L1 SV — 9 janvier 2020 — CT : Durée : 2h

- Vérifiez votre énoncé: le sujet comporte 13 pages, leurs entêtes doivent être +1/1/xx+...+1/13/xx+.
- Ne pas écrire votre nom sur le QCM ni votre ID. Le numéro associé à ce sujet est le 1. **Retranscrire ce numéro sur la copie double dans l'emplacement "UFR" ET sur la feuille d'émargement.** (Utilisez la copie double comme feuille de brouillon mais rendez-la avec le QCM !)
- **Une feuille A4 recto-verso manuscrite autorisée, tout autre document et calculatrices interdits.**
- Toutes les questions ont une et une seule bonne réponse. **Des points négatifs seront affectés aux mauvaises réponses.**
- **Barème** : 10 bonnes réponses et aucune mauvaise réponse suffisent pour valider.
- Utiliser un stylo noir ou bleu et bien noircir les cases (ne pas utiliser de crayon !). En cas d'erreur, effacer votre réponse (avec du blanc correcteur/Tipp-Ex/Blanco) et **ne pas redessiner la case**.

Si une réponse se répète plusieurs fois, écrire ici le numéro de la question : ....

Q. [calculer] Si $x+\frac{1}{x}=7$ alors $x^2+\frac{1}{x^2}=$?

■ 47 ☐ 16 ☐ 14 ☐ 49 ☐ 5 ☐ 7 ☐ Autre

Solution : $a^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2$

Q. [ln1] Si $a=e^7$ et $b=e^{13}$, que vaut $R=\ln\left(\frac{b^2}{a^2}\right)$?

■ 12 ☐ 0 ☐ 6 ☐ 40 ☐ -18 ☐ 19 ☐ Autre

Solution : $R=\ln\left(\frac{b^2}{a^2}\right)=2(\ln(b)-\ln(a))=2\left(\ln(e^{13})-\ln(e^7)\right)=2(13-7)=12$

Q. [linear] Deux points distincts (a,b) et (b,c) appartiennent à la droite d'équation $y=-7x+4$. Calculer $a-c$.

☐ $7(a-b)$ ■ $6(b-a)$ ☐ $7b$ ☐ $4a+7b$ ☐ 0 ☐ Autre

Solution : $\begin{cases} b=-7a+4 \\ c=-7b+4 \end{cases}$ donc $b+7a=c+7b$ qu'on peut réécrire comme $b+6a+a=c+7b$ d'où $a-c=7b-b-6a=6(b-a)$

Q. [pot1] $\frac{a^b}{a^c}=$

■ a^{b-c} ☐ a^{bc} ☐ a^{-bc} ☐ $a^{b/c}$ ☐ a^b-a^c ☐ Autre

Q. `[limpar1]` $\lim_{x\to 11} \dfrac{x^2-14x+33}{x-11} = ?$

■ 8 ☐ 14 ☐ 33 ☐ 3 ☐ $+\infty$ ☐ 11 ☐ N'existe pas ☐ Autre

Solution : Si on note $s=14$, $p=33$ et $a=11$ on a

$$\frac{x^2-sx+p}{x-a} = \frac{(x-a)(x-b)}{x-a} = x-b \xrightarrow[x\to a]{} a-b$$

avec $s=a+b$ et $p=ab$ ainsi $b=3$ et $a-b=8$.
Si on n'a pas factorisé, on peut utiliser la règle de l'Hôpital:

$$\lim_{x\to a} \frac{x^2-sx+p}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{2x-s}{1} = 2a-s = 2a-(a+b) = a-b$$

Q. `[limsqrt1]` Soient a,b,c trois réels strictement positifs. Que vaut $\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{ax^2+bx+c} - x\sqrt{a}\right)$?

■ $\dfrac{b}{2\sqrt{a}}$ ☐ $\dfrac{c}{\sqrt{b}}$ ☐ $\dfrac{b}{a}$ ☐ 0 ☐ $+\infty$ ☐ N'existe pas ☐ Autre

Solution :

$$\sqrt{ax^2+bx+c} - x\sqrt{a} = \frac{ax^2+bx+c-ax^2}{\sqrt{ax^2+bx+c}+x\sqrt{a}} = \frac{bx+c}{x\left(\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}+\sqrt{a}\right)}$$

Q. `[limanim1]` Une population d'animaux évolue au cours du temps t (en années) selon la formule

$$a(t) = \frac{100000}{100+900e^{-t}}$$

où a modélise le nombre d'animaux. On constate que l'effectif augment et se rapproche d'un certain seuil qu'il ne peut pas dépasser. Quel est ce seuil?

☐ 100000 ☐ 10000 ■ 1000 ☐ 100 ☐ 10 ☐ 1 ☐ 0 ☐ Autre

Solution :

$$\frac{100000}{100+900e^{-t}} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 1000$$

Q. [`limanim2`] Une population de N_0 bactéries évolue au cours du temps t selon la formule

$$N(t) = \frac{2N_0}{1+e^{-\lambda t}}$$

où N modélise le nombre d'animaux et λ est un paramètre strictement positif. On constate que le nombre de bactéries augment et se rapproche d'un certain seuil qu'il ne peut pas dépasser. Quel est ce seuil?

■ $2N_0$ ☐ 2 ☐ N_0 ☐ 0 ☐ N_0^2 ☐ $e^{-\lambda}$ ☐ $N_0 e^{\lambda}$ ☐ Autre

Solution :

$$\frac{2N_0}{1+e^{-\lambda t}} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 2N_0$$

Q. [`limgend1`] Que vaut $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sin(\ln(x))}{x}$?

■ 0 ☐ $-\infty$ ☐ $+\infty$ ☐ 1 ☐ -1 ☐ N'existe pas ☐ Autre

Solution : $-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin(\ln(x))}{x} \leq \frac{1}{x}$

Q. [`limgend2`] Que vaut $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\cos(\ln(x))}{x}$?

■ 0 ☐ $-\infty$ ☐ $+\infty$ ☐ 1 ☐ -1 ☐ N'existe pas ☐ Autre

Solution : $-\frac{1}{x} \leq \frac{\cos(\ln(x))}{x} \leq \frac{1}{x}$

Q. [`limgend3`] Que vaut $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(3+\sin(x))}{x}$?

■ 0 ☐ $-\infty$ ☐ $+\infty$ ☐ 3 ☐ -3 ☐ N'existe pas ☐ Autre

Solution : $\frac{\ln(2)}{x} \leq \frac{\ln(3+\sin(x))}{x} \leq \frac{\ln(4)}{x}$

Q. [`limgend4`] Que vaut $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(8+\cos(x))}{x}$?

■ 0 ☐ $-\infty$ ☐ $+\infty$ ☐ 8 ☐ -8 ☐ N'existe pas ☐ Autre

Solution : $\frac{\ln(7)}{x} \leq \frac{\ln(8+\cos(x))}{x} \leq \frac{\ln(9)}{x}$

Q. [limgend5] Que vaut $\lim_{x\to 0} x\sin(\ln(x))$?

■ 0 ☐ $-\infty$ ☐ $+\infty$ ☐ 1 ☐ -1 ☐ N'existe pas ☐ Autre

Solution : $-x \leq x\sin(\ln(x)) \leq x$

Q. [asor] Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$ et $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de f, alors

■ $y = b$ est un asymptote horizontale pour $\mathscr{C}$
☐ $y = bx$ est un asymptote oblique pour $\mathscr{C}$
☐ $x = b$ est un asymptote verticale pour $\mathscr{C}$
☐ b est un asymptote pour $\mathscr{C}$

Q. [asver] Si $\lim_{x\to b} f(x) = +\infty$ et $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de f, alors

☐ $y = b$ est un asymptote horizontale pour $\mathscr{C}$
☐ $y = bx$ est un asymptote oblique pour $\mathscr{C}$
■ $x = b$ est un asymptote verticale pour $\mathscr{C}$
☐ b est un asymptote pour $\mathscr{C}$

Q. [etudePoly] Combien de racines réelles distinctes admet le polynôme $3x^8 - 27x^6$?

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ■ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 ☐ 9

Solution : $p(x) = 3x^8 - 3a^2x^6 = 3x^6(x^2 - a^2) = 3x^6(x-a)(x+a)$

Q. [calcdern] Quelle est la dérivée 49-ième de $\frac{1}{x}$?

■ $\frac{-49!}{x^{50}}$ ☐ $\frac{-49!}{x^{49}}$ ☐ $\frac{49!}{x^{50}}$ ☐ $\frac{49!}{x^{49}}$ ☐ $\frac{1}{x^{49}}$ ☐ $\frac{1}{x^{50}}$ ☐ $\frac{-1}{x^{49}}$ ☐ $\frac{-1}{x^{50}}$

Solution : $f(x) = x^{-1}$, $f'(x) = -x^{-2}$, $f''(x) = 2x^{-3}$, etc. $f^{(n)}(x) = (-1)^n n! x^{-(n+1)}$.

Q. [calcder1] Soit a une constante réelle non nulle. Quelle est la dérivée de $\ln(\sin^a(x))$?

■ $\frac{a}{\tan(x)}$ ☐ $\frac{-a}{\tan(x)}$ ☐ $-a\tan(x)$ ☐ $a\tan(x)$ ☐ Autre

Solution : $f'(x) = \dfrac{a\sin^{a-1}(x)\cos(x)}{\sin^a(x)} = \dfrac{a\cos(x)}{\sin(x)}$.

Q. [calcder2] Soit a une constante réelle non nulle. Quelle est la dérivée de $\ln(\cos^a(x))$?

☐ $\frac{a}{\tan(x)}$ ☐ $\frac{-a}{\tan(x)}$ ■ $-a\tan(x)$ ☐ $a\tan(x)$ ☐ Autre

Solution : $f'(x) = \dfrac{-a\cos^{a-1}(x)\sin(x)}{\cos^a(x)} = \dfrac{-a\sin(x)}{\cos(x)}$.

Q. `[calcinflex1]` Soit a et b deux constantes réelles strictement positives. La courbe de la fonction $x \to e^{ax} - e^{bx}$ s'infléchit au point d'abscisse $x = \frac{1}{K}\ln\left(\frac{b^2}{a^2}\right)$. Que vaut K?

■ $a-b$ □ $b-a$ □ $\frac{b}{a}$ □ $\frac{a}{b}$ □ a^2-b^2 □ Autre

Solution : $f(x) = e^{ax} - e^{bx}$, $f'(x) = ae^{ax} - be^{bx}$, $f''(x) = a^2e^{ax} - b^2e^{bx}$.
$f''(x) = 0$ ssi $a^2e^{ax} = b^2e^{bx}$ ssi $e^{(a-b)x} = \frac{b^2}{a^2}$ ssi $(a-b)x = \ln\left(\frac{b^2}{a^2}\right)$

Q. `[calcinflex2]` Soit a et b deux constantes réelles strictement positives. La courbe de la fonction $x \to e^{ax} - e^{bx}$ s'infléchit au point d'abscisse $x = \frac{1}{K}\ln\left(\frac{a^2}{b^2}\right)$. Que vaut K?

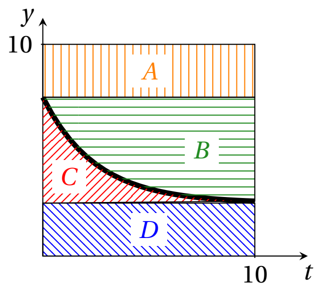
■ $b-a$ □ $a-b$ □ $\frac{b}{a}$ □ $\frac{a}{b}$ □ b^2-a^2 □ Autre

Solution : $f(x) = e^{ax} - e^{bx}$, $f'(x) = ae^{ax} - be^{bx}$, $f''(x) = a^2e^{ax} - b^2e^{bx}$.
$f''(x) = 0$ ssi $a^2e^{ax} = b^2e^{bx}$ ssi $e^{(b-a)x} = \frac{a^2}{b^2}$ ssi $(b-a)x = \ln\left(\frac{a^2}{b^2}\right)$

Q. `[aire1]`

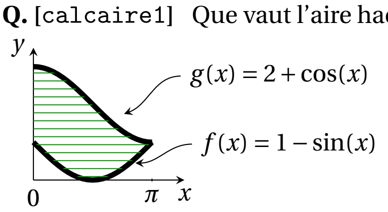
Sur la figure ci-contre, la courbe en trait plein représente la fonction $f\colon t \to y = f(t)$. À quelle zone hachurée correspond la quantité

$$\int_0^{10} f(t)\,\mathrm{d}t\,?$$



■ $C+D$ □ $A+B$ □ $A+B+C+D$ □ $C+D-A-B$ □ $A+B-C-D$ □ Autre

Q. `[calcaire1]` Que vaut l'aire hachurée comprise entre les deux courbes?



■ $\pi+2$ □ 2π □ $3+\pi$
□ 0 □ $\pi-2$ □ $\frac{3\pi}{2}$
□ $\frac{\pi}{2}$ □ $2-\pi$ □ Autre

Solution : $\int_0^\pi 2+\cos(x)-1+\sin(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi 1+\cos(x)+\sin(x)\,\mathrm{d}x = [x+\sin(x)-\cos(x)]_0^\pi = (\pi+0-(-1))-(0+0-1) = \pi+2$

Q. [`integrales4`] Si $\int_0^{12} f(x)\,\mathrm{d}x = 47$ et $\int_0^{6} f(x)\,\mathrm{d}x = 43$ alors $\int_6^{12} f(x)\,\mathrm{d}x =$?

■ 4 ☐ 0 ☐ 2 ☐ −90 ☐ 6 ☐ 8 ☐ Autre

Solution : $\int_a^{2a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{2a} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 4$

Q. [`integrales6`] Calculer $\int_0^{8} \left(\sin^2(x) - x\right)\mathrm{d}x - \int_8^{0} \left(\cos^2(x) - x\right)\mathrm{d}x$.

☐ 0 ■ −56 ☐ 4 ☐ −504 ☐ 504 ☐ −112 ☐ Autre

Solution : $\int_0^{a} \left(\sin^2(x) - x\right)\mathrm{d}x - \int_a^{0} \left(\cos^2(x) - x\right)\mathrm{d}x = \int_0^{a} \left(\sin^2(x) - x\right) + \left(\cos^2(x) - x\right)\mathrm{d}x = \int_0^{a} \left(1 - 2x\right)\mathrm{d}x = \left[x - x^2\right]_0^a = a - a^2$

Q. [`slnosol1`] Pour quelle valeur de $a \in \mathbb{R}$ le système $\begin{cases} x + ay = 0 \\ x - 2y = a^2 - 4 \end{cases}$ n'a pas de solutions?

☐ −2 ☐ 2 ☐ 0 ☐ 1 ☐ −1 ■ Il a toujours au moins une solution

Solution :

$$\begin{cases} x + ay = 0 \\ x - 2y = a \end{cases} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{cases} x + ay = 0 \\ -(2 + a)y = a^2 - 4 \end{cases}$$

Si $a = -2$ la deuxième équation devient $0y = 0$ qui a une infinité de solution, si $a \neq -2$ on trouve l'unique solution $y = 2 - a$ et $x = a(a - 2)$: dans tous les cas le système est possible.

Q. [LU1] La méthode de GAUSS transforme le système linéaire

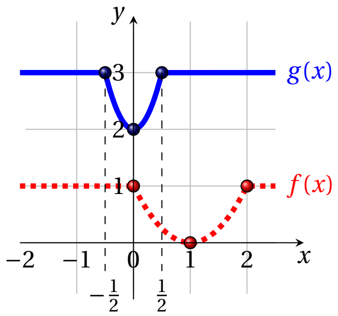
$$\begin{cases} 2x + 200y + 8z + 2w = 0 \\ 30y + 6z + 9w = 0 \\ 2x + 200y + 11z + 9w = 0 \\ 90y + 45z + 94w = 0 \end{cases}$$

en un système triangulaire. Lequel?

■ $\begin{cases} 2x + 200y + 8z + 2w = 0 \\ 30y + 6z + 9w = 0 \\ 3z + 7w = 0 \\ 4w = 0 \end{cases}$ ☐ $\begin{cases} 2x + 200y + 8z + 2w = 0 \\ 400y + 6z + 9w = 0 \\ 3z + 7w = 0 \\ 94w = 0 \end{cases}$ ☐ $\begin{cases} 2x + 200y + 8z + 2w = 0 \\ 200y + 6z + 9w = 0 \\ 11z + 9w = 0 \\ 94w = 0 \end{cases}$

☐ $\begin{cases} 2w = 0 \\ 6z + 9w = 0 \\ 90y + 45z + 94w = 0 \\ 2x + 200y + 11z + 9w = 0 \end{cases}$ ☐ $\begin{cases} 2x + 200y + 8z + 2w = 0 \\ 30x + 6y + 9z = 0 \\ 3x + 7y = 0 \\ 4x = 0 \end{cases}$ ☐ Autre

Q. `[fct-1]` ☆ En pointillé le graphe de $x \mapsto f(x)$ et en ligne pleine le graphe de $x \mapsto g(x) = A + Bf(Cx + D)$. Cocher les valeurs de A, B, C et D.



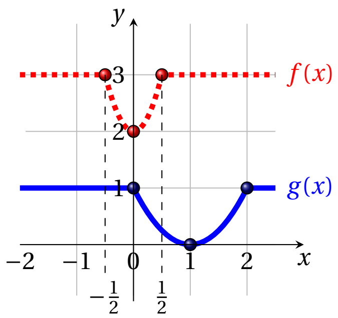
☐ $A=-2$	☐ $B=-2$	☐ $C=-2$	☐ $D=-2$
☐ $A=-1$	☐ $B=-1$	☐ $C=-1$	☐ $D=-1$
☐ $A=0$	☐ $B=0$	☐ $C=0$	☐ $D=0$
☐ $A=1$	■ $B=1$	☐ $C=1$	■ $D=1$
■ $A=2$	☐ $B=2$	■ $C=2$	☐ $D=2$
☐ $A=3$	☐ $B=3$	☐ $C=3$	☐ $D=3$
☐ $A=4$	☐ $B=4$	☐ $C=4$	☐ $D=4$

Solution : Pour tracer le graphe de $g(x) = A + Bf(Cx + D)$ à partir du graphe de $y = f(x)$ on va déplacer un point de coordonnée (x_0, y_0) comme suit:

$$(x_0, y_0) \xrightarrow{f(x+D)} (x_0 - D, y_0) \xrightarrow{f(Cx+D)} \left(\frac{x_0-D}{C}, y_0\right) \xrightarrow{Bf(Cx+D)} \left(\frac{x_0-D}{C}, By_0\right) \xrightarrow{A+Bf(Cx+D)} \left(\frac{x_0-D}{C}, By_0 + A\right)$$

Si le point $(x_{\text{old}}, y_{\text{old}})$ du graphe de f est déplacé en le point $(x_{\text{new}} = \frac{x_0-D}{C}, y_{\text{new}} = By_0 + A)$ du graphe de f, on a les deux équations linéaires $x_{\text{new}}C + D = x_{\text{old}}$ et $By_{\text{old}} = y_{\text{new}} - A$ en les inconnues A, B, C et D.
Le point $(1,0)$ est envoyé en $(0,2)$ donc $0 = \frac{1-D}{C}$ et $2 = B \times 0 + A$ ainsi $D = 1$ et $A = 2$.
Le point $(0,1)$ est envoyé en $(-\frac{1}{2}, 3)$ donc $-\frac{1}{2} = \frac{0-D}{C}$ et $3 = B \times 1 + A$ ainsi $C = 2$ et $B = 1$.

Q. `[fct-1bis]` ☆ En pointillé le graphe de $x \mapsto f(x)$ et en ligne pleine le graphe de $x \mapsto g(x) = A + Bf(Cx + D)$. Cocher les valeurs de A, B, C et D.



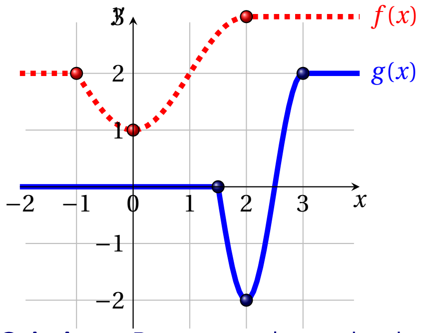
■ $A=-2$	☐ $B=-2$	☐ $C=-1$	☐ $D=-1$
☐ $A=-1$	☐ $B=-1$	☐ $C=-0.5$	■ $D=-0.5$
☐ $A=0$	☐ $B=0$	☐ $C=0$	☐ $D=0$
☐ $A=1$	■ $B=1$	■ $C=0.5$	☐ $D=0.5$
☐ $A=2$	☐ $B=2$	☐ $C=1$	☐ $D=1$
☐ $A=3$	☐ $B=3$	☐ $C=1.2$	☐ $D=1.5$
☐ $A=4$	☐ $B=4$	☐ $C=2$	☐ $D=2$

Solution : Pour tracer le graphe de $g(x) = A + Bf(Cx + D)$ à partir du graphe de $y = f(x)$ on va déplacer un point de coordonnée (x_0, y_0) comme suit:

$$(x_0, y_0) \xrightarrow{f(x+D)} (x_0 - D, y_0) \xrightarrow{f(Cx+D)} \left(\frac{x_0-D}{C}, y_0\right) \xrightarrow{Bf(Cx+D)} \left(\frac{x_0-D}{C}, By_0\right) \xrightarrow{A+Bf(Cx+D)} \left(\frac{x_0-D}{C}, By_0 + A\right)$$

Si le point $(x_{\text{old}}, y_{\text{old}})$ du graphe de f est déplacé en le point $(x_{\text{new}} = \frac{x_0-D}{C}, y_{\text{new}} = By_0 + A)$ du graphe de f, on a les deux équations linéaires $x_{\text{new}}C + D = x_{\text{old}}$ et $By_{\text{old}} = y_{\text{new}} - A$ en les inconnues A, B, C et D.
Le point $(-\frac{1}{2}, 3)$ est envoyé en $(0,1)$ donc $0 = \frac{-\frac{1}{2}-D}{C}$ et $1 = 3B + A$ ainsi $D = -\frac{1}{2}$ et $A = 1 - 3B$.
Le point $(0,2)$ est envoyé en $(1,0)$ donc $1 = \frac{0-D}{C}$ et $0 = 2B + A$ ainsi $C = -D = \frac{1}{2}$ et $A = -2B = 1 - 3B$ donc $B = 1$ et $A = -2$.

Q. [`fct-2bis`] En pointillé le graphe de $x \mapsto f(x)$ et en ligne pleine le graphe de $x \mapsto g(x) = A + Bf(Cx+D)$. Cocher les valeurs de A, B, C et D.



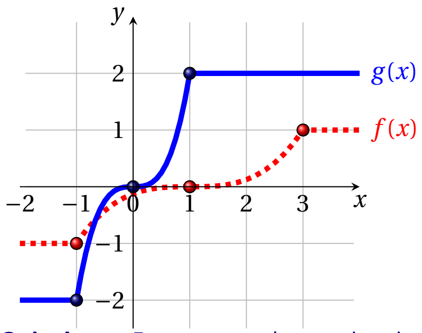
■ $A=-4$	☐ $B=-4$	☐ $C=-4$	■ $D=-4$
☐ $A=-3$	☐ $B=-3$	☐ $C=-3$	☐ $D=-3$
☐ $A=-2$	☐ $B=-2$	☐ $C=-2$	☐ $D=-2$
☐ $A=-1$	☐ $B=-1$	☐ $C=-1$	☐ $D=-1$
☐ $A=0$	☐ $B=0$	☐ $C=0$	☐ $D=0$
☐ $A=1$	☐ $B=1$	☐ $C=1$	☐ $D=1$
☐ $A=2$	■ $B=2$	■ $C=2$	☐ $D=2$

Solution : Pour tracer le graphe de $g(x) = A + Bf(Cx+D)$ à partir du graphe de $y = f(x)$ on va déplacer un point de coordonnée (x_0, y_0) comme suit:

$$(x_0,y_0) \xrightarrow{f(x+D)} (x_0-D,y_0) \overset{f(Cx+D)}{\rightsquigarrow} \left(\frac{x_0-D}{C},y_0\right) \overset{Bf(Cx+D)}{\rightsquigarrow} \left(\frac{x_0-D}{C},By_0\right) \xrightarrow{A+Bf(Cx+D)} \left(\frac{x_0-D}{C},By_0+A\right)$$

Si le point $(x_{\text{old}}, y_{\text{old}})$ du graphe de f est déplacé en le point $(x_{\text{new}} = \frac{x_0-D}{C}, y_{\text{new}} = By_0 + A)$ du graphe de f, on a les deux équations linéaires $x_{\text{new}}C + D = x_{\text{old}}$ et $By_{\text{old}} = y_{\text{new}} - A$ en les inconnues A, B, C et D.
Le point $(-1,2)$ est envoyé en $(1.5,0)$ donc $\frac{3}{2} = \frac{-1-D}{C}$ et $0 = B \times 2 + A$ ainsi $A = -2B$ et $\frac{3}{2}C + D = 1$.
Le point $(0,1)$ est envoyé en $(2,-2)$ donc $2 = \frac{0-D}{C}$ et $-2 = B + A$ ainsi $D = -2C = -4$, $C = 2$, $B = 2$ et $A = -4$.

Q. [`fct-2`] En pointillé le graphe de $x \mapsto f(x)$ et en ligne pleine le graphe de $x \mapsto g(x) = A + Bf(Cx+D)$. Cocher les valeurs de A, B, C et D.



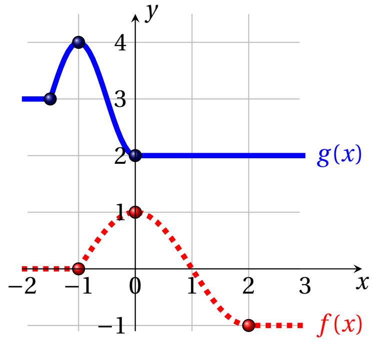
☐ $A=-2$	☐ $B=-2$	☐ $C=-2$	☐ $D=-2$
☐ $A=-1$	☐ $B=-1$	☐ $C=-1$	☐ $D=-1$
■ $A=0$	☐ $B=0$	☐ $C=0$	☐ $D=0$
☐ $A=1$	☐ $B=1$	☐ $C=1$	■ $D=1$
☐ $A=2$	■ $B=2$	■ $C=2$	☐ $D=2$
☐ $A=3$	☐ $B=3$	☐ $C=3$	☐ $D=3$
☐ $A=4$	☐ $B=4$	☐ $C=4$	☐ $D=4$

Solution : Pour tracer le graphe de $g(x) = A + Bf(Cx+D)$ à partir du graphe de $y = f(x)$ on va déplacer un point de coordonnée (x_0, y_0) comme suit:

$$(x_0,y_0) \xrightarrow{f(x+D)} (x_0-D,y_0) \overset{f(Cx+D)}{\rightsquigarrow} \left(\frac{x_0-D}{C},y_0\right) \overset{Bf(Cx+D)}{\rightsquigarrow} \left(\frac{x_0-D}{C},By_0\right) \xrightarrow{A+Bf(Cx+D)} \left(\frac{x_0-D}{C},By_0+A\right)$$

Si le point $(x_{\text{old}}, y_{\text{old}})$ du graphe de f est déplacé en le point $(x_{\text{new}} = \frac{x_0-D}{C}, y_{\text{new}} = By_0 + A)$ du graphe de f, on a les deux équations linéaires $x_{\text{new}}C + D = x_{\text{old}}$ et $By_{\text{old}} = y_{\text{new}} - A$ en les inconnues A, B, C et D.
Le point $(1,0)$ est envoyé en $(0,0)$ donc $0 = \frac{1-D}{C}$ et $0 = B \times 0 + A$ ainsi $A = 0$ et $D = 1$.
Le point $(3,1)$ est envoyé en $(1,2)$ donc $1 = \frac{3-D}{C}$ et $2 = B \times 1 + A$ ainsi $C = 2$ et $B = 2$.

Q. [fct-3] En pointillé le graphe de $x \mapsto f(x)$ et en ligne pleine le graphe de $x \mapsto g(x) = A + Bf(Cx + D)$. Cocher les valeurs de A, B, C et D.



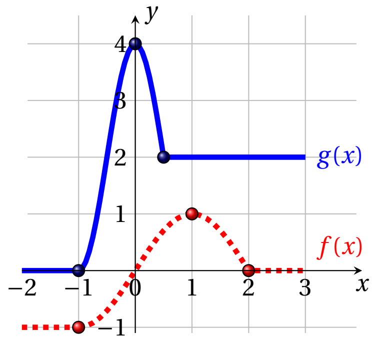
☐ $A=-2$	☐ $B=-2$	☐ $C=-2$	☐ $D=-2$
☐ $A=-1$	☐ $B=-1$	☐ $C=-1$	☐ $D=-1$
☐ $A=0$	☐ $B=0$	☐ $C=0$	☐ $D=0$
☐ $A=1$	■ $B=1$	☐ $C=1$	☐ $D=1$
☐ $A=2$	☐ $B=2$	■ $C=2$	■ $D=2$
■ $A=3$	☐ $B=3$	☐ $C=3$	☐ $D=3$
☐ $A=4$	☐ $B=4$	☐ $C=4$	☐ $D=4$

Solution : Pour tracer le graphe de $g(x) = A + Bf(Cx + D)$ à partir du graphe de $y = f(x)$ on va déplacer un point de coordonnée (x_0, y_0) comme suit:

$$(x_0,y_0) \xrightarrow{f(x+D)} (x_0-D,y_0) \overset{f(Cx+D)}{\rightsquigarrow} \left(\tfrac{x_0-D}{C},y_0\right) \overset{Bf(Cx+D)}{\rightsquigarrow} \left(\tfrac{x_0-D}{C},By_0\right) \xrightarrow{A+Bf(Cx+D)} \left(\tfrac{x_0-D}{C},By_0+A\right)$$

Si le point $(x_{\text{old}}, y_{\text{old}})$ du graphe de f est déplacé en le point $(x_{\text{new}} = \frac{x_0-D}{C}, y_{\text{new}} = By_0 + A)$ du graphe de f, on a les deux équations linéaires $x_{\text{new}}C + D = x_{\text{old}}$ et $By_{\text{old}} = y_{\text{new}} - A$ en les inconnues A, B, C et D.
Le point $(2,-1)$ est envoyé en $(0,2)$ donc $0 = \frac{2-D}{C}$ et $2 = -B + A$ ainsi $A = B + 2$ et $D = 2$.
Le point $(0,1)$ est envoyé en $(-1,4)$ donc $-1 = \frac{0-D}{C}$ et $4 = B \times 1 + A$ ainsi $C = 2$ et $A = 4 - B = 3$ et $B = 1$.

Q. [fct-4] En pointillé le graphe de $x \mapsto f(x)$ et en ligne pleine le graphe de $x \mapsto g(x) = A + Bf(Cx + D)$. Cocher les valeurs de A, B, C et D.



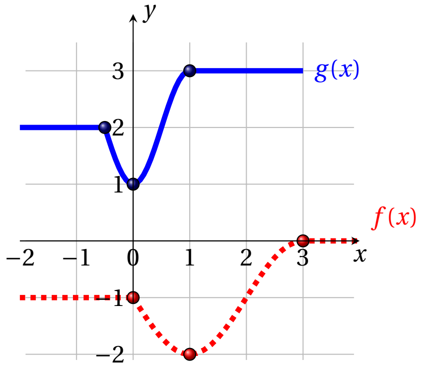
☐ $A=-2$	☐ $B=-2$	☐ $C=-2$	☐ $D=-2$
☐ $A=-1$	☐ $B=-1$	☐ $C=-1$	☐ $D=-1$
☐ $A=0$	☐ $B=0$	☐ $C=0$	☐ $D=0$
☐ $A=1$	☐ $B=1$	☐ $C=1$	■ $D=1$
■ $A=2$	■ $B=2$	■ $C=2$	☐ $D=2$
☐ $A=3$	☐ $B=3$	☐ $C=3$	☐ $D=3$
☐ $A=4$	☐ $B=4$	☐ $C=4$	☐ $D=4$

Solution : Pour tracer le graphe de $g(x) = A + Bf(Cx + D)$ à partir du graphe de $y = f(x)$ on va déplacer un point de coordonnée (x_0, y_0) comme suit:

$$(x_0,y_0) \xrightarrow{f(x+D)} (x_0-D,y_0) \overset{f(Cx+D)}{\rightsquigarrow} \left(\tfrac{x_0-D}{C},y_0\right) \overset{Bf(Cx+D)}{\rightsquigarrow} \left(\tfrac{x_0-D}{C},By_0\right) \xrightarrow{A+Bf(Cx+D)} \left(\tfrac{x_0-D}{C},By_0+A\right)$$

Si le point $(x_{\text{old}}, y_{\text{old}})$ du graphe de f est déplacé en le point $(x_{\text{new}} = \frac{x_0-D}{C}, y_{\text{new}} = By_0 + A)$ du graphe de f, on a les deux équations linéaires $x_{\text{new}}C + D = x_{\text{old}}$ et $By_{\text{old}} = y_{\text{new}} - A$ en les inconnues A, B, C et D.
Le point $(-1,-1)$ est envoyé en $(-1,0)$ donc $-1 = \frac{-1-D}{C}$ et $0 = -B + A$ ainsi $A = B$ et $C = D + 1$.
Le point $(1,1)$ est envoyé en $(0,4)$ donc $0 = \frac{1-D}{C}$ et $4 = B \times 1 + A$ ainsi $D = 1$, $C = 2$ et $A = B = 2$.

Q. `[fct-5]` En pointillé le graphe de $x \mapsto f(x)$ et en ligne pleine le graphe de $x \mapsto g(x) = A + Bf(Cx + D)$. Cocher les valeurs de A, B, C et D.



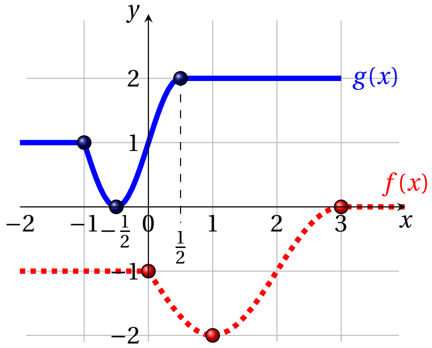
☐ $A = -2$	☐ $B = -2$	☐ $C = -2$	☐ $D = -2$
☐ $A = -1$	☐ $B = -1$	☐ $C = -1$	☐ $D = -1$
☐ $A = 0$	☐ $B = 0$	☐ $C = 0$	☐ $D = 0$
☐ $A = 1$	■ $B = 1$	☐ $C = 1$	■ $D = 1$
☐ $A = 2$	☐ $B = 2$	■ $C = 2$	☐ $D = 2$
■ $A = 3$	☐ $B = 3$	☐ $C = 3$	☐ $D = 3$
☐ $A = 4$	☐ $B = 4$	☐ $C = 4$	☐ $D = 4$

Solution : Pour tracer le graphe de $g(x) = A + Bf(Cx + D)$ à partir du graphe de $y = f(x)$ on va déplacer un point de coordonnée (x_0, y_0) comme suit:

$$(x_0, y_0) \xrightarrow{f(x+D)} (x_0 - D, y_0) \overset{f(Cx+D)}{\rightsquigarrow} \left(\frac{x_0-D}{C}, y_0\right) \overset{Bf(Cx+D)}{\rightsquigarrow} \left(\frac{x_0-D}{C}, By_0\right) \xrightarrow{A+Bf(Cx+D)} \left(\frac{x_0-D}{C}, By_0 + A\right)$$

Si le point $(x_{\text{old}}, y_{\text{old}})$ du graphe de f est déplacé en le point $(x_{\text{new}} = \frac{x_0-D}{C}, y_{\text{new}} = By_0 + A)$ du graphe de f, on a les deux équations linéaires $x_{\text{new}}C + D = x_{\text{old}}$ et $By_{\text{old}} = y_{\text{new}} - A$ en les inconnues A, B, C et D.
Le point $(1, -2)$ est envoyé en $(0, 1)$ donc $0 = \frac{1-D}{C}$ et $1 = -2B + A$ ainsi $A = 1 + 2B$ et $D = 1$.
Le point $(3, 0)$ est envoyé en $(1, 3)$ donc $1 = \frac{3-D}{C}$ et $3 = B \times 0 + A$ ainsi $C = 2$, $A = 3$ et $B = 1$.

Q. `[fct-6]` En pointillé le graphe de $x \mapsto f(x)$ et en ligne pleine le graphe de $x \mapsto g(x) = A + Bf(Cx + D)$. Cocher les valeurs de A, B, C et D.



☐ $A=-2$	☐ $B=-2$	☐ $C=-2$	☐ $D=-2$
☐ $A=-1$	☐ $B=-1$	☐ $C=-1$	☐ $D=-1$
☐ $A=0$	☐ $B=0$	☐ $C=0$	☐ $D=0$
☐ $A=1$	■ $B=1$	☐ $C=1$	☐ $D=1$
■ $A=2$	☐ $B=2$	■ $C=2$	■ $D=2$
☐ $A=3$	☐ $B=3$	☐ $C=3$	☐ $D=3$
☐ $A=4$	☐ $B=4$	☐ $C=4$	☐ $D=4$

Solution : Pour tracer le graphe de $g(x) = A + Bf(Cx + D)$ à partir du graphe de $y = f(x)$ on va déplacer un point de coordonnée (x_0, y_0) comme suit:

$$(x_0, y_0) \xrightarrow{f(x+D)} (x_0 - D, y_0) \xrightarrow{f(Cx+D)} \left(\tfrac{x_0-D}{C}, y_0\right) \xrightarrow{Bf(Cx+D)} \left(\tfrac{x_0-D}{C}, By_0\right) \xrightarrow{A+Bf(Cx+D)} \left(\tfrac{x_0-D}{C}, By_0 + A\right)$$

Si le point $(x_{\text{old}}, y_{\text{old}})$ du graphe de f est déplacé en le point $(x_{\text{new}} = \frac{x_0-D}{C}, y_{\text{new}} = By_0 + A)$ du graphe de f, on a les deux équations linéaires $x_{\text{new}}C + D = x_{\text{old}}$ et $By_{\text{old}} = y_{\text{new}} - A$ en les inconnues A, B, C et D.
Le point $(0, -1)$ est envoyé en $(-1, 1)$ donc $-1 = \frac{0-D}{C}$ et $1 = -B + A$ ainsi $D = C$, $A = B + 1$.
Le point $(3, 0)$ est envoyé en $(\frac{1}{2}, 2)$ donc $\frac{1}{2} = \frac{3-D}{C}$ et $2 = B \times 0 + A$ ainsi $A = 2$ (et $B = 1$) et $D = C = 2$.

✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ **Problème (greffe de cornée)** ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎

Avant une greffe de cornée, la cornée prélevée est plongée dans un liquide physiologique afin de provoquer l'évacuation du surplus d'eau contenu dans le tissu. On étudie l'évolution dans le temps de l'épaisseur de la cornée. On admet que la fonction correspondant à l'épaisseur de la cornée, exprimée en micromètres, en fonction du temps, exprimé en heures, est décrite par la fonction $g\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(t) = \alpha + \frac{\beta-\alpha}{1+16t^4}$$

avec α et β deux paramètres réels strictement positifs. On suppose $\alpha < \beta$.

Q. [corn0] Que vaut $g(0)$?

■ β ☐ α ☐ $\beta-\alpha$ ☐ 2α ☐ 2β ☐ 0 ☐ Autre

Solution :

Q. [cornlim] Que vaut $\lim_{x\to+\infty} g(t)$?

■ α ☐ $\beta-\alpha$ ☐ β ☐ $+\infty$ ☐ $-\infty$ ☐ 0 ☐ Autre

Solution :

Q. [cornder] Que vaut $g'(1/2)$?

■ $2(\alpha-\beta)$ ☐ $3\alpha-2\beta$ ☐ $\frac{\beta-\alpha}{2}$ ☐ $\frac{\beta+\alpha}{2}$ ☐ 0 ☐ Autre

Solution : $g'(t) = \alpha - 16\times 4t^3(\beta-\alpha)(1+16t^4)^{-2}$

Q. [cornvar] Quel est le sens de variation de g?

■ Décroissant ☐ Croissant ☐ Croissant puis décroissant ☐ Décroissant puis croissant

✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ **Problème (chenille de l'épicéa)** ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎

La chenille de l'épicéa (Choristineura fumiferana) est une espèce originaire des forêts d'Amérique du Nord où elle cause de très importants ravages par défoliation lors de ses pullulations. La pression de prédation sur la population de chenilles est décrite par la fonction $p\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par:

$$p(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$$

avec $x \geq 0$ le nombre de chenilles.

Q. [epilim] Que vaut $\lim_{x\to+\infty} p(x)$?

■ 1 ☐ 2 ☐ $\frac{2}{3}$ ☐ $+\infty$ ☐ $-\infty$ ☐ 0 ☐ Autre

Solution : $p(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1-0$

Q. [epiderprem] Pour quelle valeur de x la dérivée de p s'annule-t-elle?

■ 0 □ 2 □ $\frac{2}{3}$ □ Jamais □ $\frac{1}{2}$ □ 1 □ Autre

Solution : $p(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x^2}$ ainsi $p'(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$

Q. [epiinfl] Pour quelle valeur de x la fonction p admet un point d'inflexion?

■ $\frac{1}{\sqrt{3}}$ □ $\sqrt{3}$ □ $\frac{1}{3}$ □ 3 □ 1 □ Jamais □ Autre

Solution :

$$p''(x) = \frac{2(1+x^2)^2 - 2x(2(1+x^2)2x)}{(1+x^2)^4} = \frac{-2(3x^4+2x^2-1)}{(1+x^2)^4} = 0 \iff x^2 = -1 \text{ ou } x^2 = \frac{1}{3}$$