# Applications de la Transformation de Laplace

**La transformation de Laplace transforme toute équation différentielle en équation algébrique, en effet :**

$\mathcal{L}[f'(t)] = p.F(p) - f(o^+)$ ;

$\mathcal{L}[f''(t)] = p^2F(p) - pf(0^+) - f'(0^+)$ ;

$\mathcal{L}[f^{(3)}(t)] = p^3F(p) - p^2f(0^+) - pf'(0^+) - f''(0^+)$ ;

… … …

$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = p^nF(p) - p^{n-1}f(0^+) - p^{n-2}f'(0^+) - ... - pf^{(n-2)}(0^+) - f^{(n-1)}(0^+)$.

(n est un entier naturel.)

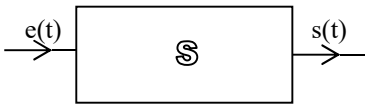
On note $g(0^+)$, la limite quand x tend vers 0 par valeurs positives de g(x)

**La transformation de Laplace facilite donc la résolution d'une EDLCC, et par la même tout problème du GEII.**

## I. Application à l'étude des systèmes

### 1) Fonction de transfert d'un circuit

Dans un circuit électrique (RC, RLC …) , un signal d'entrée e(t) (tension) engendre un signal de sortie s(t), appelé aussi réponse du circuit au signal e(t)).




On dit que le circuit S est linéaire lorsque e(t) et s(t) sont liés par une EDLCC. Le circuit est dit d'ordre n lorsque l'équation différentielle est d'ordre n :

$$a_n s^{(n)}(t) + a_{n-1}s^{(n-1)}(t) + ..... + a_1 s'(t) + a_0 s(t) = b_n e^{(n)}(t) + b_{n-1}e^{(n-1)}(t) + ..... + b_1 e'(t) + b_0 e(t)$$

**Fonction de transfert du circuit** **On note E(p) et S(p) les transformées de La place respectives de e(t) et s(t), puis on applique la transformation de Laplace à l'équation différentielle :**

$$a_n s^{(n)}(t) + a_{n-1}s^{(n-1)}(t) + ..... + a_1 s'(t) + a_0 s(t) = b_n e^{(n)}(t) + b_{n-1}e^{(n-1)}(t) + ..... + b_1 e'(t) + b_0 e(t)$$

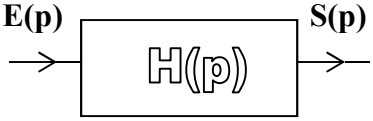
**Si les conditions initiales sont nulles :**

$$s^{(n)}(0) = s^{(n-1)}(0) = ..... = s'(0) = s(t) = e^{(n)}(0) = e^{(n-1)}(0) = ..... = e'(0) = e(0) = 0$$

**on obtient alors une équation algébrique reliant E(p) et S(p) que l'on résout :**

**$S(p) = H(p) \times E(p)$ . On appelle fonction de transfert du circuit et on note H, la fonction définie par :** $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$ .

**Le circuit est alors caractérisé par le schéma fonctionnel ci-dessous :**



**On obtient alors : S(p) = H(p)×E(p), et on en déduit que : s(t) = $\mathcal{L}^{-1}$[H(p)×E(p)]**

**2)** Exemple de circuit du premier ordre Etude du filtre passe-haut.

Soit un circuit dans lequel la sortie s(t) et l'entrée e(t) vérifient l'équation différentielle : s'(t)+3.s(t) = 2.e'(t) + e(t) ; s(0) = e(0) = 0. Soit S(p) =$\mathcal{L}$[s(t)] et E(p) = $\mathcal{L}$[e(t)].

- ✓ Calculer la fonction de transfert H(p) de ce circuit : $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$
- ✓ On appelle **réponse impulsionnelle** d'un circuit, le signal de sortie s obtenu, lorsque le signal d'entrée e est une impulsion de Dirac. Déterminer la réponse impulsionnelle de ce circuit.
- ✓ On appelle **réponse indicielle** d'un circuit, le signal de sortie obtenu, lorsque le signal d'entrée e est un échelon unité. Déterminer la réponse indicielle de ce circuit.
- ✓ On appelle **réponse harmonique** d'un circuit, le signal de sortie s obtenu, lorsque le signal d'entrée e est un signal sinusoïdal. Déterminer la réponse harmonique de ce circuit avec e(t) =5.cos(3t).
- ✓ Montrer qu'après disparition du régime transitoire, la réponse de ce circuit à $e(t) = 5\cos(3t)$ est de la forme : $s(t) = 5A\cos[3t + \varphi]$ avec : $A = |H(3j)|$ et $\varphi = \text{Arg}(H(3j))$.

**Plus généralement, on admet que : Après disparition du régime transitoire, la réponse d'un système linéaire à une entrée sinusoïdale $e(t) = e_0\cos(\omega t)$ est de la forme : $s(t) = e_0 A(\omega)\cos[\omega t + \varphi(\omega)]$ avec : $A(\omega) = |H(j\omega)|$ et $\varphi(\omega) = \text{Arg}(H(j\omega))$.**

**3)** Système du second ordre, coefficient d'amortissement :

Soit le système physique, caractérisé par l'équation différentielle :

$\begin{cases} s''(t) + 2.\lambda.\omega_0 s'(t) + \omega_0^2 s(t) = 2e(t) \\ s(0) = s'(0) = 0 \end{cases}$ où $\lambda$ et $\omega_0$ sont des constantes.

a) Déterminer la fonction de transfert de ce système, que l'on notera H(p, $\lambda$).

b) On pose $\omega_0 = 0.1$Hz. Avec un logiciel de calcul formel, déterminer la réponse à e(t)=10, que l'on notera s(t, $\lambda$). Tracer dans un même repère les courbes représentant s(t, $\lambda$) pour les valeurs de $\lambda$ égales à 0.2 ; 0.5 ; 0.707 ; 0.8 ; 1 ; 2.

**4)** Fonctionnement d'un système « entrée-sortie » d'ordre 3

Un système « entrée-sortie » est décrit par l'équation différentielle :

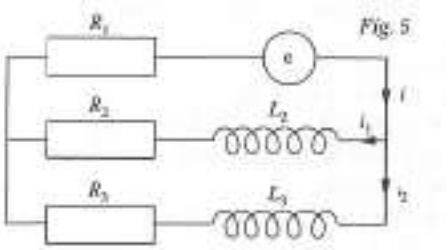
$\begin{cases} \frac{d^3s}{dt^3}(t) + \frac{ds}{dt}(t) = e(t) \\ s(0^+) = s'(0^+) = s''(0^+) = 0 \end{cases}$

a) On note E(p) et S(p) les transformées de Laplace respectives de e(t) et s(t). Déterminer H(p), la fonction de transfert de ce système.

b) Déterminer la réponse impulsionnelle

c) Déterminer la réponse indicielle.

**5)** Exercice Soit le circuit suivant :




$\mathbf{R_1 = 30\Omega}$ ; $\mathbf{R_2 = 10\Omega}$ ; $\mathbf{R_3 = 20\Omega}$
$\mathbf{L_2 = 2H}$ ; $\mathbf{L_3 = 4H}$

Les intensités $i_1$ et $i_2$ vérifient : $\begin{cases} -5i_1 - \frac{di_1}{dt} + 10i_2 + 2\frac{di_2}{dt} = 0 \\ 20i_1 + \frac{di_1}{dt} + 15i_2 = \frac{1}{2}e \\ i_1(0^+) = i_2(0^+) = 0 \end{cases}$

avec $e(t) = 110\left[U(t) - U\left(t - \frac{1}{10}\right)\right]$

Déterminer $i_1$ et $i_2$.

## II. Stabilité d'un système

**Définition Un système est stable si sa sortie tend vers zéro lorsque l'entrée devient nulle.**

Remarque

La fonction de transfert : $H(p) = \dfrac{P(p)}{Q(p)}$ avec $\deg(P) \leq \deg(Q)$ et

$Q(p) = (p - p_1)^{\alpha_1}(p - p_2)^{\alpha_2}...(p - p_n)^{\alpha_n}$ où $p_i$ sont des nombres réels ou complexes et $\alpha_i$ sont entiers naturels.

Quand l'excitation d'entrée cesse, il reste en sortie une somme de fonctions de la forme :

$y_i(t) = A_i . e^{p_i t} . t^{\alpha_i - 1}$.

y(t) tend donc vers zéro lorsque la partie réelle de tous les $p_i$ sont négatives.

**Conséquence Un système est stable lorsque tous les pôles de sa fonction de transfert ont leur partie réelle strictement négative.**

**Exercice**

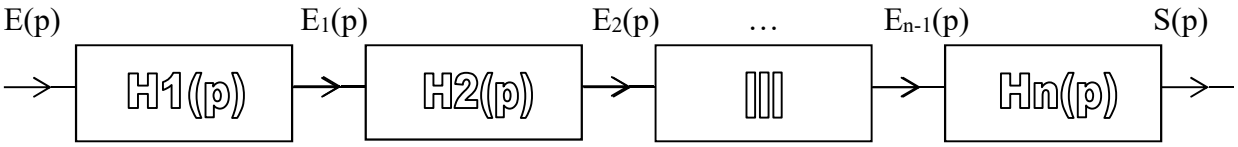
La fonction de transfert d'un système est donnée par : $G(p) = \frac{H(p)}{1+H(p)}$ où

$H(p) = \left(1 + \frac{K}{p}\right)\frac{1}{p(p+3)}$ ; K est une constante réelle donnée.

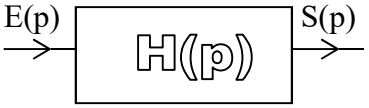
1) Calculer G(p)
2) Vérifier que pour K = 20, on a : $G(p) = \frac{p+20}{(p+4)(p^2-p+5)}$ . Déterminer la réponse, dans ce cas, du système à une impulsion de Dirac. Etudier la stabilité du système.
3) Vérifier que pour K = 2.059, la fonction de transfert s'écrit : $G(p) = \frac{p+2,059}{(p+2,9)(p^2+0,1p+0,71)}$ Etudier dans ce cas la stabilité du système.

## III. Composition des fonctions de transfert

Soit un système composé de plusieurs systèmes en cascade :




Ce système est équivalent au système :




Où : $\mathbf{H(p) = H_1(p) \times H_2(p) \times ... \times H_n(p)}$

# Rappel : Décomposition en somme d'éléments simples

**Décomposer une fraction rationnelle f, définie par : $f(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$, en somme d'éléments simples, consiste à l'écrire comme somme de fractions les plus simples possibles.**
**Il existe deux types d'élément simple :**

- **les éléments simples de première espèce : $\frac{a}{x-x_0}$, $\frac{a}{(x-x_0)^n}$**
- **les éléments simples de seconde espèce : $\frac{ax+b}{x^2+cx+d}$, $\frac{ax+b}{(x^2+cx+d)^n}$**

**où le polynôme $x^2 + cx + d$ est à racines complexes conjuguées.**

**2)** <u>La décomposition en somme d'éléments simples par l'exemple</u>

<u>Exemple 1</u> Déterminer : $L(x) = \int \frac{dx}{x^2 - x - 2}$

Aucune primitive ne permet de résoudre directement cette intégrale, décomposons en somme d'éléments simples la fraction rationnelle f, définie par :

$$f(x) = \frac{1}{x^2-x-2} = \frac{1}{(x+1)(x-2)}, \text{ sur } \mathbb{R} - \{-1; 2\}.$$ (-1 et 2 sont les pôles simples de f)

En fait : $\boldsymbol{f(x)} = \frac{\mathbf{1}}{(x+1)(x-2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-2}$

Eléments simples de « première espèce »

**« On décompose en somme d'éléments simples »**

**« On réduit au même dénominateur »**

Pour calculer les coefficients a et b, il existe plusieurs méthodes :

- ou bien réduire au même dénominateur :
  $\frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-2} = \frac{a(x-2)+b(x+1)}{(x+1)(x-2)}$, puis identifier avec $\frac{1}{(x+1)(x-2)}$ (ce qui peut être long et pénible !)
- ou encore, plus rapide (et peut même se calculer de tête) avec les formules suivantes :
  $\boldsymbol{a} = [(x+1)f(x)]_{x=-1} = \left[\frac{1}{x-2}\right]_{x=-1} = -\frac{1}{3}$ et de même : $\boldsymbol{b} = [(x-2)f(x)]_{x=2} = \frac{1}{3}$
  En effet, pour le calcul de a, en multipliant la fraction par (x+1), on isole a :
  $$(x+1)f(x) = \frac{1}{(x-2)} = a + \frac{b(x+1)}{x-2}$$
  puis en posant x = -1, on élimine b d'où le résultat suivant : $0 = \frac{1}{(-1-2)} = a + 0$
  En résumé, on retiendra que $\boldsymbol{a} = [(x+1)f(x)]_{x=-1}$

Ainsi : $L(x) = \int \frac{dx}{x^2 - x - 2} = -\frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-2} = -\frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{1}{3}\ln|x-2| + Cte = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right| + Cte$

<u>Exemple 2</u> Déterminer : $M(x) = \int \frac{2x+1}{(x^2+1)(x-3)}dx$

Aucune primitive ne permet de résoudre directement cette intégrale, décomposons en somme d'éléments simples la fraction rationnelle f, définie par :

$$f(x) = \frac{2x+1}{(x^2+1)(x-3)}, \text{ sur } \mathbb{R} - \{3\}.$$ (remarque : $x^2 + 1$ est à racines complexes i et –i )

$$\text{En fait : } \boldsymbol{f(x)} = \frac{\boldsymbol{2x+1}}{\boldsymbol{(x^2+1)(x-3)}} = \frac{\boldsymbol{ax+b}}{\boldsymbol{x^2+1}} + \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{x-3}}$$

Eléments simples de « seconde espèce » et de « première espèce »

- Calcul de c : $\boldsymbol{c} = [(\boldsymbol{x-3})\boldsymbol{f(x)}]_{\boldsymbol{x=3}} = \left[\frac{2x+1}{x^2+1}\right]_{x=3} = \frac{7}{10}$
- Pour calculer les coefficients a et b, il existe plusieurs méthodes :

| Méthode 1 : $ai + b = [(x^2+1)f(x)]_{x=i}$ | Méthode 2 : (a,b) est la solution du système contenant les 2 équations f(0) et $\lim_{x\to\infty} xf(x)$ |
|---|---|
| En effet, en multipliant la fraction par $(x^2+1)$, on isole a et b :<br>$(\mathbf{x^2+1})\mathbf{f(x)} = \frac{\mathbf{2x+1}}{\mathbf{x-3}} = \mathbf{ax+b} + \frac{\mathbf{c(x^2+1)}}{\mathbf{x-3}}$<br>puis en posant x = i, on élimine c d'où le résultat suivant :<br>$\frac{\mathbf{2i+1}}{\mathbf{i-3}} = \boldsymbol{a\,i+b}$<br>$\Leftrightarrow \boldsymbol{ai+b} = \frac{\boldsymbol{(2i+1)(-i-3)}}{\boldsymbol{(i-3)(-i-3)}}$<br>$\Leftrightarrow \boldsymbol{ai+b} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{10}} - \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{10}}\boldsymbol{i}$<br>$\Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{b} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{10}} \\ \boldsymbol{a} = -\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{10}} \end{cases}$<br>Remarque : cette méthode est utilisée lorsque les racines complexes sont simples (i et –i, ou 2i et -2i…). Et que d'autres coefficients sont à calculer à l'aide de la méthode 2 (voir exemple 3) | $\begin{cases} \boldsymbol{f(0)} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{-3}} = \boldsymbol{b} + \frac{\boldsymbol{c}}{\mathbf{-3}} \\ \lim_{x\to\infty} \boldsymbol{xf(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\mathbf{2}\boldsymbol{x^2}}{\boldsymbol{x^3}} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\boldsymbol{ax^2}}{\boldsymbol{x^2}} + \frac{\boldsymbol{cx}}{\boldsymbol{x}}\right) \end{cases}$<br>$\Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{b} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{10}} \\ \boldsymbol{a+c} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{a} = -\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{10}} \end{cases}$<br>Remarque : cette méthode est utilisée lorsque les racines complexes sont trop compliquées. |

$$M(x) = \int \frac{2x+1}{(x^2+1)(x-3)}dx = -\frac{1}{10}\int \frac{7x+1}{x^2+1}dx + \frac{7}{10}\int \frac{dx}{x-3} = -\frac{7}{20}\ln(x^2+1) - \frac{1}{10}\arctan(x) + \frac{7}{10}\ln|x-3| + Cte$$

Exemple 3 Déterminer : $N(x) = \int \frac{x^2+x}{(x-2)(x+1)^4}dx$

Aucune primitive ne permet de résoudre directement cette intégrale, décomposons en somme d'éléments simples la fraction rationnelle f, définie par :

$$f(x) = \frac{A(x)}{B(x)} = \frac{x(x+1)}{(x-2)(x+1)^4} = \frac{x}{(x-2)(x+1)^3}, \text{ sur } \mathbb{R} - \{-1; 2\}.$$

Remarques : -1 est un **pôle triple de f** ou de multiplicité 3 et on a **réduit la fraction**, car A et B possédait un facteur commun : x+1.

$$\text{En fait : } \boldsymbol{f(x)} = \frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{(x-2)(x+1)^3}} = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{x-2}} + \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{(x+1)^3}} + \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{(x+1)^2}} + \frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{x+1}}$$

Eléments simples de « première espèce »

- Calcul de a : $\boldsymbol{a} = [(\boldsymbol{x-2})\boldsymbol{f(x)}]_{\boldsymbol{x=2}} = \left[\frac{x}{(x+1)^3}\right]_{x=2} = \frac{2}{27}$
- Calcul de b : $\boldsymbol{b} = [(\boldsymbol{x+1})^3\boldsymbol{f(x)}]_{\boldsymbol{x=-1}} = \left[\frac{x}{x-2}\right]_{x=-1} = \frac{1}{3}$
- Calcul de c et d : la méthode précédente ne fonctionne plus.
  En effet, $[(x+1)^2 f(x)]_{x=-1} = \left[\frac{x}{(x-2)(x+1)}\right]_{x=-1}$ = division par zéro ! On applique alors la méthode 2 (voir exemple précédent)

$$\begin{cases} f(0) = 0 = \frac{a}{-2} + b + c + d \\ \lim_{x\to\infty} xf(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^4} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{ax}{x} + \frac{bx}{x^3} + \frac{cx}{x^2} + \frac{dx}{x}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c + d = \frac{8}{27} \\ a + d = 0 \Leftrightarrow d = -\frac{2}{27} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{2}{9} \\ d = -\frac{2}{27} \end{cases}$$

$$N(x) = \int \frac{x}{(x-2)(x+1)^3}\,dx$$
$$= \frac{2}{27}\int \frac{dx}{x-2} + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{(x+1)^3} + \frac{2}{9}\int \frac{dx}{(x+1)^2} - \frac{2}{27}\int \frac{dx}{x+1}$$
$$N(x) = \frac{2}{27}ln|x-2| - \frac{1}{6}\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{2}{9}\frac{1}{(x+1)} - \frac{2}{27}ln|x+1| + Cte$$

Remarque : Si -1 avait été un pôle de multiplicité supérieur à 3, exigeant plus de deux équations, on aurait pu utiliser la méthode de la division suivant les puissances croissantes (voie exercices).

Exemple 4 Déterminer $Z(x) = \int \frac{x^4-4x^2-x+3}{x^2-x-2}\,dx$

Aucune primitive ne permet de résoudre directement cette intégrale, décomposons en somme d'éléments simples la fraction rationnelle f, définie par :

$$f(x) = \frac{x^4-4x^2-x+3}{x^2-x-2} = \frac{x^4-4x^2-x+3}{(x+1)(x-2)},\ \text{sur } \mathbb{R} - \{-1; 2\}.$$

Attention !!! Ici le degré du numérateur est supérieur ou égal au degré du dénominateur, cette fraction possède donc une partie entière !! Pour la déterminer, il faut effectuer la division euclidienne (suivant les puissances décroissantes)

$$\begin{array}{r|l} A(x) = x^4 - 4x^2 - x + 3 & x^2 - x - 2 = B(x) \\ -(x^4 - x^3 - 2x^2) & \hline \\ \hline x^3 - 2x^2 - x + 3 & x^2 + x - 1 = Q(x) \\ -(x^3 - x^2 - 2x) & \\ \hline -x^2 + x + 3 & \\ -(x^2 + x + 2) & \\ \hline R(x) = 1 & \end{array}$$

**A = BQ+R**

$$\boldsymbol{f = \frac{A}{B} = \frac{BQ+R}{B} = Q + \frac{R}{B}}$$

**Partie entière de la fraction f**

Ainsi $f(x) = \frac{x^4-4x^2-x+3}{x^2-x-2} = x^2 + x - 1 + \frac{1}{(x+1)(x-2)}$

Et $Z(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{3}ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right| + Cte$ (voir exemple 1)

## 3) Synthèse

**Pour décomposer une fraction rationnelle f, définie par : $f(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$, en somme d'éléments simples, il faut procéder en plusieurs étapes :**

**1) Réduire la fraction si A et B ont un facteur commun,**

**2) Déterminer et mettre de côté la partie entière si deg(A)≥ $deg(B)$,**

**3) Ecrire la forme de la décomposition en somme d'éléments simples et calculer les coefficients.** $f = Q + \frac{R}{B}$ **avec** $g = \frac{R}{B}$ **et :**

$$g(x) = \frac{R(x)}{(x-x_0)^n(x^2+dx+k)^p \dots}$$

$$= \frac{a_n}{(x-x_0)^n} + \frac{a_{n-1}}{(x-x_0)^{n-1}} + \cdots + \frac{a_1}{x-x_0} + \frac{b_p x + c_p}{(x^2+dx+k)^p} + \frac{b_{p-1}x + c_{p-1}}{(x^2+dx+k)^{p-1}} + \cdots + \frac{b_1 x + c_1}{x^2+dx+k} + \cdots$$

**où le polynôme $x^2 + dx + k$ est à racines complexes conjuguées $\alpha$ et $\overline{\alpha}$**

**$a_n = [(x-x_0)^n g(x)]_{x=x_0}$ ; $b_p\alpha + c_p = [(x^2+dx+k)^p g(x)]_{x=\alpha}$ etc… Pour obtenir les autres coefficients, on pourra remplacer x par autant de valeurs à déterminer et résoudre le système. L'équation $\lim_{x\to\infty} xf(x)$ est très intéressante, puisqu'elle est toujours simple à résoudre.**

# Extraits de test d'entrée en école d'ingénieur

***Question 8*** La transformée de Laplace de la fonction

$$f(t)=\begin{cases}0 & (t<0)\\ e^{-3t}\,(t^3+3t^2+6t+2\sin 3t) & (t\geq 0)\end{cases}$$

est :

$[L(f)](p) =$

La fonction $f(t)$ dont la transformée de Laplace est :

$$[L(f)](p) = \frac{p+4}{p^2-4p+13}$$

est définie par :

$f(t) =$

**Question 9**

On considère le système différentiel suivant

$$(I)\quad \begin{cases}2s_1(t)-5s_2(t)=s_1'(t)\\ s_1(t)=s_2'(t)\end{cases} \qquad \text{avec } s_1(0)=2 \text{ et } s_2(0)=0$$

En appliquant la transformation de Laplace à ce système, on obtient

a) $\begin{cases}2pS_1(p)-5pS_2(p)=S_1(p)\\ pS_1(p)=S_2(p)\end{cases}$

b) $\begin{cases}2S_1(p)-5S_2(p)=S_1'(p)\\ S_1(p)=S_2'(p)\end{cases}$

c) $\begin{cases}(p-2)S_1(p)+5S_2(p)=2\\ S_1(p)-pS_2(p)=0\end{cases}$

d) $\begin{cases}(p+2)S_1(p)-5S_2(p)=0\\ S_1(p)-pS_2(p)=2\end{cases}$

**Question 10**

La résolution de ce système donne

a) $S_1(p)=\dfrac{p}{p^2-2p+5}$

b) $S_1(p)=\dfrac{i}{4}\left(\dfrac{p}{p-1+2i}-\dfrac{p}{p-1-2i}\right)$

c) $S_2(p)=\dfrac{2}{p^2-2p+5}$

d) $S_2(p)=\dfrac{i}{2}\left(\dfrac{1}{p-1+2i}-\dfrac{1}{p-1-2i}\right)$

**Question 11**

Les solutions du système différentiel sont alors données par

a) $s_1(t)=2e^t\cos(2t)u(t)$

b) $s_1(t)=e^t\cos(2t)u(t)$

c) $s_2(t)=e^t\sin(2t)u(t)$

d) $s_2(t)=2e^t\sin(2t)u(t)$