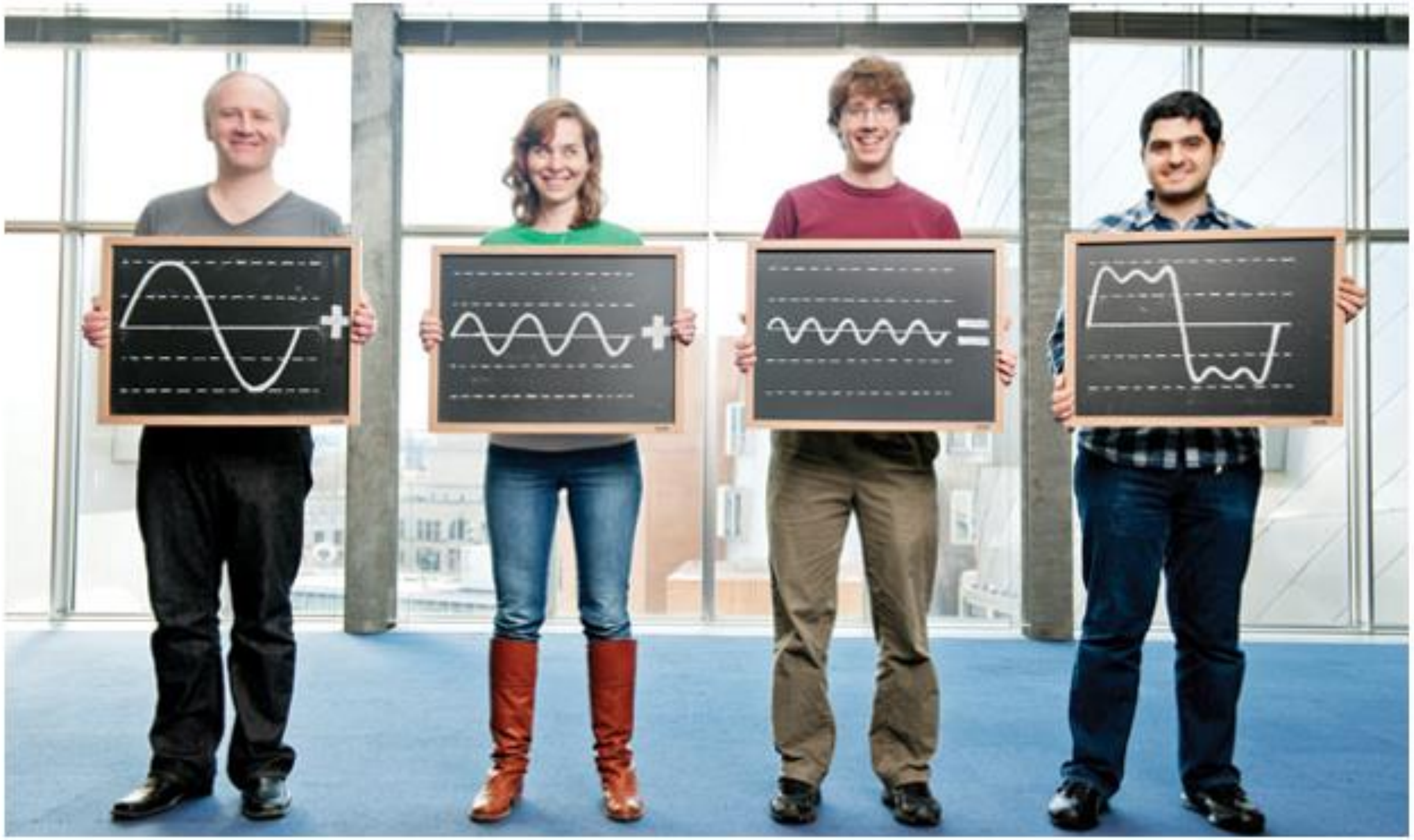
Chapitre 9 : Initiation aux séries de Fourier



Notes

Exple

$$x(t) = \underbrace{\overset{A_1=7}{7}\cos(\pi t)} + \underbrace{\overset{A_2=3}{3}\cos(3\pi t)} - \underbrace{\overset{A_3=2}{2}\sin(5\pi t)}$$

$f_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow T_1 = 2$; $f_2 = \frac{3}{2}$; $T_2 = \frac{2}{3}$; $f_3 = \frac{5}{2}$ $T_3 = \frac{2}{5}$

Rappel : $A\cos(\omega t + \varphi)$ ou $A\sin(\omega t + \varphi)$

$$\boxed{\omega = 2\pi f} \iff f = \frac{\omega}{2\pi} \iff T = \frac{2\pi}{\omega}$$

C'est le spectre d'amplitude du signal x

" en fréquence "

" en raies "

Remarque La période x est : $T = 2$

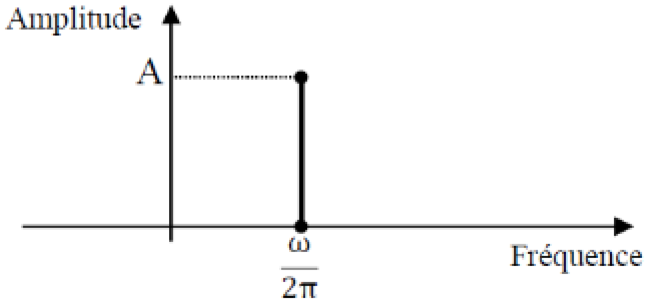
Notes

Page 3 chapitre 9

Spectre de signaux sinusoïdaux

Le **spectre** d'un signal est la **représentation des amplitudes** des différentes composantes présentes dans le signal **en fonction de la fréquence.**

Spectre du signal sinusoïdal $\mathbf{x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)}$(et donc aussi du signal $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$)

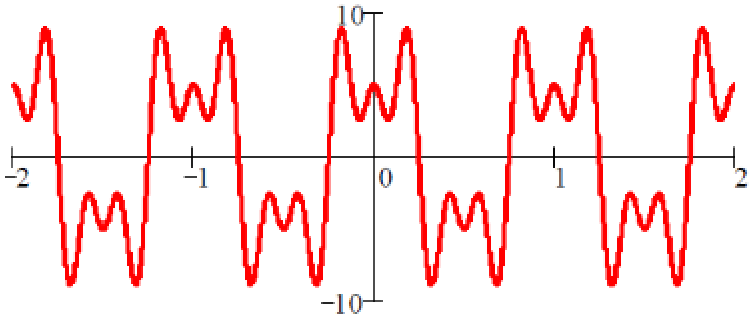


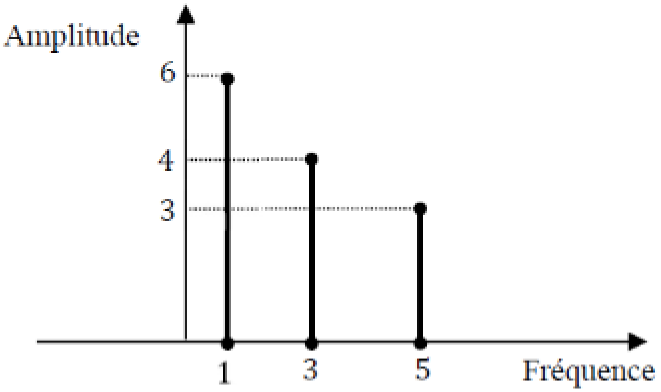
Le spectre d'une somme de sinusoïdes est la somme de leurs spectres.

Spectre du signal périodique $\mathbf{x(t) = 3\cos(10\pi t) + 6\sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right) - 4\cos(6\pi t)}$

(Remarque : $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\alpha)$)

Représentation temporelle

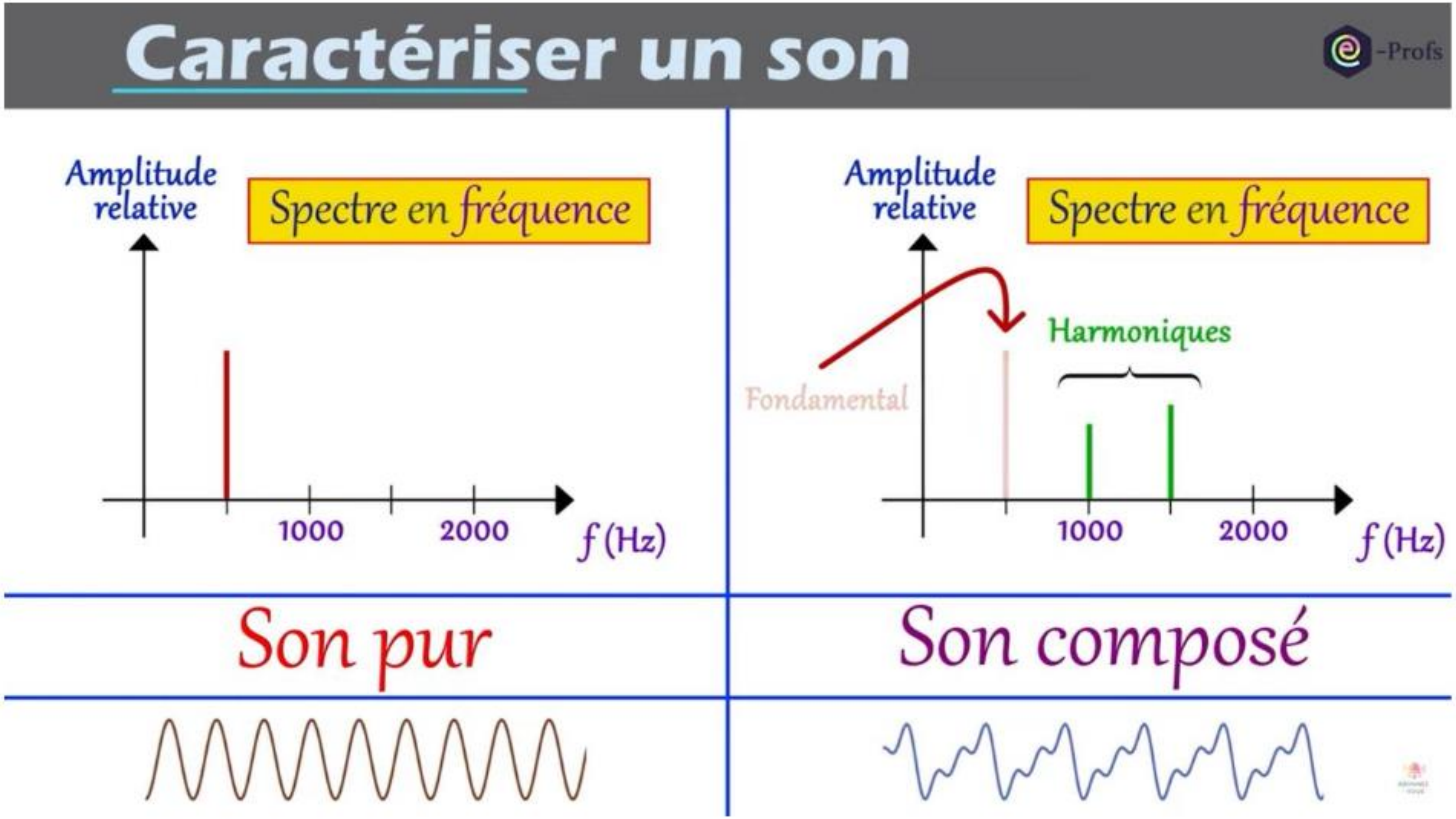




Notes

…

…


Caractériser un son
-Profs
Amplitude relative
Spectre en fréquence
1000
2000
f (Hz)
Amplitude relative
Spectre en fréquence
Harmoniques
Fondamental
1000
2000
f (Hz)
Son pur
Son composé

…

…

…

…

…

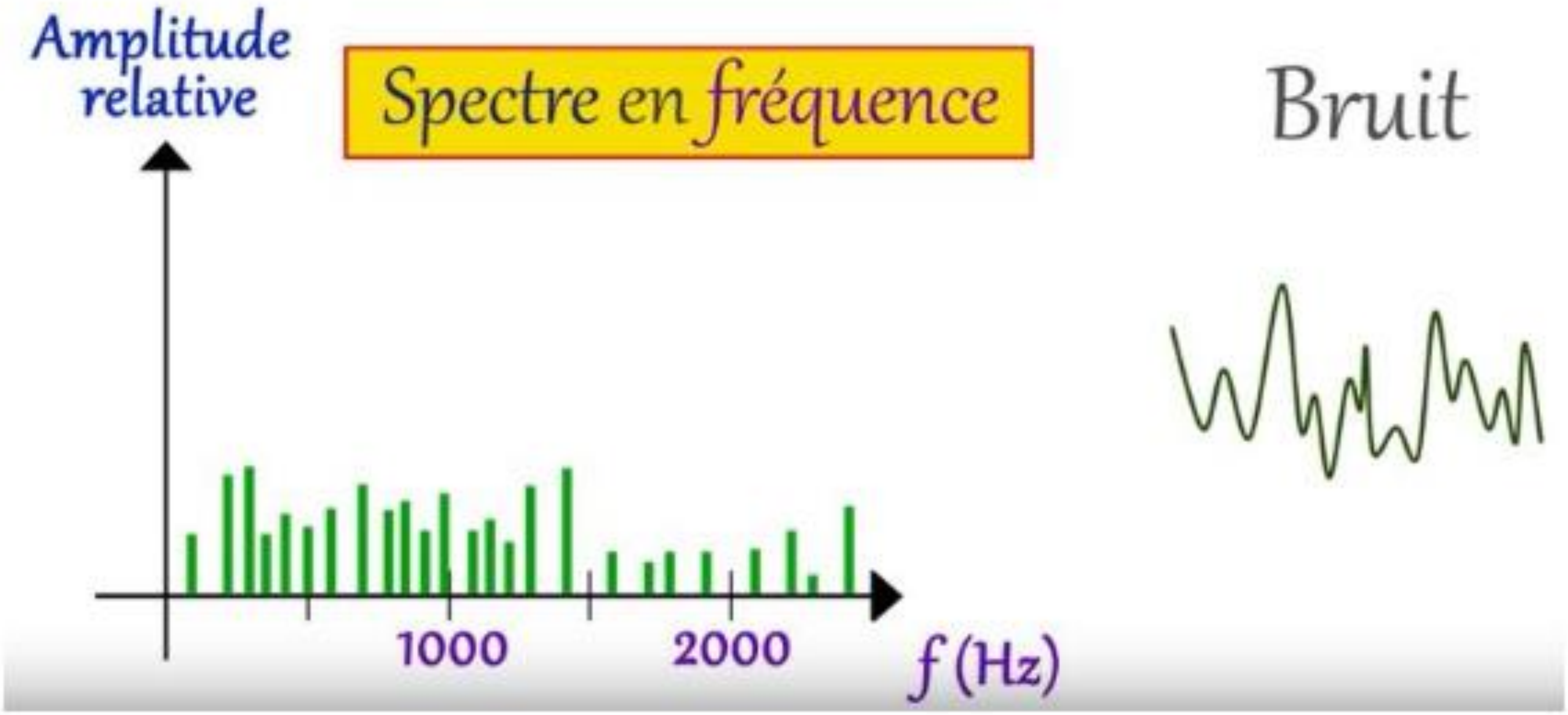
…

…

…

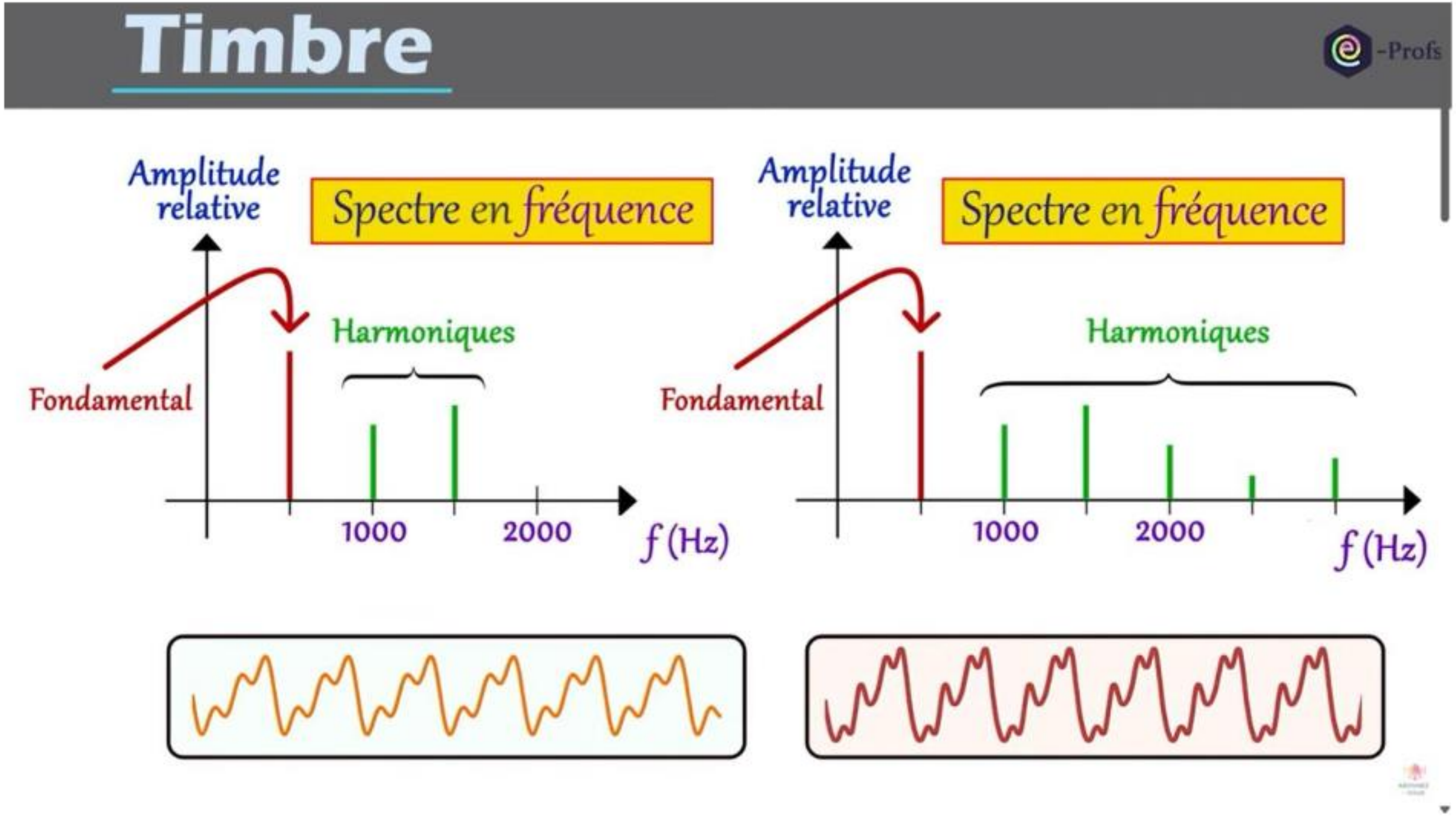
……………………………………………………………………………………………………

Notes


Amplitude relative
Spectre en fréquence
Bruit
1000
2000
f (Hz)

Notes

Page 4 chapitre 9



Page 5 chapitre 9

I. Développement d'une fonction périodique en série de Fourier

1) Définitions

Soit x une fonction de période T, intégrable sur tout intervalle $[t_0, t_0+T]$.
On appelle série de Fourier réelle de x la série suivante :

$$S(t) = a_0 + \sum_{p=1}^{+\infty} (a_p . \cos(p\omega t) + b_p . \sin(p\omega t))$$

, où les suites réelles $(a_p)_p$ et $(b_p)_p$ sont définies de la façon suivante :

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t).dt \;\; ; \;\; a_p = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t).\cos(p\omega t).dt \;\; ; \;\; b_p = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t).\sin(p\omega t).dt \;\; \text{pour } p \geq 1,$$

avec $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

a_0 **est la valeur moyenne du signal x.**
L'harmonique de rang p est le signal : $H_p(t) = a_p.\cos(p\omega t) + b_p.\sin(p\omega t)$
Le fondamental est l'harmonique de rang 1 : $H_1(t) = a_1.\cos(\omega t) + b_1.\sin(\omega t)$

1) Définitions

Page 5 chapitre 9

Donné en DS

Soit x une fonction de période T, intégrable sur tout intervalle $[t_0, t_0+T]$.
On appelle série de Fourier réelle de x la série suivante :

$a_0 + \sum_{p=1}^{+\infty}(a_p.\cos(p\omega t) + b_p.\sin(p\omega t))$, **où les suites réelles $(a_p)_p$ et $(b_p)_p$ sont définies de la façon suivante :**

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t).dt \quad ; \quad a_p = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t).\cos(p\omega t).dt \quad ; \quad b_p = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t).\sin(p\omega t).dt \quad \text{pour } p \geq 1,$$

avec $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

a_0 **est la valeur moyenne du signal x.**
L'harmonique de rang p est le signal : $H_p(t) = a_p.\cos(p\omega t) + b_p.\sin(p\omega t)$
Le fondamental est l'harmonique de rang 1 : $H_1(t) = a_1.\cos(\omega t) + b_1.\sin(\omega t)$

Remarques : ① $a_0 \cancel{\cos 0}^{1} + b_0 \cancel{\sin 0}^{0} = a_0$, on ne calcule pas b_0.

② $H_p(t) = a_p \cos(p\omega t) + b_p \sin(p\omega t) = A_p \cos(p\omega t + \varphi_p)$ où :

$A_p = \sqrt{a_p^2 + b_p^2}$ d'où le tracé du spectre d'amplitude.

2) Rappels du chapitre 6 :

Soit f, une fonction T-périodique, intégrable sur tout intervalle de longueur T : [a,a+T].
On a alors :

$$\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt = \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,dt$$

On peut donc calculer les intégrales définissant les coefficients de Fourier sur n'importe quel intervalle de longueur T.

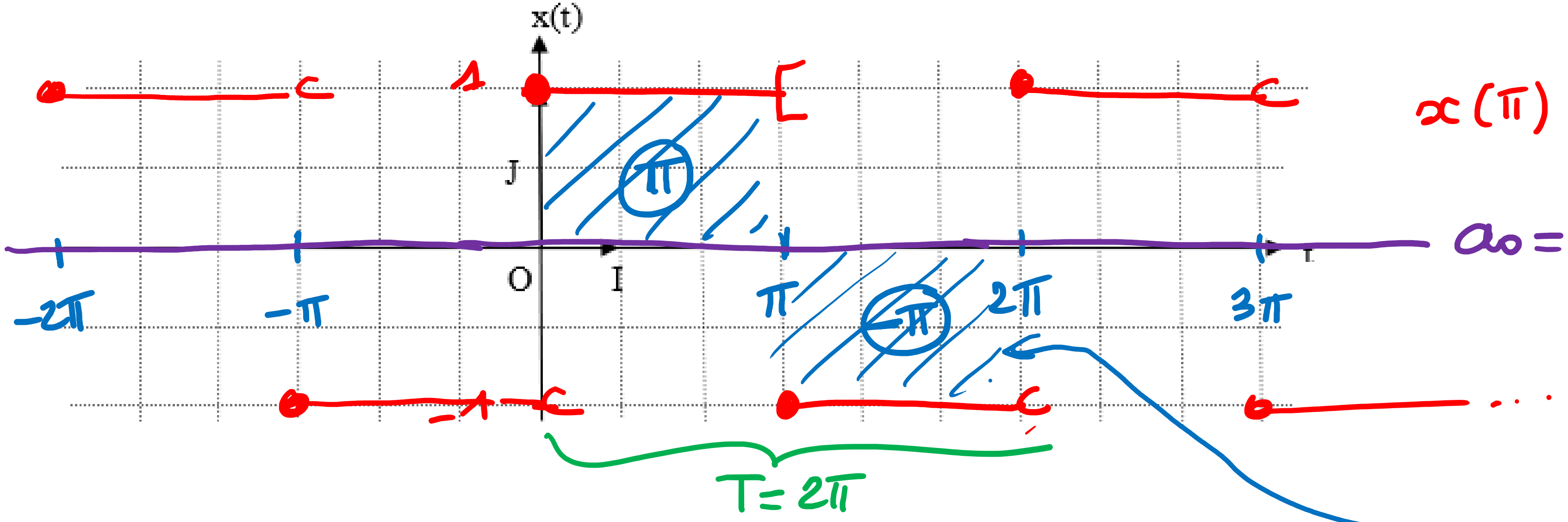
- Si f est une fonction paire et intégrable sur [-a,a], alors : $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2.\int_0^a f(x)dx$.
- Si f est une fonction impaire et intégrable sur [-a,a], alors : $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

II. Travaux Pratique : série de Fourier et analyse spectrale d'un signal carré

Page 6 chapitre 9

Soit x, la fonction de période 2π, définie par : $x(t) = \begin{cases} 1 \text{ pour } t \in [0; \pi[\\ -1 \text{ pour } t \in [\pi; 2\pi[\end{cases}$

C_x est symétrique par rapport à O, donc x est impaire et : $a_0 = a_p = 0 \ \forall p \geq 1$



$x(\pi) = -1$.

$a_0 = 0$.

1) Représenter graphiquement le signal x, puis déterminer ses coefficients de Fourier :

$T = 2\pi$

Coefficients de Fourier : $a_0 = \frac{1}{T} \times \int_{t_0}^{t_0+T} x(t)\,dt$ Méth 1 $= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} x(t)\,dt$

Chasles $= \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\pi} 1\,dt + \int_{\pi}^{2\pi} -1\,dt\right) = \frac{1}{2\pi}\left([t]_0^{\pi} + [-t]_{\pi}^{2\pi}\right) = \frac{1}{2\pi}\left(\pi + (\underbrace{-2\pi+\pi}_{-\pi})\right) = 0$

Méth 2 x est impaire, $a_0 = \int_{-\pi}^{\pi} x(t)\,dt = 0$ Méth 3 aire algébrique : $a_0 = \frac{1}{2\pi}(\pi - \pi) = 0$

$p \geq 1$

$$a_p = \frac{2}{T} \cdot \int_{t_0 = -\pi}^{t_0+T=\pi} x(t) . \cos(p\omega t)\, dt = 0$$

impaire × paire = impaire

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 1$$

$$b_p = \frac{2}{T} \times \int_{t_0 = -\pi}^{t_0+T=\pi} \underbrace{x(t)}_{\text{impaire}} . \underbrace{\sin(p\omega t)}_{\text{impaire}}\, dt = \frac{4}{2\pi} \cdot \int_0^{\pi} \underbrace{1 . \sin(pt)}_{\sin(pt)}\, dt = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos(pt)}{p}\right]_0^{\pi}$$

impaire × impaire = paire

$$\text{donc } b_p = \frac{-2}{\pi p} \cdot \left(\boxed{\underbrace{\cos(p\pi)}_{(-1)^p}} - \underbrace{\cos(0)}_{1}\right) = \frac{2}{p\pi}\left(1 - (-1)^p\right)$$

2) Ecrire la série de Fourier du signal x : $H_p(t) = a_p \cos(p\omega t) + b_p \sin(p\omega t)$

Page 7 chapitre 9

$\omega = \frac{2\pi}{T} = 1$

Le fondamental : $H_1(t) = \underbrace{\cancel{a_1 \cos(\omega t)}}_{0} + b_1 \sin(\omega t) = \frac{2}{\pi}(1+1)\sin(t) = \frac{4}{\pi}\sin(t)$

L'harmonique de rang 2 : $H_2(t) = \underbrace{\cancel{a_2 \cos(2\omega t)}}_{0} + b_2 \sin(2\overset{1}{\omega} t) = \frac{2}{2\pi}(1-1)\sin(2t) = 0$

" $\quad$ 3 : $H_3(t) = \underbrace{\cancel{a_3 \cos(3\omega t)}}_{0} + b_3 \sin(3\omega t) = \frac{2}{3\pi}(1+1)\sin(3t) = \frac{4}{3\pi}\sin(3t)$

$k \in \mathbb{N}$ Les harmoniques de rang pair : $H_{2k}(t) = \underbrace{\cancel{a_{2k} \cos(2k\omega t)}}_{0} + b_{2k}\sin(2k\omega t) = \frac{2}{2k\pi}\left(1-\underbrace{(-1)^{2k}}_{1}\right)\sin(2kt) = 0$

Série de Fourier : $S(t) = \sum_{p=1}^{+\infty} b_p \cdot \sin(p \cdot t) \underset{\text{Les termes pairs sont nuls}}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} b_{2k+1} \sin((2k+1)t)$

$$S(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2}{(2k+1)\pi} \cdot \underbrace{\left(1-\underbrace{(-1)^{2k+1}}_{-1}\right)}_{2} \cdot \sin((2k+1)t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{4}{(2k+1)\pi} \sin((2k+1)t) = \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin((2k+1)t)}{2k+1}.$$

Page 8 chapitre 9

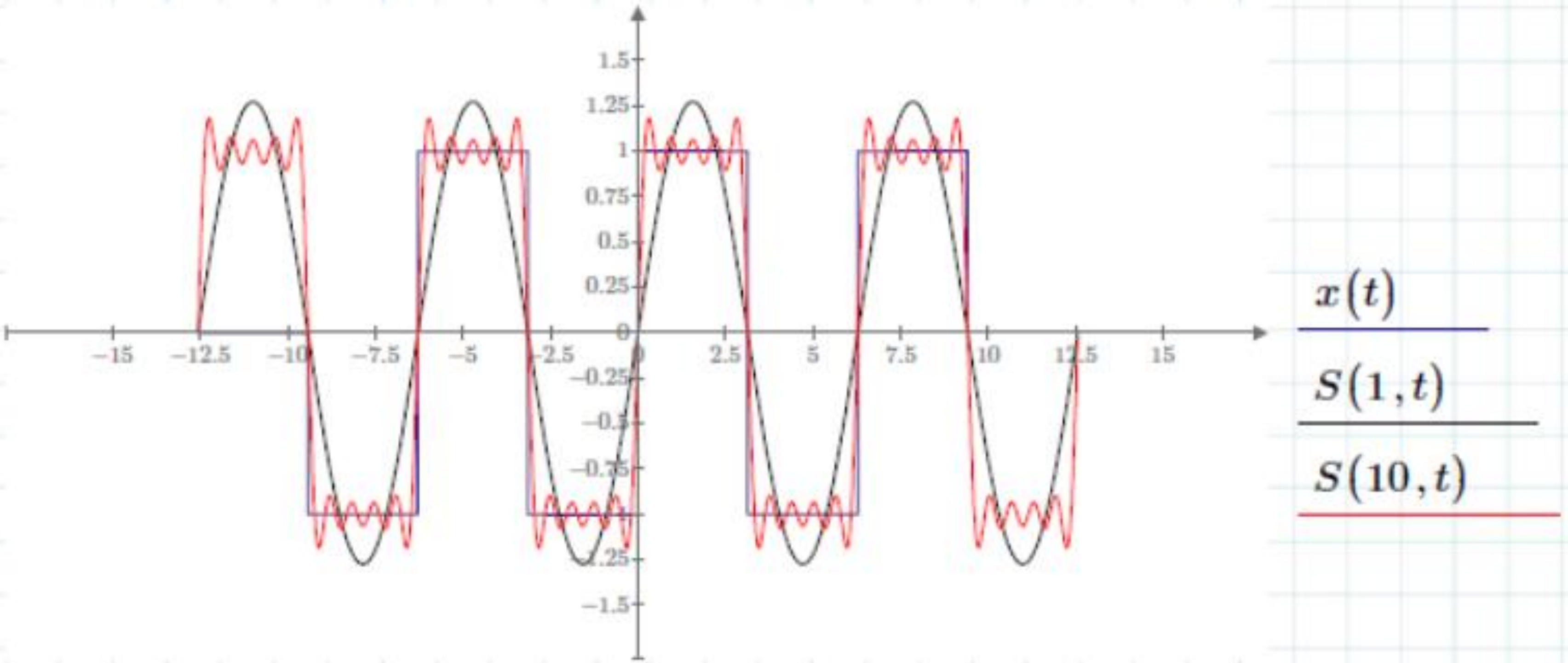
La série de Fourier d'un signal pair est en cosinus : $a_0 + \sum_{p=1}^{+\infty} a_p . \cos(p\omega t)$ car $b_p = 0 \ \forall p \geq 1$

La série de Fourier d'un signal impair est en sinus : $\sum_{p=1}^{+\infty} b_p . \sin(p\omega t)$ car $a_0 = a_p = 0 \ \forall p \geq 1$

Page 10 chapitre 9

Série de Fourier de rang N

$$S(N,t) := a0 + \sum_{n=1}^{N} H(n,t)$$



4) Théorème de Dirichlet et définition d'une fonction développable en série de Fourier

Page 12 chapitre 9

donné en DS

Soit x un signal de période T, intégrable sur tout intervalle [α, α+T].

- Si x est continue sur [α, α+T[, sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle admet une limite finie à gauche et à droite.
- x est dérivable sur [α, α+T[, sauf éventuellement en un nombre fini de points où sa dérivée admet une limite finie à gauche et à droite.

Alors la série de Fourier de x converge en tout point t et sa fonction somme est alors :

$$a_0 + \sum_{p=1}^{+\infty} (a_p.\cos(p\omega t) + b_p.\sin(p\omega t)) = \begin{cases} x(t) \text{ pour } t \text{ où } x \text{ est continue} \\ \dfrac{x(t_+) + x(t_-)}{2} \text{ pour } t \text{ où } x \text{ est discontinue} \end{cases}$$

On dit alors que <u>x est développable en série de Fourier.</u>

<u>Vocabulaire</u> Toute fonction vérifiant les hypothèses du théorème de Dirichlet sont dites de classe C^1 par morceaux sur l'ensemble des réels.

Page 12 chapitre 9

Th de Dirichlet :

Hyp1 : Sur $[0,2\pi[$ x est continue sauf en 0 et π où

$x(0^-)=$ $\quad x(0^+)=$ $\quad x(\pi^-)=$ $\quad x(\pi^+)=$ sont finies

Hyp2 Sur $[0,2\pi[$ x est dérivable sauf en 0 et π où

$x'(0^-)=x'(0^+)=x'(\pi^-)=x'(\pi^+)=0$ sont finis

Conclusion : La série de Fourier de x converge en tout t et :

$$S(t)=\frac{4}{\pi}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin((2k+1)t)}{2k+1}=\begin{cases} x(t) & \text{si } t\neq k\pi ;\ k\in\mathbb{Z} \\ \dfrac{x(0^-)+x(0^+)}{2}=0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Application en maths : en déduire la valeur de $S=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}$

$$S(\pi/2)=\frac{4}{\pi}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin((2k+1)\pi/2)}{2k+1}=x\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$$

$$\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=\sin k\pi\underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{=0}+\underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{=1}\underbrace{\cos k\pi}_{(-1)^k}$$
$$=(-1)^k$$

$$\Longleftrightarrow \frac{4}{\pi}\times\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}=1 \Longleftrightarrow \boxed{S=\frac{\pi}{4}}$$

5) Spectre d'un signal périodique

Le terme général $a_p.\cos(p\omega t) + b_p.\sin(p\omega t)$ peut aussi s'écrire $A_p\cos(p\omega t + \phi_p)$

où : $A_p = |a_p - ib_p| = \sqrt{{a_p}^2 + {b_p}^2}$ et $\phi_p = \arg(a_p - ib_p)$. ($p \neq 0$)

A_p est l'amplitude de l'harmonique de rang p

ϕ_p est la phase de l'harmonique de rang p.

Une autre écriture du développement en série de Fourier d'un signal périodique f est donc : $A_0 + \sum_{p=1}^{\infty} A_p\cos(p\omega t + \phi_p)$, avec $A_0 = a_0$.

L'ensemble des amplitudes A_p forme le <u>spectre d'amplitude</u> unilatéral du signal x, ou spectre de raies (il s'agit d'un spectre discret). Il est représenté par un diagramme en bâtons obtenu en représentant les amplitudes A_p en fonction de p/T. A_p devient négligeable à partir d'un certain rang.

<u>Exemple</u> Après avoir déterminé la suite des amplitudes, tracer le spectre d'amplitude unilatéral du signal carré du ~~TP page 7~~ exple 1 page 5

Exple 1 page 5 : $a_0 = a_p = 0 \quad \forall p \geq 1$

$$b_p = \frac{2}{p\pi}\left(1 - \cos p\pi\right)$$

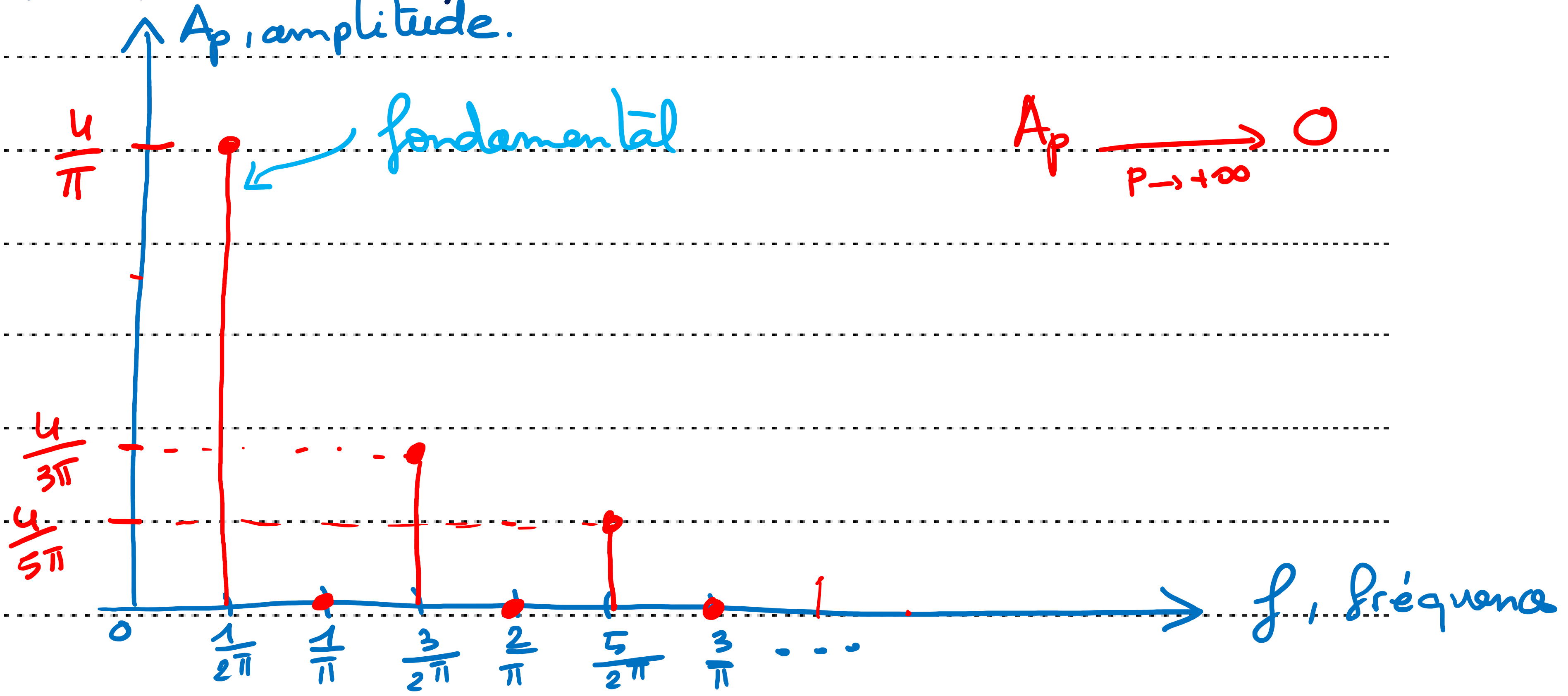
$T = 2\pi \iff f = \frac{1}{2\pi}$

$$f_p = \frac{p}{2\pi} = p f$$

$$\underline{0 \leq A_p} = \sqrt{a_p^2 + b_p^2} = |b_p| \quad ⚠$$

Page 13 chapitre 9

p	1	2	3	4	5	6	
f_p	$\frac{1}{2\pi}$	$\frac{1}{\pi}$	$\frac{3}{2\pi}$	$\frac{2}{\pi}$	$\frac{5}{2\pi}$	$\frac{3}{\pi}$	...
A_p	$\frac{4}{\pi}$	0	$\frac{4}{3\pi}$	0	$\frac{4}{5\pi}$	0	...



$$A_p \xrightarrow[p \to +\infty]{} 0$$

TD Page 14 chapitre 9

III. Exercices

Exercice 1

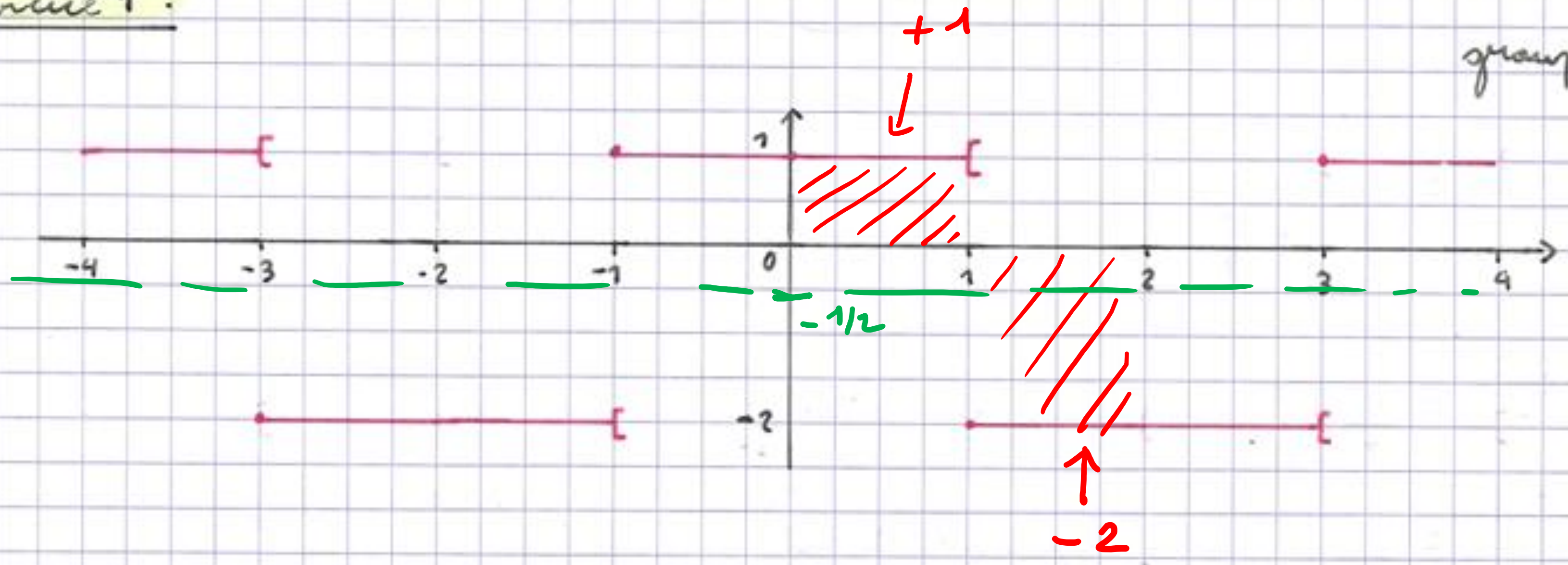
Soit x, le signal 4-périodique, pair, et défini par : $x(t) = \begin{cases} 1 \text{ pour } t \in [0;1[\\ -2 \text{ pour } t \in [1;2[\end{cases}$

1) Représenter x sur l'intervalle [-4,4].
2) Calculer les coefficients de Fourier de x.
3) Ecrire la série de Fourier de x.
4) Appliquer le théorème de Dirichlet afin de déterminer la somme de cette série.
5) Tracer le spectre d'amplitude.

MARQUAIS
Alexis
groupe F

Exercice 1 :

1)



2) Calcul des coefficients :

La courbe étant symétrique par rapport à y, la fonction est donc paire:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt = \frac{1}{4}\int_0^4 x(t)\,dt = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} \underbrace{x(t)}_{\text{paire}}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^2 x(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 1\,dt + \frac{1}{2}\int_1^2 -2\,dt = \frac{1}{2}\left[t\right]_0^1 + \frac{1}{2}\left[-2t\right]_1^2 = \frac{1}{2} - 0 - 2 + 1$$

$a_0 = -\frac{1}{2}$ ou par lecture graphique : $a_0 = \frac{1}{2}\cdot\int_0^2 x(t)\,dt = \frac{1}{2}\cdot$ aire algébrique hachurée $= \frac{1}{2}(1-2) = -\frac{1}{2}$

$$a_p = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cdot\cos(p\omega t)\,dt$$

$$= \frac{2}{4}\int_0^4 x(t)\cdot\cos(p\omega t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} \underbrace{x(t)}_{\text{paire}} \cdot \underbrace{\cos(p\omega t)}_{\text{paire}}\,dt$$

paire × paire = paire

$$= \int_0^2 x(t)\cdot\cos(p\omega t)\,dt$$

chasles

$$= \int_0^1 1\cdot\cos(p\omega t)\,dt + \int_1^2 -2\cdot\cos(p\omega t)\,dt$$

$$= \left[\frac{\sin(p\omega t)}{p\omega}\right]_0^1 + \left[\frac{-2\sin(p\omega t)}{p\omega}\right]_1^2$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$= \left[\frac{\sin\left(p\frac{\pi}{2}t\right)}{p\frac{\pi}{2}}\right]_0^1 + \left[\frac{-2\sin\left(p\frac{\pi}{2}t\right)}{p\frac{\pi}{2}}\right]_1^2$$

$$= \left(\frac{\sin\left(p\frac{\pi}{2}\right)}{p\frac{\pi}{2}}\right) - \underbrace{\left(\frac{\sin(0)}{p\frac{\pi}{2}}\right)}_{0} + \underbrace{\left(\frac{-2\sin(p\pi)}{p\frac{\pi}{2}}\right)}_{0} - \left(\frac{-2\sin\left(p\frac{\pi}{2}\right)}{p\frac{\pi}{2}}\right)$$

car $p \in \mathbb{N}^*$.

$$= \frac{3\sin\left(\frac{p\pi}{2}\right)}{p\frac{\pi}{2}} = \frac{6}{p\pi}\cdot\sin\left(\frac{p\pi}{2}\right) = a_p \quad \forall p \geq 1$$

$$b_p = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cdot\sin(p\omega t)\,dt$$

$$= \frac{2}{4}\int_0^4 x(t)\cdot\sin(p\omega t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} \underbrace{x(t)}_{\text{paire}}\cdot\underbrace{\sin(p\omega t)}_{\text{impaire}}\,dt \quad \text{paire}\cdot\text{impaire} = \text{impaire}$$

$$= 0$$

Au cours : x est paire, sa serie de Fourier est donc en Cosinus et $b_p = 0 \ \forall p \geq 1$

3) Série de Fourier :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$S_x(t) = a_0 + \sum_{p=1}^{+\infty} \left(a_p \cdot \cos(p\omega t) + \underbrace{b_p}_{0} \cdot \sin(p\omega t)\right)$$

$$= a_0 + \sum_{p=1}^{+\infty} a_p \cdot \cos(p\omega t)$$

$$= -\frac{1}{2} + \sum_{p=1}^{+\infty} \cdot \frac{3 \sin\left(\frac{p\pi}{2}\right)}{p\frac{\pi}{2}} \cdot \cos(p\omega t)$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{3}{\frac{\pi}{2}} \times \sum_{p=1}^{+\infty} \cdot \frac{\sin\left(\frac{p\pi}{2}\right)}{p} \cdot \cos(p\omega t) = \frac{1}{2} + \frac{6}{\pi} \cdot \left(\cos \omega t + 0 - \frac{\cos 3t\frac{\pi}{2}}{3} + 0 + \frac{\cos 5t\frac{\pi}{2}}{5} + 0 - \frac{\cos 7t\frac{\pi}{2}}{7} + 0 + \frac{\cos 11t\frac{\pi}{2}}{11} + \cdots\right)$$

$p=1$, $p=2$, $p=3$ ... $p=5$

$$S_x(t) = -\frac{1}{2} + \frac{6}{\pi} \times \sum_{k=0}^{+\infty} \cdot \frac{\overbrace{\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}\right)}^{=(-1)^k}}{2k+1} \cdot \cos\left(\frac{(2k+1)\pi t}{2}\right)$$

$p = 2k+1$

en effet, $\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}\right) = \sin\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \sin k\pi \cdot \underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{=0} + \underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{=1} \cdot \underbrace{\cos k\pi}_{(-1)^k} = (-1)^k$

4) Théorème de Dirichlet :

Hyp 1 : Sur $[0;4[$ x est continue sauf en 1 et 3 où :

$x(1^-) = 1$ $\qquad$ $x(3^-) = -2$

$x(1^+) = -2$ $\qquad$ $x(3^+) = 1$

Hyp 2 : Sur $[0;4[$ x est dérivable sauf en 1 et 3 où :

$x'(1^-) = 0$ $\qquad$ $x'(3^-) = 0$

$x'(1^+) = 0$ $\qquad$ $x'(3^+) = 0$

Conclusion : La série de Fourier de x converge sur $\mathbb{R}$ et a pour somme :

$$S(t) = \begin{cases} x(t) & \forall t \neq 2k+1 \; ; \; k \in \mathbb{Z} \\ \text{sinon} & \dfrac{x(t+) + x(t-)}{2} = \dfrac{1 + (-2)}{2} = -\dfrac{1}{2} \text{ sinon} \end{cases}$$

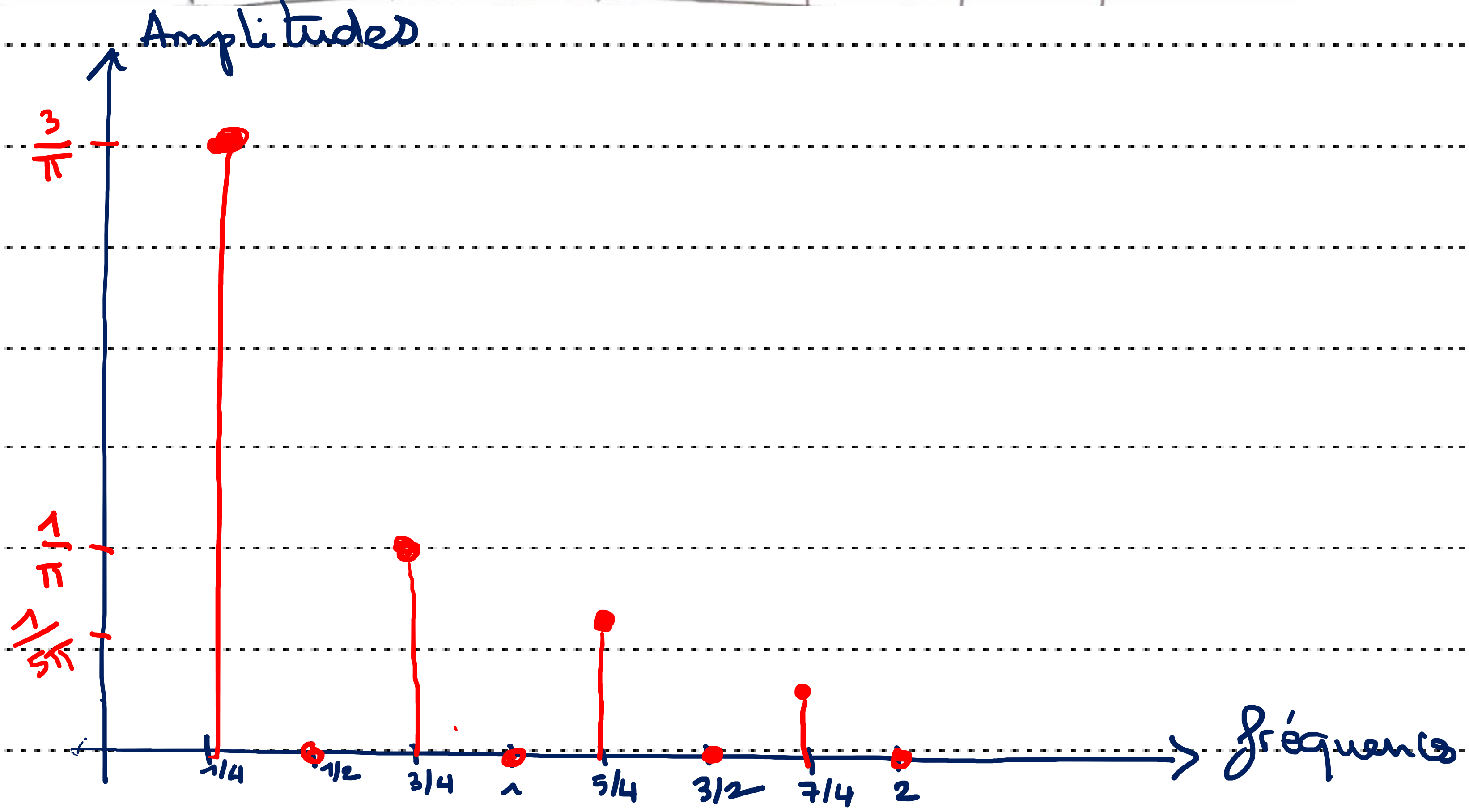
5)

fondamentale

p	1	2	3	4	5	6
$f_p = \frac{p\omega}{2\pi}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}$
$A_p = \sqrt{a_p^2 + b_p^2}$	$\frac{3}{\pi}$	0	$+\frac{1}{\pi}$	0	$\frac{3}{5\pi}$	0

$$A_p = \sqrt{a_p^2 + b_p^2} = \sqrt{a_p^2} = |a_p|$$

toujours positif.



Exercice : $S_x(t) = -\frac{1}{2} + \frac{6}{\pi} \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \cos\left((2k+1)\pi t\right) = \begin{cases} x(t) & \text{si } t \neq 2k+1 \\ -\frac{1}{2} & \text{sinon} \end{cases}$

En déduire la série : $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

Question supplémentaire
Soutien séries de Fourier

Suite de l'exercice dans la vidéo sur le soutien des Σ de Fourier :

→ Montrer que les harmoniques de rang pair sont nulles, puis en déduire l'écriture simplifiée de la série de Fourier de x :

$$S_x(t) = \frac{1}{2} + \frac{6}{\pi} \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \cdot \cos\left(\frac{(2k+1)}{2}t\right)$$

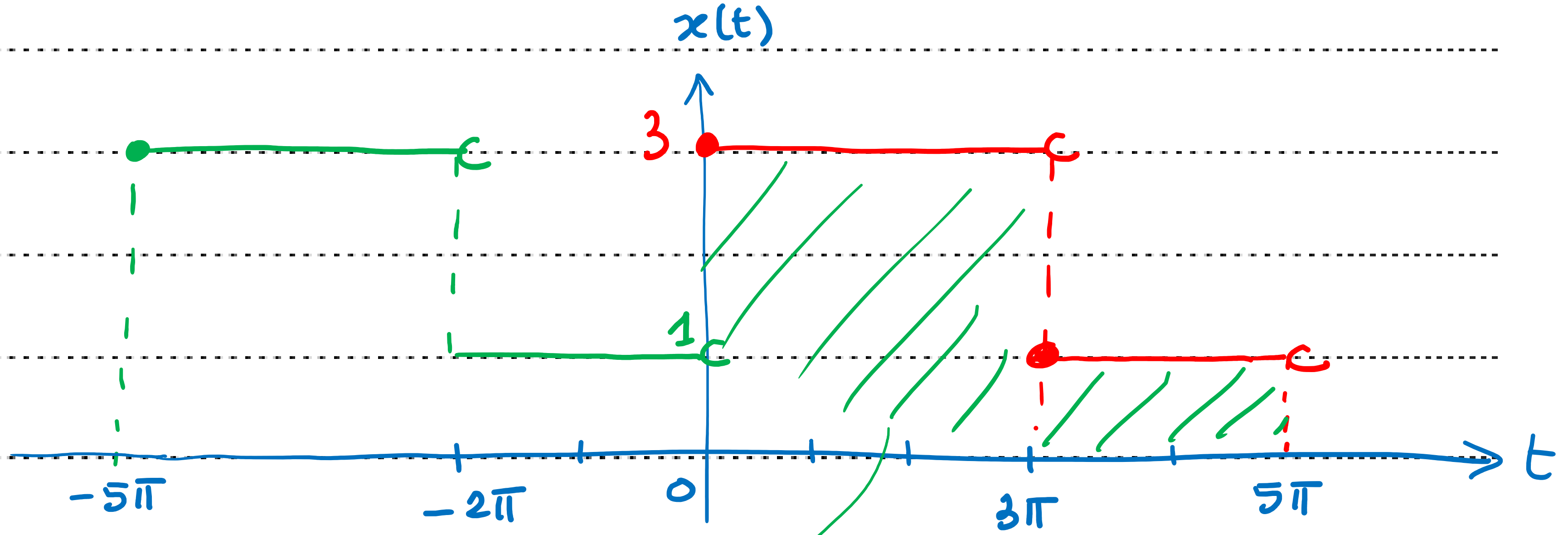
→ Déduire de la conclusion du théorème de Dirichlet la valeur de la série : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$

Exercice 2

Soit x, le signal 5π-périodique, défini par : $x(t) = \begin{cases} 3 \text{ pour } t \in [0;3\pi[\\ 1 \text{ pour } t \in [3\pi;5\pi[\end{cases}$

1) Représenter x sur l'intervalle [-5 π,5 π].
2) Calculer les coefficients de Fourier de x.
3) Ecrire la série de Fourier de x.
4) Appliquer le théorème de Dirichlet afin de déterminer la somme de cette série.
5) ~~Tracer le spectre d'amplitude.~~

①



②

x est ni paire, ni impaire, on doit donc calculer tous les coefficients de Fourier

$$a_0 = \frac{1}{T} \cdot \int_{t_0=0}^{t_0+T=5\pi} x(t)\,dt = \frac{1}{5\pi}\left(3\times 3\pi + 2\pi\right) = \frac{11\pi}{5\pi} = \frac{11}{5}.$$

ou

$$= \frac{1}{5\pi} \cdot \left(\int_0^{3\pi} 3\,dt + \int_{3\pi}^{5\pi} 1\,dt \right) = \frac{1}{5\pi}\left(\left[3t\right]_0^{3\pi} + \left[t\right]_{3\pi}^{5\pi} \right) = \frac{1}{5\pi}\left(9\pi + 2\pi\right) = \frac{11}{5}$$

$$a_p = \frac{2}{T} \int_{t_0=0}^{t_0+T=5\pi} x(t) \cdot \cos(p\omega t)\,dt$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{5\pi} = \frac{2}{5}.$$

$$* \; a_p = \frac{2}{5\pi} \int_0^{5\pi} x(t) . \cos\left(p \frac{2}{5} t\right) dt = \frac{2}{5\pi} \left(\int_0^{3\pi} 3 . \cos\left(\frac{p2t}{5}\right) dt + \int_{3\pi}^{5\pi} 1 . \cos\left(\frac{p2t}{5}\right) dt \right)$$

$$a_p = \frac{2}{5\pi} \left(\left[\frac{5 \times 3 \sin\left(\frac{2pt}{5}\right)}{2p} \right]_0^{3\pi} + \left[\frac{5 \times \sin\left(\frac{2pt}{5}\right)}{2p} \right]_{3\pi}^{5\pi} \right)$$

$$= \frac{1}{p\pi} \left(3 \sin\left(\frac{6\pi p}{5}\right) + \underbrace{\sin(2p\pi)}_{=0 \text{ car } p \in \mathbb{N}} \right)$$

$$a_p = \frac{3}{p\pi} \sin\left(\frac{6\pi p}{5}\right) \quad \forall p \geq 1.$$

$$* \; b_p = \frac{2}{5\pi} \int_0^{5\pi} x(t) \times \sin\left(p \frac{2}{5} t\right) dt = \frac{2}{5\pi} \left(\int_0^{3\pi} 3 \sin\left(\frac{p2t}{5}\right) dt + \int_{3\pi}^{5\pi} 1 . \sin\left(\frac{p2t}{5}\right) dt \right)$$

$$= \frac{2}{5\pi} \left(\left[\frac{-3 \cos\left(\frac{p2t}{5}\right) \times 5}{2p} \right]_0^{3\pi} + \left[\frac{-\cos\left(\frac{p2t}{5}\right) \times 5}{2p} \right]_{3\pi}^{5\pi} \right)$$

$$= \frac{1}{\pi p} \left(-3 \cos\left(\frac{6\pi p}{5}\right) + 3 \underbrace{\cos 0}_{1} - \underbrace{\cos(2p\pi)}_{1} + \cos\left(\frac{6p\pi}{5}\right) \right) = \frac{2}{\pi p} \left(- \cos\left(\frac{6p\pi}{5}\right) + 1 \right)$$

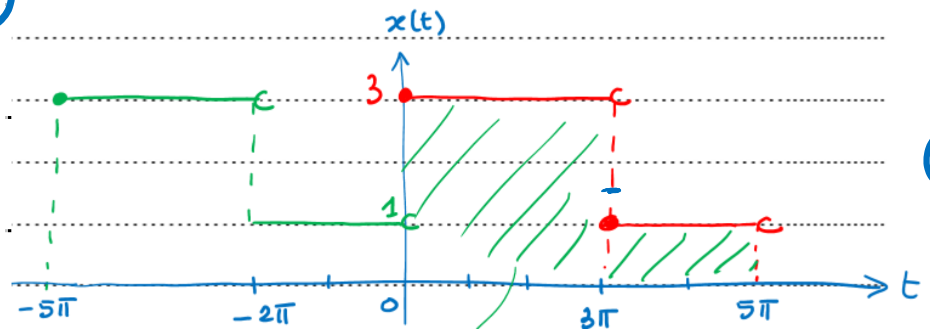
③ Série de Fourier de x : $S(t) = a_0 + \sum_{p=1}^{+\infty} a_p \cos(p\omega t) + b_p \sin(p\omega t)$.

ici

$$S(t) = \frac{11}{5} + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{3}{p\pi} \sin\left(\frac{6\pi p}{5}\right) \cos\left(p\frac{2}{5}t\right) + \frac{2}{\pi p}\left(1 - \cos\left(\frac{6\pi p}{5}\right)\right) \sin\left(p\frac{2}{5}t\right)$$

$$S(t) = \frac{11}{5} + \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{3\sin\left(\frac{6\pi p}{5}\right)\cos\left(p\frac{2}{5}t\right) + 2\left(1 - \cos\left(\frac{6\pi p}{5}\right)\right)\sin\left(p\frac{2}{5}t\right)}{p}$$

④



th. de Dirichlet :

hyp1 – Sur $[0, 5\pi]$ x est continue sauf en 0 et 3π où $x(0^-) = 1$; $x(0^+) = 3$; $x(3\pi^-) = 3$; $x(3\pi^+) = 1$ sont finis.

hyp2 – Sur $[0, 5\pi[$ x est dérivable sauf en 0 et 3π où $x'(0^-) = x'(0^+) = x'(3\pi^-) = x'(3\pi^+) = 0$

Conclusion : la série de Fourier de x converge sûrement et $S(t) = \begin{cases} x(t) \text{ si } t \neq 0 + 5k\pi ; 3\pi + 5k\pi \\ 1{,}5 \text{ si } t = 3\pi + 5k\pi \\ 0{,}5 \text{ si } t = 5k\pi \end{cases}$ $k \in \mathbb{Z}$