MB1 — 18 décembre 2018 — CC-2 : documents et calculatrices interdits. Durée : 1h.

Les questions faisant apparaître le symbole ☆ peuvent présenter zéro, une ou plusieurs bonnes réponses. Les autres questions ont une unique bonne réponse. Des points négatifs seront affectés aux mauvaises réponses.

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9
☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9
☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9

NOM Prénom : ....
Groupe de TD : ....
Numéro de copie : 1

Q. `[courslimites11]` ☆ Parmi les fonctions suivantes, lesquelles vérifient $\lim_{x\to 1} f(x) = +\infty$?

■ $\left(\frac{x}{x-1}\right)^4$ ☐ $\frac{x^2-1}{x-1}$ ☐ $\sin\left(\frac{1}{x-1}\right)$ ☐ $\ln(|x-1|)$ ☐ $\frac{1}{1-e^x}$

Explication : $\frac{x^2-1}{x-1} = (x+1) \xrightarrow[x\to 1]{} 2$, $|\sin\left(\frac{1}{x-1}\right)| \leq 1$, $\ln(|x-1|) \xrightarrow[x\to 1]{} -\infty$, $\frac{1}{1-e^x} \xrightarrow[x\to 1]{} \frac{1}{1-e}$

Q. `[courslimites13]` ☆ Parmi les fonctions suivantes, lesquelles vérifient $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0$?

■ e^x ☐ e^{-x} ☐ $\ln(x)$ ☐ $\sin(x)$ ☐ $\tan(x)$ ☐ $1-\frac{1}{x}$ ■ $\frac{1}{x-1}$

Q. `[asymptotesHoriz]` La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{25x+5}{5x-5}$ a pour asymptote en $-\infty$ la droite d'équation

■ $y = 5$ ☐ $y = -5$ ☐ $y = 25$ ☐ $y = -25$ ☐ $y = 1$ ☐ $y = -1$

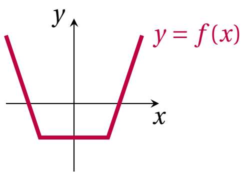
Explication : $\lim_{x\to -\infty} \frac{ax+b}{cx+d} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \stackrel{[H]}{=} \frac{a}{c}$

Q. `[asymptoteVert]` La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{4x-6}{3x+6}$ a pour asymptote verticale la droite d'équation

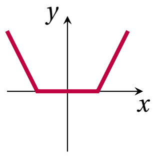
■ $x = -2$ ☐ $y = -1$ ☐ $y = 2$ ☐ $y = 0$ ☐ $x = 0$ ☐ $x = 1$

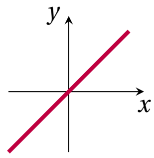
Explication : La fonction f n'est pas définie si $x = -\frac{d}{c}$ et $\lim_{x\to -\frac{d}{c}} \frac{ax+b}{cx+d} = \pm\infty$

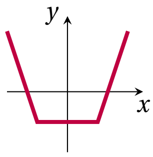
Q. `[deriveedessin]`
Dans la figure ci-dessous on a tracé le graphe d'une fonction f affine par morceaux.

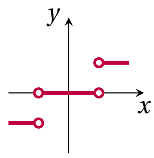


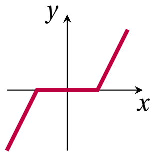
Parmi les graphes ci-contre, lequel pourrait être celui de sa dérivée (lorsqu'elle est définie) ?

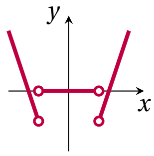
☐ 

☐ 

☐ 

■ 

☐ 

☐ 

Q. `[compln]` Calculer $f'(x)$ si $f(x) = \ln(e^{3x} + 4)$.

■ $\dfrac{3e^{3x}}{e^{3x}+4}$ ☐ $\dfrac{1}{e^{3x}+4}$ ☐ $\dfrac{3e^{2x}}{e^{3x}+4}$ ☐ $\dfrac{2e^{2x}}{e^{3x}+4}$ ☐ $\dfrac{3}{e^{3x}+4}$

Explication : Si $f(x) = \ln(e^{\alpha x} + \beta)$ alors $f'(x) = \dfrac{\alpha e^{\alpha x}}{e^{\alpha x} + \beta}$

Q. `[derivee2]` On considère la fonction $f(x) = \dfrac{x^2-5}{x+3}$. Sur l'intervalle $]-6,-4[$, la fonction f est

■ croissante puis décroissante ☐ décroissante ☐ croissante ☐ décroissante puis croissante

Explication : $f(x) = \frac{x^2-A}{x+B}$ donc $f'(x) = \frac{2x(x+B)-(x^2-A)}{(x+B)^2} = \frac{x^2+2Bx+A}{(x+B)^2}$. Le signe de f' coïncide avec le signe du numérateur : $x^2+2Bx+A = (x-x_0)(x-x_1) > 0$ ssi $x < x_0$ ou $x > x_1$ avec $x_0x_1 = A$ et $x_0 + x_1 = -2B$. Ici $x_0 = -5$ et $x_1 = -1$, donc sur l'intervalle donné f' est d'abord positive puis négative ainsi f est d'abord croissante puis décroissante.

Q. `[tg]` Soit $y = t(x)$ l'équation de la droite tangente au graphe de $f(x) = \tan(x)$ en $x = \frac{\pi}{4}$. Que vaut $t(\pi/2)$?

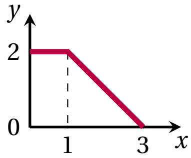
■ $\dfrac{\pi}{2}+1$ ☐ $1-\dfrac{\pi}{2}$ ☐ $\dfrac{\pi}{4}$ ☐ N'est pas définie ☐ Autre réponse :

Explication : $f'(x) = 1 + \tan^2(x)$ donc $t(x) = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0) = (1+1^2)(x-\frac{\pi}{4}) + 1 = 2x + 1 - \frac{\pi}{2}$ et $t(\pi/2) = \frac{\pi}{2} + 1$

Q. `[derivee10bisDUE]` ☆ Soit $c \in \mathbb{R}$. Cocher les propositions vraies :

■ Si $f(x) = e^x + c$ alors $f'(x) = e^x$
☐ Si $f'(x) = e^x + c$ alors $f(x) = e^x$
☐ Si $f(x) = x^2$ alors $f'(x) = \frac{x^3}{3}$
☐ Si $f(x) = \cos(x)$ alors $f'(x) = \sin(x)$
☐ Si $f'(x) = \ln(x)$ alors $f(x) = \frac{1}{x} + c$
■ Si $f'(x) = \cos(x)$ alors $f(x) = \sin(x) + c$

Q. [integraleswarmup1]



Le graphe de la fonction $y = f(x)$ est tracé ci-contre.

Que vaut $\int_0^3 f(x)\,dx$?

☐ 0 ☐ 2 ■ 4 ☐ 6

Explication : Aire $= 2 \times 1 + \frac{2\times(3-1)}{2} = 4$

Q. [integrales3] Si $\int_0^4 f(x)\,dx = 3$ que vaut $\int_0^4 \left(5 - f(x)\right)dx$?

☐ 37 ☐ 23 ☐ 2 ☐ 8 ■ 17 ☐ Aucune de ces réponses n'est correcte

Explication : $\int_0^4 \left(5-f(x)\right)dx = [5x]_0^4 - \int_0^4 f(x)\,dx = 5\times 4 - 3 = 17$

Q. [syst1] Si le triplet (x, y, z) est solution du système linéaire suivant, que vaut $z - x$?

$$\begin{cases} x+y+z=4 \\ -x+y+3z=8 \\ 2x+y-z=2 \end{cases}$$

■ 2
☐ 4
☐ 0
☐ 6
☐ 8
☐ Autre réponse :

Explication :

$$\begin{cases} x+y+z=a \\ -x+y+3z=b \\ 2x+y-z=c \end{cases} \xrightarrow[L_3\leftarrow L_3-2L_1]{L_2\leftarrow L_2+L_1} \begin{cases} x+y+z=a \\ 2y+4z=b+a \\ -y-3z=c-2a \end{cases} \xrightarrow{L_3\leftarrow L_3+\frac{1}{2}L_2} \begin{cases} x+y+z=a \\ 2y+4z=b+a \\ -z=c-\frac{3}{2}a+\frac{1}{2}b \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} z=\frac{3}{2}a-\frac{1}{2}b-c \\ y=-\frac{5}{2}a+\frac{3}{2}b+2c \\ x=2a-b-c \end{cases} \Longrightarrow \quad z-x=-\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b$$

Q. [pq2] Si $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = p$ et $p = 6$, que vaut q ?

■ $-\frac{6}{35}$ ☐ $\frac{6}{35}$ ☐ $-\frac{35}{6}$ ☐ $\frac{35}{6}$ ☐ $\frac{1}{6}$ ☐ 6 ☐ 0

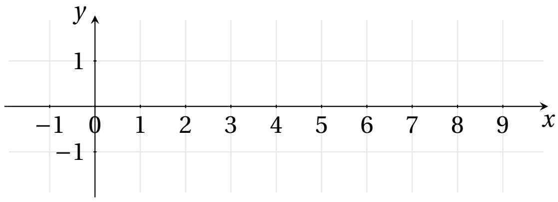
Explication : $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - p = \frac{1-p^2}{p}$ donc $q = -\frac{p}{p^2-1}$

Q. [sang1] D'une manière générale, le groupe sanguin A est le plus répandu et représente 45% de la population humaine. Le rhésus négatif, en revanche, est assez rare (14% de la population). Quel pourcentage de la population humaine est de type A- ?

☐ 63% ☐ 59% ☐ 31% ☐ 630% ■ 6.3% ☐ Autre réponse :

Explication : $\frac{45}{100} \times \frac{14}{100} = \frac{9}{20} \times \frac{7}{50} = \frac{63}{1000} = \frac{6.3}{100}$

Q. `[Open]` ☆ Tracer le graphe de la fonction $f(x) = x^2 - 4x + 3$. On prendra soin de placer avec précision les intersections avec l'axe des abscisses ainsi que le sommet. **Ne pas cocher de case dans la partie grisée** (ces cases sont réservées au correcteur).



NR R1 R2 Sx Sy

Explication : Racines : $x_0 = 1$, $x_1 = 3$; sommet $(2, -1)$