CATALOGUE DE TOUTES LES QUESTIONS AVEC SOLUTION

L1 SV — 7 novembre 2019 — CC-1 : Durée : 1h

- **Une feuille A4 recto-verso manuscrite autorisée, tout autre document et calculatrices interdits.**
- Toutes les questions ont une et une seule bonne réponse. **Des points négatifs seront affectés aux mauvaises réponses.**
- Utiliser un stylo noir ou bleu et bien noircir les cases (ne pas utiliser de crayon!). En cas d'erreur, effacer votre réponse (avec du blanc correcteur/Tipp-Ex/Blanco) et **ne pas redessiner la case**.

Nom et prénom :	Cochez votre ID (par exemple, si ID=105, on coche 1 sur la première ligne, 0 sur la deuxième et 5 sur la troisième) :
....	☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9
....	☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9
	☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9

Q. [instruction] En cas de **non respect des consignes** ci-dessus ou d'erreur dans l'ID : **-1pt**. ■-1 pt

Q. [pq1] Si $\frac{1}{p} + \frac{p}{q} = 2$ et $p = 9$, que vaut q ?

■ $\frac{81}{17}$ ☐ $\frac{17}{81}$ ☐ $\frac{9}{17}$ ☐ $\frac{17}{9}$ ☐ 9 ☐ $\frac{1}{9}$ ☐ 0 ☐ Autre réponse

Solution : $\frac{p}{q} = \alpha - \frac{1}{p} = \frac{\alpha p-1}{p}$ donc $q = \frac{p^2}{\alpha p-1}$

Q. [pq2] Si $\frac{p}{q} - \frac{1}{p} = 5$ et $p = 6$, que vaut q ?

■ $\frac{36}{31}$ ☐ $\frac{31}{36}$ ☐ $\frac{6}{31}$ ☐ $\frac{31}{6}$ ☐ 6 ☐ $\frac{1}{6}$ ☐ 0 ☐ Autre réponse

Solution : $\frac{p}{q} = \alpha + \frac{1}{p} = \frac{\alpha p+1}{p}$ donc $q = \frac{p^2}{\alpha p+1}$

Q. [pourcentage1] À 15 ans Jean mesurait 180 cm. À l'âge de 18 ans sa taille est passée à 189 cm. Entre 15 et 18 ans sa taille a donc augmenté de :

☐ 3% ☐ 4% ■ 5% ☐ 8% ☐ 9% ☐ 10% ☐ 20% ☐ Autre

Solution : $189 = 180(1+p)$ d'où $p = \frac{189-180}{180} = \frac{9}{180} = \frac{1}{20} = \frac{5}{100} = 5\%$

Q. [pourcentage2] À 14 ans Jean mesurait 160 cm. À l'âge de 18 ans sa taille est passée à 176 cm. Entre 14 et 18 ans sa taille a donc augmenté de :

☐ 3% ☐ 4% ☐ 5% ☐ 8% ■ 10% ☐ 16% ☐ 20% ☐ Autre

Solution : $176 = 160(1+p)$ d'où $p = \frac{176-160}{160} = \frac{16}{160} = \frac{1}{10} = \frac{10}{100} = 10\%$

Q. [pourcentage3] À 6 ans Jean mesurait 120 cm. À l'âge de 10 ans sa taille est passée à 144 cm. Entre 6 et 10 ans sa taille a donc augmenté de :

☐ 3% ☐ 4% ☐ 5% ☐ 8% ☐ 10% ■ 20% ☐ 24% ☐ Autre

Solution : $144 = 120(1+p)$ d'où $p = \frac{144-120}{120} = \frac{24}{120} = \frac{2}{10} = \frac{20}{100} = 20\%$

Q. [vitesse1] Une vitesse de $108\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$ correspond à :

☐ $3\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ ■ $30\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ ☐ $108\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ ☐ $10.8\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ ☐ Autre réponse

Solution : $x\ \mathrm{km\cdot h^{-1}} = x\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = x \times \frac{1000\,\mathrm{m}}{60\times 60\mathrm{s}} = x \times \frac{10}{36}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \frac{10x}{36}\mathrm{m\cdot s^{-1}}$

Q. [dd1] Le domaine de définition de la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x^2-10x+9} - \sqrt{49-x^2}$ est

■ $[-7,1]$	□ $]-\infty,-7]$	□ $[1,7[$	□ $[-7,9[$
□ $]-\infty,-1]\cup[9,+\infty[$	□ $]-\infty,-7]\cup[7,+\infty[$	□ $[7,9]$	□ $]-7,7[$
□ $[-7,7]$	□ $]-\infty,-7]\cup[9,+\infty[$	□ $[9,+\infty[$	□ Autre

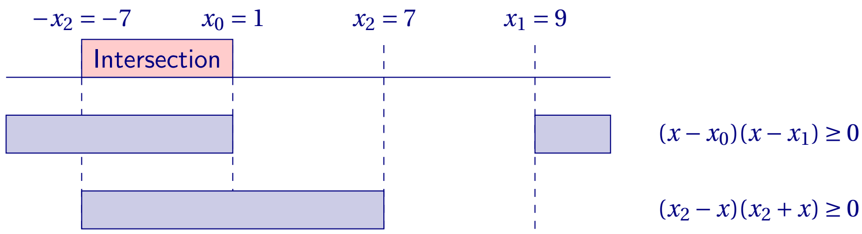
Solution : Si on pose $s=10$, $p=9$ et $x_2=7$, on a

$$f(x)=\sqrt{x^2-sx+p}-\sqrt{x_2^2-x^2}=\sqrt{x^2-(x_0+x_1)x+x_0x_1}-\sqrt{x_2^2-x^2}=\sqrt{(x-x_0)(x-x_1)}-\sqrt{(x_2-x)(x_2+x)}$$

avec $x_0=1$ et $x_1=9$. On peut calculer $f(x)$ ssi x vérifie le système suivant :

$$\begin{cases}(x-x_0)(x-x_1)\geq 0\\(x_2-x)(x_2+x)\geq 0\end{cases}\quad i.e.\ \begin{cases}x\in]-\infty;x_0]\cup[x_1;+\infty[\\x\in[-x_2;x_2]\end{cases}$$

Comme $-x_2<x_0<x_2<x_1$ ceci est vrai ssi $x\in[-x_2;x_0]$:



Q. [`DroiteParaboleOptimum`] Le directeur d'une salle de spectacles de 8000 places organise un concert. Il souhaite fixer le prix du billet pour optimiser le prix de sa recette. Une étude de marché lui apprend que si le prix du billet est 50 €, il vend 600 billets et que chaque baisse de 1 € lui permet de vendre 150 billets supplémentaires. Quel prix du billet maximise la recette ?

□ 150 € ■ 27 € □ 29 € □ 54 € □ Autre réponse

Solution : Le prix p en euros et le nombre de billets b vendus sont liés par une relation affine. On peut écrire l'équation de la droite en imposant par exemple le passage par les deux points $(50,600)=(50,150\times4)$ et $(50-1,600+150)=(49,150\times(4+1))$:

$$b(v)=\frac{150}{-1}(p-50)+600=150(50-p)+150\times4=150(54-p).$$

La recette est donnée par $b\times p=150(54-p)p$: il s'agit de l'équation d'une parabole concave qui s'annulle en $p=0$ et $p=54$ donc elle est maximale pour $p=\frac{54}{2}=27$. Comme $b(27)<8000$ (capacité de la salle), 27 euros est le prix qui maximise sa recette.

Q. [`pH`] En chimie, on mesure l'acidité d'une solution liquide par son pH défini par $\mathrm{pH}([H^+])=-\log_{10}([H^+])$ où $[H^+]$ désigne la concentration molaire en ions H^+ (supposée faible). Que vaut $\mathrm{pH}(0.01)$?

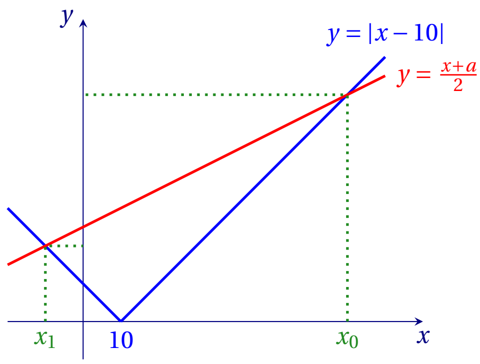
■ 2 □ -2 □ 10^{-2} □ -10^{-2} □ -10^2 □ 10^2 □ Autre réponse

Solution : $\mathrm{pH}(10^{-n})=-\log_{10}(10^{-n})=n$

Q. [`dev1`] Soit $a\in\mathbb{R}$ une constante. Si $x=70$ est solution de l'équation $2|x-10|=x+a$, que vaut l'autre solution ?

■ -10 □ 50 □ 10 □ -70 □ Autre réponse

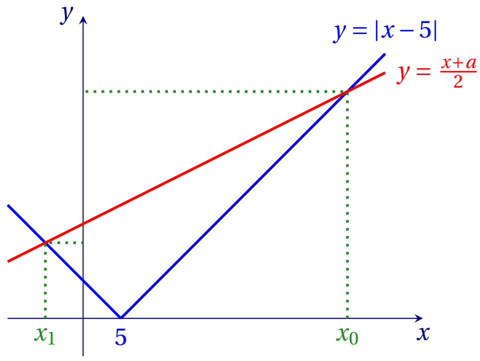
Solution : Si $x_0>10$ est solution de l'équation $2|x-10|=x+a$ alors $2(x_0-10)=x_0+a$, *i.e.* $a=x_0-20$. L'autre solution est donc $x_1<x_0$ et vérifie $2(10-x_1)=x_1+a$ *i.e.* $2(10-x_1)=x_1+x_0-20$ d'où $x_1=(40-x_0)/3$.



Q. [dev2] Soit $a \in \mathbb{R}$ une constante. Si $x=17$ est solution de l'équation $2|x-5| = x+a$, que vaut l'autre solution ?

■ 1 ☐ -3 ☐ 5 ☐ -17 ☐ Autre réponse

Solution : Si $x_0 > 5$ est solution de l'équation $2|x-5| = x+a$ alors $2(x_0-5) = x_0+a$, *i.e.* $a = x_0 - 10$. L'autre solution est donc $x_1 < x_0$ et vérifie $2(5-x_1) = x_1 + a$ *i.e.* $2(5-x_1) = x_1 + x_0 - 10$ d'où $x_1 = (20-x_0)/3$.



Q. [logdef] Que vaut $\exp\big(3\ln(3)+\ln(10)\big)$?

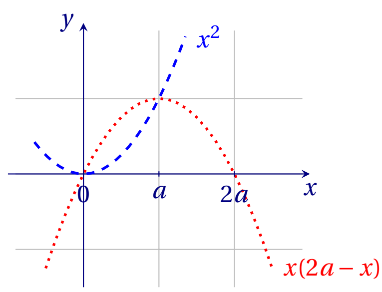
■ 270 ☐ 180 ☐ 243 ☐ 240 ☐ 37 ☐ 90 ☐ Autre réponse

Solution : $\exp(3\ln(a)+\ln(b)) = \exp(\ln(a^3 b)) = a^3 b$

Q. [deb3] x est solution de $x(72-x) > x^2$ si et seulement si

☐ $x<0$ ■ $0<x<36$ ☐ $36<x<72$ ☐ $x>72$ ☐ Autre réponse

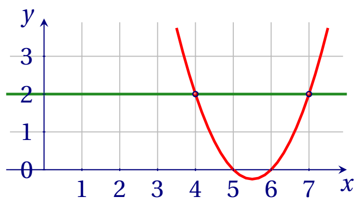
Solution : Posons $a=36$. On cherche x solution de $x(2a-x) > x^2$. Soit on calcule directement $x^2 - 2ax + x^2 = 2x^2 - 2ax = 2x(x-a) < 0$ donc $0 < x < a$ soit on compare les graphes des deux paraboles : le graphe de $y = x(2a-x)$ est supérieure au graphe de $y=x^2$ pour $0<x<a$:



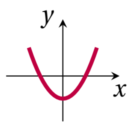
Q. [`log2`] x est solution de $\log_2(x-5)+\log_2(x-6)<1$ si et seulement si

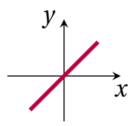
☐ $4<x<7$ ☐ $x<4$ ☐ $4<x<5$ ☐ $5<x<6$ ■ $6<x<7$ ☐ $x>7$

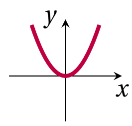
Solution : Soit $x_0=5$ et $x_1=6$. Tout d'abord on remarque qu'il faut $x>x_0$ et $x>x_1$. En appliquant la propriété de la somme de deux logarithmes on obtient $\log_2(x-x_0)+\log_2(x-x_1)=\log_2((x-x_0)(x-x_1))$ et $1=\log_2 2$. Il faut donc résoudre $(x-x_0)(x-x_1)<2$ avec $x>x_0$ et $x>x_1$.

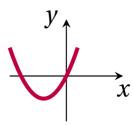


Q. [`composition1`] Soit les deux fonctions f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par $f(x)=x^2-1$ et $g(x)=x+1$. Parmi les graphes ci-dessous, lequel est celui de la fonction $x\mapsto f(g(x))$?

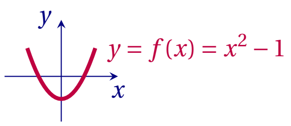
☐ 

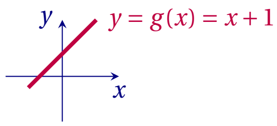
☐ 

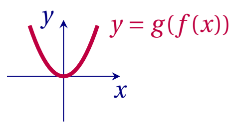
☐ 

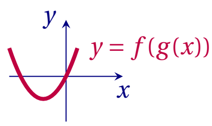
■ 

Solution : $f(g(x))=\big(g(x)\big)^2-1=(x+1)^2-1=x^2+2x+1-1=x^2+2x=x(x+2)$ tandis que $g(f(x))=f(x)+1=x^2-1+1=x^2$

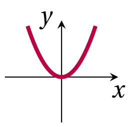


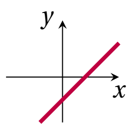


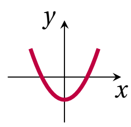


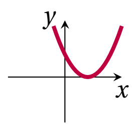


Q. [`composition2`] Soit les deux fonctions f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par $f(x)=x^2$ et $g(x)=x-1$. Parmi les graphes ci-dessous, lequel est celui de la fonction $x\mapsto f(g(x))$?

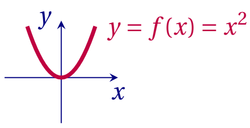
☐ 

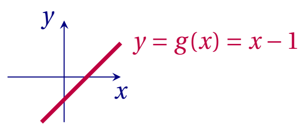
☐ 

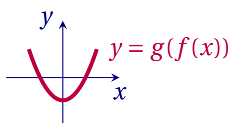
☐ 

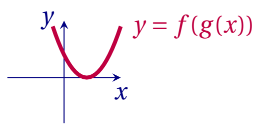
■ 

Solution : $f(g(x))=\big(g(x)\big)^2=(x-1)^2$ tandis que $g(f(x))=f(x)-1=x^2-1$

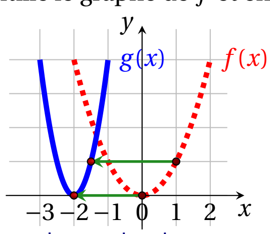








Q. [`fct-1`] En pointillé le graphe de f et en ligne pleine le graphe de g. Cocher la bonne réponse.



■ $g(x)=f(2x+4)$

☐ $g(x)=f(2x-4)$

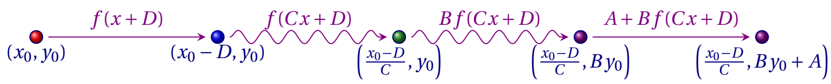
☐ $g(x)=f\left(\frac{1}{2}x+4\right)$

☐ $g(x)=f\left(\frac{1}{2}x-4\right)$

☐ $g(x)=2f(x)-4$

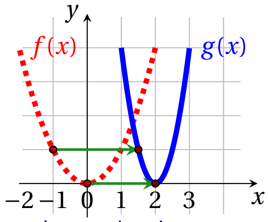
☐ $g(x)=\frac{1}{2}f(x+4)$

Solution : Pour tracer le graphe de $g(x)=A+Bf(Cx+D)$ à partir du graphe de $y=f(x)$ on va déplacer un point de coordonnée (x_0,y_0) comme suit :



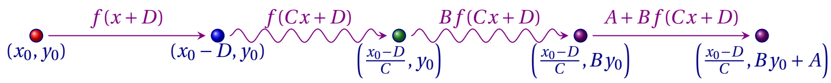
Dans notre cas on a tout de suite $A=0$ et $B=1$. De plus, le point $(0,0)$ est envoyé en $(-2,0)$ donc $-2=\frac{0-D}{C}$ et le point $(1,1)$ est envoyé en $(-\frac{3}{2},1)$ donc $-\frac{3}{2}=\frac{1-D}{C}$. On trouve donc $D=4$ et $C=2$.

Q. [fct-2] En pointillé le graphe de f et en ligne pleine le graphe de g. Cocher la bonne réponse.



- ☐ $g(x)=f(2x+4)$
- ☐ $g(x)=4+2f(x)$
- ■ $g(x)=f(2x-4)$
- ☐ $g(x)=f\left(\frac{1}{2}x+4\right)$
- ☐ $g(x)=f\left(\frac{1}{2}x-4\right)$
- ☐ $g(x)=\frac{1}{2}f(x)-4$

Solution : Pour tracer le graphe de $g(x)=A+Bf(Cx+D)$ à partir du graphe de $y=f(x)$ on va déplacer un point de coordonnée (x_0,y_0) comme suit :



Dans notre cas on a tout de suite $A=0$ et $B=1$. De plus, le point $(0,0)$ est envoyé en $(2,0)$ donc $2=\frac{0-D}{C}$ et le point $(-1,1)$ est envoyé en $(\frac{3}{2},1)$ donc $\frac{3}{2}=\frac{-1-D}{C}$. On trouve donc $D=-4$ et $C=2$.

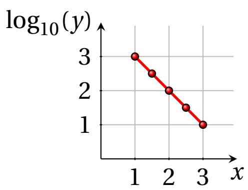
Q. [Stefan] La loi de Stefan du rayonnement du corps noir relie la grandeur émittance (ou exitance) M à la température T du corps noir : $M=\sigma T^4$, σ étant la constante de Stefan-Boltzmann. Après une prise de données, on veut tracer une représentation linéaire de cette relation. Pour cela, il faut tracer…

- ■ M fonction de T^4
- ☐ M fonction de $\log_\sigma(T)$
- ☐ M fonction de $\sqrt[4]{T}$
- ☐ M^4 fonction de T
- ☐ M fonction de $\log_4(T)$
- ☐ 4^M fonction de T
- ☐ σ^M fonction de T
- ☐ e^T fonction de M
- ☐ Autre

Solution :

- Si $y=M$ et $x=T^4$ alors $y=M=\sigma T^4=\sigma x$ qui est affine.
- Si $y=M$ et $x=\sqrt[4]{T}$ alors $T=x^4$ ainsi $y=M=\sigma T^4=\sigma x^{16}$.
- Si $y=M^4$ et $x=T$ alors $y=M^4=(\sigma T^4)^4=\sigma^4x^{16}$.
- Si $y=M$ et $x=\log_4(T)$ alors $T=4^x$ ainsi $y=M=\sigma T^4=\sigma(4^x)^4$.
- Si $y=4^M$ et $x=T$ alors $y=4^M=4^{\sigma T^4}=(4^\sigma)^{x^4}$.

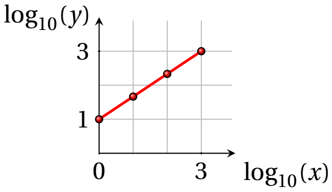
Q. [q78-1] On mesure une quantité y en fonction d'une autre quantité x. On représente alors le logarithme en base 10 de y en fonction de x et on obtient la figure ci-dessous. Quelle relation lie y à x ?



- ■ $y=10^{4-x}$
- ☐ $y=e^{4-x}$
- ☐ $y=\log_{10}(x-4)$
- ☐ $y=x-4$
- ☐ $y=4-x$
- ☐ $y=\ln(-4x)$
- ☐ $y=10^4e^{-x}$
- ☐ $y=4-\log_{10}(x)$
- ☐ Autre

Solution : $\log_{10}(y)=Ax+B$ avec $A=\frac{3-1}{1-3}=-1$ et $B=1-3A=4$ donc $y=10^{Ax+B}$

Q. [q79-1] On mesure une quantité y en fonction d'une autre quantité x. On représente alors le logarithme en base 10 de y en fonction du logarithme en base 10 de x et on obtient la figure ci-dessous. Quelle relation lie y à x ?

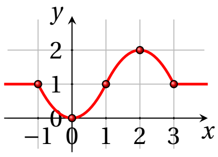


■ $y = 10\sqrt[3]{x^2}$ □ $y = \frac{2}{3}\log_{10}(x)+1$ □ $y = x^{2/3}$

□ $y = \frac{2}{3}x+1$ □ $y = \log_{10}\left(\frac{2}{3}x+1\right)$ □ Autre

Solution : $\log_{10}(y) = A\log_{10}(x)+B$ avec $A = \frac{3-1}{3-0} = \frac{2}{3}$ et $B = 1$. Soit C tel que $B = \log_{10}(C)$, *i.e.* $C = 10^B$, alors$\log_{10}(y) = A\log_{10}(x)+\log_{10}(C) = \log_{10}(Cx^A)$ donc $y = Cx^A = 10^B x^A = 10x^{2/3} = 10\sqrt[3]{x^2}$

Q. [transfeq1] Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la fonction dont le graphe est celui ci-dessous et $g(x) = 1+f(2x+4)$. Quelle valeur de x est solution de l'équation $g(x) = 2x+5$?

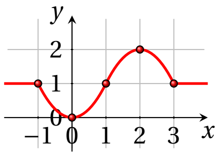


■ $x = -2$ □ $x = 1$ □ $x = 3$

□ $x = 0$ □ $x = 2$ □ $x = 4$

Solution : $g(x) = 2x+5$ ssi $f(2x+4) = 2x+4$. On trace $f(2x+4)$ et on cherche les intersections avec la droite d'équation $y = 2x+4$, ce qui équivaut à chercher t tel que $f(t) = t$. On trouve $t = 0$ ou $t = 1$ ou $t = 2$ ce qui donne respectivement $x = -2$, $x = -\frac{3}{2}$ et $x = -1$.

Q. [transfeq2] Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la fonction dont le graphe est celui ci-dessous et $g(x) = 1+f(2x+4)$. Quelle valeur de x est solution de l'équation $g(x) = 2x+5$?

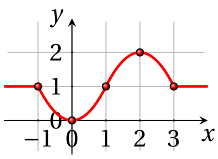


■ $x = -1$ □ $x = 1$ □ $x = 3$

□ $x = 0$ □ $x = 2$ □ $x = 4$

Solution : $g(x) = 2x+5$ ssi $f(2x+4) = 2x+4$. On trace $f(2x+4)$ et on cherche les intersections avec la droite d'équation $y = 2x+4$, ce qui équivaut à chercher t tel que $f(t) = t$. On trouve $t = 0$ ou $t = 1$ ou $t = 2$ ce qui donne respectivement $x = -2$, $x = -\frac{3}{2}$ et $x = -1$.

Q. [transfeq3] Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la fonction dont le graphe est celui ci-dessous et soit g la fonction définie par $g(x) = 1+f(2x+4)$. Quelle valeur de x est solution de l'équation $g(x) = 2x+5$?



■ $x = -\frac{3}{2}$ □ $x = 1$ □ $x = 3$

□ $x = 0$ □ $x = 2$ □ $x = 4$

Solution : $g(x) = 2x+5$ ssi $f(2x+4) = 2x+4$. On trace $f(2x+4)$ et on cherche les intersections avec la droite d'équation $y = 2x+4$, ce qui équivaut à chercher t tel que $f(t) = t$. On trouve $t = 0$ ou $t = 1$ ou $t = 2$ ce qui donne respectivement $x = -2$, $x = -\frac{3}{2}$ et $x = -1$.