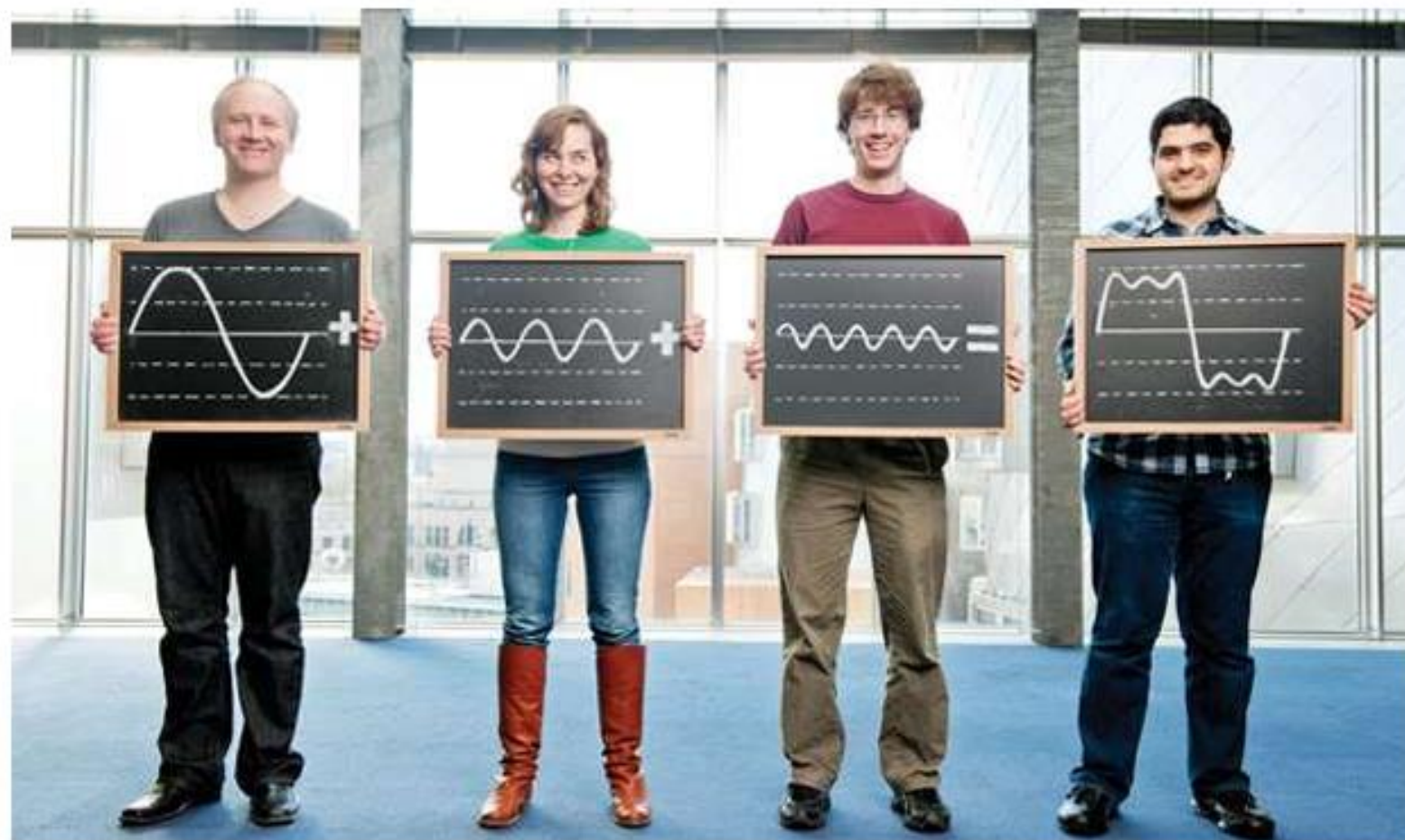


Chapitre 1 : Séries de Fourier



Programme d'Outils mathématiques et logiciels des semestres 3 et 4.

Page 4 chapitre 1

----- R3-04 -----

Chapitre I : Séries de Fourier (avec un tableur : Excel ou Open Office Calc.)

Chapitre II : Matrices (avec le logiciel MAXIMA et un tableur : Excel ou Open Office Calc.)

Evaluation $CCE/CTD/TP = (DS1+DS2+Bonus\ DM\&TP)/2$

----- R4-04 -----

Chapitre III : Transformation de Fourier

Chapitre IV : Transformation en Z (avec un tableur : Excel ou Open Office Calc.)

Evaluation $CCE/CTD/TP = (DS1+DS2+Bonus\ DM\&TP)/2$

	Planning C TD TP OML Semestre 3																									
Sem Civile	s36	s37	s38	s39	s40	s41	s42	s43	s44	s45	s46	s47	s48	s49	s50	s51	s52	s1	s2	s3	s4	s5	s6	s7		
	1,5C 1,5TD	1,5TP				1,5TP	1,5TD			1,5TP	1,5TD			1,5TD	1,5TP				1,5C 1,5TD	2TP			1,5TP	1,5TD et 1,5TP		
QB/DS							QuizzBox				DS								1,5C 1,5TD					DS Matrices en TD		
Salles	E330 / E241	E241				E241	E330 / E241			E241	E330			Salle info												TD en salle info
Chapitres	Séries de Fourier											Matrices										Transformation de Fourier				
Prog. PE	Developpements limités											Intégrales impropres										Diagonalisation de matrices				

	Planning C TD TP OML Semestre 4																	
Sem Civile	s8	s9	s10	s11	s12	s13	s14	s15	s16	s17	s18	s19	s20	s21	s22	s23	s24	s25
					1,5C	1,5TD					1,5 TD	2TP et 1,5TD				1,5C ET 1,5TP	1,5TP	1,5TD
QB/DS												DS TF en TD					Quizz Box	DS TZ en TD
Salles					E330 / E241	E330 / E241					E330 / E241	E330				E330 / E241	E241	E330
Chapitres	Transformation de Fourier										Transformation en Z							
Prog. PE	Diagonalisation de matrices										Séries numériques/entières							

Soit le signal: $x(t) = 7 \cos(\pi t) + 3 \cos(3\pi t) - 4 \sin(5\pi t) + 3 \cos(5\pi t)$

Tracer son spectre d'amplitude, appelé aussi spectre en fréquence

Rappel: $A \cos(\omega t + \varphi)$ ou $A \sin(\omega t + \varphi)$ ont pour fréquence: $f = \frac{\omega}{2\pi}$

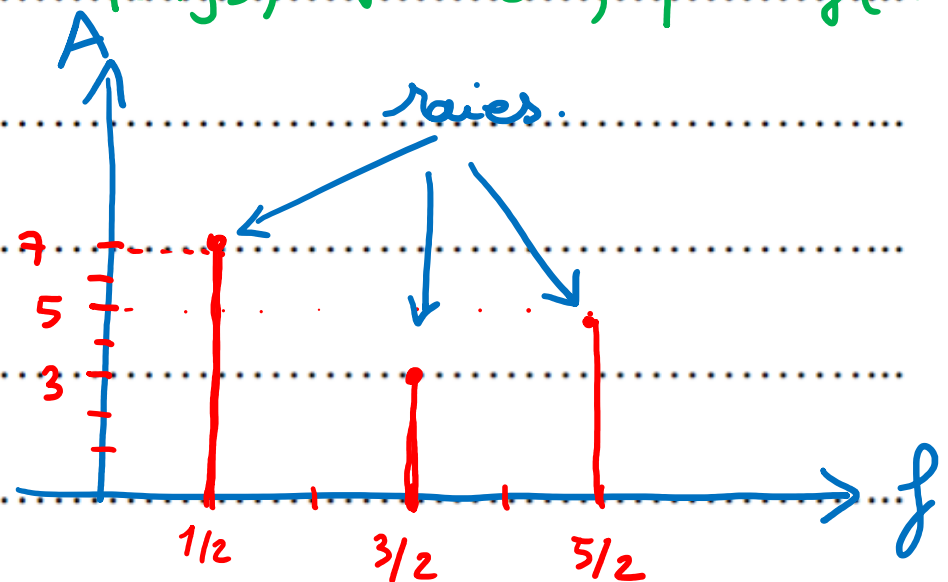
et pour amplitude: A

f	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$
A	7	3	5

$$\sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25}$$

Rappel: $\begin{cases} a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) = A \cos(\omega t + \varphi) \\ A = |a + jb| = \sqrt{a^2 + b^2}; \varphi = \arg(a - jb) \end{cases}$

"Spectre en raies"

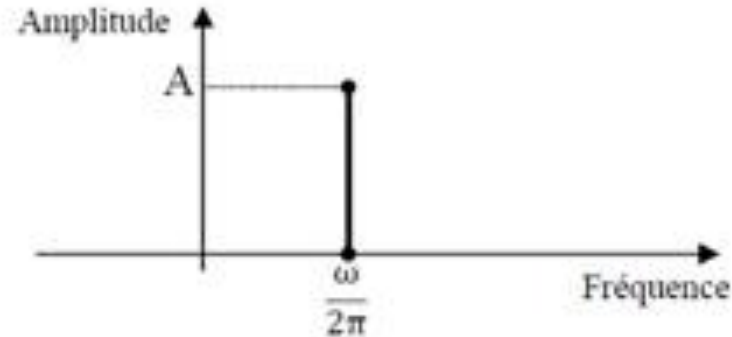


Rappel R1.04 :

Spectre de signaux sinusoïdaux

Le spectre d'un signal est la **représentation des amplitudes** des différentes composantes présentes dans le signal **en fonction de la fréquence**.

Spectre du signal sinusoïdal $x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$ (et donc aussi du signal $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$)

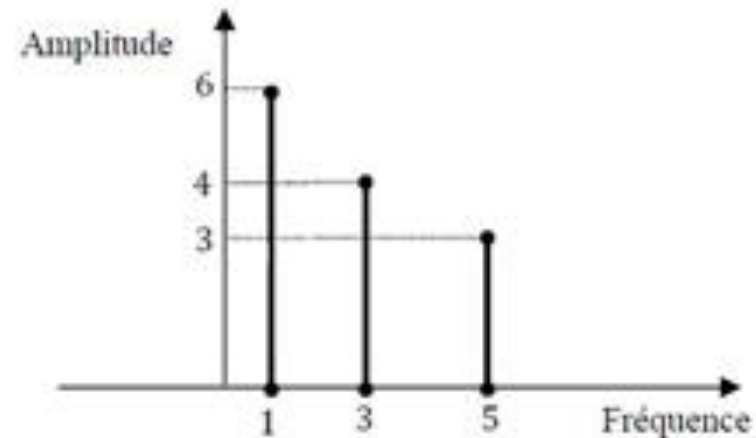
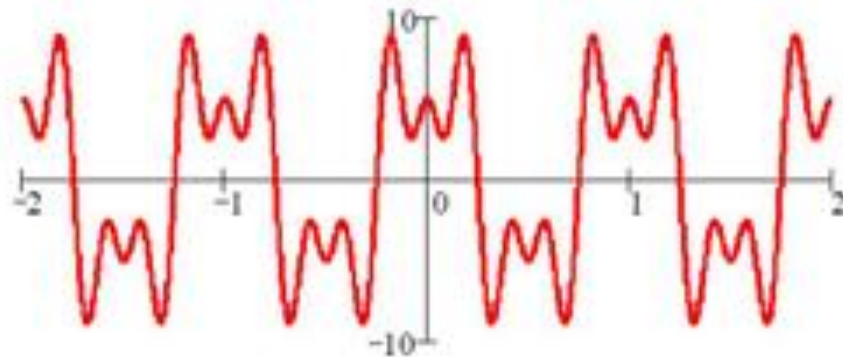


Le spectre d'une somme de sinusoïdes est la somme de leurs spectres.

Spectre du signal périodique $x(t) = 3\cos(10\pi t) + 6\sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right) - 4\cos(6\pi t)$

(Remarque : $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\alpha)$)

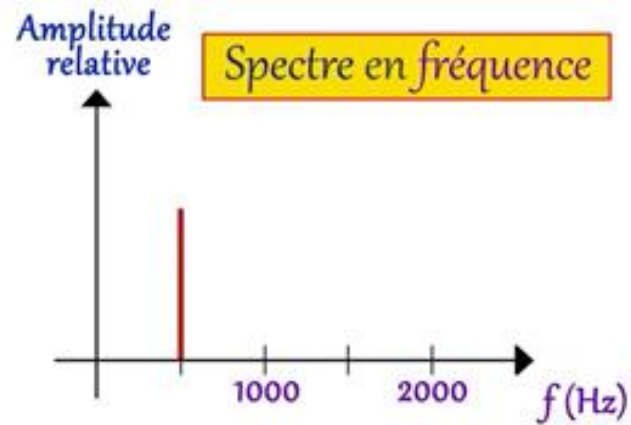
Représentation temporelle



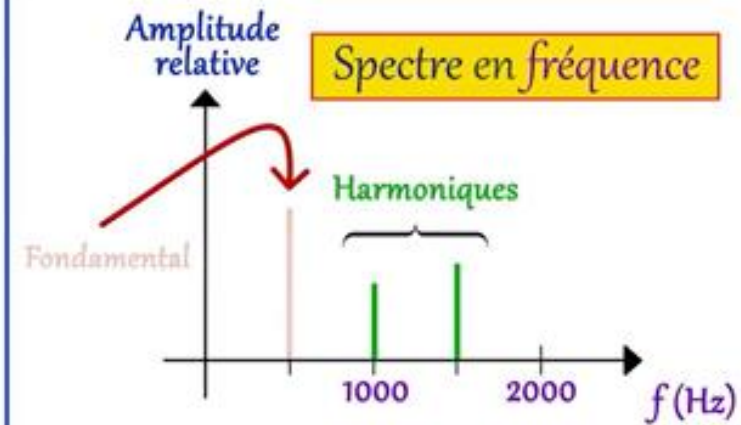
Caractériser un son



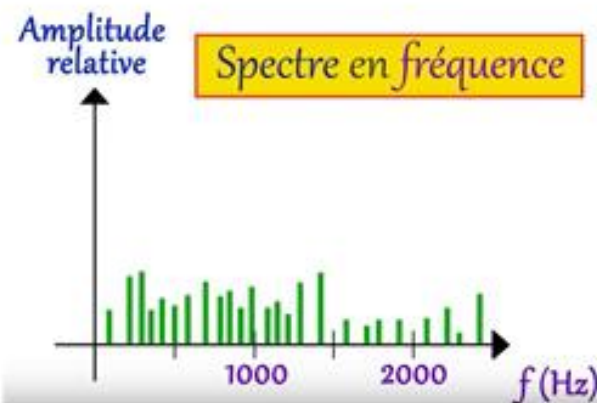
Page 9 chapitre 1



Son pur



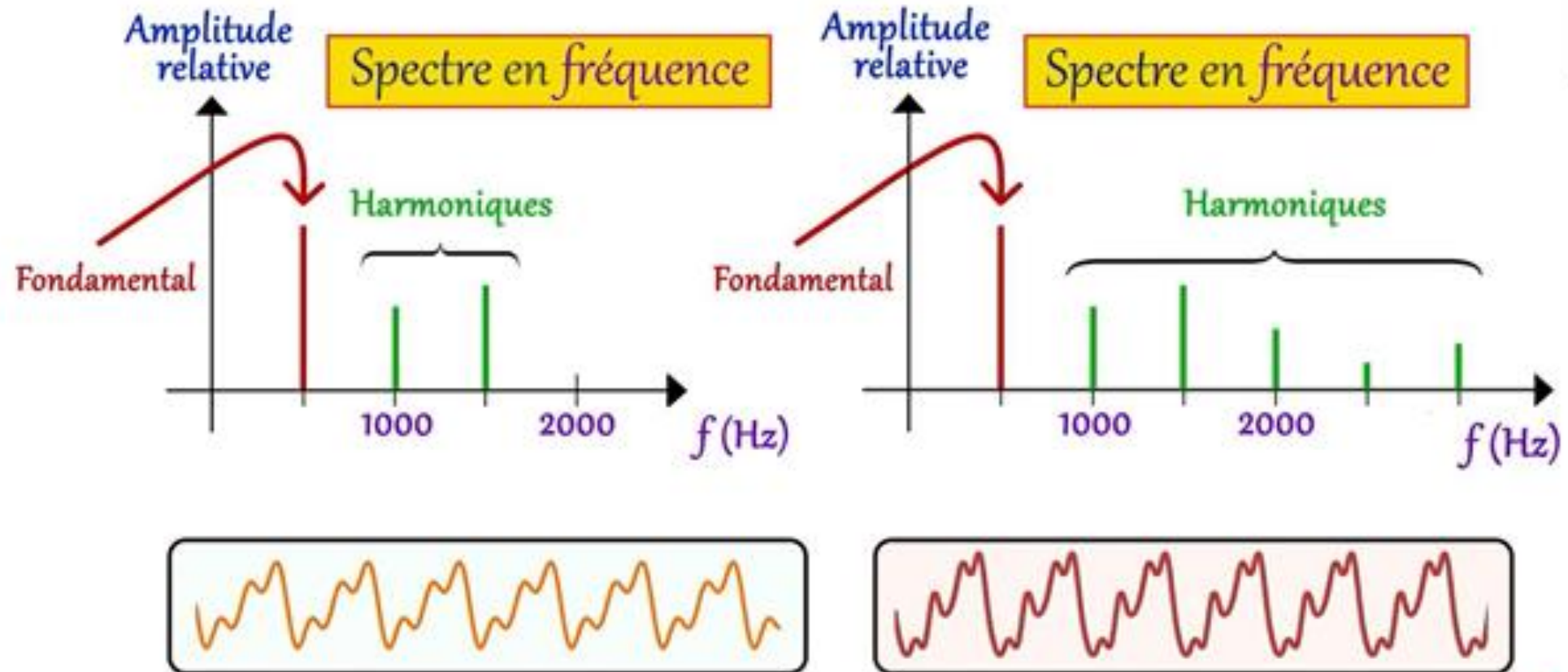
Son composé



Bruit



Timbre



I. Développement d'une fonction périodique en série de Fourier – application sur un signal carré

Page 10 chapitre 1

1) Définitions

Soit x une fonction de période T , intégrable sur tout intervalle $[t_0, t_0+T]$.

On appelle série de Fourier réelle de x la série suivante :

$$S(t) = a_0 + \sum_{p=1}^{+\infty} (a_p \cdot \cos(p\omega t) + b_p \cdot \sin(p\omega t)), \text{ où les suites réelles } (a_p)_p \text{ et } (b_p)_p \text{ sont définies}$$

de la façon suivante :

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t).dt \quad ; \quad a_p = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t).\cos(p\omega t).dt \quad ; \quad b_p = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t).\sin(p\omega t).dt \quad \text{pour } p \geq 1,$$

$$\text{avec } \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

a_0 est la valeur moyenne du signal x .

L'harmonique de rang p du signal x est le signal : $H_p(t) = a_p \cdot \cos(p\omega t) + b_p \cdot \sin(p\omega t)$

L'harmonique de rang 1 est appelé le fondamental du signal x

Notes

$$t \mapsto x(t) \text{ } T\text{-périodique} \quad S(t) = a_0 + \sum_{p=1}^{+\infty} a_p \cos(p\omega t) + b_p \sin(p\omega t)$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} S(t) dt = a_0 \int_0^T 1 dt + \sum_{p=1}^{+\infty} a_p \int_{-T/2}^{T/2} \underbrace{\cos(p\omega t)}_{\text{paire}} dt + b_p \int_{-T/2}^{T/2} \underbrace{\sin(p\omega t)}_{\text{impaire}} dt$$

$\downarrow$
 T -périodique

$= 0$

$$\int_0^T S(t) dt = a_0 [t]_0^T + \sum_{p=1}^{+\infty} a_p \cdot 2 \cdot \int_0^{T/2} \cos(p\omega t) dt$$

$$\int_0^T S(t) dt = a_0 \cdot T + 0$$
$$= \left[\frac{\sin(p\omega t)}{p\omega} \right]_0^{T/2} = \frac{1}{p\omega} \left(\underbrace{\sin(p\omega \frac{T}{2})}_{\sin(p\pi) = 0} - \sin 0 \right)$$

$p \in \mathbb{N}^*$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T \underbrace{S(t)}_{x(t)} dt$$

Notes

$$a_k ?? = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos(k\omega t) dt ; k \geq 1$$

$$\int_0^T \underbrace{S(t) \cos(k\omega t)}_{T\text{-périodique}} dt = \int_{-T/2}^{T/2} S(t) \cos(k\omega t) dt$$

$$\int_0^T S(t) \cos(k\omega t) dt = \underbrace{\cos \int_{-T/2}^{T/2} \cos(k\omega t) dt}_{=0} + \sum_{p=1}^{+\infty} a_p \int_{-T/2}^{T/2} \underbrace{\cos(p\omega t)}_{\text{paire}} \underbrace{\cos(k\omega t)}_{\text{paire}} dt + b_p \int_{-T/2}^{T/2} \underbrace{\sin(p\omega t)}_{\text{impaire}} \underbrace{\cos(k\omega t)}_{\text{paire}} dt$$

$\text{impaire} \times \text{paire} = \text{impaire}$

$$= 0 + \sum_{p=1}^{+\infty} a_p \int_{-T/2}^{T/2} \underbrace{\cos((p+k)\omega t) + \cos((p-k)\omega t)}_{\substack{\neq 0 \\ \text{si } p \neq k}} dt = 0$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2 \cos a \cos b$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} (\cos(a+b) + \cos(a-b))$$

$$a_p \times \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq k \\ \frac{T}{2} & \text{si } p = k \end{cases}$$

$$\int_0^T S(t) \cos(k\omega t) dt = a_k \frac{T}{2} \Rightarrow a_k = \frac{2}{T} \int_0^T S(t) \cos(k\omega t) dt$$

I. Développement d'une fonction périodique en série de Fourier – application sur un signal carré

1) Définitions

Soit x une fonction de période T , intégrable sur tout intervalle $[t_0, t_0+T]$.

On appelle série de Fourier réelle de x la série suivante :

$$S(t) = a_0 + \sum_{p=1}^{+\infty} (a_p \cdot \cos(p\omega t) + b_p \cdot \sin(p\omega t)), \text{ où les suites réelles } (a_p)_p \text{ et } (b_p)_p \text{ sont définies}$$

de la façon suivante :

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t).dt \quad ; \quad a_p = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t).\cos(p\omega t).dt \quad ; \quad b_p = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t).\sin(p\omega t).dt \quad \text{pour } p \geq 1,$$

$$\text{avec } \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

a_0 est la valeur moyenne du signal x .

L'harmonique de rang p du signal x est le signal : $H_p(t) = a_p \cdot \cos(p\omega t) + b_p \cdot \sin(p\omega t)$

L'harmonique de rang 1 est appelé le fondamental du signal x

Remarque :

$$S(t) = a_0 + \sum_{p=1}^{+\infty} (a_p \cdot \cos(p\omega t) + b_p \cdot \sin(p\omega t)) = \sum_{p=0}^{+\infty} (a_p \cdot \cos(p\omega t) + b_p \cdot \sin(p\omega t))$$

2) Rappels du R2-04

i) Intégrale d'une fonction T-périodique sur un intervalle de longueur T :

**Soit f, une fonction T-périodique, intégrable sur tout intervalle de longueur T : [a, a+T].
On a alors :**

$$\int_a^{a+T} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt = \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt$$

On peut donc calculer les intégrales définissant les coefficients de Fourier sur n'importe quel intervalle de longueur T.

ii) Intégrale sur un intervalle centré en 0 d'une fonction paire ou impaire :

- Si f est une fonction paire et intégrable sur [-a, a], alors : $\int_{-a}^a f(t) dt = 2 \cdot \int_0^a f(t) dt$. : Sym. /o (oy)
- Si f est une fonction impaire et intégrable sur [-a, a], alors : $\int_{-a}^a f(t) dt = 0$. : Sym. /o 0

Soit x , T périodique, pair. Que dire alors de a_0, a_p et b_p ?

$$* a_0 = \frac{1}{T} \times \int_0^T \underbrace{x(t)}_{\text{pair}} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} x(t) dt$$

$$* a_p = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \underbrace{x(t)}_{\text{pair}} \times \underbrace{\cos(pt)}_{\text{pair}} dt = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} x(t) \cos(pt) dt$$

$$* b_p = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \underbrace{x(t)}_{\text{pair}} \times \underbrace{\sin(pt)}_{\text{impair}} dt = 0$$

La série de Fourier d'un signal pair est : $a_0 + \sum_{p=1}^{+\infty} a_p \cos(pt)$

Remarque importante

La série de Fourier d'un signal pair est en cosinus : $a_0 + \sum_{p=1}^{+\infty} a_p \cdot \cos(p\omega t)$

$$b_p = 0 \quad \forall p \geq 1$$

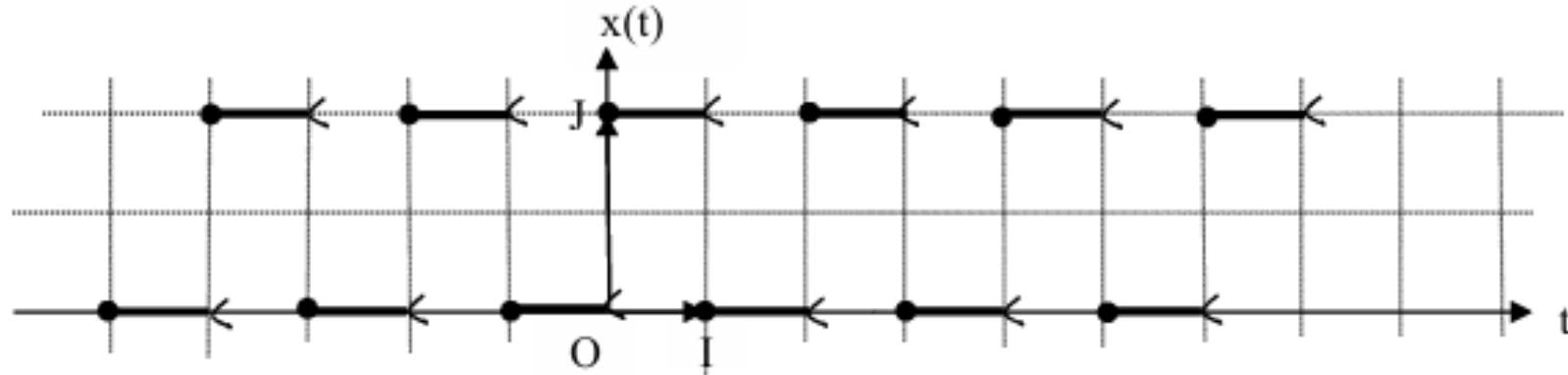
La série de Fourier d'un signal impair est en sinus : $\sum_{p=1}^{+\infty} b_p \cdot \sin(p\omega t)$

$$a_0 = a_p = 0 \quad \forall p \geq 1$$

iii) Série de Fourier d'un signal carré périodique

Soit x , la fonction de période 2, définie par : $x(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t \in [0;1[\\ 1 & \text{pour } t \in [1;2[\end{cases}$

Page 12 chapitre 1



$$T = 2 \Leftrightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = \pi$$

Le signal x est ni pair, ni impair.

Sa valeur moyenne est égale à $a_0 = \frac{1}{2}$, par lecture graphique ou calcul intégral.

Coefficients de Fourier de x : $\forall p \in \mathbb{N}^* \quad a_p = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos(p\omega t) dt = \int_0^2 x(t) \cos(p\pi t) dt$

$$a_p = \int_0^1 0 \cdot \cos(p\pi t) dt + \int_1^2 1 \cdot \cos(p\pi t) dt = \left[\frac{\sin(p\pi t)}{p\pi} \right]_1^2 = \frac{1}{p\pi} (\sin(2p\pi) - \sin(p\pi)) = 0$$

$$\forall p \in \mathbb{N}^* \quad b_p = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin(p\omega t) dt = \int_0^2 x(t) \sin(p\pi t) dt$$

$$b_p = \int_0^1 0 \cdot \sin(p\pi t) dt + \int_1^2 1 \cdot \sin(p\pi t) dt = \left[\frac{-\cos(p\pi t)}{p\pi} \right]_1^2 = \frac{1}{p\pi} (\cos(p\pi) - \cos(2p\pi))$$

$$b_p = \frac{1}{p\pi} ((-1)^p - 1)$$

Notes

Remarques : a) La série est en sinus, car si on change de repère (avec l'axe des abscisses d'équation $Y = \frac{1}{2}$), la courbe représentant X est symétrique par rapport à la nouvelle origine, et la fonction est ainsi impair.

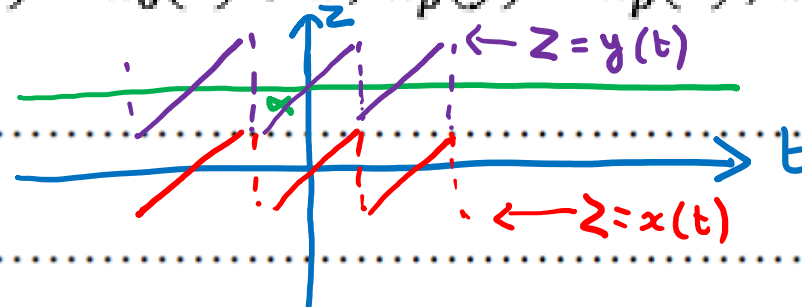
Complément à la remarque a) On obtient ainsi $a_p = 0$
 $\forall p \geq 1$

En effet :

Page 13 chapitre 1

Translation : si $y(t) = x(t) + \alpha$, α étant une constante réelle, alors

$$a_0(y) = a_0(x) + \alpha; a_p(y) = a_p(x); b_p(y) = b_p(x) \quad \forall p \in \mathbb{Z}$$



b) Tous les termes de rangs pairs de la série sont nuls, on peut ainsi écrire :

$$S_x(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2k+1} ((-1)^{2k+1} - 1) \sin((2k+1)\pi t)$$

$$S_x(t) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2k+1} \sin((2k+1)\pi t)$$

Remarque b) $S_x(t) = \frac{1}{2} + \sum_{p=1}^{+\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{p\pi} ((-1)^p - 1) \cdot \sin(p\pi t) \right)}_{\text{harmonique de rang } p.}$

$$S_x(t) = \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{\pi} (-2) \cdot \sin(\pi t)}_{\substack{\text{Fondamental} \\ p=1}} + \underbrace{0}_{\text{harmoniques de rang pair sont tous nuls}} + \frac{1}{3\pi} (-2) \sin(3\pi t) + \underbrace{0}_{\text{harmoniques de rang pair sont tous nuls}} + \frac{1}{5\pi} (-2) \sin(5\pi t) + \underbrace{0}_{\text{harmoniques de rang pair sont tous nuls}} + \dots$$

$$S_x(t) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \left(\underbrace{\frac{\sin(\pi t)}{1}}_{k=0} + \underbrace{\frac{\sin(3\pi t)}{3}}_{\substack{2k+1, qdk=1}} + \underbrace{\frac{\sin(5\pi t)}{5}}_{\substack{qdk=2}} + \dots \right) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin((2k+1)\pi t)}{2k+1}$$

Question :

La série de Fourier de x est-elle égale au signal x ? A-t-on : $S_x(t) = x(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$?

Page 14 chapitre 1

3) Théorème de Dirichlet et définition d'une fonction développable en série de Fourier

Soit x un signal de période T , intégrable sur tout intervalle $[\alpha, \alpha+T]$.

- Si x est continue sur $[\alpha, \alpha+T[$, sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle admet une limite finie à gauche et à droite.
- x est dérivable sur $[\alpha, \alpha+T[$, sauf éventuellement en un nombre fini de points où sa dérivée admet une limite finie à gauche et à droite.

Alors la série de Fourier de x converge en tout point t et sa fonction somme est alors :

$$a_0 + \sum_{p=1}^{+\infty} (a_p \cdot \cos(p\omega t) + b_p \cdot \sin(p\omega t)) = \begin{cases} x(t) \text{ pour } t \text{ où } x \text{ est continue} \\ \frac{x(t_+) + x(t_-)}{2} \text{ pour } t \text{ où } x \text{ est discontinue} \end{cases}$$

On dit alors que x est développable en série de Fourier.

Vocabulaire Toute fonction vérifiant les hypothèses du théorème de Dirichlet sont dites de classe C^1 par morceaux sur l'ensemble des réels.

Exemple Appliquer le théorème de Dirichlet au signal rectangle précédent.

théorème de Dirichlet appliqué à l'exemple

Page 14

→ hyp 1: Sur $[0; 2[$ x est continue sauf en 0 et en 1

$$\left. \begin{array}{l} \text{où } x(0^-) = 0 = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t < 0}} x(t) \quad x(1^-) = 1 = \lim_{\substack{t \rightarrow 1 \\ t < 1}} x(t) \\ x(0^+) = 1 = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} x(t) \quad x(1^+) = 0 = \lim_{\substack{t \rightarrow 1 \\ t > 1}} x(t) \end{array} \right\} \text{ sont finies.}$$

→ hyp 2: Sur $[0; 2[$ x est dérivable sauf en 0 et 1

$$\left. \begin{array}{l} \text{où } x'(0^-) = 0 \quad x'(1^-) = 0 \\ x'(0^+) = 0 \quad x'(1^+) = 0 \end{array} \right\} \text{ sont finies.}$$

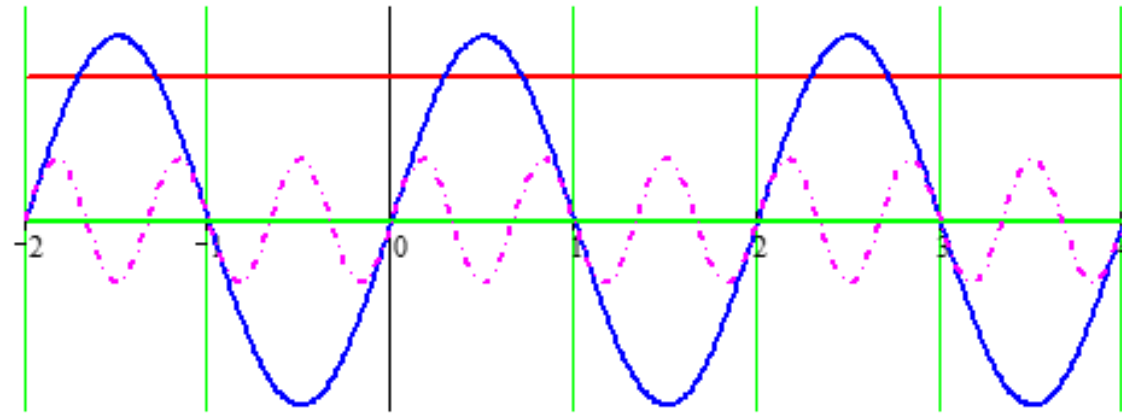
→ Conclusion: La série de Fourier converge en tout $t \in \mathbb{R}$,

et a pour somme:

$$S_x(t) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin((2k+1)\pi t)}{2k+1} = \begin{cases} x(t) & \forall t \notin \mathbb{Z} \\ \begin{array}{l} x(0^-) \quad x(0^+) \\ \downarrow \quad \downarrow \\ 0+1 \end{array} & \forall t \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

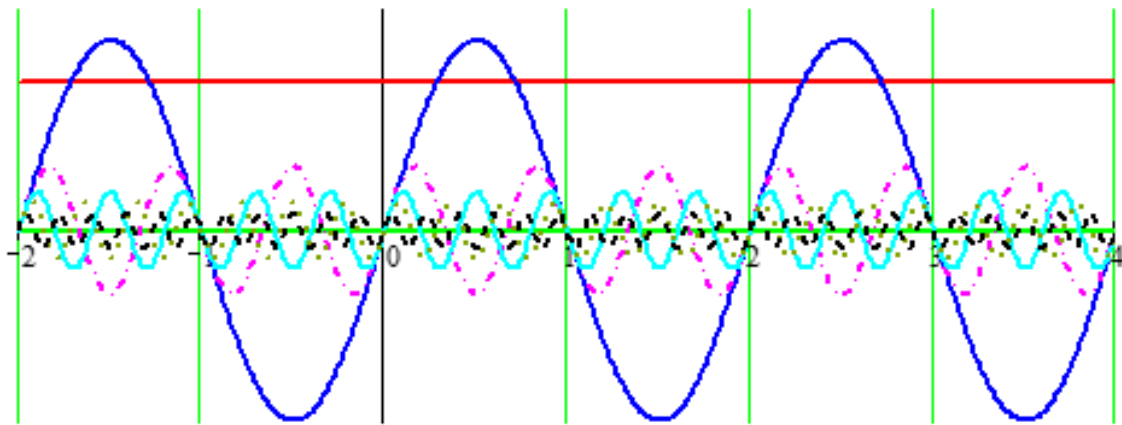
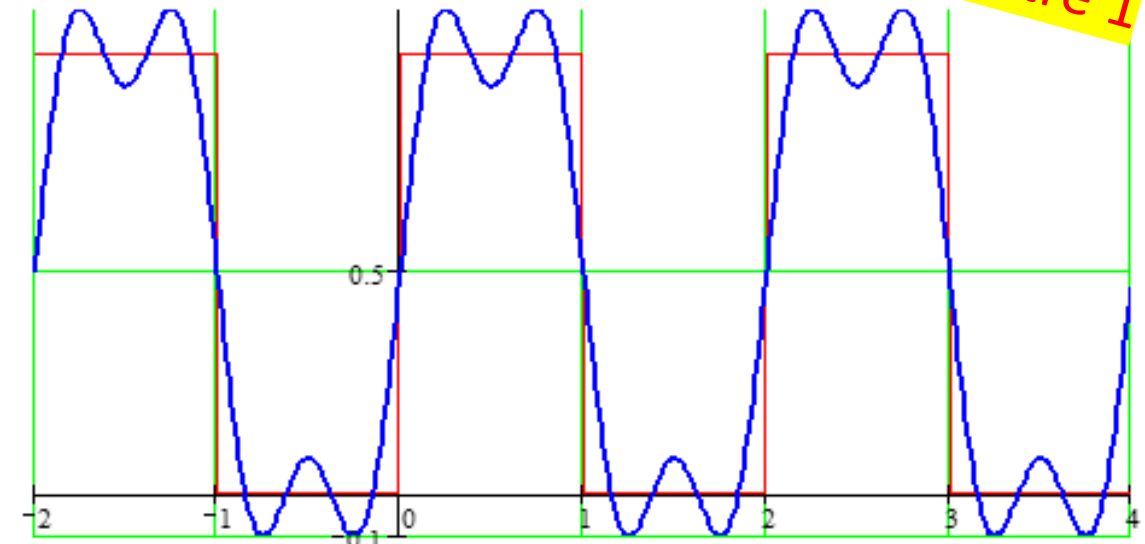
$\frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$





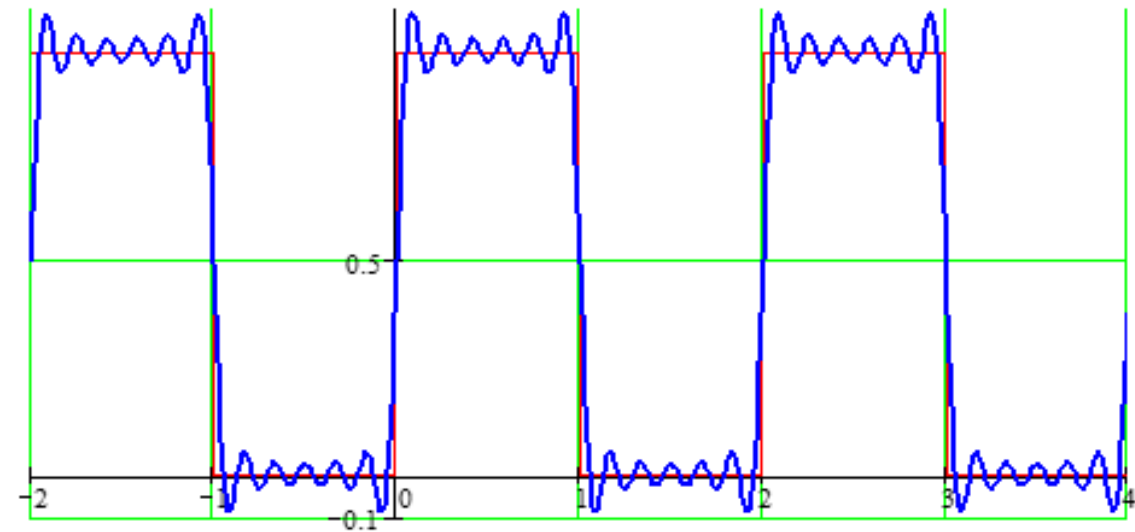
Au-dessus : Harmoniques de rang 0 (valeur moyenne), de rang 1 (fondamental) jusqu'au rang 3.

A droite : somme des harmoniques de rang de 0 à 3 et signal f .



Au-dessus : Harmoniques de rang 0 jusqu'au rang 21.

A droite : somme des harmoniques de rang 0 à 21 et signal f .



Exercice : En déduire la valeur de la série numérique : $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = S$

Dans la relation (*) on remplace t par $\frac{1}{2}$ et on obtient:

$$S_x\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin\left((2k+1)\pi \cdot \frac{1}{2}\right) = (-1)^k}{2k+1} = x\left(\frac{1}{2}\right) \text{ car } x \text{ est continue en } \frac{1}{2}.$$

$$k \geq 0 \quad \sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \sin(k\pi) \cdot \underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_0 + \underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_1 \underbrace{\cos(k\pi)}_{(-1)^k} = (-1)^k.$$

$$x\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

$$\text{Donc: } \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} S = 1 \iff S = -\frac{\pi}{4}$$

Remarque: $\pi = -4 \times \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$

4) Spectre d'un signal périodique

Le terme général $a_p \cdot \cos(p\omega t) + b_p \cdot \sin(p\omega t)$ peut aussi s'écrire $A_p \cos(p\omega t + \phi_p)$

où : $A_p = |a_p - ib_p| = \sqrt{a_p^2 + b_p^2}$ et $\phi_p = \arg(a_p - ib_p)$. ($p \neq 0$)

A_p est l'amplitude de l'harmonique de rang p

ϕ_p est la phase de l'harmonique de rang p .

Une autre écriture du développement en série de Fourier d'un signal périodique f est donc :

$$A_0 + \sum_{p=1}^{\infty} A_p \cos(p\omega t + \phi_p), \text{ avec } A_0 = a_0.$$

L'ensemble des amplitudes A_p forme le spectre d'amplitude unilatéral du signal x , ou spectre de raies (il s'agit d'un spectre discret). Il est représenté par un diagramme en bâtons obtenu en représentant les amplitudes A_p en fonction de p/T . A_p devient négligeable à partir d'un certain rang.

Exemple Tracer le spectre de raies du signal rectangle précédent.

II. Développement d'un signal triangle périodique en série de Fourier

Page 19&20&21 Chapitre 1

Notes

1

1) Série de Fourier d'un signal triangle périodique

Soit x , la fonction de période 2, définie par : $x(t) = \begin{cases} 1 - t & \text{pour } t \in [0;1[\\ 1 + t & \text{pour } t \in [-1;0[\end{cases}$

2

Après la question ii) Tracer dans un même repère la courbe représentant x , et S à l'ordre 7 pour t variant de -1 à 1 avec un pas de tracé de 0,1. Puis, tracer le diagramme en bâton du spectre en fréquence.

t	x(t)	S(t)
-1	0	0,02520112
-0,9	0,1	0,09294402
-0,8	0,2	0,20480061
-0,7	0,3	0,29674094
-0,6	0,4	0,40167157
-0,5	0,5	0,5
-0,4	0,6	0,59832843
-0,3	0,7	0,70325906
-0,2	0,8	0,79519939
-0,1	0,9	0,90705598
0	1	0,97479888
0,1	0,9	0,90705598
0,2	0,8	0,79519939
0,3	0,7	0,70325906
0,4	0,6	0,59832843
0,5	0,5	0,5
0,6	0,4	0,40167157
0,7	0,3	0,29674094
0,8	0,2	0,20480061
0,9	0,1	0,09294402
1	0	0,02520112

p	a0	ap	bp	Ap
1	0,5	0,40528473	0	0,40528473
2		0	0	0
3		0,04503164	0	0,04503164
4		0	0	0
5		0,01621139	0	0,01621139
6		0	0	0
7		0,00827112	0	0,00827112
8		0	0	0
9		0,00500352	0	0,00500352
10		0	0	0
11		0,00334946	0	0,00334946
12		0	0	0
13		0,00239813	0	0,00239813
14		0	0	0
15		0,00180127	0	0,00180127
16		0	0	0
17		0,00140237	0	0,00140237
18		0	0	0
19		0,00112267	0	0,00112267
20		0	0	0

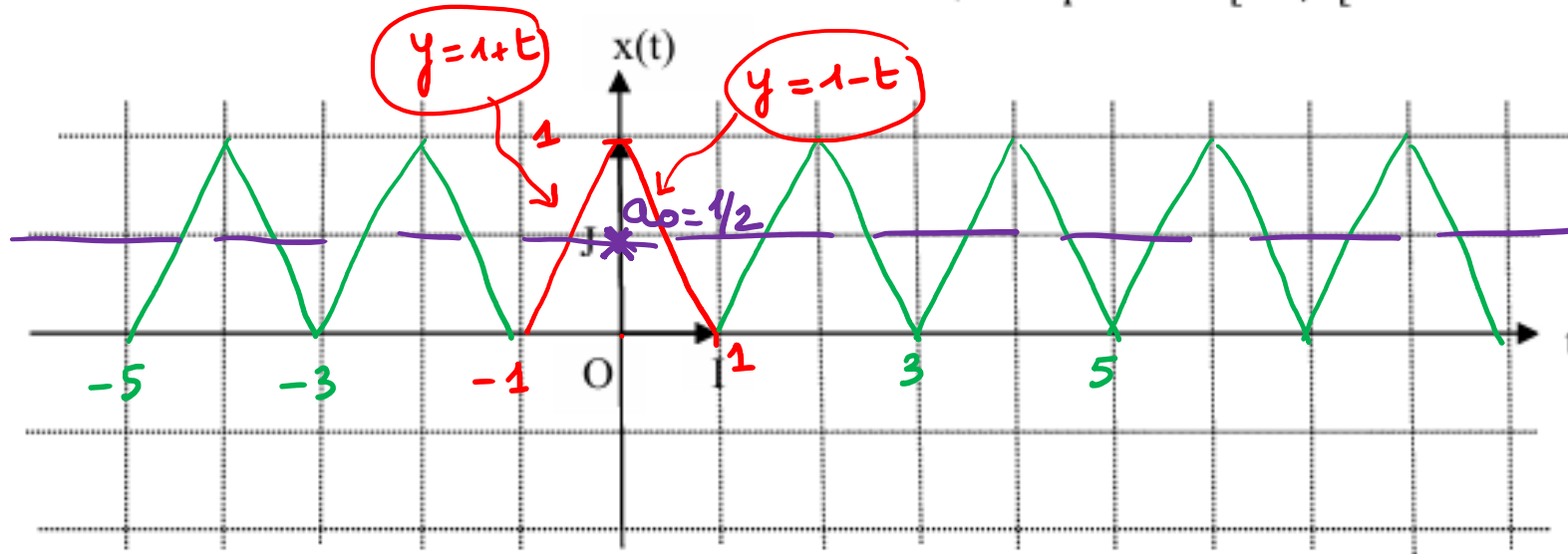
II. Développement d'un signal triangle périodique en série de Fourier

Page 18&19&20 Chapitre 1

Notes

1) Série de Fourier d'un signal triangle périodique

Soit x , la fonction de période 2, définie par : $x(t) = \begin{cases} 1 - t & \text{pour } t \in [0;1[\\ 1 + t & \text{pour } t \in [-1;0[\end{cases}$



i) Représenter le signal x . Déterminer T , ω et les coefficients de Fourier de x :

$$T = 2 \Rightarrow \omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} = \pi$$

x est paire, donc $b_p = 0 \quad \forall p \geq 1$.

Par lecture graphique $a_0 = 1/2$

$p \geq 1$ Notes

$$a_p = \frac{2}{T} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cdot \cos(p\omega t) dt = \frac{2}{2} \cdot \int_{-1}^1 \underbrace{x(t)}_{\text{paire}} \cdot \underbrace{\cos(p\pi t)}_{\text{paire}} dt = \text{paire}$$

$$a_p = 2 \times \int_0^1 (1-t) \cdot \cos(p\pi t) dt$$

$$\text{Ipp: } \begin{cases} U = 1-t \\ V' = \cos(p\pi t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U' = -1 \\ V = \frac{\sin(p\pi t)}{p\pi} \end{cases}$$

$$a_p = 2 \times \left\{ \underbrace{\left[\frac{(1-t) \cdot \sin(p\pi t)}{p\pi} \right]_0^1}_{=0} + \frac{1}{p\pi} \int_0^1 \sin(p\pi t) dt \right\}$$

$$a_p = \frac{2}{p\pi} \times \left[-\frac{\cos(p\pi t)}{p\pi} \right]_0^1$$

$$a_p = \frac{2}{p^2 \pi^2} \left(1 - \underbrace{\cos(p\pi)}_{=(-1)^p} \right) \quad \forall p \geq 1$$

Valeur moyenne du signal x : ... $a_0 = 1/2$

Fondamental du signal x : ... $H_1(t) = a_1 \cos(\pi t) + b_1 \sin(\pi t) = \frac{4}{\pi^2} \cos(\pi t)$

$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2}$

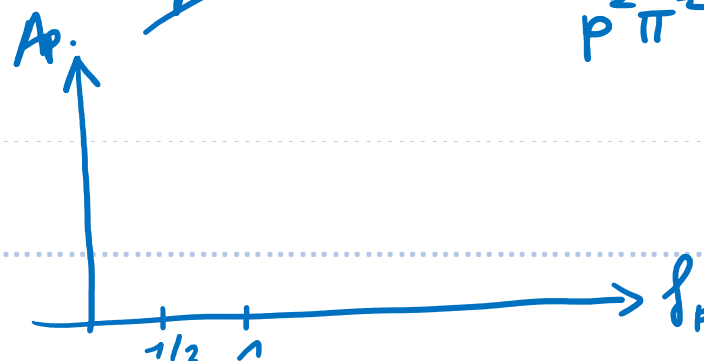
Harmonique de rang 2 : ... $H_2(t) = a_2 \cos(2\pi t) + b_2 \sin(2\pi t) = 0$

Harmonique de rang 3 : ... $H_3(t) = a_3 \cos(3\pi t) + b_3 \sin(3\pi t) = \frac{4}{9\pi^2} \cos(3\pi t)$

Harmonique de rang p : ... $H_p(t) = a_p \cos(p\pi t) + b_p \sin(p\pi t) = \frac{2}{p^2 \pi^2} (1 - (-1)^p) \cos(p\pi t)$

$p \geq 1$

p	1	2	3	4	5
f_p	$1/2$	1	$3/2$	2	$5/2$
A_p	$4/\pi^2$	0	$4/9\pi^2$	0	$4/25\pi^2$



p	f_p	a_p	b_p	$A_p = \sqrt{a_p^2 + b_p^2}$
1	$1/2$	$4/\pi^2$	0	$4/\pi^2$
2	1	0	0	0
3	$3/2$	$4/9\pi^2$	0	$4/9\pi^2$
4	2	0	0	0
5	$5/2$	$4/25\pi^2$	0	$4/25\pi^2$

ii) Ecrire la série de Fourier du signal x :

$$S_x(t) = a_0 + \sum_{p \geq 1} a_p \cos(p\pi t)$$

$$S_x(t) = \frac{1}{2} + \sum_{p \geq 1} \frac{2(1 - (-1)^p)}{p^2 \pi^2} \cos(p\pi t)$$

$(-1)^{2k+1} = -1$

Comme les termes pairs sont tous nuls, alors on somme sur les impairs

et on obtient : $S_x(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k \geq 0} \frac{2(1+1)}{(2k+1)^2 \pi^2} \cos((2k+1)\pi t)$

$$S_x(t) = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{k \geq 0} \frac{\cos((2k+1)\pi t)}{(2k+1)^2}$$

$$S_x(t) = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \left(\frac{\cos \pi t}{1^2} + \frac{\cos 3\pi t}{3^2} + \frac{\cos 5\pi t}{5^2} + \frac{\cos 7\pi t}{7^2} \right)$$

t	$x(t)$	$S(t)$
-1	$\left. \begin{array}{l} -1 \\ -0.5 \end{array} \right\} = 1+t$	$\uparrow$
-0.5		
0	$\left. \begin{array}{l} 0 \\ 1 \end{array} \right\} = 1-t$	
1		

2) Convergence de la série de Fourier du signal x (Théorème de Dirichlet)

Page 19 Chapitre 1

Type 1: x est continue sur $[-1; 1[$

Type 2: x est dérivable sur $[-1; 1[$ sauf en -1 et 0



où $x'(-1^-) = -1$; $x'(-1^+) = +1$; $x'(0^-) = +1$; $x'(0^+) = -1$ sont finis

Conclusion La série de Fourier de x converge en tout point

$t \in \mathbb{R}$ et à pour somme :

$$S_x(0) = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \cdot \sum_{k \geq 0} \frac{1}{(2k+1)^2} = x(0) = 1$$

$$S_x(t) = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \cdot \sum_{k \geq 0} \frac{\cos((2k+1)\pi t)}{(2k+1)^2} = x(t) \quad \forall t \in \mathbb{R} \text{ car } x \text{ est continue sur } \mathbb{R}.$$

Calculs auxiliaires :

$$\frac{4}{\pi^2} \sum_{k \geq 0} \frac{1}{(2k+1)^2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Notes

4) En déduire

$$\sum_{k \geq 0} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

D'après 1)ii $S_x(t) = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \cdot \sum_{k \geq 0} \frac{\cos((2k+1)\pi t)}{(2k+1)^2} = x(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$

En particulier pour $t=0$: $S_x(0) = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \cdot \sum_{k \geq 0} \frac{1}{(2k+1)^2} = x(0) = 1$ voir graphe

Ainsi: $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{(2k+1)^2} = (1 - \frac{1}{2}) \times \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{8}$

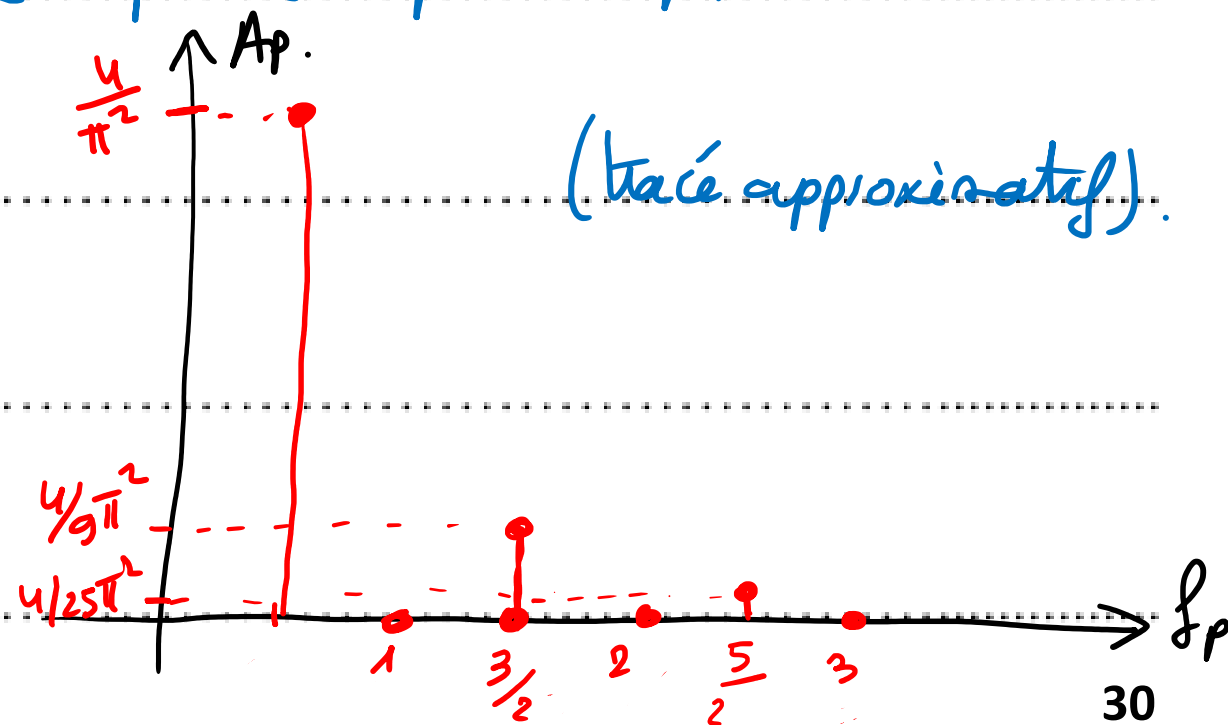
3) Spectre du signal x

On trace en abscisses la fréquence: $p\omega = 2\pi f_p \Leftrightarrow f_p = \frac{p\omega}{2\pi} = \frac{p}{2}$

et en ordonnée la amplitude de harmoniques: $A_p = \sqrt{a_p^2 + b_p^2} \quad \forall p \geq 1$

Ici $b_p = 0$, donc $A_p = \sqrt{a_p^2} = |a_p| = a_p$ car $a_p > 0 \quad \forall p \geq 1$

f_p	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	4	$\frac{5}{2}$	6
A_p	$\frac{4}{\pi^2}$	0	$\frac{4}{9\pi^2}$	0	$\frac{4}{25\pi^2}$	0



Notes 4) En déduire $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{(2k+1)^2}$.

D'après 1)ii $S_x(t) = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \cdot \sum_{k \geq 0} \frac{\cos((2k+1)\pi t)}{(2k+1)^2} = x(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$

En particulier pour $t=0$: $S_x(0) = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \cdot \sum_{k \geq 0} \frac{1}{(2k+1)^2} = x(0) = 1$ voir graphe
Ainsi: $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{(2k+1)^2} = (1 - \frac{1}{2}) \times \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{8}$

5) En déduire $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{(2k+1)^4}$ à l'aide de l'identité de Parseval.

$$\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x^2(t) dt = a_0^2 + \sum_{p \geq 1} \frac{a_p^2 + b_p^2}{2}$$
$$\frac{1}{2} \times \int_{-1}^1 \underbrace{x^2(t)}_{\text{paire}} dt = \frac{1}{4} + \frac{16}{\pi^4} \sum_{k \geq 0} \frac{1}{2(2k+1)^4} \iff$$
$$\int_0^1 (1-t)^2 dt = \frac{1}{4} + \frac{8}{\pi^4} \sum_{k \geq 0} \frac{1}{(2k+1)^4}$$
$$\left[-\frac{(1-t)^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3} = \dots$$

Ainsi: $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{(2k+1)^4} = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) \times \frac{\pi^4}{8} = \frac{\pi^4}{96}$

Soit x une fonction T -périodique ($T = \frac{2\pi}{\omega}$) développable en série de Fourier :

$$x(t) = \sum_{p \geq 0} (a_p \cdot \cos(p\omega t) + b_p \cdot \sin(p\omega t))$$

On a alors la formule suivante : $\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x^2(t) dt = a_0^2 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{a_p^2 + b_p^2}{2}$

Ou encore, en utilisant les coefficients de Fourier complexes : $\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x^2(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$

Interprétation physique

La formule de Parseval donne une relation entre les coefficients de Fourier d'une fonction x et le carré de sa valeur efficace.

$(x_{\text{eff}})^2 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x^2(t) dt$ est l'énergie du signal x , et $E(U_n) = \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}$ l'énergie de

l'harmonique de rang n : $U_n(t) = a_n \cdot \cos(n\omega t) + b_n \cdot \sin(n\omega t)$.

La formule de Bessel-Parseval peut aussi s'interpréter en termes d'énergie :

$$E(x) = x_{\text{moy}}^2 + \sum_{n=1}^{\infty} E(u_n)$$

Exemple / Exercice

Appliquer le théorème de Parseval au signal rectangle du paragraphe I.2.iii, puis en

déduire la valeur de la série : $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

|

