TD N°2

Ex 7

$$Re(S) = Re(1 + e^{i\theta} + e^{2i\theta} + \dots + e^{in\theta})$$

$$= Re(1) + Re(e^{i\theta}) + Re(e^{2i\theta}) + \dots + Re(e^{in\theta})$$

$$Re(S) = 1 + \cos\theta + \cos(2\theta) + \dots + \cos(n\theta) = C.$$

$$1 + e^{i\theta} + e^{2i\theta} + \dots + e^{in\theta} = 1 + e^{i\theta} + (e^{i\theta})^2 + \dots + (e^{i\theta})^n$$

$$S = \frac{1-(e^{i\theta})^{n+1}}{1-e^{i\theta}} \quad ; \text{ si } e^{i\theta} \neq 1 \text{ si } \theta \neq 0.$$

$\underline{\underline{\theta \neq 0}}$ $\quad S = \dfrac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}$; on cherche sa partie réelle.

$$= \frac{e^{i\frac{(n+1)\theta}{2}}}{e^{i\theta/2}} \times \frac{\left(e^{-i\frac{(n+1)\theta}{2}} - e^{i\frac{(n+1)\theta}{2}}\right)}{\left(e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2}\right)}$$

$$= e^{i\frac{n\theta}{2}} \frac{-2i \sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{-2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

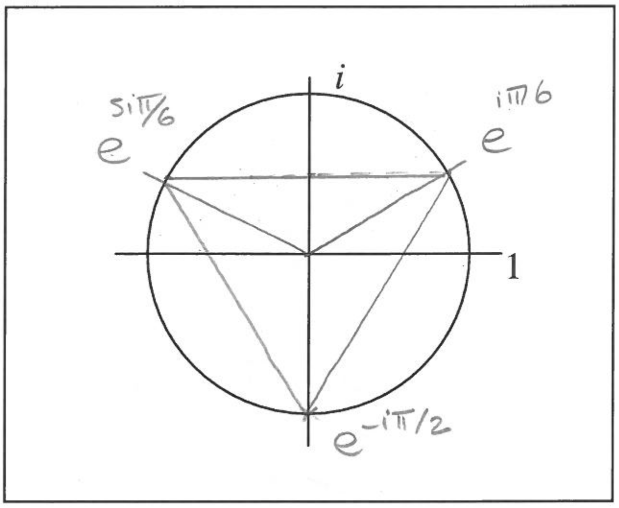
$$S = e^{i\frac{n\theta}{2}} \times \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

Donc $C = Re(S) = \cos\left(\frac{n\theta}{2}\right) \times \dfrac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$ si $\theta \neq 0$

Si $\theta = 0$, alors $C = \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{(n+1)\text{ fois}} = n+1.$

Annales du concours d'entrée à l'ITII

(a) Placer sur la figure ci-dessous les solutions de l'équation $z^3 = i$:



(b) Soit S l'ensemble des solutions de l'équation $z^3 = i$. Calculer les valeurs possibles de la fonction *f(z)* ci dessous lorsque z parcourt S, puis calculer la somme de ces valeurs :

$$f(z) = \frac{1+z+z^2+z^3+z^4+z^5}{1-\bar{z}} \qquad (z \neq 1)$$

$z \in S \Rightarrow f(z) = 2(2+\sqrt{3})\ ;\ 2(2-\sqrt{3})\ ;\ 1$ voir détails ci-après

$$\sum_{z \in S} f(z) = 5$$

(c) On considère l'équation : $\left(\dfrac{z}{\bar{z}}\right)^n - \left(\dfrac{\bar{z}}{z}\right)^n = i\sqrt{2}$, $(|z| \neq 0)$,

et on note S^* l'ensemble de ses solutions.

$$z \in S^* \Rightarrow \begin{cases} \textit{Le module de } z \textit{ est de la forme } \rho = \rho \in \mathbb{R}_+ \\ \textit{L'argument de } z \textit{ est de la forme } \theta = \dfrac{\pi}{8n} + \dfrac{k\pi}{n}\ ;\ k \in [\![0\,;2n-1]\!] \end{cases}$$

Pour $n=2$ tracer sur la figure ci dessus les éléments de S^* tels que $|z| \leq 1$.

_TD 2_

$*\quad z^3 = i \iff z^3 = e^{i\pi/2}$

$$\iff r^3 e^{3i\theta} = e^{i\pi/2} \;;\; r>0$$

$$\iff \begin{cases} r^3 = 1 \\ 3\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \;;\; k\in\mathbb{Z} \end{cases} \iff \begin{cases} r = 1 \\ \theta = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi \end{cases}$$

$$z_k = e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi\right)} \;;\; k\in\mathbb{Z}.$$

Les racines cubiques de i sont donc :

$$e^{i\pi/6} \;;\; e^{-i\pi/2} \;;\; e^{\frac{5i\pi}{6}}$$

$*\quad z\in S \iff z^3 = i$ donc $z^4 = zz^3 = iz$ et $z^5 = z^2 z^3 = iz^2$

$$f(z) = \frac{1+z+z^2+i+iz+iz^2}{1-\bar{z}} \times \frac{1-z}{1-z}$$

$$= \frac{(1+z+z^2)(1+i)(1-z)}{1-(z+\bar{z}) + \underbrace{\bar{z}z}_{=1}}$$

$$= \frac{(1+i)(1+\cancel{z}+\cancel{z^2}-\cancel{z}^{1}-\cancel{z^2}-z^3)}{2-2\,\mathrm{Re}(z)}$$

$$= \frac{(1+i)(1-i)}{2-2\,\mathrm{Re}(z)}$$

$$= \frac{2}{2-2\,\mathrm{Re}(z)}$$

$$f(z) = \frac{1}{1-\mathrm{Re}(z)}$$

si $z = e^{i\pi/6}$ alors $f(z) = \dfrac{1}{1-\sqrt{3}/2} = \dfrac{2}{2-\sqrt{3}} \times \dfrac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = 2(2+\sqrt{3})$

si $z = e^{5i\pi/6}$ alors $f(z) = \dfrac{1}{1+\sqrt{3}/2} = \dfrac{2}{2+\sqrt{3}} \times \dfrac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = 2(2-\sqrt{3})$

si $z = e^{-i\pi/2}$ alors $f(z) = 1$.

$$\sum_{z\in S} f(z) = 1 + 2(2+\sqrt{3}) + 2(2-\sqrt{3}) = 5$$

$$\left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^n - \left(\frac{\bar{z}}{z}\right)^n = i\sqrt{2}. \qquad |z| \neq 0$$

$$z = \rho e^{i\theta}$$

$$\left(\frac{\rho e^{i\theta}}{\rho e^{-i\theta}}\right)^n - \left(\frac{\rho e^{-i\theta}}{\rho e^{i\theta}}\right)^n = i\sqrt{2}$$

$$e^{2in\theta} - e^{-2in\theta} = i\sqrt{2}$$

$$2i\sin(2n\theta) = i\sqrt{2}$$

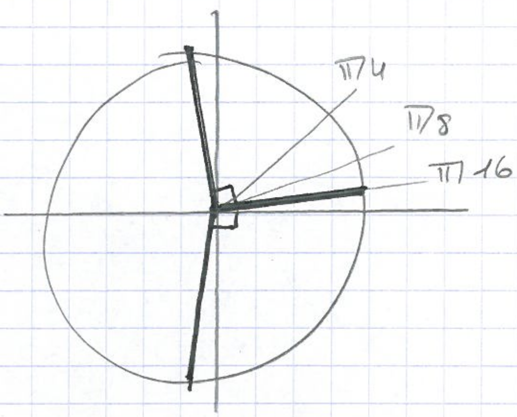
$$\sin(2n\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \iff 2n\theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \,;\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\iff \theta = \frac{\pi}{8n} + \frac{k\pi}{n} \,;\ k \in \mathbb{Z}.$$

$\rightarrow \rho \in \mathbb{R}_+$

$\rightarrow \theta = \frac{\pi}{8n} + \frac{k\pi}{n}$ avec $\begin{cases} k \in \mathbb{Z} \\ 0 \leq k \leq 2n-1 \text{ par exemple} \end{cases}$

Pour $n = 2$, $\begin{cases} \rho \in \mathbb{R}_+ \\ \theta = \frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{2} \,; \quad \text{avec } k = 0 ; 1 ; 2 \end{cases}$



$\begin{cases} z \in S^* \\ |z| \leq 1 \end{cases}$