**L1 SV — 18 décembre 2019 — CC-2 :** Durée : 1h

- **Une feuille A4 recto-verso manuscrite autorisée, tout autre document et calculatrices interdits.**
- Toutes les questions ont une et une seule bonne réponse. **Des points négatifs seront affectés aux mauvaises réponses.**
- Utiliser un stylo noir ou bleu et bien noircir les cases (ne pas utiliser de crayon!). En cas d'erreur, effacer votre réponse (avec du blanc correcteur/Tipp-Ex/Blanco) et **ne pas redessiner la case**.

| Nom et prénom : ........................................................ | Cochez votre ID (par exemple, si ID=105, on coche 1 sur la première ligne, 0 sur la deuxième et 5 sur la troisième) : |
|---|---|
| Groupe de TD : ........................................ | ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9 |
| Questions avec réponses doublées : .................. | ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9 |
| ........................................................ | ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9 |

**Q.** [instruction] En cas de **non respect des consignes** ci-dessus ou d'erreur dans l'ID : **-1pt**. ■-1 pt

**Q.** [vitesse1] Une vitesse de $50\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ correspond à :

☐ $50\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$ ☐ $500\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$ ■ $180\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$ ☐ $\frac{125}{9}\mathrm{km\cdot h^{-1}}$ ☐ Autre :

***Solution :*** $x\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} = x\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = x \times \frac{\frac{1}{1000}\mathrm{km}}{\frac{1}{60\times 60}\mathrm{h}} = x \times \frac{36}{10}\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = \frac{36x}{10}\mathrm{km\cdot h^{-1}}$

**Q.** [limpol1] $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{x^2-9x+14}{x-7} = ?$

■ 5 ☐ 9 ☐ 14 ☐ 2 ☐ $+\infty$ ☐ $-\infty$ ☐ N'existe pas ☐ Autre

***Solution :*** Si on note $s=9$, $p=14$ et $a=7$ on a

$$\frac{x^2-sx+p}{x-a} = \frac{(x-a)(x-b)}{x-a} = x-b \xrightarrow[x\to a]{} a-b$$

avec $s=a+b$ et $p=ab$ ainsi $b=2$ et $a-b=5$.
Si on n'a pas factorisé, on peut utiliser la règle de l'Hôpital :

$$\lim_{x\to a}\frac{x^2-sx+p}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{2x-s}{1} = 2a-s = 2a-(a+b) = a-b$$

**Q.** [limrac1] $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+4x-6}-\sqrt{x^2+8x} = ?$

■ $-2$ ☐ 2 ☐ 8 ☐ 6 ☐ $-4$ ☐ $+\infty$ ☐ $-\infty$ ☐ Autre

***Solution :*** On a

$$\sqrt{x^2+Ax-B}-\sqrt{x^2+Cx} = \frac{(x^2+Ax-B)-(x^2+Cx)}{\sqrt{x^2+Ax-B}+\sqrt{x^2+Cx}} = \frac{(A-C)x-B}{|x|\left(\sqrt{1+\frac{A}{x}-\frac{B}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{C}{x}}\right)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{A-C}{2}$$

**Q.** [limcoeur1] $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin^2(6x)}{1-\cos(x)} = ?$

■ 72 □ 6 □ −6 □ 2 □ $-\frac{1}{2}$ □ $+\infty$ □ $-\infty$ □ Autre

***Solution :*** On a

$$\frac{\sin^2(Kx)}{1-\cos(x)} = \left(\frac{\sin(Kx)}{Kx}\right)^2 K^2 \frac{x^2}{1-\cos(x)} \xrightarrow[x\to 0]{} 1 \times K^2 \times \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2K^2$$

Sinon, on peut utiliser la règle de l'Hôpital :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(Kx)}{1-\cos(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2K\sin(Kx)\cos(Kx)}{\sin(x)} = \lim_{x\to 0} 2K \frac{K\cos^2(Kx) - K\sin^2(Kx)}{\cos(x)} = 2K^2$$

**Q.** [asymptotesHoriz] La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{10x+29}{39x-42}$ a pour asymptote en $-\infty$ la droite d'équation

■ $y = \dfrac{10}{39}$ □ $y = \dfrac{5}{21}$ □ $y = \dfrac{29}{42}$ □ $y = \dfrac{29}{39}$ □ $y = \dfrac{14}{13}$ □ Autre :

***Solution :*** $\lim_{x\to -\infty} \frac{ax+b}{cx+d} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{[H]}{=} \dfrac{a}{c}$

**Q.** [asymptoteVert] La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{6x+26}{30x-46}$ a pour asymptote verticale la droite d'équation

■ $x = \dfrac{23}{15}$ □ $x = \dfrac{3}{23}$ □ $x = \dfrac{13}{23}$ □ $x = \dfrac{13}{15}$ □ $x = \dfrac{1}{5}$ □ Autre :

***Solution :*** La fonction $f(x) = \frac{ax+b}{cx-d}$ n'est pas définie si $x = \frac{d}{c}$ et $\lim_{x\to \frac{d}{c}} \frac{ax+b}{cx-d} = \pm\infty$

**Q.** [asymptoteOblique] La fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 3x}$ a pour asymptote en $+\infty$ la droite d'équation

■ $y = 2x - \frac{3}{2}$ □ $y = 2x + \frac{3}{2}$ □ $y = 2x - 3$ □ $y = 2x + 3$ □ Autre :

***Solution :*** La droite d'équation $y = mx + q$ est asymptote en $+\infty$ si

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m \neq 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) - mx = q.$$

La fonction donnée est de la forme $x \mapsto f(x) = x + \sqrt{x^2 + \alpha x}$. On a

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x + \sqrt{x^2 + \alpha x} == \lim_{x\to+\infty} x\left(1 + \sqrt{1 + \frac{\alpha}{x}}\right) = +\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} 1 + \sqrt{1 + \frac{\alpha}{x}} = 2,$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - 2x = \lim_{x\to+\infty} x + \sqrt{x^2 + \alpha x} - 2x = \lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{1 + \frac{\alpha}{x}} - 1\right) = \lim_{x\to+\infty} x \frac{\frac{\alpha}{x}}{\sqrt{1 + \frac{\alpha}{x}} + 1} = \frac{\alpha}{2}$$

**Q.** [deriveeSigne1] On considère la fonction $f(x) = x(x-8)(x+8)$. Sur l'intervalle $]0,8[$, la fonction $f$ est

□ croissante puis décroissante □ décroissante □ croissante ■ décroissante puis croissante

***Solution :*** $f(x) = x(x-A)(x+A) = x(x^2 - A^2) = x^3 - A^2x$ avec $A = 8$ donc $f'(x) = 3x^2 - A^2 = (\sqrt{3}x - A)(\sqrt{3}x + A) > 0$ ssi $x < -A/\sqrt{3}$ ou $x > A/\sqrt{3}$. Sur l'intervalle $]0;A[$ la dérivée $f'$ est d'abord négative puis positive ainsi $f$ est d'abord décroissante puis croissante.

**Q.** [deriveeSigne2] On considère la fonction $f(x) = x(x-28)(x+28)$. Sur l'intervalle $]-28,0[$, la fonction $f$ est

■ croissante puis décroissante □ décroissante □ croissante □ décroissante puis croissante

***Solution :*** $f(x) = x(x-A)(x+A) = x(x^2 - A^2) = x^3 - A^2x$ avec $A = 28$ donc $f'(x) = 3x^2 - A^2 = (\sqrt{3}x - A)(\sqrt{3}x + A) > 0$ ssi $x < -A/\sqrt{3}$ ou $x > A/\sqrt{3}$. Sur l'intervalle $]-A;0[$ la dérivée $f'$ est d'abord positive puis négative ainsi $f$ est d'abord croissante puis décroissante.

**Q.** [deriveeSigneB1] On considère la fonction $f(x) = x(x-18)(x+18)$. Sur l'intervalle $]0,18[$, la fonction $f$ est

□ convexe puis concave □ concave puis convexe □ concave ■ convexe

***Solution :*** $f(x) = x(x-A)(x+A) = x(x^2 - A^2) = x^3 - A^2x$ avec $A = 18$ donc $f'(x) = 3x^2 - A^2$ et $f''(x) = 6x$. Sur l'intervalle $]0;A[$ la dérivée $f''$ est positive ainsi $f$ est convexe.

**Q.** [deriveeSigneB2] On considère la fonction $f(x) = x(x-17)(x+17)$. Sur l'intervalle $]-17,0[$, la fonction $f$ est

□ convexe puis concave □ concave puis convexe ■ concave □ convexe

***Solution :*** $f(x) = x(x-A)(x+A) = x(x^2 - A^2) = x^3 - A^2x$ avec $A = 17$ donc $f'(x) = 3x^2 - A^2$ et $f''(x) = 6x$. Sur l'intervalle $]-A;0[$ la dérivée $f''$ est négative ainsi $f$ est concave.

**Q.** [compln] Calculer $f'(x)$ si $f(x) = \ln(61 - e^{51x})$.

■ $\dfrac{51e^{51x}}{e^{51x}-61}$ ☐ $\dfrac{1}{e^{51x}-61}$ ☐ $\dfrac{51e^{50x}}{e^{51x}-61}$ ☐ $\dfrac{50e^{50x}}{e^{51x}-61}$ ☐ $\dfrac{51}{e^{51x}-61}$ ☐ Autre

***Solution :*** Si $f(x) = \ln(\beta - e^{\alpha x})$ alors $f'(x) = \dfrac{-\alpha e^{\alpha x}}{\beta - e^{\alpha x}} = \dfrac{\alpha e^{\alpha x}}{e^{\alpha x} - \beta}$

**Q.** [tgLN] Soit $y = t(x)$ l'équation de la droite tangente au graphe de $f(x) = \ln(x)$ en $x = 1$. Que vaut $t(0)$ ?

■ $-1$ ☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ N'est pas définie ☐ Autre réponse :

***Solution :*** $f'(x) = \frac{1}{x}$ donc $t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = \frac{1}{1}(x-1) + 0 = x - 1$ et $t(0) = -1$

**Q.** [tgLN2] Soit $y = t(x)$ l'équation de la droite tangente au graphe de $f(x) = \ln(x)$ en $x = 1$. Que vaut $t(-1)$ ?

■ $-2$ ☐ 0 ☐ 1 ☐ $-1$ ☐ N'est pas définie ☐ Autre réponse :

***Solution :*** $f'(x) = \frac{1}{x}$ donc $t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = \frac{1}{1}(x-1) + 0 = x - 1$ et $t(-1) = -2$

**Q.** [tgEXP] Soit $y = t(x)$ l'équation de la droite tangente au graphe de $f(x) = e^x$ en $x = 0$. Que vaut $t(1)$ ?

☐ 1 ☐ 0 ☐ $-1$ ■ 2 ☐ N'est pas définie ☐ Autre réponse :

***Solution :*** $f'(x) = e^x$ donc $t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = e^0(x-0) + e^0 = x + 1$ et $t(1) = 2$

**Q.** [tgEXP2] Soit $y = t(x)$ l'équation de la droite tangente au graphe de $f(x) = e^x$ en $x = 0$. Que vaut $t(-1)$ ?

☐ $-1$ ■ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ N'est pas définie ☐ Autre réponse :

***Solution :*** $f'(x) = e^x$ donc $t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = e^0(x-0) + e^0 = x + 1$ et $t(-1) = 0$

**Q.** [tgSIN] Soit $y = t(x)$ l'équation de la droite tangente au graphe de $f(x) = \sin(x)$ en $x = \pi$. Que vaut $t(2\pi)$ ?

■ $-\pi$ ☐ 0 ☐ $\pi$ ☐ $2\pi$ ☐ N'est pas définie ☐ Autre réponse :

***Solution :*** $f'(x) = \cos(x)$ donc $t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = -(x - \pi) + 0 = -x + \pi$ et $t(2\pi) = -\pi$

**Q.** [tgSINbis] Soit $y = t(x)$ l'équation de la droite tangente au graphe de $f(x) = \sin(x)$ en $x = \pi$. Que vaut $t(-\pi)$ ?

■ $2\pi$ ☐ 0 ☐ $\pi$ ☐ $-\pi$ ☐ N'est pas définie ☐ Autre réponse :

***Solution :*** $f'(x) = \cos(x)$ donc $t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = -(x - \pi) + 0 = -x + \pi$ et $t(-\pi) = 2\pi$

**Q.** [tgCOS] Soit $y = t(x)$ l'équation de la droite tangente au graphe de $f(x) = \cos(x)$ en $x = \dfrac{\pi}{2}$. Que vaut $t(\pi)$ ?

■ $-\frac{\pi}{2}$ ☐ 0 ☐ $\frac{\pi}{2}$ ☐ $\pi$ ☐ N'est pas définie ☐ Autre réponse :

***Solution :*** $f'(x) = -\sin(x)$ donc $t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = -\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 0 = -x + \frac{\pi}{2}$ et $t(\pi) = -\frac{\pi}{2}$

**Q.** [modelisation] Une bille, placée dans un liquide dont la température $T_\ell$ est supposée constante, a une température $T$ qui évolue au cours du temps de la façon suivante : *la vitesse de variation de la température est proportionnelle à la différence de température entre la bille et le liquide; de plus, si $T(t) > T_\ell$ alors $T$ est décroissante, si $T(t) < T_\ell$ alors $T$ est croissante*. Comment peut-on exprimer les variations de $T$ en fonction du temps $t$ ?

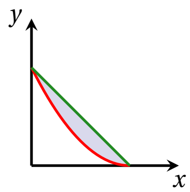
- ■ $T'(t) = -\kappa(T(t) - T_\ell), \quad \kappa > 0$
- □ $T'(t) = -\kappa(T(t) - T_\ell)t, \quad \kappa > 0$
- □ $T'(t) = -(T(t) - T_\ell)t + \kappa, \quad \kappa \in \mathbb{R}$
- □ $T'(t) = -(T(t) - T_\ell) + \kappa, \quad \kappa > 0$
- □ $T'(t) = -\kappa(T(t) - T_\ell), \quad \kappa \in \mathbb{R}$
- □ Autre

**Q.** [integrales3] Si $\displaystyle\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x = 3$ que vaut $\displaystyle\int_0^4 \big(3 - f(x)\big)\,\mathrm{d}x$ ?

□ 21 □ 15 □ 0 □ 6 ■ 9 □ Aucune de ces réponses n'est correcte

***Solution :*** $\int_0^4 \big(3 - f(x)\big)\,\mathrm{d}x = [3x]_0^4 - \int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x = 3 \times 4 - 3 = 9$

**Q.** [areaPAR1]




Calculer la surface de la région plane coloriée dans la figure ci-contre. Les deux courbes ont pour équation $y = (x-2)^2$ et $y = 2(2-x)$.

■ $\frac{4}{3}$ □ $\frac{2}{3}$ □ $\frac{1}{3}$ □ $\frac{8}{3}$ □ 0 □ Autre

***Solution :*** Posons $\gamma = 2$. Les deux courbes s'intersectent en $(0, \gamma^2)$ et $(\gamma, 0)$ et on a

$$\int_0^\gamma \gamma(\gamma - x) - (x-\gamma)^2\,\mathrm{d}x = \int_0^\gamma \gamma x - x^2\,\mathrm{d}x = \left[\gamma\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^\gamma = \frac{\gamma^3}{2} - \frac{\gamma^3}{3} = \frac{\gamma^3}{6}$$

**Q.** [acceleration1] Une particule a une accélération de $a(t) = 6t$. Si, à l'instant $t = 1$, sa vitesse est $v(1) = 3$ et la distance parcourue depuis le point initial est $s(1) = 16$, quelle distance aura-t-elle parcourue à l'instant $t = 2$ ?

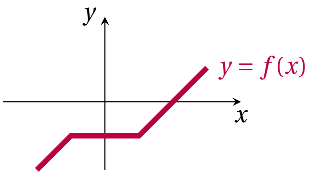
■ 23 □ 19 □ 12 □ $-16$ □ 32 □ $-32$ □ Autre réponse

***Solution :***

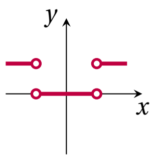
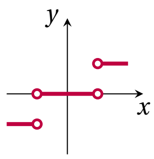
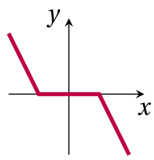
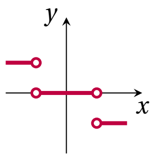
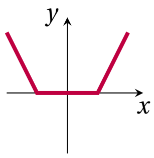
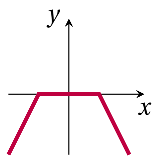
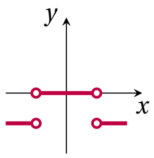
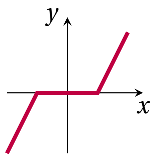
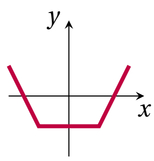
$$\begin{cases} v'(t) = a(t) \\ v(1) = A \end{cases} \implies v(t) = 3t^2 + (A-3)$$

$$\begin{cases} s'(t) = v(t) \\ s(1) = B \end{cases} \implies s(t) = t^3 + (A-3)t + (B+2-A) \implies s(2) = 8 + 2A - 6 + B + 2 - A = 4 + A + B$$

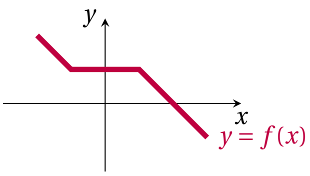
**Q.** [deriveedessin1]
Dans la figure ci-dessous on a tracé le graphe d'une fonction $f$ affine par morceaux.



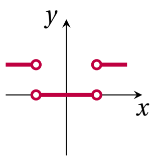
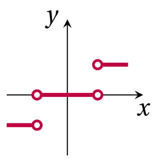
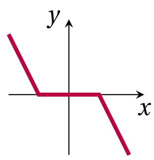
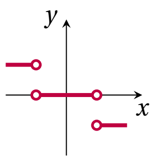
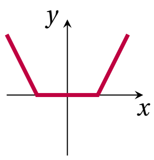
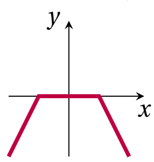
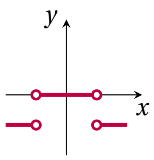
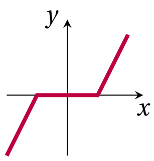
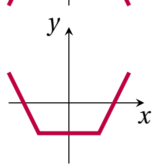

Parmi les graphes ci-contre, lequel pourrait être celui de sa dérivée ?

■ 
☐ 
☐ 
☐ 
☐ 
☐ 
☐ 
☐ 
☐ 

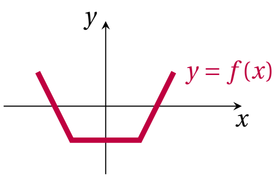
**Q.** [deriveedessin2]
Dans la figure ci-dessous on a tracé le graphe d'une fonction $f$ affine par morceaux.



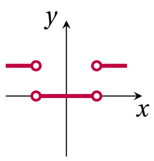
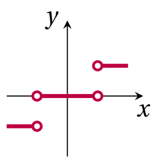
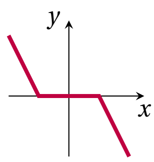
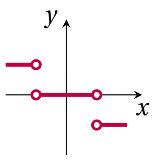
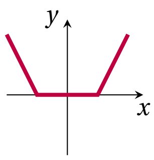
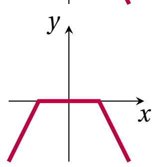
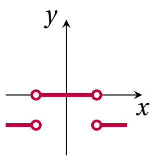
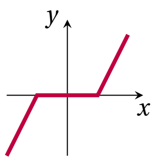
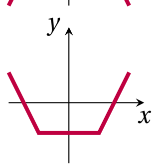

Parmi les graphes ci-contre, lequel pourrait être celui de sa dérivée ?

☐ 
☐ 
☐ 
☐ 
☐ 
☐ 
■ 
☐ 
☐ 

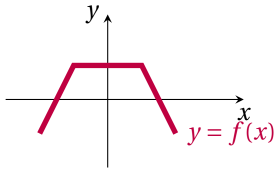
**Q.** [deriveedessin3]
Dans la figure ci-dessous on a tracé le graphe d'une fonction $f$ affine par morceaux.



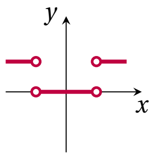
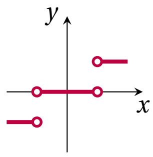
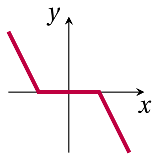
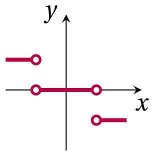
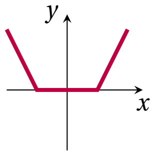
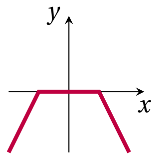
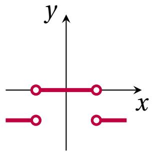
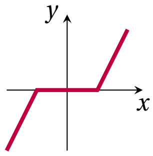

Parmi les graphes ci-contre, lequel pourrait être celui de sa dérivée ?

☐ 
■ 
☐ 
☐ 
☐ 
☐ 
☐ 
☐ 
☐ 

**Q.** [`deriveedessin4`]
Dans la figure ci-dessous on a tracé le graphe d'une fonction $f$ affine par morceaux.




Parmi les graphes ci-contre, lequel pourrait être celui de sa dérivée ?

- [ ] 
- [ ] 
- [ ] 
- [x] 
- [ ] 
- [ ] 
- [ ] 
- [ ] 
- [ ]