrable sur [a,b]

2) Soit f, une fonction intégrable sur [a,b]. On appelle fonction primitive de f sur [a,b] toute fonction notée F, définie par : $F'(x) = f(x) \ \forall x \in [a, b]$.

3) On note $\int f(x)dx$ toutes les fonctions primitives de f, on a donc :

$$\int f(x)dx = F(x) + cte$$

4) Soit f, une fonction continue sur [a,b], soit F, une fonction primitive de f. On a alors :

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Page 4 chapitre 8

Propriétés

1) Soit f, g deux fonctions continues sur [a,b]. Soit α et β deux nombres réels. On a alors :

$$\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))dt = \alpha\int_a^b f(t)dt + \beta\int_a^b g(t)dt$$

2) Relation de Chasles : Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé I. Soit a,b,c trois réels de I. On a alors :

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

3) $\boxed{\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt}$

4) Soit f et g, deux fonctions continues sur [a,b] telles que $f(x) \leq g(x)\ \forall x \in [a,b]$, on a alors :

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

Intégrales, parité et périodicité :

1) Si f est une fonction paire et continue sur [-a,a], alors : $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2.\int_{0}^{a} f(x)dx$

2) Si f est une fonction impaire et continue sur [-a,a], alors : $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

3) Si f est une fonction T-périodique, continue sur tout intervalle [a,a+T], alors :

$$\int_{a}^{a+T} f(t)dt = \int_{0}^{T} f(t)dt$$

Page 6 chapitre 8

1	$\int x^{\alpha}.dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + cte\ ;\ \alpha \neq -1$	$\int U'.U^{\alpha}dx = \frac{U^{\alpha+1}}{\alpha+1} + cte\ ;\ \alpha \neq -1$
2	$\int \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = \sqrt{x} + cte$	$\int \frac{U'}{2\sqrt{U}}dx = \sqrt{U} + cte$
3	$\int e^{x}.dx = e^{x} + cte$	$\int U'.e^{U}.dx = e^{U} + cte$
4	$\int \frac{1}{x}dx = \ln(\|x\|) + cte$	$\int \frac{U'}{U}dx = \ln(\|U\|) + cte$
5	$\int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x} + cte$	$\int \frac{U'}{U^2}dx = -\frac{1}{U} + cte$
6	$\int \cos(x).dx = \sin(x) + cte$	$\int U'.\cos(U).dx = \sin(U) + cte$
7	$\int \sin(x).dx = -\cos(x) + cte$	$\int U'.\sin(U).dx = -\cos(U) + cte$
8	$\int \frac{1}{\cos^2(x)}.dx = \tan(x) + cte$	$\int \frac{U'}{\cos^2(U)}.dx = \tan(U) + cte$
9	$\int (1+\tan^2(x)).dx = \tan(x) + cte$	$\int U'.(1+\tan^2(U)).dx = \tan(U) + cte$
12	$\int \frac{1}{1+x^2}.dx = \arctan(x) + cte$	$\int \frac{U'}{1+U^2}.dx = \arctan(U) + cte$

Notes

Page 5 chapitre 8

ⓐ $\int u' u^{\alpha} \, dt = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c^{te} \; ; \; \alpha \neq -1$

Yesssss.

$I = \int_0^3 2t(t^2-9)^{10} \, dt = \left[\frac{(t^2-9)^{11}}{11}\right]_0^3 = \underbrace{\frac{(3^2-9)^{11}}{11}}_{0} - \frac{(-9)^{11}}{11} = \frac{9^{11}}{11}.$

$\alpha = 10 \quad u = t^2 - 9 \implies u' = 2t$

ⓑ $\int u' . e^{u} \, dt = e^{u} + c^{te}$

yessss.

$J = \int_0^{\pi} \cos t . e^{\sin t} \, dt = \left[e^{\sin t}\right]_0^{\pi} = e^{\overset{0}{\sin \pi}} - e^{\overset{0}{\sin 0}} = 1 - 1 = 0.$

$u = \sin t \implies u' = \cos t$

Notes

Page 5 chapitre 8

ⓒ $\int \frac{u'}{u}\, dt = \ln|u| + cte$

$\ln A - \ln B = \ln\left(\frac{A}{B}\right)$

$K = \frac{1}{6}\int_0^1 \frac{6x}{3x^2+4}\, dx = \frac{1}{6}\cdot\left[\ln(3x^2+4)\right]_0^1 = \frac{1}{6}\cdot(\ln 7 - \ln 4)$

$u = 3x^2+4 \Rightarrow u' = 6x$

$= \frac{1}{6}\cdot\ln\left(\frac{7}{4}\right)$

ⓓ $\int u' \cdot \cos u\, dt = \underline{\sin u} + cte$

$\frac{1}{2}\int 2t \cdot \cos(t^2+1)\, dt = \frac{1}{2}\cdot\sin(t^2+1) + cte$

$u = t^2+1 \Rightarrow u' = 2t$

$$K(t) = \int \frac{2(2t^3+2t)}{2\sqrt{t^4+2.t^2+1}}\,dt = \ldots$$

Brouillon

$$\int \frac{U'}{2\sqrt{U}}\,dt = \sqrt{U} + cte \quad \text{où } U = t^4+2t^2+1 \Rightarrow U' = 4t^3+4t = 2(2t^3+2t)$$

$$K(t) = \sqrt{t^4+2t^2+1} + cte$$

$$J(t) = \int 3.\sin(4t).\cos^7(4t)dt = \frac{3}{-4}\int -4\sin(4t).\cos^7(4t)\,dt$$

$$\int U'.U^7\,dt = \frac{U^8}{8} + cte \quad \text{où } U = \cos(4t) \Rightarrow U' = -4\sin(4t)$$

$$J(t) = -\frac{3}{4}\cdot\frac{\cos^8(4t)}{8} + cte \quad -\frac{3\cos^8(4t)}{32} + cte$$

2) Calculer les intégrales suivantes :

Brouillon

$L = \int_{-2}^{-1} \frac{3}{t} dt = \left[3.\ln|t|\right]_{-2}^{-1} = 3\ln 1 - 3\ln 2 = -3\ln 2.$

$\int \frac{u'}{u} dt = \ln|u| + cte$ où $u = t \Rightarrow u' = 1$

$M = \int_{-\pi}^{\pi} x^3.\cos(7x) dx$

impaire x paire = impaire sur $[-\pi;\pi]$, centré en 0.

$M = 0.$

$N = \int_0^1 t.\sqrt{e^{-t^2}}dt = \int_0^1 t.\left(e^{-t^2}\right)^{1/2} dt = -\int_0^1 -t.e^{-t^2/2}\, dt$

$\int u' e^u dt = e^u + cte$ où $u = -\frac{t^2}{2} \Rightarrow u' = -t$

$N = -\left[e^{-t^2/2}\right]_0^1 = -e^{-1/2} + 1 = 1 - \frac{1}{\sqrt{e}}$

Notes

Page 7 chapitre 8

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin t \times e^{2t} \, dt =$$

$$J = \int_0^{\pi} (2t+1) \times \cos(3t) \, dt =$$

$$K = \int_1^{e} (t+1) \times \ln(t) \, dt =$$

Aucune formule de primitives (page 6) ne peut s'appliquer ici

Partie B : Méthodes de calcul

Page 8 chapitre 7

I. Intégration par parties

1) La formule

Soit u et v deux fonctions dérivables sur [a,b] telles que u' et v' sont continues sur [a,b].
On a alors : $\int_a^b u(t).v'(t)dt = [u(t).v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t).v(t)dt$

Démonstration

$[u(t).v(t)]' = u'(t).v(t) + u(t).v'(t)$

$\int_a^b [u(t).v(t)]' dt = \int_a^b (u'(t).v(t) + u(t).v'(t))\, dt$

$[u(t).v(t)]_a^b = \int_a^b u'(t).v(t)\, dt + \int_a^b u(t).v'(t)\, dt$

Donc : $\int_a^b u(t).v'(t)dt = [u(t).v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t).v(t)\, dt$

2) Remarques 1° Cette formule s'applique lorsqu'on cherche à calculer l'intégrale d'un produit de fonctions qui n'est pas de la forme U'.f '(U) (voir les formules de la colonne droite du tableau p.7), et à condition que $\int_a^b u'(t).v(t)dt$ soit plus facile à calculer que $\int_a^b u(t).v'(t)dt$.

3) Exemples Calculer les intégrales suivantes :

Page 8 chapitre 7

$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t.\cos(t)\,dt$ On ne peut appliquer aucune formule de la page 6.

IPP $\int_a^b UV'dt = [UV]_a^b - \int_a^b U'V\,dt$

$\begin{cases} U = t \\ V' = \cos t \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} U' = 1 \\ V = \sin t \end{cases}$

$K = [t.\sin t]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin t\,dt = \frac{\pi}{2}\underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{1} - 0 - [-\cos t]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} + \underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{0} - \underbrace{\cos 0}_{1}$

$K = \frac{\pi}{2} - 1$

Notes

Page 9 ou 11 chapitre 7

Moyen mnémotechnique pour choisir U dans la forme d'IPP:

$$\int_a^b U.V'\,dt = \left[U.V\right]_a^b - \int_a^b U'.V\,dt$$

$\xrightarrow{\text{choix } U}$

ALPES

- A → Arctan
- L → ln
- P → Polynômes
- E → Exp.
- S → sin, cos

Expls: $\int_0^{\pi/2} t.\cos t\,dt$; $\int \left(\frac{t^5}{6} - \frac{3t}{2} + 2\right).\ln t\,dt$; $\int_0^1 (t+1)e^{3t}\,dt$

- $\int_0^{\pi/2} t.\cos t\,dt$: $P \times S$; $U = t$, $V' = \cos t$
- $\int \left(\frac{t^5}{6} - \frac{3t}{2} + 2\right).\ln t\,dt$: $P \times L$; $U = \ln t$, $V' = \frac{t^5}{6} - \frac{3t}{2} + 2$
- $\int_0^1 (t+1)e^{3t}\,dt$: $P \times E$; $U = t+1$, $V' = e^{3t}$

Page 10 chapitre 7

$L(t) = \int (t^5 - 3t + 2).\ln(t)\,dt =$ Aucune formule de la page 6 ne s'applique ici

IPP: $\int_a^b U.V'\,dt = [U.V]_a^b - \int_a^b U'.V\,dt$

On pose $\begin{cases} U = \ln t \\ V' = t^5 - 3t + 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} U' = \frac{1}{t} \\ V = \frac{t^6}{6} - 3\frac{t^2}{2} + 2t \end{cases}$

$$L(t) = \left(\frac{t^6}{6} - 3\frac{t^2}{2} + 2t\right).\ln t - \int \underbrace{\frac{1}{t}\left(\frac{t^6}{6} - 3\frac{t^2}{2} + 2t\right)}\,dt$$

$$- \int \left(\frac{t^5}{6} - \frac{3t}{2} + 2\right) dt$$

$$L(t) = \left(\frac{t^6}{6} - \frac{3t^2}{2} + 2t\right).\ln t - \left(\frac{t^6}{36} - \frac{3t^2}{4} + 2t\right) + cte$$

Notes

Page 10 chapitre 7

ASTUCE .

$J(t) = \int 1 . \ln(t)dt$

PxL

$\begin{cases} U = \ln t \\ V' = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} U' = \frac{1}{t} \\ V = t \end{cases}$

$\int_a^b U.V'dt = [U.V]_a^b - \int_a^b U'.V\,dt$

$J(t) = t.\ln t - \int \underbrace{\frac{1}{t}.t}_{1}\,dt = t.\ln t - t + cte$

Vérification : $J'(t) = (\underset{U.V}{t.\ln t} - t + cte)' = 1.\ln t + \underbrace{t.\frac{1}{t}}_{1} - 1 = \ln t$ ok

Notes

Page 10 chapitre 7

$$K = \int_0^3 \underbrace{(x-3)^2}_{P} . \underbrace{e^{5x}}_{E} dx \ldots$$

$(f^2)' = 2.f'.f$

IPP1

$$\begin{cases} U = (x-3)^2 \\ V' = e^{5x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U' = 2(x-3) \\ V = \frac{1}{5} e^{5x} \end{cases}$$

$\{ [($

$$\int_a^b u.v'\,dx = [u.v]_a^b - \int_a^b u'.v\,dx$$

$$K = -\frac{9}{5} - \frac{6}{25} - \frac{2e^{15}}{125} - \frac{2}{125} \ldots$$

$$K = \left[\frac{1}{5}(x-3)^2 . e^{5x}\right]_0^3 - \frac{2}{5}\int_0^3 (x-3).e^{5x}\,dx$$

$$K = 0 - \frac{1}{5}(-3)^2 - \frac{2}{5} . \boxed{J} \text{ ou } J = \int_0^3 (x-3)\,e^{5x}\,dx$$

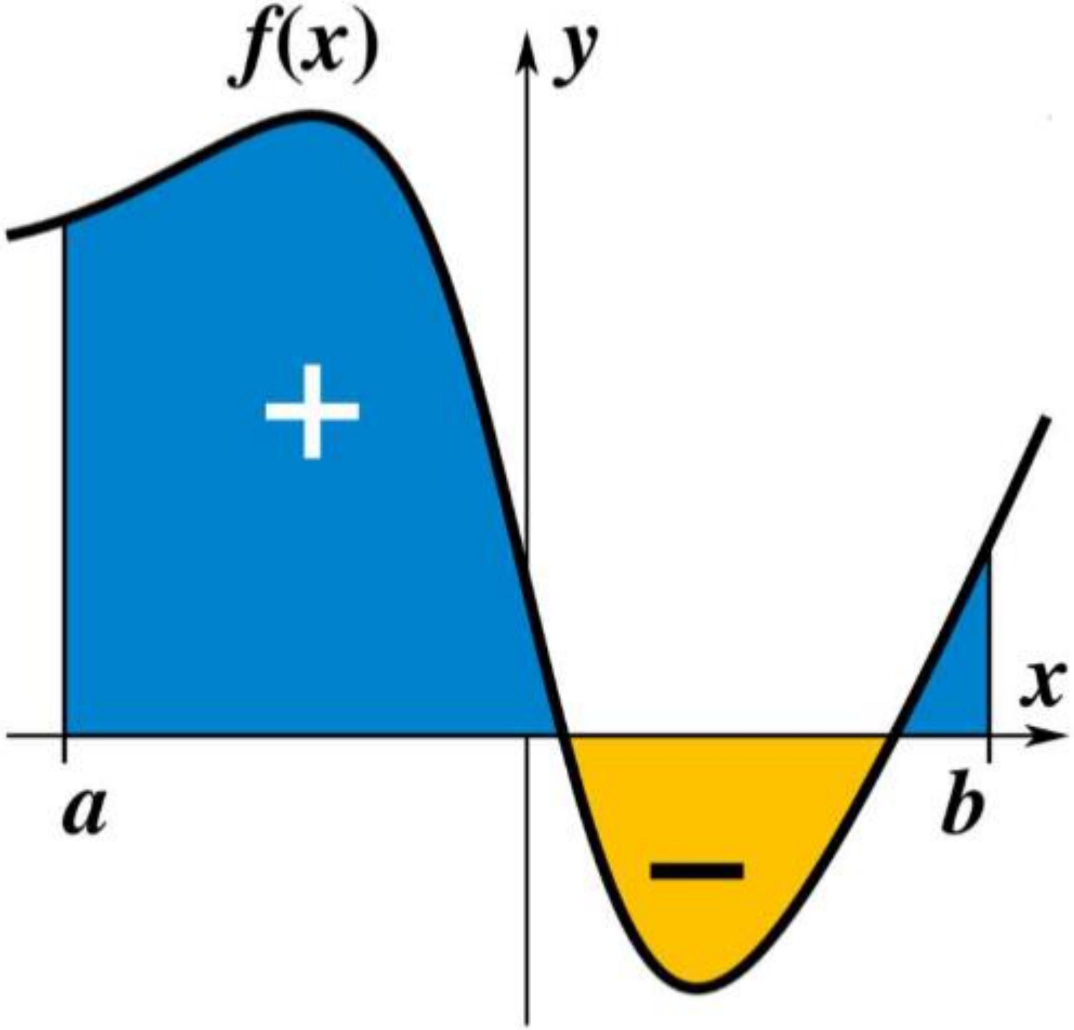
IPP2

$$\begin{cases} U = x-3 \\ V' = e^{5x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U' = 1 \\ V = \frac{1}{5} e^{5x} \end{cases}$$

$\frac{1}{5}$

$$K = -\frac{9}{5} - \frac{2}{5} \times \left\{ \left[(x-3).\frac{e^{5x}}{5}\right]_0^3 - \frac{1}{5}\int_0^3 e^{5x}\,dx \right\}$$

$$= -\frac{9}{5} - \frac{2}{5}\left\{ 0 - \frac{(-3)}{5} - \frac{1}{5} . \left[\frac{e^{5x}}{5}\right]_0^3 \right\} = -\frac{9}{5} - \frac{2}{5} . \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{25}(e^{15} - 1) \right) = -\frac{9}{5} - \frac{2}{25}\left(3 - \frac{e^{15}}{5} + \frac{1}{5} \right)$$



f(x)
y
+
x
a
−
b

Notes

Méthode directe : "on voit la formule de primitive".

$$I_1 = 5\int_{35}^{40} \frac{1}{5}\left(\frac{x}{5}-7\right)^9 dx$$

$$\int U'U^{\alpha}dt = \frac{U^{\alpha+1}}{\alpha+1} + cte$$

ici $U = \frac{x}{5} - 7 \Rightarrow U' = \frac{1}{5}$.

$$I_1 = 5.\left[\frac{\left(\frac{x}{5}-7\right)^{10}}{10}\right]_{35}^{40} = \frac{5}{10}.\left[\left(\frac{x}{5}-7\right)^{10}\right]_{35}^{40}$$

$$I_1 = \frac{1}{2}\left(\left(\underbrace{\frac{40}{5}}_{8}-7\right)^{10} - \left(\underbrace{\frac{35}{5}}_{7}-7\right)^{10}\right) = \frac{1}{2}\left(1^{10}-0\right)$$

$I_1 = 1/2$

Méthode du "chemin des écoliers"

Page 11&13 chapitre 7

$$I = \int_{35}^{40}\left(\frac{x}{5}-7\right)^9 dx$$

On pose $t = \frac{x}{5} - 7$.

- Bornes : $\begin{cases} x = 35 \iff t = \frac{35}{5} - 7 = 0 \\ x = 40 \iff t = \frac{40}{5} - 7 = 1 \end{cases}$
- $\frac{dt}{dx}$ = "dérivée de t par rapport à x"

$$\frac{dt}{dx} = \left(\frac{x}{5}-7\right)' = \frac{1}{5} \iff dx = 5dt$$

$$I = \int_0^1 t^9 . 5dt = 5.\int_0^1 t^9 dt = 5.\left[\frac{t^{10}}{10}\right]_0^1$$

$$= \frac{5}{10}\left(1^{10}-0\right) = \frac{1}{2}.$$

Notes

Méthode directe :

$$I_2 = \frac{1}{2}\int_0^3 2x \cdot e^{x^2}\,dx$$

$$\int u' e^u\,dx = e^u + cte$$

$u = x^2 \Longrightarrow u' = \underline{\underline{2x}}$

$$I_2 = \frac{1}{2}\cdot\left[e^{x^2}\right]_0^3 = \frac{1}{2}\left(e^9 - 1\right)$$

Méthode en posant le changement de variable :

$$I_2 = \int_0^3 x\,e^{x^2}\,dx$$

On pose $t = x^2$; $x \geqslant 0 \Longleftrightarrow x = \sqrt{t}$

∘ Bornes : $\begin{cases} x = 0 \Longleftrightarrow t = 0^2 = 0 \\ x = 3 \Longleftrightarrow t = 3^2 = 9 \end{cases}$

∘ relation entre dx et dt :

$t = x^2 \Longrightarrow \frac{dt}{dx} = (x^2)' = 2x \Longleftrightarrow dt = 2x\,dx \Longleftrightarrow dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$

$$I_2 = \int_0^9 \cancel{\sqrt{t}}\cdot e^t\,\frac{dt}{2\cancel{\sqrt{t}}} = \frac{1}{2}\int_0^9 e^t\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^t\right]_0^9 = \frac{1}{2}\left(e^9 - 1\right)$$

Page 11&13 chapitre 7

Page 12 chapitre 7

II. Changement de variables

1) La formule

Soit f, une fonction continue sur [a,b]. Soit $I = \int_a^b f(x)dx$.

On pose $x = \varphi(t)$, où φ est une fonction telle que : $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$, φ est bijective et dérivable sur $[\alpha,\beta]$ si φ est croissante (et $[\beta,\alpha]$ sinon).

On a alors : $\dfrac{dx}{dt} = \varphi'(t)$ donc $dx = \varphi'(t)dt$, et :

$$I = \int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

2) Exemples

Page 12 chapitre 7

Calculer l'intégrale : $I = \int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}$, en utilisant le changement de variable : $t = \sqrt{x}$

On pose $\begin{cases} x > 0 \\ t = \sqrt{x} \end{cases} \iff x = t^2$

- Borns $\begin{cases} x = 1 \iff t = \sqrt{1} = 1 \\ x = 3 \iff t = \sqrt{3} \end{cases}$

- $t = \sqrt{x}$

$\frac{dt}{dx} = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \iff dx = 2\sqrt{x}\, dt \iff dx = 2t\,dt$

ou

$x = t^2$

$\frac{dx}{dt} = (t^2)' = 2t$

$dx = 2t\,dt$

$$I = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2\cancel{t}\,dt}{\cancel{t}(t^2+1)} = 2 \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dt}{t^2+1} = 2 \left[\arctan(t)\right]_1^{\sqrt{3}}$$

$$I = 2\left(\arctan\sqrt{3} - \arctan 1\right) = 2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = 2\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$$

Page 15 chapitre 7

Calculer l'intégrale : $J = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$, en utilisant le changement de variable : $x = \sin(t)$

On pose $x = \sin t \iff t = \arcsin x \in [-\pi/2 ; \pi/2]$

$\sqrt{(-3)^2} = 3$

Bornes : $\begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} t = \arcsin 0 = 0 \\ t = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

$x = \sin t \implies \frac{dx}{dt} = (\sin t)' = \cos t \iff dx = \cos t . dt$

$J = \int_0^{\pi/2} \underbrace{\sqrt{1-\sin^2 t}}_{\sqrt{\cos^2 t}} . \cos t \, dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \, dt$

$\sqrt{\cos^2 t} = |\cos t| = \cos t$ car $\cos t \geq 0 \; \forall t \in [0 ; \pi/2]$

$\cos^2 t + \sin^2 t = 1$

$J = \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos(2t)}{2} dt = \frac{1}{2} \times \int_0^{\pi/2} (1 + \cos(2t)) \, dt$

$= 1/2 \times \left[t + \frac{\sin(2t)}{2} \right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} + 0 - 0 \right) = \frac{\pi}{4}$