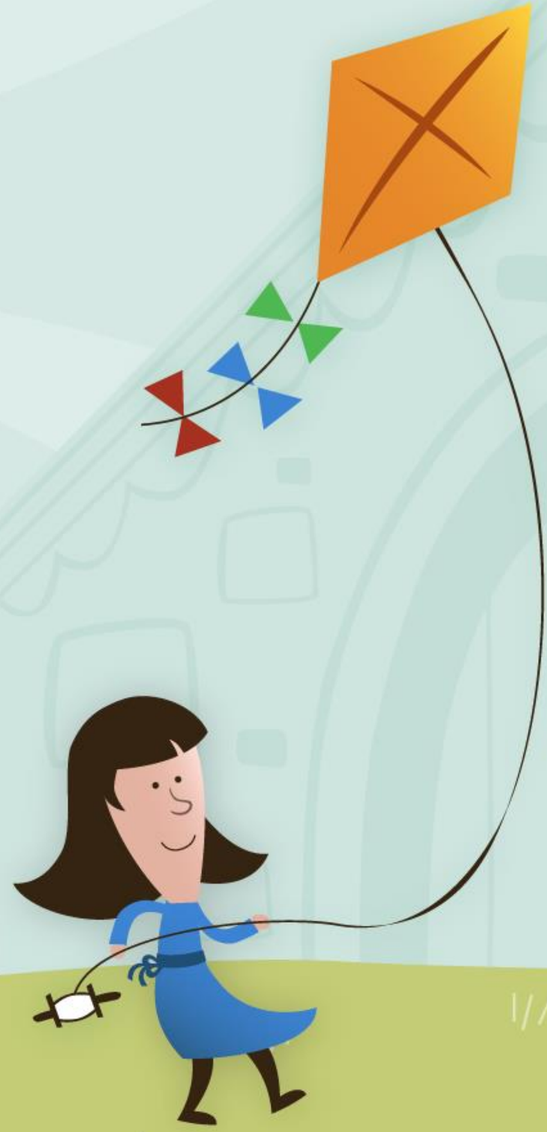
Préparation DS de fin d’année BUT GEII 1

Séries de Fourier, IPP et Changement de variable



Calcul intégral

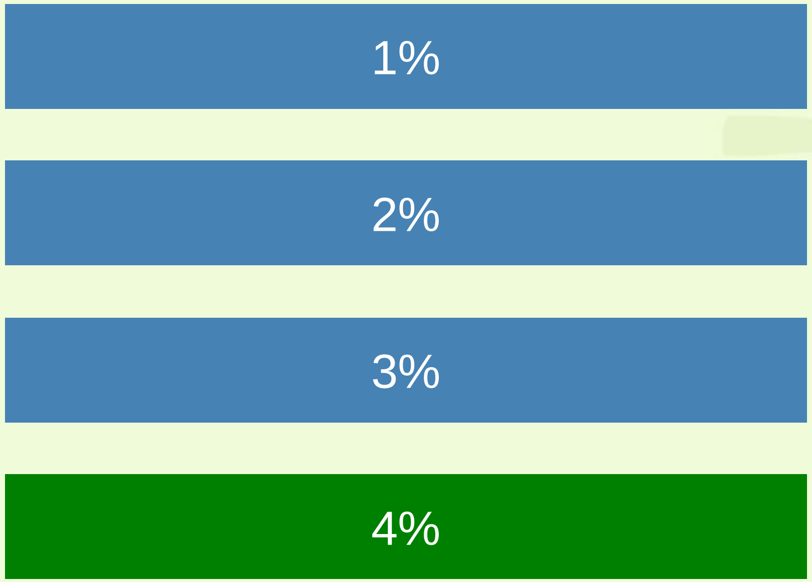
Changement de variable

On souhaite calculer l'intégrale $I = \int_{-1/3}^{1/3} \frac{dt}{9t^2+6t+5}$ à l'aide du changement de variable : $x = \frac{3t+1}{2}$. Quelles sont les nouvelles bornes de l'intégrale ?

2'

1. Aucune des réponses ci – dessous n'est juste.
2. x varie de 1 à 3
3. x varie de -1 à 1
4. x varie de 0 à 1

✓4



On souhaite calculer l’intégrale $I = \int_{-1/3}^{1/3} \frac{dt}{9t^2+6t+5}$ à l’aide du changement de variable : $x = \frac{3t+1}{2}$. Quelles sont les nouvelles bornes de l’intégrale ?

Bornes :

$$\begin{cases} t = -\frac{1}{3} \iff x = \frac{3\times\left(-\frac{1}{3}\right)+1}{2} = \frac{-1+1}{2} = 0 \\ t = \frac{1}{3} \iff x = \frac{3\left(\frac{1}{3}\right)+1}{2} = \frac{1+1}{2} = 1 \end{cases}$$

3’

On souhaite calculer l’intégrale $I = \int_{-1/3}^{1/3} \frac{dt}{9t^2+6t+5}$ à l’aide du changement de variable : $x = \frac{3t+1}{2}$. Quelle est la relation entre dx et dt ?

1. $dt = 2dx$ — 1%
2. $dt = \frac{3}{2}dx$ — 2%
3. ✓3 $Ni\ la\ réponse\ 1\ ni\ la\ 2\ n'est\ juste.$ — 3%

On souhaite calculer l'intégrale $I = \int_{-1/3}^{1/3} \frac{dt}{9t^2+6t+5}$ à l'aide du changement de variable : $x = \frac{3t+1}{2}$. Quelle est la relation entre dx et dt ?

Bornes :

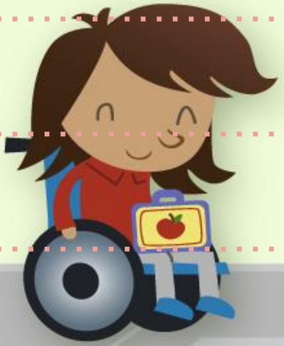
$$\begin{cases} t = -\frac{1}{3} \iff x = \frac{3\times\left(-\frac{1}{3}\right)+1}{2} = \frac{-1+1}{2} = 0 \\ t = \frac{1}{3} \iff x = \frac{3\left(\frac{1}{3}\right)+1}{2} = \frac{1+1}{2} = 1 \end{cases}$$

dx et dt :

$$x = \frac{3t+1}{2}$$

$$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{3t+1}{2}\right)' = \left(\frac{3}{2}t + \frac{1}{2}\right)' = \frac{3}{2}$$

$$dx = \frac{3}{2}\,dt \iff \boxed{dt = \frac{2}{3}\,dx}$$



5’

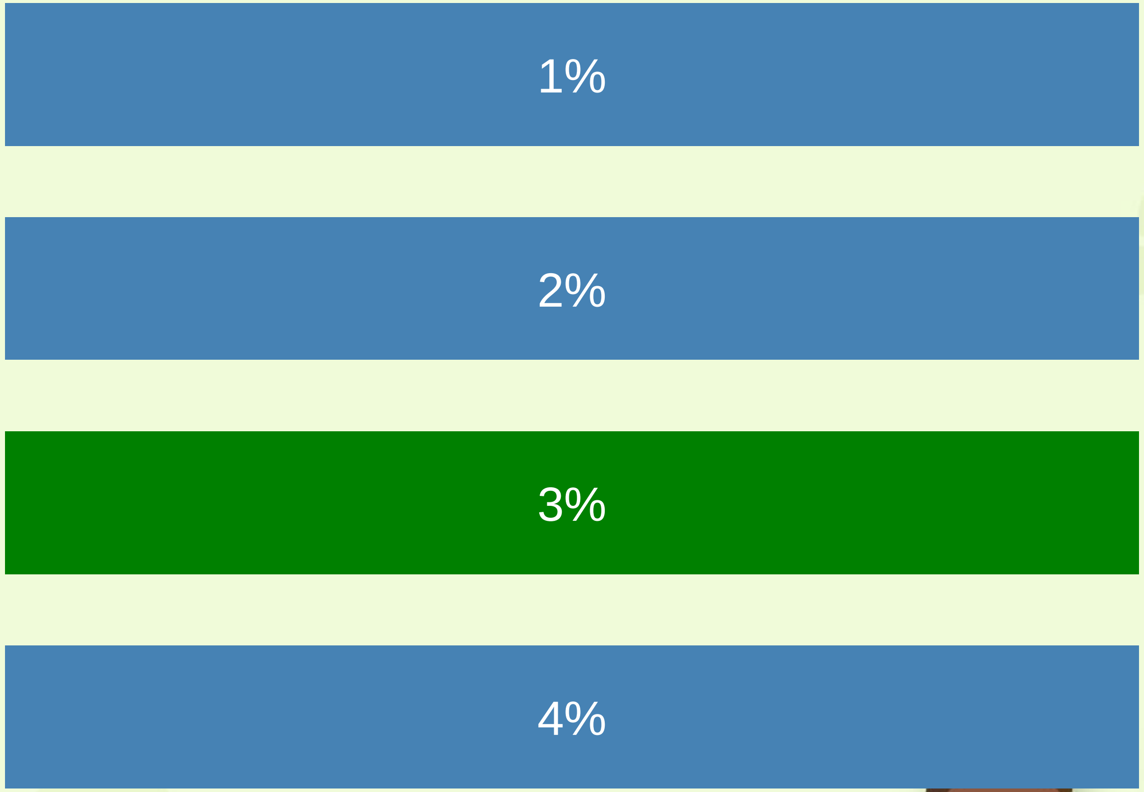
On souhaite calculer l’intégrale $I = \int_{-1/3}^{1/3} \frac{dt}{9t^2+6t+5}$ à l’aide du changement de variable : $x = \frac{3t+1}{2}$. Quelle est la nouvelle intégrale?

1. $I = \frac{2}{3}\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{4x^2+4}$

2. $I = \frac{1}{4}\int_{0}^{1} \frac{dx}{x^2+1}$

✓3 3. $I = \frac{1}{6}\int_{0}^{1} \frac{dx}{x^2+1}$

4. $I = \int_{0}^{1} \frac{dx}{4x^2+4}$



On souhaite calculer l'intégrale $I = \int_{-1/3}^{1/3} \frac{dt}{9t^2+6t+5}$ à l'aide du changement de variable : $x = \frac{3t+1}{2}$. Quelle est la nouvelle intégrale ?

x varie de 0 à 1 et $dt = \frac{2}{3}dx$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{3t+1}{2} \iff 2x = 3t+1 \\ \iff t = \frac{2x-1}{3} \end{array} \right.$$

$$I = \int_0^1 \frac{\frac{2}{3}dx}{9\left(\frac{2x-1}{3}\right)^2 + 6\left(\frac{2x-1}{3}\right) + 5} = \frac{2}{3} \times \int_0^1 \frac{dx}{9\left(\frac{4x^2-4x+1}{9}\right) + 2(2x-1) + 5}$$

$$I = \frac{2}{3} \times \int_0^1 \frac{dx}{4x^2-4x+1+4x-2+5} = \frac{2}{3} \times \int_0^1 \frac{dx}{\underbrace{4x^2+4}_{4(x^2+1)}} \boxed{= \frac{1}{6} \cdot \int_0^1 \frac{dx}{x^2+1}}$$

2’

On souhaite calculer l’intégrale $I = \int_{-1/3}^{1/3} \frac{dt}{9t^2+6t+5}$ à l’aide du changement de variable : $x = \frac{3t+1}{2}$. Quelle est la valeur de I ?

✓1 1. $I = \frac{\pi}{24}$ — 1%

2. $I = 0{,}13$ — 2%

3. $I = \frac{\ln(2)}{6}$ — 3%

4. Aucune des solutions précédentes n'est juste. — 4%

On souhaite calculer l'intégrale $I = \int_{-1/3}^{1/3} \frac{dt}{9t^2+6t+5}$ à l'aide du changement de variable : $x = \frac{3t+1}{2}$. Quelle est la valeur de I ?

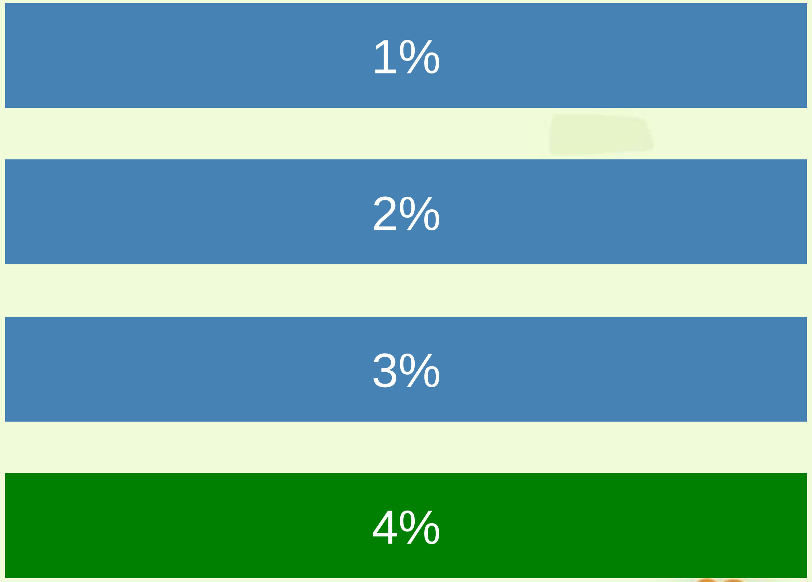
$$I = \frac{1}{6} \times \int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} = \frac{1}{6} \times \left[\text{Arctan}\, x \right]_0^1 = \frac{1}{6} \left(\underbrace{\text{Arctan}\, 1}_{\frac{\pi}{4}} - \underbrace{\text{Arctan}\, 0}_{0} \right)$$

$$I = \frac{\pi}{24}$$

On souhaite calculer l’intégrale $I = \int_1^4 \frac{e^{\sqrt{t}}dt}{\sqrt{t}(1+e^{\sqrt{t}})}$ à l’aide du changement de variable : $x = e^{\sqrt{t}}$. Quelles sont les nouvelles bornes de l’intégrale ?

2’

1. $\text{Aucune des réponses ci} - \text{dessous n}'\text{est juste.}$
2. x varie de 0 à ln(2)
3. x varie de 1 à ln(2)
4. x varie de e à e^2



On souhaite calculer l'intégrale $I = \int_1^4 \frac{e^{\sqrt{t}}dt}{\sqrt{t}(1+e^{\sqrt{t}})}$ à l'aide du changement de variable : $x = e^{\sqrt{t}}$. Quelles sont les nouvelles bornes de l'intégrale ?

Bornes :

$$\begin{cases} t = 1 \iff x = e^{\sqrt{1}} = e \\ t = 4 \iff x = e^{\sqrt{4}} = e^2 \end{cases}$$

3'

On souhaite calculer l'intégrale $I = \int_1^4 \frac{e^{\sqrt{t}}dt}{\sqrt{t}(1+e^{\sqrt{t}})}$ à l'aide du changement de variable : $x = e^{\sqrt{t}}$. Quelle est la relation entre dx et dt ?

1. $2dx = \frac{e^{\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}dt$

1%

2. $dt = 2\ln(x)dx$

2%

3. $Ni\ la\ réponse\ 1\ ni\ la\ 2\ n'est\ juste.$

3%

On souhaite calculer l'intégrale $I = \int_1^4 \frac{e^{\sqrt{t}}dt}{\sqrt{t}(1+e^{\sqrt{t}})}$ à l'aide du changement de variable : $x = e^{\sqrt{t}}$. Quelle est la relation entre dx et dt ?

Bornes :

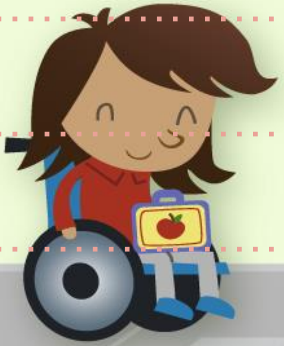
$$\begin{cases} t = 1 \iff x = e^{\sqrt{1}} = e \\ t = 4 \iff x = e^{\sqrt{4}} = e^2 \end{cases}$$

dx et dt :

$$x = e^{\sqrt{t}}$$

$$\frac{dx}{dt} = \left(e^{\sqrt{t}}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{t}} e^{\sqrt{t}}$$

$$2dx = \frac{e^{\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} dt$$



5’

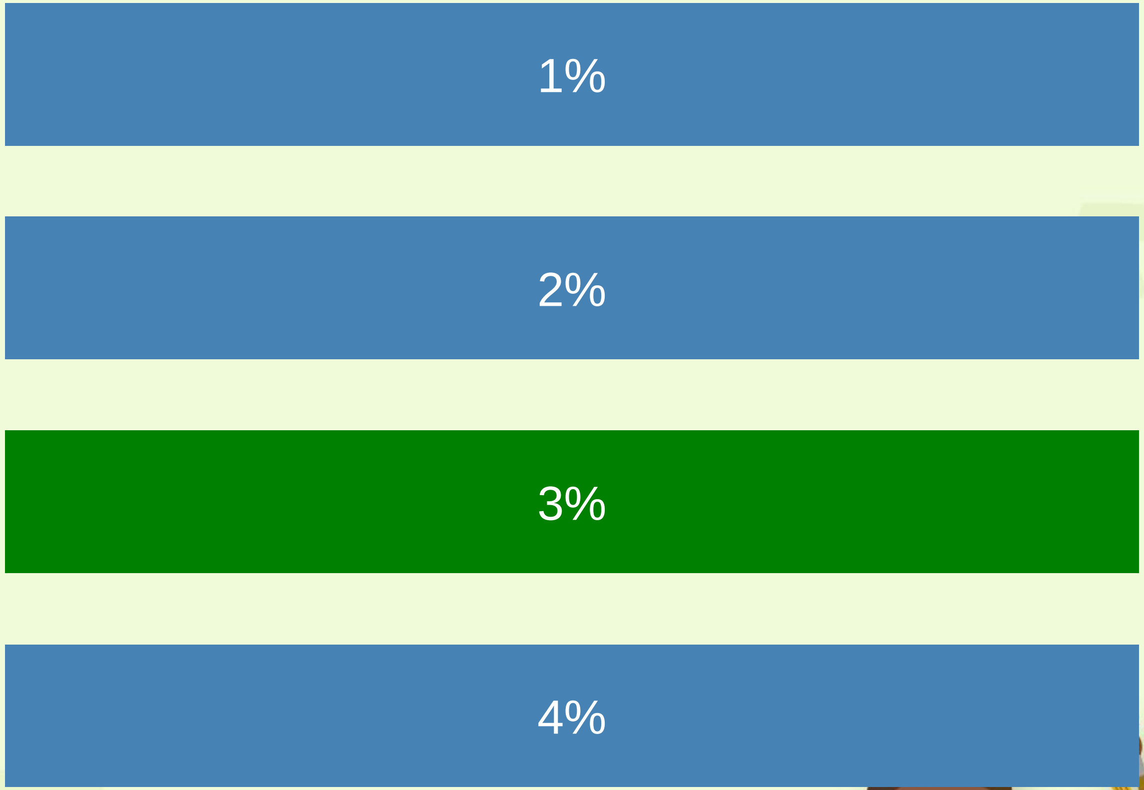
On souhaite calculer l’intégrale $I = \int_1^4 \frac{e^{\sqrt{t}}dt}{\sqrt{t}(1+e^{\sqrt{t}})}$ à l’aide du changement de variable : $x = e^{\sqrt{t}}$. Quelle est la nouvelle intégrale ?

1. $I = \int_e^{e^2} \frac{dx}{x}$

2. $I = \int_e^{e^2} \frac{dx}{x+1}$

3. $I = 2.\int_e^{e^2} \frac{dx}{x+1}$

4. *Aucune des réponses n'est juste*



On souhaite calculer l'intégrale $I = \int_1^4 \frac{e^{\sqrt{t}}dt}{\sqrt{t}(1+e^{\sqrt{t}})}$ à l'aide du changement de variable : $x = e^{\sqrt{t}}$. Quelle est la nouvelle intégrale ?

x varie de e à e^2 d' $2dx = \frac{e^{\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}dt$

$= 2dx$

$$I = \int_1^4 \frac{e^{\sqrt{t}}dt}{\sqrt{t}(1+e^{\sqrt{t}})} = 2 \cdot \int_e^{e^2} \frac{dx}{1+x}$$

2'

On souhaite calculer l'intégrale $I = \int_1^4 \frac{e^{\sqrt{t}}dt}{\sqrt{t}(1+e^{\sqrt{t}})}$ à l'aide du changement de variable : $x = e^{\sqrt{t}}$. Quelle est la valeur de I ?

1. $I = 2.ln\left(\frac{1+e^2}{1+e}\right)$

2. $I = 2$

3. $I = 2.ln\left(\frac{1+e}{1+e^2}\right)$

4. $Aucune\ des\ solutions\ précédentes\ n'est\ juste.$

1%

2%

3%

4%

On souhaite calculer l'intégrale $I = \int_1^4 \frac{e^{\sqrt{t}}dt}{\sqrt{t}(1+e^{\sqrt{t}})}$ à l'aide du changement de variable : $x = e^{\sqrt{t}}$. Quelle est la valeur de I ?

x varie de e à e^2 et $2dx = \frac{e^{\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}$

$= 2dx$

$$I = \int_1^4 \frac{e^{\sqrt{t}}dt}{\sqrt{t}(1+e^{\sqrt{t}})} = 2.\int_e^{e^2} \frac{dx}{1+x} = 2.\left[\ln|1+x|\right]_e^{e^2}$$

$$I = 2\left(\ln(1+e^2) - \ln(1+e)\right)$$

$$I = 2 \ln\left(\frac{1+e^2}{1+e}\right)$$

Calcul intégral

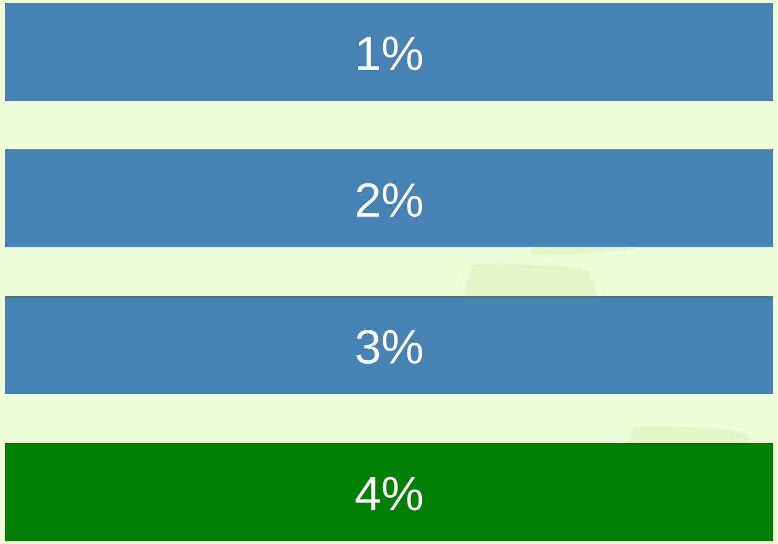
Intégration Par Parties

Q

1’

Quelle est la vraie formule d’IPP ?

1. $[UV]_a^b - \int_a^b U'V dt$
2. $[U'V']_a^b - \int_a^b U'V dt$
3. $[UV]_a^b - \int_a^b UV' dt$
4. ✓4 $Aucune\ réponse\ n'est\ la\ formule\ d'IPP$



$$\int_a^b U.V'\,dt = \left[U.V\right]_a^b - \int_a^b U'V\,dt$$

ou

$$\int_a^b U'.V\,dt = \left[U.V\right]_a^b - \int_a^b U.V'\,dt$$

Q

1'

Pour calculer par IPP

$K = \int_0^1 (3t-5).e^{-2t}\,dt$ *on pose* :

1. $U = e^{-2t}$ *et* $V' = 3t - 5$ — 1%
2. $V = e^{-2t}$ *et* $U' = 3t - 5$ — 2%
3. ✓3 $U = 3t - 5$ *et* $V' = e^{-2t}$ — 3%
4. *Tout est faux* — 4%

$$K = \int_0^1 \underbrace{(3t-5)}_{P} \, \underbrace{e^{-2t}}_{E} \, dt$$

ALPES

$$\begin{cases} U = 3t-5 \\ V' = e^{-2t} \end{cases}$$

Rappel :

$\xrightarrow{\text{choix de } U}$

ALPES

A → Arctan

L → Ln

P → poly.

E → Exp.

S → Cos., sin.

$$\int_a^b U.V' \, dt = [U.V]_a^b - \int_a^b U'.V \, dt$$

Q

2'

Pour calculer par IPP

$K = \int_0^1 (3t-5).e^{-2t}\,dt$ *on obtient* :

1. $K = -2[(3t-5)e^{-2t}]_0^1 + 6\int_0^1 e^{-2t}dt$ — 1%
2. $K = -\frac{1}{2}[(3t-5)e^{-2t}]_0^1 + 6\int_0^1 e^{-2t}dt$ — 2%
3. ✓3 $K = -\frac{1}{2}[(3t-5)e^{-2t}]_0^1 + \frac{3}{2}\int_0^1 e^{-2t}dt$ — 3%
4. *Tout est faux* — 4%

$$K = \int_0^1 \underbrace{(3t-5)}_{P}\, \underbrace{e^{-2t}}_{E}\, dt$$

ALPES

$$\begin{cases} U = 3t-5 \\ V' = e^{-2t} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} U' = 3 \\ V = \dfrac{e^{-2t}}{-2} \end{cases}$$

$$K = [U.V]_a^b - \int_a^b U'V\, dt = -\frac{1}{2}\left[(3t-5)e^{-2t}\right]_0^1 + \frac{3}{2}\int_0^1 e^{-2t}\, dt$$

3’

La valeur de $K = \int_0^1 (3t-5).e^{-2t}\,dt$ *est donc* :

1. $K = \frac{1}{4}(e^{-2}+7)$ — 1%
2. $K = \frac{1}{4}(-e^{-2}-7)$ — 2%
3. ✓3 $K = \frac{1}{4}(e^{-2}-7)$ — 3%
4. *Aucune des valeurs n'est exacte* — 4%

$$K = \int_0^1 \underbrace{(3t-5)}_{P}\ \underbrace{e^{-2t}}_{E}\, dt$$

ALPES

$$\begin{cases} u = 3t-5 \\ v' = e^{-2t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = 3 \\ v = \dfrac{e^{-2t}}{-2} \end{cases}$$

$$K = [u.v]_a^b - \int_a^b u'v\, dt = -\frac{1}{2}\left[(3t-5)e^{-2t}\right]_0^1 + \frac{3}{2}\int_0^1 e^{-2t}\, dt$$

$$K = -\frac{1}{2}\left(-2e^{-2}+5\right) + \frac{3}{2}\left[\frac{e^{-2t}}{-2}\right]_0^1$$

$$= e^{-2} - \frac{5}{2} - \frac{3}{4}\left(e^{-2}-1\right)$$

$$K = e^{-2} - \frac{3}{4}e^{-2} - \frac{5}{2} + \frac{3}{4} = \frac{e^{-2}}{4} - \frac{7}{4} = \frac{1}{4}\left(e^{-2}-7\right)$$

On souhaite calculer l'intégrale $I = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos(3t)e^{-t}dt$ Q 2'

Peut-on écrire que :

1. $I = 2.\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \cos(3t)e^{-t}dt$? — 1%

$2. I = 0$? — 2%

✓3 $3. \textit{Ni la réponse 1 ni la 2 n'est juste}$. — 3%

$$I = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \underbrace{\cos(3t)}_{\text{pair}}\, \underbrace{e^{-t}}_{\text{ni pair, ni impair}}\, dt$$

centré en 0

Notes

Ni 1) Ni 2)

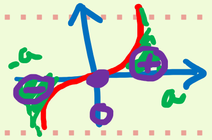
Si $f(t) = \cos(3t)\cdot e^{-t}$ alors $f(-t) = \cos(-3t)\cdot e^{t} = \cos(3t)\, e^{t}$

Contre Exple : $f(-\pi) = \cos(-3\pi)e^{\pi} = -e^{\pi}$

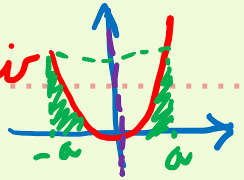
$f(\pi) = \cos(-3\pi) = e^{-\pi} = -e^{-\pi} = -\frac{1}{e^{\pi}} \neq f(-\pi)$ et $\neq -f(-\pi)$

f est donc ni pair, ni impair.

Rappel : $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$ si f est impair



$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\times\int_{0}^{a} f(x)\,dx$ si f est pair



Pour calculer l'intégrale $\mathrm{I} = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos(3t)e^{-t}dt$ à l'aide d'une IPP, on pose $\mathrm{U} = e^{-t}$ et $\mathrm{V}' = \cos(3t)$ et on obtient :

4'

Q

1. $I = \frac{-1}{3}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \sin(3t)e^{-t}dt$ — 1%
2. $I = 3\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \sin(3t)e^{-t}dt$ — 2%
3. ✓3 $I = \frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \sin(3t)e^{-t}dt$ — 3%
4. $I = -3\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \sin(3t)e^{-t}dt$ — 4%

Pour calculer l'intégrale I = $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos(3t)e^{-t}dt$ à l'aide d'une IPP,

on pose $U = e^{-t}$ et $V' = \cos(3t)$ et on obtient :

Notes

$$U' = -e^{-t} \qquad V = \frac{\sin(3t)}{3}$$

$$I = [U.V]_a^b - \int_a^b U'.V\,dt$$

$$I = \frac{1}{3}\left[e^{-t}.\sin(3t)\right]_{-\pi/3}^{\pi/3} + \frac{1}{3}\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \sin(3t).e^{-t}\,dt$$

$$I = \underbrace{\frac{1}{3}\left(e^{-\pi/3}.\sin(\pi) - e^{\pi/3}.\sin(-\pi)\right)}_{0} + \frac{1}{3}.\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \sin(3t)e^{-t}\,dt$$

Pour calculer l’intégrale $I = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos(3t)e^{-t}dt = \frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \sin(3t)e^{-t}dt$

à l’aide d’une deuxième IPP, on obtient :

4’

Q

1. $I = \frac{1}{9}\left\{e^{-\frac{\pi}{3}} - e^{\frac{\pi}{3}} - \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} cos(3t)e^{-t}dt\right\}$ ✓1 — 1%
2. $I = \frac{1}{9}\left\{e^{-\frac{\pi}{3}} - e^{\frac{\pi}{3}} + \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} cos(3t)e^{-t}dt\right\}$ — 2%
3. $I = \frac{1}{9}\left\{e^{\frac{\pi}{3}} - e^{-\frac{\pi}{3}} - \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} cos(3t)e^{-t}dt\right\}$ — 3%
4. $I = \frac{1}{9}\left\{e^{\frac{\pi}{3}} - e^{-\frac{\pi}{3}} + \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} cos(3t)e^{-t}dt\right\}$ — 4%

Pour calculer l'intégrale $\mathrm{I} = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos(3t)e^{-t}dt = \frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \sin(3t)e^{-t}dt$

à l'aide d'une deuxième IPP, on obtient :

Notes

On pose $u = e^{-t}$ $\quad u' = -e^{-t}$

$v' = \sin(3t)$ $\quad v = -\frac{\cos(3t)}{3}$

$$I = [u.v]_a^b - \int_a^b u'v\,dt$$

$$I = \frac{1}{3}\left\{ -\frac{1}{3}\left[e^{-t}.\cos(3t)\right]_{-\pi/3}^{\pi/3} - \frac{1}{3}\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \cos(3t).e^{-t}\,dt \right\}$$

$$= \frac{1}{3}\left\{ -\frac{1}{3}\left(e^{-\pi/3}\underbrace{\cos\pi}_{-1} - e^{\pi/3}\underbrace{\cos(-\pi)}_{-1}\right) - \frac{1}{3}\int^{\pi/3}_{-\pi/3} \cos(3t)e^{-t}\,dt \right\}$$

$$I = \frac{1}{3}\left\{\frac{1}{3}\left(e^{-\pi/3} - e^{-\pi/3}\right) - \frac{1}{3}I\right\} = \frac{1}{9}\left\{e^{-\pi/3} - e^{\pi/3} - I\right\}$$

Après deux IPP on a alors :

$$I = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos(3t)e^{-t}dt = \frac{1}{9}\left\{e^{-\frac{\pi}{3}} - e^{\frac{\pi}{3}} - \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} cos(3t)e^{-t}dt\right\} \text{ donc :}$$

Q

3’

1. $I = \frac{-1}{10}$ — 1%
2. $I = \frac{1}{9}\left(e^{\frac{-\pi}{3}} - e^{\frac{\pi}{3}}\right)$ — 2%
3. $I = \frac{1}{8}\left(e^{\frac{-\pi}{3}} - e^{\frac{\pi}{3}}\right)$ — 3%
4. ✓4 $I = \frac{1}{10}\left(e^{\frac{-\pi}{3}} - e^{\frac{\pi}{3}}\right)$ — 4%
5. $I = \frac{1}{10}$ — 5%

Après deux IPP on a alors :

$$I = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos(3t)e^{-t}dt = \frac{1}{9}\left\{e^{-\frac{\pi}{3}} - e^{\frac{\pi}{3}} - \underbrace{\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} cos(3t)e^{-t}dt}_{I}\right\} \text{ donc :}$$

Notes

$$I = \frac{1}{9}\left(e^{-\pi/3} - e^{\pi/3}\right) - \frac{1}{9} I$$

$$I\underbrace{\left(1+\frac{1}{9}\right)}_{\frac{10}{9}} = \frac{1}{9}\left(e^{-\pi/3} - e^{\pi/3}\right)$$

$$I = \frac{9}{10} \times \frac{1}{9}\left(e^{-\pi/3} - e^{\pi/3}\right)$$

$$I = \frac{1}{10}\left(e^{-\pi/3} - e^{\pi/3}\right).$$