MB1 — 7 novembre 2018 — CC-1 : documents et calculatrices interdits. Durée : 50 minutes.

Toutes les questions n'admettent qu'une bonne réponse. Des points négatifs seront affectés aux mauvaises réponses.

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9
☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9 NOM Prénom : ....
☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9 Groupe de TD : ....

Q. [pq] Si $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ et $q=9$, que vaut p ?

■ $\frac{9}{8}$ ☐ $\frac{8}{9}$ ☐ $-\frac{8}{9}$ ☐ $-\frac{1}{9}$ ☐ 9 ☐ −8 ☐ 0

Explication : $\frac{1}{p}=1-\frac{1}{q}=\frac{q-1}{q}$ donc $p=\frac{q}{q-1}$

Q. [`vaccin`] Dans une population, 50% des individus ont été vaccinés contre une maladie. Lors d'une épidémie, on constate que 30% des vaccinés sont malades. Calculer le pourcentage de la population qui est vaccinée et malade.

■ 15% ☐ 30% ☐ 5% ☐ 3% ☐ 150% ☐ 1.5% ☐ 0.5%

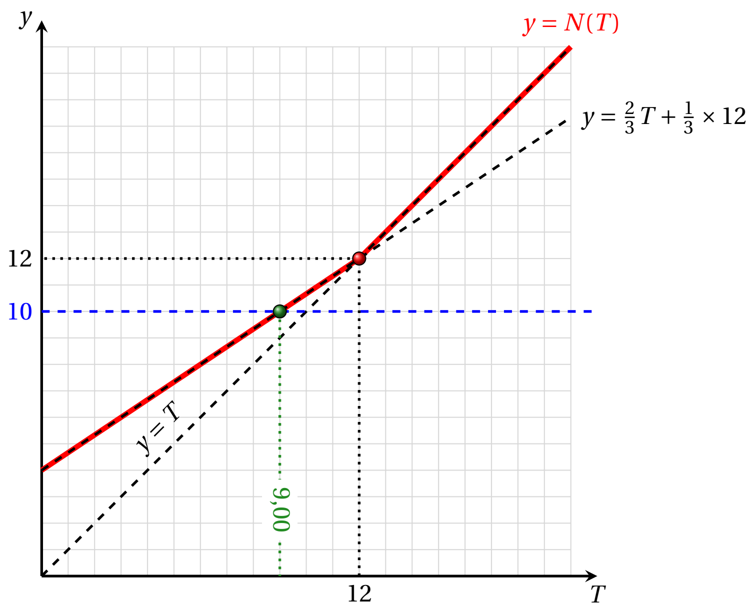
Explication : On notera • MV = le nombre d'individus malades et vaccinés, • MN = le nombre d'individus malades et non vaccinés, • SV = le nombre d'individus non malades et vaccinés, • SN = le nombre d'individus non malades et non vaccinés. Si α% individus ont été vaccinés contre une maladie alors $MV+SV=\frac{\alpha}{100}T$. Si γ% de vaccinés sont malades alors $MV=\frac{\gamma}{100}V=\frac{\gamma}{100}(MV+SV)$. Dans cet exemple, $\alpha=50$ et $\gamma=30$. Le pourcentage de la population qui est vaccinée et malade est :

$$MV=\frac{\gamma}{100}(MV+SV)=\frac{\gamma}{100}\times\frac{\alpha}{100}T=\frac{\alpha\gamma}{100^2}T.$$

Q. [mcc] Soit T la note du contrôle terminal et C la note moyenne des contrôles continus de l'ECUE MB1. La note finale N est calculée selon la fonction $N(T) = \max\left\{T; \frac{2}{3}T + \frac{1}{3}C\right\}$. Si $C = 12{,}00$ et $N(T) = 10{,}00$, que vaut T ?

■ 9,00 □ 12,00 □ 6,00 □ 10,00 □ 8,00 □ 20,00

Explication :



Q. [numcompA1] On considère deux fonctions f et g dont on ne connaît les valeurs qu'en quelques points : $f(0) = 2$, $f(1) = 1$, $f(2) = 0$ et $g(0) = 1$, $g(1) = 2$, $g(2) = 0$. Cocher la(les) bonne(s) réponse(s).

□ $g(f(0)) = 1$ □ $f(g(1)) = 1$ □ $g(f(1)) = 1$ □ $f(g(2)) = 1$ ■ $g(f(2)) = 1$

Explication : $f(g(0)) = f(1) = 1$, $f(g(1)) = f(2) = 0$, $f(g(2)) = f(0) = 2$, $g(f(0)) = g(2) = 0$, $g(f(1)) = g(1) = 2$, $g(f(2)) = g(0) = 1$

Q. [numcompA2] On considère deux fonctions f et g dont on ne connaît les valeurs qu'en quelques points : $f(0) = 2$, $f(1) = 1$, $f(2) = 0$ et $g(0) = 1$, $g(1) = 2$, $g(2) = 0$. Cocher la(les) bonne(s) réponse(s).

■ $f(g(0)) = 1$ □ $g(f(0)) = 1$ □ $f(g(1)) = 1$ □ $g(f(1)) = 1$ □ $f(g(2)) = 1$

Explication : $f(g(0)) = f(1) = 1$, $f(g(1)) = f(2) = 0$, $f(g(2)) = f(0) = 2$, $g(f(0)) = g(2) = 0$, $g(f(1)) = g(1) = 2$, $g(f(2)) = g(0) = 1$

Q. [numcompB1] On considère deux fonctions f et g dont on ne connaît les valeurs qu'en quelques points : $f(0) = 2$, $f(1) = 1$, $f(2) = 0$ et $g(0) = 0$, $g(1) = 2$, $g(2) = 1$. Cocher la(les) bonne(s) réponse(s).

□ $f(g(0)) = 1$ ■ $g(f(0)) = 1$ □ $f(g(1)) = 1$ □ $g(f(1)) = 1$ □ $g(f(2)) = 1$

Explication : $f(g(0)) = f(0) = 2$, $f(g(1)) = f(2) = 0$, $f(g(2)) = f(1) = 1$, $g(f(0)) = g(2) = 1$, $g(f(1)) = g(1) = 2$, $g(f(2)) = g(0) = 0$

Q. [`numcompB2`] On considère deux fonctions f et g dont on ne connaît les valeurs qu'en quelques points : $f(0) = 2$, $f(1) = 1$, $f(2) = 0$ et $g(0) = 0$, $g(1) = 2$, $g(2) = 1$. Cocher la(les) bonne(s) réponse(s).

☐ $f(g(0)) = 1$ ☐ $f(g(1)) = 1$ ☐ $g(f(1)) = 1$ ■ $f(g(2)) = 1$ ☐ $g(f(2)) = 1$

Explication : $f(g(0)) = f(0) = 2$, $f(g(1)) = f(2) = 0$, $f(g(2)) = f(1) = 1$, $g(f(0)) = g(2) = 1$, $g(f(1)) = g(1) = 2$, $g(f(2)) = g(0) = 0$

Q. [`numcompC1`] On considère deux fonctions f et g dont on ne connaît que les valeurs qu'en quelques points : $f(0) = 2$, $f(1) = 0$, $f(2) = 1$ et $g(0) = 1$, $g(1) = 0$, $g(2) = 2$. Cocher la(les) bonne(s) réponse(s).

☐ $f(g(0)) = 1$ ☐ $g(f(0)) = 1$ ☐ $f(g(1)) = 1$ ■ $f(g(2)) = 1$ ☐ $g(f(2)) = 1$

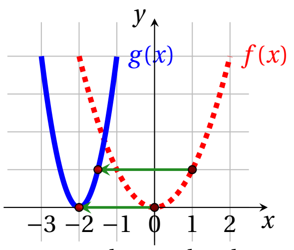
Explication : $f(g(0)) = f(1) = 0$, $f(g(1)) = f(0) = 2$, $f(g(2)) = f(2) = 1$, $g(f(0)) = g(2) = 2$, $g(f(1)) = g(0) = 1$, $g(f(2)) = g(1) = 0$

Q. [`numcompC2`] On considère deux fonctions f et g dont on ne connaît que les valeurs qu'en quelques points : $f(0) = 2$, $f(1) = 0$, $f(2) = 1$ et $g(0) = 1$, $g(1) = 0$, $g(2) = 2$. Cocher la(les) bonne(s) réponse(s).

☐ $f(g(0)) = 1$ ☐ $g(f(0)) = 1$ ☐ $f(g(1)) = 1$ ■ $g(f(1)) = 1$ ☐ $g(f(2)) = 1$

Explication : $f(g(0)) = f(1) = 0$, $f(g(1)) = f(0) = 2$, $f(g(2)) = f(2) = 1$, $g(f(0)) = g(2) = 2$, $g(f(1)) = g(0) = 1$, $g(f(2)) = g(1) = 0$

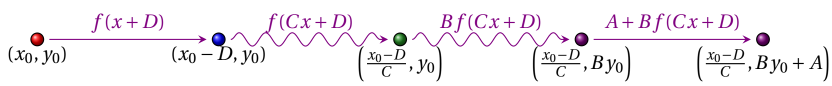
Q. [`fct-1`] En pointillé le graphe de f et en ligne pleine le graphe de g. Cocher la bonne réponse.



■ $g(x) = f(2x+4)$ ☐ $g(x) = f\left(\frac{1}{2}x+4\right)$

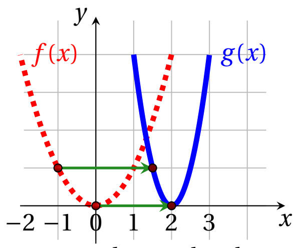
☐ $g(x) = f(2x-4)$ ☐ $g(x) = f\left(\frac{1}{2}x-4\right)$

Explication : Pour tracer le graphe de $g(x) = A + Bf(Cx + D)$ à partir du graphe de $y = f(x)$ on va déplacer un point de coordonnée (x_0, y_0) comme suit :



Dans notre cas on a tout de suite $A = 0$ et $B = 1$. De plus, le point $(0,0)$ est envoyé en $(-2,0)$ donc $-2 = \frac{0-D}{C}$ et le point $(1,1)$ est envoyé en $(-\frac{3}{2},1)$ donc $-\frac{3}{2} = \frac{1-D}{C}$. On trouve donc $D = 4$ et $C = 2$.

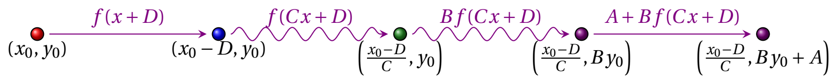
Q. [fct-2] En pointillé le graphe de f et en ligne pleine le graphe de g. Cocher la bonne réponse.



☐ $g(x) = f(2x+4)$ ☐ $g(x) = f\left(\frac{1}{2}x+4\right)$

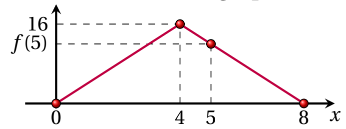
■ $g(x) = f(2x-4)$ ☐ $g(x) = f\left(\frac{1}{2}x-4\right)$

Explication : Pour tracer le graphe de $g(x) = A + Bf(Cx+D)$ à partir du graphe de $y = f(x)$ on va déplacer un point de coordonnée (x_0, y_0) comme suit :



Dans notre cas on a tout de suite $A = 0$ et $B = 1$. De plus, le point $(0,0)$ est envoyé en $(2,0)$ donc $2 = \frac{0-D}{C}$ et le point $(-1,1)$ est envoyé en $(\frac{3}{2}, 1)$ donc $\frac{3}{2} = \frac{-1-D}{C}$. On trouve donc $D = -4$ et $C = 2$.

Q. [linear34] Le graphe (non à l'échelle) est constitué de deux segments. Si $f(4) = 16$ et $f(0) = f(8) = 0$, que vaut $f(5)$?



☐ 0 ■ 12 ☐ 8 ☐ 5 ☐ 4

Explication : On ne considère que le segment de droite. On va noter $(a, f(a))$ et $(2a, 0)$ les deux points donnés (ici $a = 4$ et $f(a) = 16$). Alors $f(x) = \frac{0-f(a)}{2a-a}(x-2a)+0 = -\frac{f(a)}{a}(x-2a) = -\frac{16}{4}(x-8)$. On évalue la fonction en $x = a+1$ ainsi $f(a+1) = \frac{f(a)}{a}(a-1) = \frac{16}{4}(4-1)$.

Q. [temp1] La mesure d'une même température peut s'exprimer dans plusieurs unités. Une température de 0 °C (Celsius) correspond à 150 °D (Delisle) tandis que 100 °C correspondent à 0 °D. La formule permettant la conversion d'une valeur numérique de la température en (°C) vers l'unité (°D) est affine. Si on augmente la température d'un degré Delisle, comment évolue la température exprimée en degrés Celsius ?

■ Diminue de $\frac{2}{3}$°C ☐ Diminue de $\frac{9}{5}$°C ☐ Diminue de $\frac{3}{2}$°C

☐ Augmente de $\frac{5}{9}$°C ☐ Augmente de $\frac{3}{2}$°C ☐ Augmente de $\frac{9}{5}$°C

Explication : Soit y la température en °C et x la température en °D. On a $y = \frac{0-100}{150-0}(x-0)+100 = -\frac{2}{3}x+100$ donc, si $y_1 = -\frac{2}{3}x_1+100$ et $y_2 = -\frac{2}{3}(x_1+1)+100$ alors $y_2 - y_1 = -\frac{2}{3}$: si on augmente d'une degré Delisle alors la température en Celsius diminue de $\frac{2}{3}$.

Q. [temp2] La mesure d'une même température peut s'exprimer dans plusieurs unités. Une température de 0 °C (Celsius) correspond à 150 °D (Delisle) tandis que 100 °C correspondent à 0 °D. La formule permettant la conversion d'une valeur numérique de la température en (°C) vers l'unité (°D) est affine. Si on augmente la température d'un degré Celsius, comment évolue la température exprimée en degrés Delisle ?

☐ Diminue de $\frac{2}{3}$°C ☐ Diminue de $\frac{9}{5}$°C ■ Diminue de $\frac{3}{2}$°C
☐ Augmente de $\frac{5}{9}$°C ☐ Augmente de $\frac{3}{2}$°C ☐ Augmente de $\frac{9}{5}$°C

Explication : Soit y la température en °D et x la température en °C. On a $y = \frac{150-0}{0-100}(x-0)+150 = -\frac{3}{2}x+150$ donc, si $y_1 = -\frac{3}{2}x_1+150$ et $y_2 = -\frac{3}{2}(x_1+1)+150$ alors $y_2 - y_1 = -\frac{3}{2}$: si on augmente d'une degré Celsius alors la température en Delisle diminue de $\frac{3}{2}$.

Q. [pH] En chimie, on mesure l'acidité d'une solution liquide par son pH défini par $pH([H^+]) = -\log_{10}([H^+])$ où $[H^+]$ désigne la concentration molaire en ions H^+ (supposée faible). Que vaut $pH(0.001)$?

■ 3 ☐ -3 ☐ 10^{-3} ☐ -10^{-3} ☐ -10^{3} ☐ 10^{3}

Explication : $pH(10^{-n}) = -\log_{10}(10^{-n}) = n$

Q. [logdef] Que vaut $\exp\big(\ln(11)+2\ln(7)\big)$?

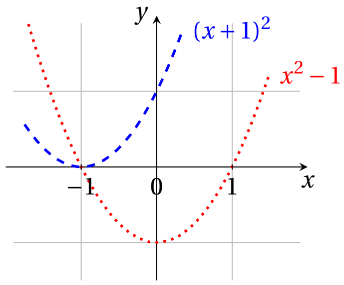
■ 539 ☐ 462 ☐ 490 ☐ 616 ☐ 60 ☐ 154

Explication : $\exp(\ln(a)+2\ln(b)) = \exp(\ln(ab^2)) = ab^2$

Q. [deb1] x est solution de $x^2-1 > (x+1)^2$ si et seulement si

■ $x < -1$ ☐ $-1 < x < 1$ ☐ $x > 1$ ☐ $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$ ☐ $x > 0$ ☐ $x < -\sqrt{2}$

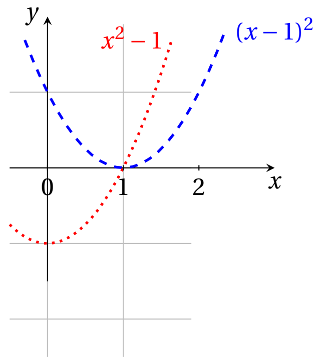
Explication : Soit on calcule directement $x^2-1-(x+1)^2 = x^2-1-(x^2+2x+1) = -2x-2 > 0$ soit on compare les graphes des deux paraboles : le graphe de $y = x^2-1$ est supérieure au graphe de $y=(x+1)^2$ pour $x < -1$:



Q. `[deb2]` x est solution de $x^2-1>(x-1)^2$ si et seulement si

■ $x>1$ ☐ $-1<x<1$ ☐ $x<-1$ ☐ $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$ ☐ $x>0$ ☐ $x>\sqrt{2}$

Explication : Soit on calcule directement $x^2-1-(x-1)^2=x^2-1-(x^2-2x+1)=2x-2>0$ soit on compare les graphes des deux paraboles : le graphe de $y=x^2-1$ est supérieure au graphe de $y=(x-1)^2$ pour $x>1$:



Q. `[log2]` x est solution de $\log_2(x-5)+\log_2(x-6)<1$ si et seulement si

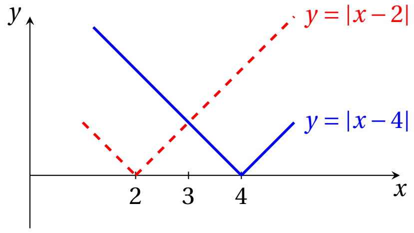
☐ $4<x<7$ ☐ $x<4$ ☐ $4<x<5$ ☐ $5<x<6$ ■ $6<x<7$ ☐ $x>7$

Explication : Soit $x_0=5$ et $x_1=6$. Tout d'abord on remarque qu'il faut $x>x_0$ et $x>x_1$. En appliquant la propriété de la somme de deux logarithmes on obtient $\log_2(x-x_0)+\log_2(x-x_1)=\log_2((x-x_0)(x-x_1))$ et $1=\log_2 2$. Il faut donc résoudre $(x-x_0)(x-x_1)<2$ avec $x>x_0$ et $x>x_1$.

Q. `[abs5]` x est solution de $|x-4|<|x-2|$ si et seulement si

☐ $x<2$ ☐ $2<x<3$ ☐ $2<x<4$ ☐ $3<x<4$ ☐ $x>4$ ■ $x>3$

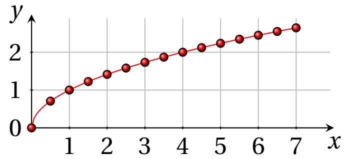
Explication : On trace les droites d'équations $y=x-4$ et $y=x-2$, on calcule les valeurs absolues et on cherche pour quelles valeurs de x la courbe bleu est au-dessous de la courbe rouge.



✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ **Reconnaître une fonction** ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎

Un chercheur pense que deux grandeurs x et y sont liées par une fonction $y = f(x)$. Il a récolte des données sous la forme de couples $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^{n}$. Quelle expression peut avoir f dans les cas suivants ?

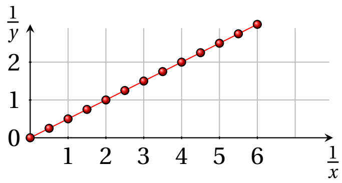
Q. `[graphesqrt]`



- [ ] $f(x) = 2\sin(x)$
- [ ] $f(x) = 2\ln(x)$
- [ ] $f(x) = 2x$
- [ ] $f(x) = \frac{1}{2}x$
- [ ] $f(x) = e^{x/2}$
- [ ] $f(x) = e^{-x^2}$
- [x] $f(x) = x^{1/2}$
- [ ] $f(x) = \frac{1}{2}\ln(x)$
- [ ] $f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$

Explication : $f(x) = x^{1/2} = \sqrt{x}$

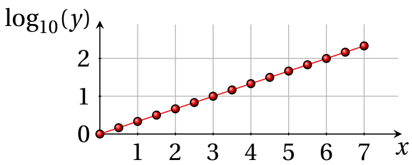
Q. `[grapheinv]` Attention : on a tracé $\frac{1}{y}$ en fonction de $\frac{1}{x}$ et on cherche $y = f(x)$.



- [ ] $f(x) = \frac{1}{2x}$
- [ ] $f(x) = \frac{1}{2}x$
- [x] $f(x) = 2x$
- [ ] $f(x) = \frac{2}{x}$

Explication : $\frac{1}{y} = \frac{1}{2}\frac{1}{x}$ donc $y = 2x$

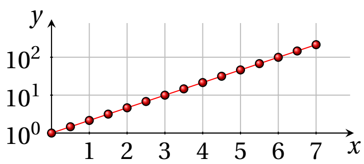
Q. `[grapheslog]` Attention : on a tracé $\log_{10}(y)$ en fonction de x et on cherche $y = f(x)$.



- [ ] $f(x) = \frac{1}{3}x$
- [ ] $f(x) = 3x$
- [x] $f(x) = 10^{x/3}$
- [ ] $f(x) = 10^{3x}$
- [ ] $f(x) = e^{x/3}$
- [ ] $f(x) = e^{3x}$
- [ ] $f(x) = x^3$
- [ ] $f(x) = \frac{\log_{10}(x)}{3}$
- [ ] $f(x) = 3\log_{10}(x)$

Explication : $\log_{10}(y) = \frac{1}{3}x$ donc $f(x) = 10^{x/3}$

Q. `[graphesechellelog]` Attention à l'échelle logarithmique ! On cherche $y = f(x)$.



- [ ] $f(x) = \frac{1}{3}x$
- [ ] $f(x) = 3x$
- [x] $f(x) = 10^{x/3}$
- [ ] $f(x) = 10^{3x}$
- [ ] $f(x) = e^{x/3}$
- [ ] $f(x) = e^{3x}$
- [ ] $f(x) = x^3$
- [ ] $f(x) = \frac{\log_{10}(x)}{3}$
- [ ] $f(x) = 3\log_{10}(x)$

Explication : $f(0) = 10^0 = 1$ et $f(3) = 10^1 = 10$ donc $f(x) = 10^{x/3}$. En effet, l'échelle logarithmique signifie que $\log_{10}(y) = \dfrac{1}{3}x$.